

Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 519.62/.64

На правах рукописи

**ОРАЛБЕКОВА ЖАНАР ОРЫМБАЕВНА**

**Эффективные оптимизационные методы решения обратных задач для  
горизонтально-слоистых сред**

6D060100 – “Математика”

Диссертация на соискание ученой степени доктора философии (PhD)

Отечественный научный консультант:  
Доктор физико-математических наук,  
профессор Искаков К.Т.  
Зарубежный научный консультант:  
Доктор естественных наук,  
профессор Wang Yanfei  
(Институт геологии и геофизики  
Китайской Академии наук, г.Пекин, КНР)

Республика Казахстан  
Алматы, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	<b>3</b>
<b>1 ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ</b>	<b>15</b>
1.1 Постановка обратной задачи для уравнения геоэлектрики	15
1.2 Оптимизационный метод решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики	20
1.3 Условная устойчивость решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики	34
1.4 Оптимизационный метод решения обратной задачи в квазистационарном приближении	44
<b>2 ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ</b>	<b>51</b>
2.1 Постановка обратной задачи в частотной области	51
2.2 Алгоритм метода послойного пересчета по определению геоэлектрического разреза в горизонтально-слоистой среде (в частотной области)	53
2.3 Дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва среды в обратной задаче геоэлектрики	56
<b>3 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b>	<b>60</b>
3.1 Постановка обратной задачи для уравнения теории упругости (в смещениях)	60
3.2 Доказательство существования производной функционала невязки для системы дифференциальных уравнений теории упругости	62
<b>4 ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ОПТИМИЗАЦИОННОМ МЕТОДЕ</b>	<b>71</b>
4.1 Консервативные разностные схемы решения прямой и сопряженной задачи	71
4.2 Согласованно-разностная схема решения прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики	78
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b>	<b>88</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b>	<b>89</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А</b>	<b>96</b>
Анализ численных расчетов свойств алгоритма оптимизационного метода	96
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В</b>	<b>106</b>
Экспериментальные исследования с применением георадара в задачах идентификации подповерхностных покрытий	106

## ВВЕДЕНИЕ

**Общая характеристика работы.** Диссертационная работа посвящена разработке и теоретическим исследованиям методов решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики и теории упругости. Рассматриваются математические модели распространения электромагнитных волн в горизонтально-слоистой среде во временной и частотной области и распространение упругих волн для горизонтально-слоистых сред в частотной области. Разработаны и исследованы оптимизационные методы решения рассматриваемых обратных задач. Для полученных алгоритмов проведены серии численных расчетов, показывающих их эффективность.

Приведены инженерно-технические методы интерпретации геофизических свойств слоистых сред на основе анализа радарограмм. Для этого проведены экспериментальные исследования по диагностике взлетно-посадочной полосы коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области РК, с использованием георадара (GPR).

**Актуальность темы.** Задача по исследованию электромагнитного поля в слоистой среде (прямая задача) рассмотрена впервые в работе Зоммерфельда (1909г.). Он рассмотрел поле диполя, расположенного на поверхности однородного полупространства. Особый вклад в развитие электромагнитных методов изучения строения Земли внес академик АН СССР А.Н.Тихонов [1]. Он в своих работах дал математическое обоснование теории электромагнитных зондирований (единственность решения, устойчивость обратных задач электроразведки).

С развитием компьютерной техники возникла потребность к созданию алгоритмов, для численных расчетов решения прямых и обратных задач электродинамики. Приведем краткий обзор по этому направлению. А.Н.Тихонов в работе [2], впервые разработал алгоритм расчета поля горизонтального электрического диполя, расположенного на поверхности произвольного  $n$ -слойного проводящего полупространства. Далее этот метод был использован в работах В.И.Дмитриева [3-4], Л.А.Ваньяна [5]. В 1967г. Метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде был обобщен на случай градиентных сред и произвольного источника В.И.Дмитриевым [3, с. 55-65; 6-7].

Динамические обратные задачи для гиперболических уравнений были сформулированы и исследованы М.М.Лаврентьевым [8-10].

В монографии В.Г.Романова [11], разработан общий подход к исследованию динамических обратных задач для полной системы уравнений Максвелла. Обратные задачи для уравнения электродинамики изложены в работе В.Г.Романова, С.И.Кабанихина, Т.П.Пухначевой [12]. Вопросам касающиеся численной реализации решения прямых и обратных задач и их теоретическим обоснованиям посвящена монография С.И.Кабанихина [13]. Обзор исследований по обратным задачам геоэлектрики (теоремы существования и единственности, численные методы решения) рассмотрен в

работе В.Г.Романова, С.И.Кабанихина [14]. Теоретическим исследованиям проекционно-разностного метода решения обратных задач электродинамики с результатами численных расчетов посвящены работы В.Г.Романова, С.И.Кабанихина, К.А.Абдиева [15], С.И.Кабанихина, С.В.Мартакова [16].

Распространенным методом численного решения обратных задач геофизики, сейсмологии, электроразведки, акустики, тепло-массопереноса и других обратных задач для гиперболических и параболических уравнений является оптимизационный.

Идея использования оптимизационного метода были предложены А.Н.Тихоновым [17-20], В.К.Ивановым [21], Г.И.Марчуком [22], А.С.Алексеевым [23-24] и развиты в дальнейшем многими их учениками и последователями.

Оптимизационный метод для решения обратных коэффициентных задач сейсмологии, предложен в работе A.Vamberger, G.Chavent, P.Lailly [25]. Они разработали устойчивый алгоритм для решения одномерной обратной задачи сейсмологии, основанный на итеративной процедуре разностей данных (подгонка модели по методу наименьших квадратов). G.Chavent, M.Duru, P. Lemonnier [26] применили оптимизационный метод к задаче определения распределения магнитной проницаемости. В работе F.Santosa, W.W.Symes, G. Raggio [27] разработали алгоритм определения акустического импеданса слоистой среды по отраженным сейсмограммам.

Оптимизационный метод применен в работе В.И.Дмитриева, Э.А.Федоровой [4, с. 150-183], для решения обратной задачи частотного зондирования в слоистых средах. Математическое моделирование процессов распространения волн в вертикально-неоднородных средах, изложен в работе А.С.Алексеева, А.В.Авдеева, А.Г.Фатьянова, В.А.Чеверды [28]. Численному решению обратных задач геоэлектрики в слоистых и вертикально-неоднородных средах, оптимизационным методом, а также теоретическому обоснованию полученных результатов посвящена работа К.Т.Искакова, С.И.Кабанихина [29].

В задачах интерпретации геофизических данных необходимо определить: электромагнитные или упругие параметры, и координаты точек разрыва слоев. В геофизике существует достаточное количество способов для нахождения этих границ, но во всех этих способах присутствуют ошибки и они могут достигать нескольких метров [30]. К примеру ошибка при определении глубины залегания границ в скважине возникает и за растяжения каната прикрепленному зонду.

В связи с этим для применения оптимизационного метода по определению границ разрывов, необходимо уметь дифференцировать функционал невязки по координате точки разрыва среды. В диссертационной работе доказано существование такой производной и получено её аналитическое выражение для уравнений теории упругости [31].

Для решения обратных задач в слоистых средах широко используется метод послонного пересчета [32-34].

Одним из первых алгоритмов послойного пересчета для решения дифференциального уравнения второго порядка для горизонтально-слоистой однородной среды был предложен в работе А.Н.Тихонова и Д.Н.Шахсуварова [35]. Он имел недостаток, так как в численном алгоритме присутствовали выражения, с экспонентами, с положительными действительными частями, которые приводили к накоплению ошибок при послойном пересчете. Метод предложенный В.И.Дмитриевым [3, с. 55-65] свободен от этого недостатка. Идея метода послойного пересчета была развита следующим образом. Рассматриваемое дифференциальное уравнение с помощью специальной замены функций сводится к дифференциальному уравнению Риккати. В случае слоистых сред, когда коэффициенты дифференциального уравнения Риккати являются постоянными, то можно решения получить в аналитическом виде.

Метод послойного пересчета имеет и другое название метод «прогонки», и описан в работе И.М.Гельфанда и О.В.Локуциевского [36].

Метод В.И.Дмитриева [4, с. 150-183] нашел развитие далее и для других задач электродинамики. Для задач теории упругости этот метод был применен в работах Г.В.Аккуратова и В.И.Дмитриева [37] для получения следа решения системы дифференциальных уравнений теории упругости на поверхности  $z = 0$ . Ими рассмотрена система дифференциальных уравнений теории упругости для продольных и поперечных смещений для горизонтально-слоистой изотропной среды.

Свое применение для системы дифференциальных уравнений теории упругости изотропной среды с поглощением, алгоритм послойного пересчета получил в работах А.Г.Фатьянова и Б.Г.Михайленко [38]. В серии работ А.Л.Карчевского [39-40] представлен алгоритм для решения системы дифференциальных уравнений теории упругости, а в [41] эта методика использована для уравнений Максвелла в горизонтально-слоистых сред любого вида анизотропии. В дальнейшем метод получил развитие в работе А.Л.Карчевского и его соавторов для обратной задачи геоэлектрики в случае горизонтально-слоистых сред [42].

В монографии О.М.Алифанова, Е.А.Артюхина, С.В.Румянцева [43], изложен класс линейных и нелинейных обратных задач теплообмена и методы численного решения этих задач на основе минимизации соответствующих функционалов различными градиентными методами. Применение оптимизационного метода для различных задач и ее применение к исследованию обратных задач, изучены в работах Ф.П.Васильева [44-45], В.В.Васина [46], А.Д.Искендерова, Р.К.Тагиева [47].

В нашей республике вклад в этом направлении внесли работы У.М.Султангазина [48], С.И.Темирбулатова [49], А.Т.Лукьянова, С.Я.Серовайского [50], Н.Т. Данаева [51], Т.Ш. Кальменова [52], М.Отельбаева [53-54], Рысбайулы Б. [55-58], Акжаловой А.Ж. [59-60], а также их учеников и последователей.

Поэтому разработка и исследования эффективных алгоритмов оптимизационного метода решения обратных коэффициентных задач для уравнений гиперболического и параболического типа является, актуальной.

**Цель и задачи исследования.** Целью диссертационной работы является разработка и теоретические исследования эффективных методов решения обратных задач для уравнений геоэлектрики, теории упругости в горизонтально-слоистых средах.

В диссертационной работе для достижения поставленной цели автором решались следующие задачи:

- вывод формул вычисления градиента функционала для решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики во временной области (с учетом влияния воздуха).

- получить оценку условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики;

- вывод формулы вычисления градиента функционала и доказать её дифференцируемость по координатам точек разрыва для уравнений геоэлектрики и теории упругости;

- разработать алгоритм одновременного определения коэффициента и координат точек разрыва для уравнения геоэлектрики на основе метода послойного пересчёта;

- доказать согласованность разностного алгоритма сопряженной задачи к исходной в дискретной обратной коэффициентной задачи для уравнения геоэлектрики (в случае временной области);

- определить критерии выбора частотной области на основе численного решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики методом послойного пересчета;

- провести численные расчеты решения обратных задач геоэлектрики во временной области с использованием согласованных разностных алгоритмов;

- привести инженерно-технические приемы по интерпретации радарограмм на основе серии экспериментальных исследований с применением прибора «Георадар «Лоза В» и разработать рекомендации к результатам экспериментальных исследований.

**Объектами исследования** являются изучение условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики. Разработка эффективных алгоритмов для численного решения прямой и сопряженной задачи для уравнения геоэлектрики во временной и частотной области и теории упругости в частотной области, определение критерия выбора частоты. Изучение дифференцируемости функционала невязки по координате точки разрыва в обратной задаче для уравнения геоэлектрики и теории упругости.

Вывод формул вычисления градиента функционала для решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики (с учетом влияния воздуха).

Разработка согласованно-сопряженных схем для дискретных обратных задач уравнения геоэлектрики.

Экспериментальные исследования по зондированию подповерхностных покрытий (аэродрома) с использованием прибора «Георадар - Лоза В».

**Предметами исследования** являются обратные коэффициентные задачи для уравнения геоэлектрики и теории упругости в горизонтально-слоистых средах.

**Методика исследования.** Рассматриваются прямые и обратные задачи для системы уравнений Максвелла. При специальном выборе источника возмущения и при предположении, что коэффициенты  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость,  $\sigma$  - проводимость среды зависят от глубины, исходная система уравнений Максвелла сводится к двумерному уравнению геоэлектрики.

Рассматриваются два случая, в первом случае – уравнение геоэлектрики во временной области. Для этой задачи построен оптимизационный метод решения обратных коэффициентных задач на дифференциальном уровне. Разработаны согласовано-сопряженные разностные схемы решения прямой и соответствующей ей сопряженных задач. На основе теории интегральных уравнений Вольтерра, для обратной задачи записанной в интегральной постановке изучена условная устойчивость решения обратной задачи.

Во втором случае рассматривается обратная задача для уравнения геоэлектрики в частотной области. Эта задача возникает в случае применения преобразования Лапласа к двумерному уравнению геоэлектрики. Для решения прямой задачи в случае горизонтально-слоистых сред используется метод послойного пересчета, в частности решение уравнения Риккати. Этот подход является эффективным и экономичным (по числу итераций) для решения обратной задачи оптимизационным методом. Получено явное выражение для градиента функционала и показана её дифференцируемость.

Рассматривается обратная коэффициентная задача для системы дифференциальных уравнений теории упругости в случае горизонтально-слоистых сред. Используя преобразования Лапласа по временной переменной и преобразование Фурье по пространственной переменной исходная задача сведена к матричному уравнению Риккати. Исследован функционал невязки на дифференцируемость по координатам точки разрыва по аналогии как для уравнения геоэлектрики.

**Научная новизна** результатов состоит в следующем:

- получены формулы вычисления градиента функционала для решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики (с учетом влияния воздуха);
- получена оценка условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики, сформулированной в интегральной постановке;
- получена формула вычисления градиента функционала и доказана её дифференцируемость по координате точки разрыва среды для уравнения геоэлектрики;
- доказана дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва среды для системы дифференциальных уравнений теории упругости для смещения;

- получен алгоритм одновременного определения коэффициента и координат точек разрыва для уравнения геоэлектрики на основе метода послойного пересчёта;

- доказана согласованность разностного алгоритма сопряженной задачи к исходной в дискретной обратной коэффициентной задачи для уравнения геоэлектрики (в случае временной области);

- определен критерии выбора частотной области на основе численного решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики методом послойного пересчета;

- проведены численные расчеты решения обратных задач геоэлектрики во временной области с использованием согласованных разностных алгоритмов;

- приведены инженерно-технические приемы по интерпретации радарограмм на основе серии экспериментальных исследований с применением прибора «Георадар «Лоза В».

#### **Положения, выносимые на защиту**

- формулы вычисления градиента функционала для решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики (с учетом влияния воздуха позволяет применить оптимизационный метод для решения обратной задачи;

- оценка условной устойчивости решения обратной задачи геоэлектрики сформулированной в интегральной постановке показывает, что при определенных условиях малым возмущениям входных данных отвечают малые отклонения решения обратной задачи;

- доказательство дифференцируемости функционала невязки по координатам точек разрыва оптимизационного метода решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики (одновременное определение  $\varepsilon$  - диэлектрическую проницаемость и  $\sigma$  - проводимость среды) позволяет одновременно определить и координаты точек разрыва;

- доказательство дифференцируемости функционала невязки оптимизационного метода решения обратной задачи для уравнения теории упругости позволяет построить алгоритмы по определению координат точек разрыва;

- метод послойного пересчёта с учетом координат точек разрыва для решения прямой и сопряженных задач геоэлектрики в частотной области показывает экономичность при численном решении оптимизационным методом;

- согласовано-сопряженные разностные схемы решения прямой и сопряженных задач для дискретного оптимизационного метода по определению диэлектрической проницаемости и проводимости сред в волновом случае, и определение проводимости в квазистационарном приближении показывает консервативность разностных схем;

- определены критерии выбора частотной области на основе численного решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики методом послойного пересчета;

- проведены численные расчеты решения обратных задач геоэлектрики во

временной области с использованием согласованных разностных алгоритмов;

- приведены инженерно-технические приемы по интерпретации радарограмм на основе серии экспериментальных исследований с применением прибора «Георадар «Лоза В».

### **Теоретическая и практическая значимость исследования**

Разработанные эффективные алгоритмы решения прямой и обратной задач для уравнения геоэлектрики в частотной области применим в задачах диагностики подповерхностных покрытий взлетно-посадочных аэродромов, диагностике участков под строительстве различных зданий, а также в задачах археологии. Алгоритмы по численному решению обратной задачи геоэлектрики во временной области применим в задачах по восстановлению проводимости сред на значительных глубинах. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в разработанной методике исследования обратных задач для уравнения геоэлектрики, упругости и построения согласовано-сопряженных разностных схем решения обратных задач в дискретной постановке оптимизационным методом. Метод послойного пересчета с учетом координат точек разрыва используется при построении эффективных методов решения обратных задач акустики, геоэлектрики, сеймики в случае горизонтально-слоистых сред.

Оценка условной устойчивости решения обратной задачи геоэлектрики позволяет определить область корректности и используется при построении численных методов решения обратных задач.

Дифференцируемость функционала невязки по координатам точек разрыва для решения обратных задач для уравнения геоэлектрики и теории упругости, позволяет получить градиент функционала в явном виде в точках разрыва, а следовательно определить координаты разрыва. Это важно в задачах диагностики состояний подповерхностных покрытий, в частности диагностики взлетно-посадочных полос аэродромов.

Результаты работы являются вкладом в развитие теоретических обоснований численных методов решения обратных коэффициентных задач акустики, геоэлектрики, сеймики и могут быть использованы научно-исследовательскими институтами, занимающимися вопросами сейсморазведки, электроразведки. Методика построения алгоритмов и теоретические обоснования численных методов решения рассматриваемых в диссертации обратных задач, может быть применена в разработке и теоретическим исследованиям алгоритмов для решения обратных задач для широкого класса обратных задач георазведки, использующие неразрушающие методы исследования, то есть с применением георадаров.

Результаты диссертации могут быть использованы в качестве дополнительных материалов элективных дисциплин по спецкурсам в учебном процессе вузов РК, например учебно-методическое пособие [61].

Результаты работы включены в отчеты проекта МОН РК «Развитие исследования обратных задач электродинамики, упругости в неоднородных средах и итерационные методы их решения» (1173/ГФ2 №1843 от 28.09.2012 г.,

№378 от 04.02.2013 г.) и в серии проектов ректора КазНПУ им. Абая «Георадарные исследования физических параметров «Большого Алматинского» водохранилище и компьютерное моделирование структуры среды» (договор №9 от 01.03.2012 г.), «Численные решения обратных задач георадиолокации для определения свойств горизонтально-слоистых сред в различных областях диапазонах длин волн» (договор № 20 от 01.04.2013 г.).

**Источниками исследования** являются обратные задачи по определению геоэлектрического разреза горизонтально-слоистых сред для уравнения геоэлектрики, теории упругости.

**Апробация работы.** Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на

1) международных конференциях и конгрессах:

- Международная конференция «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики», Алматы, 28-30 сентября 2011;

- Третья международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач», Новосибирск, 10-15 октября 2011;

- II международная научно-практическая конференция «Информационно-инновационные технологии: интеграция науки, образования и бизнеса», посвященной 20-летию Независимости Республики Казахстан, КазНТУ им.К.И.Сатпаева, Алматы, 1-2-декабря 2011;

- The 6th International conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, May 21-26, 2012, Antalya, Turkey;

- международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. – Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012;

- I международной научно-практической конференции «Интеллектуальные информационные и коммуникационные технологии – средство осуществления третьей индустриальной революции в свете Стратегии «Казахстан-2050», Астана, 7-8 июня 2013;

- The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS), Baku, Azerbaijan, 1-3 July 2011;

- The 8<sup>th</sup> international congress of the ISAAC, Moscow, Russia, August 22-27 августа, 2011,

а также докладывались на

2) семинарах:

- Казахстанско-Российско-Турецком международном научном семинаре “Математическое моделирование нелинейных систем” Казахстан, под руководством чл.-корреспондента НАН РК, д.ф.-м.н., профессора М.Н.Калимолдаева (г. Алматы, 16мая 2012 года);

- городской семинар при кафедре фундаментальной математики “Функциональный анализ и его приложения” под руководством академика НАН РК, д.ф.-м.н., профессора М.О. Отельбаева (г. Астана, 3-октября 2013 года);

- объединенный семинар “Современные научные проблемы математики, механики и информационных технологий” под руководством академика НАН РК, д.т.н., профессора Б.Т. Жумагулова, академика НИИ РК, д.ф.-м.н., профессора Н.Т. Данаева (Алматы, 10-октября 2013 года).

**Публикации.** По теме диссертации опубликованы 2 статьи в научном журнале с импакт-фактором [31; 42], 7 статей в научных журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК [62-68], 6 тезисов международных конференций [69-74], 2 тезиса конгрессов [75-76] и 1 учебно-методическое пособие [61], а также по направлению тематики диссертации опубликованы 2 тезиса международных конференций [77-78] и 3 статьи, входящих в перечень журналов, рекомендованный Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК [79-81].

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и приложений. Работа изложена на 95 страницах, приложения содержат 22 рисунка и 6 таблиц.

Во введении приведен краткий обзор литературы, описана актуальность и научная значимость, цели и задачи исследования.

В первом разделе рассматриваются оптимизационные методы решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики в волновой и в квазистационарном приближении с учетом влияния воздуха. Приведены выводы рассматриваемых градиентов функционалов. Рассматриваются обратные задачи по восстановлению геоэлектрических свойств в случае кусочно-гладких коэффициентов.

Получена оценка условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики, сформулированной в интегральной постановке.

В первом подразделе приведены основные уравнения геоэлектрики и доказано, что они являются следствием системы уравнений Максвелла. При специальном выборе источника, а именно длинного кабеля протянутого вдоль оси  $Ox_2$ , и при предположении, что геоэлектрические свойства слоев зависят от глубины, система уравнений Максвелла сводится к одному уравнению относительно компоненты  $E_2$  - электрического поля  $E$ .

Во втором подразделе рассматривается постановки прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики во временной области. Рассматриваются следующие постановки обратных задач: определения  $\varepsilon$  - диэлектрической проницаемости,  $\sigma$  - проводимости среды и задача об одновременном их определении. Для решения обратной задачи, сформулированных на дифференциальном уровне используется оптимизационный метод. Суть этого метода сводится к минимизации квадратичного функционала невязки наблюдаемых и расчетных компонент поля  $E_2$ , вычисленный в некоторой фиксированной точке. Выведены градиенты функционалов и построены соответствующие им сопряженные задачи.

Далее в третьем подразделе изучена условная устойчивость решения обратной задачи геоэлектрики. Для исследования используется интегральная

постановка обратной задачи для уравнения геоэлектрики. Введением соответствующих норм и использование замкнутой системы интегральных уравнений Вольтера, получена оценка условной устойчивости решения обратной задачи геоэлектрики [65; 74].

И наконец, в последнем подразделе рассматриваются постановки прямой и обратной задачи в квазистационарном приближении и оптимизационный метод их решения.

Во втором разделе рассматривается уравнение геоэлектрики в частотной области. Такая постановка задачи непосредственно следует из уравнения геоэлектрики посредством применения преобразования Лапласа по переменной  $t$ . В случае слоистых сред возможно применения аналитических методов. В связи с этим применен метод послойного пересчета для уравнения Риккати, этот метод изложен в работах А.Л.Карчевского [39-41]. В этом разделе алгоритм послойного пересчета применен для обратной задачи геоэлектрики в частотной области, а также об одновременном определении  $\varepsilon$  - диэлектрической проницаемости и  $\sigma$  - проводимости среды в случае когда неизвестны мощности слоев. Доказывается дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва среды для уравнения геоэлектрики [67].

В третьем разделе исследован функционал невязки для численного решения обратной задачи для уравнений теории упругости. Модель среды – горизонтально-слоистая. Доказана дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва среды для уравнений теории упругости [31], а также получено явное аналитическое выражение для этой производной. Это позволяет градиентным методом определить координаты разрывов или мощности слоев.

В четвертом разделе рассматриваются алгоритмы численного решения обратных задач геоэлектрики на дискретном уровне. В работах Б.Рысбайулы в соавторстве [55-58], а также в серии работ А.Л.Карчевского [82-83], показано, что эффективно построить вспомогательную (сопряженную) задачу на дискретном уровне, которая будет сопряжена на разностном уровне к исходной дискретной прямой задаче. Подробный сравнительный анализ традиционного подхода и дискретного на ряде численных примером изложено в работе А.Л.Карчевского [82].

В этой работе А.Л.Карчевским приведены следующие схемы в способе выведения градиента функционала:

I. Пусть  $p$  – приближенное решение обратной задачи. Придав приращение  $p + \delta p$ , а затем вычислив приращение функционала невязки, находим градиент функционала, как главную часть приращения функционала. Запишем в операторном виде:  $\nabla J(p) = A(u_p, \psi)$  где  $\psi$  - есть решение соответствующей сопряженной задачи. Все полученные формулы при выводе точны, так как они строго математически выведены.

II. Используем все готовые рабочие формулы полученные в предыдущем пункте, которым относим исходную задачу, сопряженную задачу, сам

функционал и ее градиент. Тем или иным способом аппроксимируем все рабочие формулы.

III. В этом случае все выкладки получения дискретного аналога градиента проводим на дискретном уровне в сеточном пространстве, по аналогии как в первом способе.

Из этой схемы расчетов получения аппроксимации сопряженной задачи во втором случае, нет гарантии, что дискретный аналог сопряженной задачи будет соответствовать (согласованна) к исходной.

В связи с этим мы отдаем предпочтение третьему способу. Для этого мы получили градиент и соответствующей ей сопряженную задачу на дискретном уровне. В этом случае как показано нами в работах [62-64; 66], разностные схемы решения исходной прямой задачи и сопряженной задачи будут обладать свойством консервативности. Для рассматриваемых разностных схем для прямой и сопряженных задач выполнен закон сохранения энергии на разностном уровне.

Используя эту методику построения согласовано-сопряженных разностных схем, во втором подразделе нами построены консервативные разностные схемы рассматриваемых обратных задач для уравнения геоэлектрики в разделе 1.

В приложении А изложен анализ оптимизационного метода решения обратных задач. Исследование математических свойств функционала невязки позволило предложить метод решения обратной задачи по одновременному определению диэлектрической проницаемости и проводимости. Работоспособность метода подтверждается примерами восстановления данных функций на данных с внесённой случайной ошибкой. На численных примерах показано, что метод сопряженных градиентов в случае комплекснозначных градиента функционала невязки и искомой функции позволяет находить минимум функционала [42].

В четвертом подразделе приложения А рассматривается тестовая модель для численного решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики близкой к реальной ситуации. Применены алгоритмы оптимизационного метода решения обратной задачи 1, подробно описанной в разделе 4.

В приложении В приведены инженерно-технические приемы по идентификации радарограмм. С этой целью проведены экспериментальные исследования по диагностике взлетно-посадочной полосы коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области РК, с использованием георадара (GPR). По результатам радарограмм проведен анализ показывающих причину повреждения (дефекта) верхних слоев выбранного участка взлетно-посадочной полосы. Проведены эксперименты, позволяющие выработать технологию по интерпретации георадарных данных [69-73; 76]. Это позволило провести сравнительный анализ результатов данных аналогичных радарограмм и экспериментальных исследований.

В конце работы приводится заключение, где изложены основные результаты диссертации, выносимые на защиту. Содержание диссертации завершается списком использованных источников и приложениями.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту д.ф.-м.н., профессору Казизату Такуадиновичу Искакову, зарубежному консультанту доктору естественных наук (PhD), профессору Yanfei Wang за постановки задач, а также за постоянную помощь, внимание к работе.

Автор признателен член корреспонденту РАН, д.ф.-м.н., профессору НГУ Сергей Игоревичу Кабанихину, за бесценные замечания и советы полученных на стажировке в НГУ, на международных школах-конференциях и на семинарах в ИМ СО РАН.

Выражаю благодарность д.ф.-м.н., в.н.с. лаборатории волновых процессов Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН Андрею Леонидовичу Карчевскому, за оказанные неоценимые консультации, в результате совместных обсуждений которых явился ряд совместных научных работ. Выражаю благодарность руководителям службы безопасности полетов аэродрома ТОО "Альтаир-Эйр" за содействие проведения экспериментальных исследований по диагностике взлетно-посадочной полосы аэродрома, полковнику К.А. Оразбаеву (2011г.) и полковнику Б.Кулназарову (2012г.). Автор выражает благодарность зав. каф. ИПМ КазНПУ им.Абая, д.ф.-м.н., профессору Бердышеву Абдумаувлену Сулеймановичу за совместные научные исследования, проведенные по работе над научными проектами ректора КазНПУ им. Абая «Георадарные исследования физических параметров «Большого Алматинского» водохранилище и компьютерное моделирование структуры среды» (договор №9 от 01.03.2012 г.), «Численные решения обратных задач георадиолокации для определения свойств горизонтально-слоистых сред в различных областях диапазонах длин волн» (договор № 20 от 01.04.2013 г.), с использованием георадара «Лоза В».

# 1 ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

В первом разделе рассматриваются оптимизационные методы решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики в волновой и в квазистационарном приближении с учетом влияния воздуха. Приведены выводы рассматриваемых градиентов функционалов. Рассматриваются обратные задачи по восстановлению геоэлектрических свойств в случае кусочно-гладких коэффициентов.

Получена оценка условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики, сформулированной в интегральной постановке.

В первом подразделе приведены основные уравнения геоэлектрики и доказано, что они являются следствием системы уравнений Максвелла. При специальном выборе источника, а именно длинного кабеля протянутого вдоль оси  $Ox_2$ , и при предположении, что геоэлектрические свойства слоев зависят от глубины, система уравнений Максвелла сводится к одному уравнению относительно компоненты  $E_2$  - электрического поля  $E$ .

Во втором подразделе рассматриваются постановки прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики во временной области. Рассматриваются следующие постановки обратных задач: определение  $\varepsilon$  - диэлектрической проницаемости,  $\sigma$  - проводимости среды и задача об одновременном их определении. Для решения обратной задачи, сформулированных на дифференциальном уровне используется оптимизационный метод. Суть этого метода сводится к минимизации квадратичного функционала невязки наблюдаемых и расчетных компонент поля  $E_2$ , вычисленный в некоторой фиксированной точке. Выведены градиенты функционалов и построены соответствующие им сопряженные задачи.

Далее в третьем подразделе изучена условная устойчивость решения обратной задачи геоэлектрики. Для исследования используется интегральная постановка обратной задачи для уравнения геоэлектрики. Введением соответствующих норм и использование замкнутой системы интегральных уравнений Вольтера, получена оценка условной устойчивости решения обратной задачи геоэлектрики [65; 74].

В четвертом подразделе рассматриваются постановки прямых и обратных задач в квазистационарном приближении.

## 1.1 Постановка обратной задачи для уравнения геоэлектрики

Все физическое пространство  $R^3$  переменных  $x = (x_1, x_2, x_3)$  плоскостью  $x_3 = 0$  разобьем на два полупространства:

$$R_-^3 = \{x \in R^3 \mid x_3 < 0\} \text{ (воздух)}, \quad R_+^3 = \{x \in R^3 \mid x_3 > 0\} \text{ (земля)}.$$

В области  $\{x_3 > 0\}$  - земля, примем следующую постановку прямой задачи (в дальнейшем назовем задачей  $Z$ ):

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = \frac{1}{\mu} v_{x_3 x_3} - \frac{\lambda^2}{\mu} v - \tilde{g}_\lambda \delta(x_3) \delta(t), \quad x_3 > 0 \quad (1.1)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0 \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{\mu} v_{x_3} \Big|_{x_3=+0} = f_{(2)}(t). \quad (1.3)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1.1)–(1.3) известна дополнительная информация (математический: это след решения прямой задачи в точке  $x=0$ , на практике это данные отраженного сигнала в точке  $x=0$ , который, например, фиксирует приемник георадара):

$$v(0, t) = f_{(1)}(t) \quad (1.4)$$

Для определения краевого условия (1.3), поступим следующим образом. Известно, что в воздухе  $\sigma = 0$ , а коэффициенты  $\varepsilon, \mu$  постоянны, тогда известное условие (1.4) принимая как краевое условие, в области  $\{x_3 < 0\}$  – воздух, мы имеем следующую постановку прямой задачи: (назовем в дальнейшем ее постановку задачи  $B$ ):

$$\varepsilon v_{tt} = \frac{1}{\mu} v_{x_3 x_3} - \frac{\lambda^2}{\mu} v + \tilde{g}_\lambda \delta(x_3) \delta(t), \quad x_3 < 0, \quad (1.5)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0 \quad (1.6)$$

$$v(0, t) = f_{(1)}(t) \quad (1.7)$$

Таким образом, разрешив прямую задачу (1.5)–(1.7) в воздухе, мы можем определить и условие (1.3).

В выражениях (1.1)–(1.7) приняты следующие обозначения:

$\lambda$  – параметр Фурье,  $\delta$  – дельта функция Дирака, и образы Фурье:

$$v(x_3, t) = F_{x_1} [E_2(x_1, 0, x_3, t)];$$

$$\tilde{g}_\lambda = F_{x_1} [g(x_1)];$$

$$f_{(1)}(t) = F_{x_3} [\varphi_{(1)}(x_1, t)].$$

Примечание - Постановки задач вытекают из системы уравнений Максвелла, вывод будет изложен ниже в лемме 1.1. Для ясности рассуждений мы приведем полное доказательство этого утверждения. В словесной форме ход доказательства утверждения, можно найти в монографии [84].

Возможны следующие постановки обратных задач:

*Обратная задача 1:* Найти в области  $\{x_3 > 0\}$  коэффициент  $\varepsilon(x_3)$  и функцию  $v(x_3, t)$  из соотношений (1.1)–(1.3) по известной  $f_{(1)}^\lambda(t)$  при фиксированном  $\lambda = \lambda_0$ .

*Обратная задача 2:* Найти в области  $\{x_3 > 0\}$  коэффициент  $\sigma(x_3)$  и функцию  $v(x_3, t)$  из соотношений (1.1)–(1.3) по известной  $f_{(1)}^\lambda(t)$  при фиксированном  $\lambda = \lambda_0$ .

*Обратная задача 3:* Найти коэффициенты  $\varepsilon(x_3)$ ,  $\sigma(x_3)$  и функцию  $v(x_3, t)$  из соотношений (1.1)–(1.3) по известной  $f_{(1)}^\lambda(t)$  при фиксированном  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$ .

Примечание - Единственность решения обратной задачи, вытекает из теоремы В.Г. Романова [11]. Смысл этой теоремы состоит в том, что для определения одного коэффициента нужна одна дополнительная информация, для двух коэффициентов нужны две. В противном случае задача будет переопределенной и решение будет не единственной.

**Лемма 1.1.** Пусть источник электромагнитных волн  $j^{cm}$  имеет вид:

$$j^{cm} = (0, 1, 0)^* g(x_1) \delta(x_3) \theta(t), \quad (1.8)$$

и распространения электромагнитных волн в среде описывается системой уравнения Максвелла [84, с. 179-181]:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E - \text{rot } H + \sigma E + j^{cm} = 0, & x_3 \neq 0, & (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H + \text{rot } E = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

При предположении, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменной  $x_2$ , в системе останутся ненулевыми только три компоненты  $E_2, H_1, H_3$  и система сводится к уравнению относительно компоненты  $E_2$ .

Здесь:  $E = (E_1, E_2, E_3)^*$ ,  $H = (H_1, H_2, H_3)^*$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\varepsilon, \mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды;  $\sigma$  – проводимость среды;  $j^{cm}$  – плотность сторонних токов,  $g(x_1)$  – функция, описывающая поперечный размер источника,  $\delta(x_3)$  – дельта функция Дирака,  $\theta(t)$  – функция Хэвисайда.

**Доказательство.** На границе  $x_3 = 0$ , коэффициенты  $\mu$ ,  $\sigma$  имеют конечный разрыв (в воздухе они постоянные, а в земле считаем гладкими и ограниченными функциями), поэтому требуем выполнения условий:

$$E_j|_{x_3=0} = E_j|_{x_3=+0}, \quad H_j|_{x_3=0} = H_j|_{x_3=+0}, \quad j = 1, 2.$$

считаем, что до момента времени  $t = 0$  поле отсутствует:

$$(E, H)|_{t<0} = 0, \quad j^{cm}|_{t<0} = 0.$$

Используя определения ротора, распишем систему уравнений Максвелла (1.9), окончательно получим систему из шести уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_1 + \sigma E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} H_2, \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_2 + \sigma E_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \gamma_2, \\ \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_3 + \sigma E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} E_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} E_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 + \gamma_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1. \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_2 = \delta(x_3)\theta(t)$ .

При предположении, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменной  $x_2$ , и специальным выбором источника в виде (1.8), в системе останутся ненулевыми только три компоненты  $E_2, H_1, H_3$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_2 + \sigma E_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \gamma_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 &= \frac{\partial}{\partial x_3} E_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} E_2. \end{aligned} \tag{1.10}$$

В системе (1.10) исключим две компоненты,  $H_1, H_3$ , следующим образом: дифференцируем первое уравнение системы (1.10) по  $t$  второе уравнение по  $x_3$  и наконец, третье уравнение по  $x_1$ . Выполнив эти преобразования, запишем окончательное уравнение:

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 + \sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) + g(x_1) \delta(x_3) \delta(t), \quad x_3 > 0, t > 0, \tag{1.11}$$

$$E_2|_{t>0} = 0, \tag{1.12}$$

$$\left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) \Big|_{x_3=+0} = \frac{\partial}{\partial t} \varphi_{(2)}(x_3, t). \tag{1.13}$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1.11)–(1.13) известна дополнительная информация:

$$E_2|_{x_3=+0} = \varphi_{(1)}(x_1, t) \quad (1.14)$$

Особо обострим внимание на условие (1.13).

Условие (1.14) - это след решения прямой задачи (1.11)–(1.13). Условие (1.13) неизвестно, но оно необходимо для решения прямой и обратной задачи в полупространстве  $\{x_3 > 0\}$  – земля.

В данной ситуации поступаем так, как указано в [84, с. 179-181], по известным данным  $\varepsilon$ ,  $\mu$  в полупространстве  $\{x_3 < 0\}$ , где  $\sigma = 0$  решаем прямую задачу:

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) + g(x_1) \eta(x_3) \delta(t), \quad x_3 < 0, \quad t > 0, \quad (1.15)$$

$$E_2|_{t < 0} = 0, \quad (1.16)$$

$$E_2|_{x_3=+0} = \varphi_{(1)}(x_1, t). \quad (1.17)$$

В последней системе, известную дополнительную информацию (1.14), считаем как краевое условие (1.17) для решения прямой задачи в области  $\{x_3 < 0\}$  – воздух.

Что требовалось доказать.

#### Примечания

1 Данное обстоятельство можно будет использовать на наш взгляд, при решении обратной задачи в полуплоскости  $\{x_3 > 0\}$  – земля, с учетом помех, который вызванный с различными помехами, улавливающий георадаром на дневной поверхности. С другой стороны, как указано в [84, с. 179-181], это обстоятельство позволяет ограничиться при численном решении обратной задачи минимально возможной по размеру областью в плоскости  $\{x_3 > 0\}$ .

2 При исследовании подповерхностных структур, в частности взлетно-посадочных участков, с физической точки зрения, можно предположить, что коэффициенты системы (1.11) не зависят от переменной  $x_1$ . Это оправдывается тем, что взлетно-посадочная полоса имеет геологический разрез расположенный слоями (пластами), причем заранее известными геоэлектрическими свойствами сред. Задача диагностики полосы, состоит в определении изменений этой среды, возникающих как правило вследствие природных факторов, либо иных повреждений.

Последнее приводит к трещинам или просадке рабочей полосы, что может привести к аварии, или иным последствиям.

**Следствие.** При указанных обоснованных предположениях в Лемме 1.1, а также полагая, что коэффициенты зависят только от  $x_3$ , применив преобразование Фурье  $F_{x_1}[\cdot]$ , к системе (1.11)–(1.13), а также аналогично к системе (1.15)–(1.17), получим постановки задач (1.1)–(1.3) и (1.5)–(1.7) соответственно.

## 1.2 Оптимизационный метод решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики

Конкретизируем постановку задачи в волновой постановке, сформулированной нами в подразделе 1.1. В области  $Q = [0, L] \times [0, T]$  рассмотрим задачу об определении функции  $v(x_3, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 v - g(x_3, t), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < x < L, \quad (1.18)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad (1.19)$$

$$v_{x_3}|_{x_3=0} = \mu f_{(2)}(t), \quad v|_{x_3=L} = 0. \quad (1.20)$$

Здесь

$$g(x_3, t) = \delta(x_3) \delta(t).$$

Считаем, что все коэффициенты уравнения (1.18) гладкими функциями.

Пусть относительно решения прямой задачи (1.18)–(1.20) известна дополнительная информация:

$$v(0, t; \varepsilon) = f_{(1)}(t). \quad (1.21)$$

*Обратная задача 1:* По известной дополнительной информации (1.21) найти  $\varepsilon(x_3)$  и  $v(x_3, t; \varepsilon)$  из соотношений (1.18)–(1.20), (полагаем что известны  $\sigma$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $\lambda^2$ ).

*Обратная задача 2:* По известной дополнительной информации (1.21) найти  $\sigma(x_3)$  и  $v(x_3, t; \sigma)$  из соотношений (1.18)–(1.20), (полагаем что известны  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $\lambda^2$ ).

Пусть относительно решения прямой задачи (1.18)–(1.20) известны дополнительные информации:

$$v^{(\lambda_i)}(0, t; \langle \varepsilon, \sigma \rangle) = f^{(i)}(t), \quad i = 1, 2; \quad \lambda_1, \lambda_2. \quad (1.22)$$

*Обратная задача 3:* Найти пару функций  $\langle \varepsilon(x_3), \sigma(x_3) \rangle$  и  $v(z, t; \langle \varepsilon, \sigma \rangle)$  из соотношений (1.18)–(1.20) по известным дополнительным информациям (1.22) при  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\lambda = \lambda_2$  (считаем, что известны  $\mu$ ,  $g$ ).

*Оптимизационный метод решения обратной задачи 1*

Здесь и в дальнейшем будем считать что  $x_3 = z$ , так как обычно в геофизике обозначают через  $z$  глубину, и положим для удобства  $f_{(1)}(t) = f(t)$ .

Пусть  $p(z)$  – приближенное решение обратной задачи 1. Введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J(p) = \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)]^2 dt. \quad (1.23)$$

Минимизируем функционал (1.23) методом наискорейшего спуска [44]. Пусть известно приближение  $p^{(n)}(z)$ , последующие приближения определим из:

$$p^{(n+1)}(z) = p^{(n)}(z) - \alpha_n \nabla J(p^{(n)}). \quad (1.24)$$

Здесь  $\alpha_n$  – коэффициент спуска, который можно определить как в [44, с. 67-68], а  $\nabla J(p^{(n)})$  – градиент функционала.

**Теорема 1.1.** Пусть коэффициенты уравнения (1.18) и функция  $f(t)$  непрерывные функции, тогда градиент функционала (1.23) есть главная часть приращения функционала  $\Delta J(p) = \langle \nabla J, \delta p \rangle_{L_2} + o(\|\delta p\|_{L_2}^2)$  и имеет вид:

$$\nabla J(p) = \int_0^T v_{zz}(z, t) \varphi(z, t) dt, \quad (1.25)$$

где функция  $\varphi(z, t)$  – есть решение вспомогательной (сопряженной) задачи:

$$p(z) \varphi_{zz} - \sigma(z) \varphi_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi(z, t), \quad (z, t) \in Q. \quad (1.26)$$

$$\varphi(z, T) = 0, \quad \varphi_t(z, t)|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq z \leq L. \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=0} = 2[v(0, t; p) - f(t)], \quad 0 < t \leq T. \quad (1.28)$$

$$\varphi(L, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.29)$$

**Доказательство.** Зададим приращение  $p + \delta p$  и

$$\delta v(z, t) = v(z, t; p + \delta p) - v\{z, t; p\}. \quad (1.30)$$

Вычислим приращение функционала:

$$\Delta J(p) = J(p + \delta p) - J(p) = \int_0^T [v(0, t; p + \delta p) - f(t)]^2 dt - \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)]^2 dt.$$

Используем очевидное тождество:  $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ , тогда приращение примет вид:

$$\Delta J(p) = \int_0^T [\nu(0,t; p + \delta p) - f(t) - \nu(0,t; p) + f(t)] [\nu(0,t; p + \delta p) - f(t) + \nu(0,t; p) - f(t)] dt.$$

В силу обозначения (1.30), и сокращая подобные члены, имеем:

$$\Delta J(p) = \int_0^T \delta \nu(0,t) [\delta \nu(0,t) + 2\nu(0,t; p) - 2f(t)] dt = 2 \int_0^T [\nu(0,t; p) - f(t)] \delta \nu(0,t) dt + \|\delta \nu\|_{L_2(0,T)}^2.$$

Таким образом,

$$\Delta J(p) = 2 \int_0^T [\nu(0,t; p) - f(t)] \delta \nu(0,t) dt + \|\delta \nu\|_{L_2(0,T)}^2.$$

Используя (1.18)–(1.20), нетрудно получить задачу для приращения  $\delta \nu(z,t)$ :

$$\begin{aligned} (p + \delta p)(\delta \nu + \nu(z,t; p))_{tt} + \sigma(\delta \nu + \nu(z,t; p)) &= \\ = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} (\delta \nu + \nu(z,t; p)) \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 (\delta \nu + \nu), \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$(\delta \nu + \nu(z,t; p))|_{t=0} = 0, \quad (\delta \nu + \nu(z,t; p))_t|_{t=0} = 0, \quad (1.32)$$

$$(\delta \nu + \nu(z,t; p))_z|_{z=0} = 0, \quad (1.33)$$

$$(\delta \nu + \nu(z,t; p))|_{z=L} = 0. \quad (1.34)$$

Пренебрегая членами второго порядка малости и вычитая из соотношений (1.31)–(1.34) соотношения (1.18)–(1.20) соответственно, получим для  $\delta \nu(z,t)$ , следующую задачу:

$$p \delta \nu_{tt} + \sigma \delta \nu_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\delta \nu) - \delta p \nu_{tt} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta \nu, \quad (z,t) \in Q, \quad (1.35)$$

$$\delta \nu|_{t=0} = 0, \quad \delta \nu_t|_{t=0} = 0, \quad (1.36)$$

$$\delta \nu_z|_{z=0} = 0, \quad \delta \nu|_{z=L} = 0. \quad (1.37)$$

Далее умножим обе части уравнения (1.35) на функцию  $\varphi(z,t)$  и интегрируем по  $z$  от 0 до  $L$  и по  $t$  от 0 до  $T$ , имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^T [p \delta v_{tt} \varphi(z, t) + \sigma \delta v_t \varphi(z, t)] dt dz = \\
& = \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \varphi(z, t) dz dt - \int_0^T \int_0^L \delta p v_{tt}(z, t) \varphi(z, t) dt dz - \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta v \cdot \varphi(z, t) dt dz.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Обозначим левую часть  $I_1$ , а правую часть через  $I_2, I_3, I_4$  и применим интегрирование по частям, получим выражение

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^L \left[ p \delta v_t(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T p \delta v_t \varphi_t(z, t) dt + p \sigma(z) \delta v(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T p \sigma(z) \delta v \varphi_t dt \right] dz = \\
&= \int_0^L \left[ p \delta v_t(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - p \delta v(z, t) \varphi_t(z, t) \Big|_0^T + \int_0^T p \delta v \varphi_{tt} dt + \sigma(z) \delta v(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T \sigma \delta v \varphi_t dt \right] dz = \\
&= \int_0^L [p \delta v_t(z, T) \varphi(z, T) - p \delta v_t(z, 0) \varphi(z, 0) - p \delta v(z, T) \varphi_t(z, t) \Big|_{t=T} + p \delta v(z, 0) \varphi_t(z, t) \Big|_{t=0} + \\
&+ \int_0^T p \delta v \varphi_{tt} dt + \delta(z) \delta v(z, T) \varphi(z, T) - \sigma(z) \delta v(z, 0) \varphi(z, 0) - \int_0^T \sigma \delta v \varphi_t dt] dz.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.36)–(1.37), и полагая что

$$\varphi(z, T) = 0, \quad \varphi_t(z, t) \Big|_{t=T} = 0,$$

получим

$$I_1 = \int_0^L \int_0^T \delta v(z, t) p(z) \varphi_{tt}(z, t) dt dz - \int_0^L \int_0^T \delta v(z, t) \sigma(z) \varphi_t(z, t) dt dz. \tag{1.39}$$

Далее проведем соответствующие преобразования для выражения:

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \varphi(z, t) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \sigma v \right) \frac{\partial}{\partial z} \varphi dz \right] dt = \\
&= \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \varphi(z, t) \Big|_0^L - \frac{1}{\mu} \delta v \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_0^L + \int_0^L \frac{1}{\mu} \delta v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz \right] dt = \\
&= \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \Big|_{z=L} \varphi(L, t) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \Big|_{z=0} \cdot \varphi(0, t) - \frac{1}{\mu} \delta v(L, t) \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=L} + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{\mu} z \delta v(0, t) \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=0} + \int_0^L \frac{1}{\mu} \delta v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \right] dt.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.37), и полагая

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=0} = 2[v(0, t, p) - f(t)],$$

$$\varphi(L, t) = 0,$$

получим, что

$$I_2 = 2 \int_0^T \delta \sigma(0, t) [v(0, t, p) - f(t)] dt + \int_0^T \int_0^L \delta v \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi \right) dz dt. \quad (1.40)$$

Выражение для  $I_3$ ,  $I_4$  имеем вид

$$I_3 = - \int_0^L \delta p(x) \left( \int_0^T v_{tt}(x, t) \varphi(x, t) dt \right) dx, \quad I_4 = - \int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta v \varphi dt dx. \quad (1.41)$$

Полученные выражения для  $I_1$  формула (1.39), для  $I_2$  формула (1.40) и  $I_3$ ,  $I_4$  формула (1.41), подставим в исходное соотношение (1.38), получим

$$2 \int_0^T \delta v(0, t) [v(0, t, p) - f(t)] dt = \int_0^L \int_0^T \delta v(z, t) \left[ \varphi_{tt} - \sigma(z) \varphi_t - \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi(z, t) \right] dz dt +$$

$$+ \int_0^L \delta p(z) \left( \int_0^T v_{tt}(z, t) \varphi(z, t) dt \right) dz. \quad (1.42)$$

Полагая, что

$$p \varphi_{tt} - \sigma(z) \varphi_t - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi \right) + \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi(z, t) = 0.$$

И учитывая, что главная часть приращения функционала, (см. левая часть соотношения (1.42)) есть градиент функционала, т.е.

$$\nabla J(p) = \int_0^T v_{tt}(z, t) \varphi(z, t) dt.$$

Таким образом, в процессе вывода формулы для градиента функционала, мы получили соответствующую ей вспомогательную задачу (1.26)–(1.29).

Что требовалось доказать.

Таким образом, алгоритм решения обратной задачи 1, выглядит следующим образом:

1. Задаем начальное приближение  $p^{(0)}(z)$ , и решаем прямую задачу (1.18)–(1.20), получим  $v^{(0)}(z, t; p^{(0)})$ .
2. Вычислим краевое значение (1.28) и решаем сопряженную задачу (1.26)–(1.29), получим  $\varphi^{(0)}(z, t; p^{(0)})$ .
3. Вычислим градиент, по формуле (1.25), т.е. находим  $\nabla J(p^{(0)}(z))$ .
4. Вычислим очередное приближение  $p^{(n+1)}(z)$  по формуле (1.24).
5. Проверим значение функционала (1.23), если он достиг минимума то переход к пункту 6, если нет, то полагаем  $p^{(0)}(z) = p^{(n)}(z)$  и возврат к пункту 1.
6. Полагаем приближение  $p^{(n)}(z)$  – за приближенное решение обратной задачи.

### *Оптимизационный метод решения обратной задачи 2*

Конкретизируем постановки обратных задач в области  $Q = [0, L] \times [0, T]$  рассмотрим задачу об определении функции  $v(z, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 v - g, \quad 0 < t \leq T, 0 < z < L, \quad (1.43)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad (1.44)$$

$$v_z|_{z=0} = \mu f_{(2)}(t), \quad v|_{z=L} = 0. \quad (1.45)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1.43)–(1.45) известна дополнительная информация

$$v(0, t; \sigma) = f(t). \quad (1.46)$$

*Обратная задача 2:* По известной дополнительной информации (1.46)  $\sigma(z)$  и  $v(z, t; \sigma)$  из соотношений (1.43)–(1.45), (полагаем что известные  $\varepsilon, \mu, g$ ).

Пусть  $p(z)$  – приближенное решение обратной задачи 2, введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J(p) = \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)]^2 dt. \quad (1.47)$$

Минимизируем функционал (1.47) методом наискорейшего спуска. Пусть известно приближение  $p^{(n)}(z)$ , последующие приближения определим из:

$$p^{(n+1)}(z) = p^{(n)}(z) - \alpha_n \nabla J(p^{(n)}). \quad (1.48)$$

Здесь  $\alpha_n$  – коэффициент спуска, который можно определить как в [44, с. 67–68], а  $\nabla J(p^{(n)})$  – градиент функционала.

**Теорема 1.2.** Пусть коэффициенты уравнения (1.43) и функция  $f(t)$  непрерывные функции, тогда градиент функционала (1.47) есть главная часть приращения функционала  $\Delta J(p) = \langle \nabla J, \delta p \rangle_{L_2} + o(\|\delta p\|_{L_2}^2)$  и имеет вид:

$$\nabla J(p) = \int_0^T v_t(z, t) \varphi(z, t) dt, \quad (1.49)$$

где функция  $\varphi(z, t)$  – есть решение вспомогательной (сопряженной) задачи:

$$\varepsilon(z) \varphi_{tt} - p(z) \varphi_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi(z, t), \quad (z, t) \in Q, \quad (1.50)$$

$$\varphi(z, T) = 0, \quad \varphi_t(z, t)|_{t=T} = 0, \quad 0 \leq z \leq L, \quad (1.51)$$

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2[v(0, t; p) - f(t)], \quad 0 < t \leq T, \quad (1.52)$$

$$\varphi(L, t) = 0, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.53)$$

**Доказательство.** Зададим приращение  $p + \delta p$  и

$$\delta v(z, t) = v(z, t; p + \delta p) - v(z, t; p). \quad (1.54)$$

Вычислим приращение функционала

$$\Delta J(p) = J(p + \delta p) - J(p) = \int_0^T [v(0, t; p + \delta p) - f(t)]^2 dt - \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)]^2 dt.$$

Используем очевидное тождество:  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , тогда приращение примет вид:

$$\Delta J(p) = \int_0^T [v(0, t; p + \delta p) - f(t) - v(0, t; p) + f(t)][v(0, t; p + \delta p) - f(t) + v(0, t; p) - f(t)] dt.$$

В силу обозначения (1.54), и сокращая подобные члены, имеем:

$$\Delta J(p) = \int_0^T \delta v(0, t) [\delta v(0, t) + 2v(0, t; p) - 2f(t)] dt = 2 \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)] \delta v(0, t) dt + \|\delta v\|_{L_2(0, T)}^2.$$

Таким образом,

$$\nabla J(p) = 2 \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)] \delta v(0, t) dt + \|\delta v\|_{L_2(0, T)}^2.$$

Используя (1.43)–(1.45), нетрудно получить задачу для приращения  $\delta v(z, t)$ :

$$\begin{aligned} & \varepsilon(\delta v + v(z, t; p))_t + (p + \delta p)(\delta v + v(z, t; p))_t = \\ & = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} (\delta v + v(z, t; p)) \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 (\delta v + v), \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$(\delta v + v(z, t; p))|_{t=0} = 0, \quad (1.56)$$

$$(\delta v + v(z, t; p))_t|_{t=0} = 0, \quad (1.57)$$

$$(\delta v + v(z, t; p))_z|_{z=0} = 0, \quad (1.58)$$

$$(\delta v + v(z, t; p))|_{z=L} = 0. \quad (1.59)$$

Пренебрегая членами второго порядка малости и вычитая из соотношений (1.55)–(1.59) соотношения (1.43)–(1.45) соответственно, получим для  $\delta v(z, t)$ , следующую задачу:

$$\varepsilon \delta v_{tt} + p \delta v_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) - \delta p v_{tt} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta v, \quad (z, t) \in Q. \quad (1.60)$$

$$\delta v|_{t=0} = 0, \quad \delta v_t|_{t=0} = 0. \quad (1.61)$$

$$\delta v_z|_{z=0} = 0, \quad \delta v|_{z=L} = 0. \quad (1.62)$$

Далее умножим обе части уравнения (1.60) на функцию  $\varphi(z, t)$  и интегрируем по  $z$  от 0 до  $L$  и по  $t$  от 0 до  $T$ , имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_0^T [\varepsilon \delta v_{tt} \varphi(z, t) + p \delta v_t \varphi(z, t)] dt dz = \int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} z \delta v \right) \varphi(z, t) dz dt - \\ & - \int_0^L \int_0^T \delta p v_t(z, t) \varphi(z, t) dt dz - \int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta v \cdot \varphi dt dz. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Обозначим левую часть  $I_1$ , а правую часть через  $I_2, I_3, I_4$  и применим интегрирование по частям, получим выражение:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^L \left[ \varepsilon \delta v_t(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T \varepsilon \delta v_{tt} \varphi_t(z, t) dt + p(z) \delta v(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T \varepsilon p \delta v \varphi_t dt \right] dz = \\ &= \int_0^L \left[ \varepsilon \delta v_t(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \varepsilon \delta v(z, t) \varphi_t(z, t) \Big|_0^T + \int_0^T \varepsilon \delta v \varphi_{tt} dt + p(z) \delta v(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T p \delta v \varphi_t dt \right] dz = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^L \left[ \varepsilon \delta v_t(z, T) \varphi(z, T) - \varepsilon \delta v_t(z, 0) \varphi(z, 0) - \varepsilon \delta v(z, T) \varphi_t(z, t) \Big|_{t=T} + \varepsilon \delta v(z, 0) \varphi_t(z, t) \Big|_{t=0} + \right. \\
&\left. + \int_0^T \varepsilon \delta v \varphi_{tt} dt + p(z) \delta v(z, T) \varphi(z, T) - p(z) \delta v(z, 0) \varphi(z, 0) - \int_0^T p \delta v \varphi_t dt \right] dz.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.61)–(1.62), и полагая что

$$\varphi(z, T) = 0, \quad \varphi_t(z, t) \Big|_{t=T} = 0,$$

получим

$$I_1 = \int_0^L \int_0^T \delta v(z, t) \varepsilon(z) \varphi_{tt}(z, t) dt dz - \int_0^L \int_0^T \delta v(z, t) p(z) \varphi_t(z, t) dt dz. \quad (1.64)$$

Далее проведем соответствующие преобразования для выражения

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \varphi(z, t) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \sigma v \right) \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right] dt = \\
&= \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \varphi(z, t) \Big|_0^L - \frac{1}{\mu} \delta v \frac{\partial}{\partial x} \varphi \Big|_0^L + \int_0^L \frac{1}{\mu} \delta v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz \right] dt = \\
&= \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \Big|_{z=L} \varphi(L, t) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial}{\partial z} \delta v \right) \Big|_{z=0} \cdot \varphi(0, t) - \frac{1}{\mu} \delta v(L, t) \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=L} + \frac{1}{\mu} \delta v(0, t) \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=0} + \right. \\
&\left. + \int_0^L \frac{1}{\mu} \delta v \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz \right] dt
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.62), и полагая

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \varphi \Big|_{z=0} = 2[v(0, t; p) - f(t)], \quad (1.65)$$

$$\varphi(L, t) = 0, \quad (1.66)$$

получим, что

$$I_2 = 2 \int_0^T \delta \sigma(0, t) [v(0, t; p) - f(t)] dt + \int_0^T \int_0^L \delta v \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) dz dt. \quad (1.67)$$

Выражение для  $I_3$ ,  $I_4$  имеем вид:

$$I_3 = -\int_0^L \delta p(z) \left( \int_0^T v_u(z,t) \varphi(z,t) dt \right) dz, \quad I_4 = -\int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta v \varphi dt dz. \quad (1.68)$$

Полученные выражения для  $I_1$  формула (1.64), для  $I_2$  формула (1.67) и  $I_3$ ,  $I_4$  формула (1.68), подставим в исходное соотношение (1.63), получим

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^T \delta v(0,t) [v(0,t;p) - f(t)] dt = \\ & = \int_0^L \int_0^T \delta v(z,t) \left[ \varphi_u - \sigma(z) \varphi_t - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi(z,t) \right] dz dt + \int_0^L \delta p(z) \left( \int_0^T v_u(z,t) \varphi(z,t) dt \right) dz. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Полагая, что

$$\varepsilon \varphi_u - p(z) \varphi_t - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi(z,t) = 0.$$

И учитывая, что главная часть приращения функционала, см. левая часть соотношения (1.69), есть градиент функционала, т.е.

$$\nabla J(p) = \int_0^T v_u(z,t) \varphi(z,t) dt.$$

Таким образом, в процессе вывода формулы для градиента функционала, мы получили соответствующую ей вспомогательную задачу (1.50)–(1.53).

Что требовалось доказать.

Таким образом, алгоритм решения обратной задачи 2, выглядит следующим образом:

1. Задаем начальное приближение  $p^{(0)}(z)$ , и решаем прямую задачу (1.43)–(1.45), получим  $v^{(0)}(z,t; p^{(0)})$ .
2. Вычислим краевое значение (1.65) и решаем сопряженную задачу (1.50)–(1.53), получим  $\varphi^{(0)}(z,t; p^{(0)})$ .
3. Вычислим градиент, по формуле (1.49), т.е. находим  $\nabla J(p^{(0)}(z))$ .
4. Вычислим очередное приближение  $p^{(n+1)}(z)$  по формуле (1.48).
5. Проверим значение функционала (1.47), если он достиг минимума то переход к пункту 6, если нет, то полагаем  $p^{(0)}(z) = p^{(n)}(z)$  и возврат к пункту 1.
6. Полагаем приближение  $p^{(n)}(z)$  – за приближенное решение обратной задачи.

*Оптимизационный метод решения обратной задачи 3 об определении пары функций  $\langle \varepsilon, \sigma \rangle$*

Конкретизируем постановку прямой задачи в области  $\Omega = [0, T] \times [0, L]$ . Найти  $v(z, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon v_u^{(i)} + \sigma v_t^{(i)} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v^{(i)}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \lambda_i^2 v^{(i)} - g(z, t) \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < z < L, \quad (1.70)$$

$$v^{(i)}|_{t=0} = 0, \quad v_t^i|_{t=0} = 0, \quad (1.71)$$

$$v_z^i|_{z=0} = \mu f^{(i)}(z), \quad v^{(i)}|_{z=L} = 0. \quad (1.72)$$

Здесь:  $i = 1, 2, \quad g(z, t) = \delta(z)\delta(t)$ .

Пусть относительно решения прямой задачи (1.70)–(1.72) известны дополнительные информации вида:

$$v^{(i)}(0, t; G) = F(t), \quad i = 1, 2, \quad \lambda = \lambda_1, \lambda_2. \quad (1.73)$$

где:  $G = (\varepsilon, \sigma), \quad F(t) = (f^{(1)}(t), f^{(2)}(t))$ .

*Обратная задача 3:* Найти пару функций  $G = (\varepsilon, \sigma)$  и соответствующей ей пару функции  $V = (v^{\lambda_1}, v^{\lambda_2})$  как решение системы (1.70)–(1.72), по известной пары дополнительной информации (1.73). Предполагается, что известны функции:  $\mu, g$  и  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Пусть пара функций  $Q = \langle p(z), q(z) \rangle$ , есть приближенное решение обратной задачи 3.

Введем в рассмотрение квадратичный функционал:

$$J(\langle p, q \rangle) = \sum_{i=1}^2 \int_0^T [v^{(i)}(0, t; \langle p, q \rangle) - f^{(i)}(t)]^2 dt. \quad (1.74)$$

Минимизируем функционал (1.74) методом наискорейшего спуска. Пусть известно приближение  $Q^{(n)} = \langle p^{(n)}(z), q^{(n)}(z) \rangle$ , последующие приближения определим из

$$Q^{(n+1)}(z) = Q^{(n)}(z) - \alpha_n \nabla J(Q^{(n)}). \quad (1.75)$$

Здесь  $\alpha_n$  – коэффициент спуска, а  $\nabla J(Q^{(n)}) = (\nabla J_p, \nabla J_q)$  – градиент функционала (1.74).

**Теорема 1.3.** Пусть коэффициенты уравнения (1.70) и функции  $F(t)$  непрерывные функции, тогда градиент функционала (1.74) есть главная часть приращения функционала  $\Delta J(Q) = \langle \nabla J, \delta Q \rangle_{L_2} + o(\|\delta Q\|_{L_2}^2)$  и имеет вид:

$$\nabla J(Q) = (\nabla J_1(p), \nabla J_2(q)), \quad (1.76)$$

где:

$$\begin{aligned}\nabla J_1(p) &= \int_0^T v_u^{(1)}(z,t) \varphi^{(1)}(z,t) dt + \int_0^T v_t^{(1)}(z,t) \varphi^{(1)}(z,t) dt, \\ \nabla J_2(q) &= \int_0^T v_u^{(2)}(z,t) \varphi^{(2)}(z,t) dt + \int_0^T v_t^{(2)}(z,t) \varphi^{(2)}(z,t) dt.\end{aligned}$$

Здесь функция  $\varphi(z,t)$  – есть решение вспомогательной (сопряженной) задачи:

$$p(z) \varphi_u^{(i)}(z,t) - q(z) \varphi_t^{(i)}(z,t) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)} \right) + \frac{1}{\mu} \lambda_{(i)}^2 \varphi^{(i)} = 0, \quad (1.77)$$

$$\varphi^{(i)}(z,T) = 0, \quad \varphi_t^{(i)}(z,t)|_{t=T} = 0, \quad (1.78)$$

$$\frac{1}{\mu z} \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)} \Big|_{z=0} = 2[v^{(i)}(0,t; \langle p, q \rangle) - f^{(i)}(t)], \quad i=1, 2, \quad (1.79)$$

$$\varphi^{(i)}(L,t) = 0. \quad (1.80)$$

**Доказательство.** Зададим приращение  $Q + \delta Q$ , где  $\delta Q = \langle \delta p, \delta q \rangle$ , и

$$\delta U = U(z,t; Q + \delta Q) - U(z,t; Q),$$

где  $\delta U = \langle \delta U^{(1)}, \delta U^{(2)} \rangle$ .

Нетрудно убедиться, что приращение функционала (1.74), примет вид:

$$\Delta J(Q) = 2 \int_0^T [U(0,t; Q) - F(t)] \delta U(0,t) + 0 \left( \|\delta U\|_{L_2(0,T)}^2 \right).$$

Для приращения  $\delta U$  имеет место:

$$p \delta v_u^{(i)} + q \delta v_t^{(i)} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \delta v^{(i)}}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \lambda_i^2 \delta v^{(i)} - g - \delta p v_u^{(i)} - \delta q v_t^{(i)}, \quad (1.81)$$

$$0 < t \leq T, \quad 0 < z < L, \quad i=1, 2,$$

$$\delta v^{(i)}|_{t=0} = 0, \quad \delta v_t^i|_{t=0} = 0, \quad (1.82)$$

$$\delta v_z^i|_{z=0} = 0, \quad \delta v^{(i)}|_{z=L} = 0. \quad (1.83)$$

Далее умножим обе части системы (1.81) на  $\varphi = (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$  и интегрируем по  $z$  от 0 до  $L$  и по  $t$  от 0 до  $T$ , имеем:

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \int_0^T [p \delta v_u^{(i)} \varphi^{(i)}(z, t) + z \delta v_t^{(i)} \varphi^{(i)}(z, t)] dt dz = \\
& = \int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial (\delta v^{(i)})}{\partial z} \right) \varphi^{(i)}(z, t) dz dt - \int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta v^{(i)} \varphi^{(i)}(z, t) dz dt - \\
& - \int_0^L \delta p(z) \int_0^T v_u^{(i)}(z, t) \varphi^{(i)}(z, t) dt dz - \int_0^L \delta q(z) \int_0^T v_t^{(i)}(z, t) \varphi^{(i)}(z, t) dt dz
\end{aligned} \tag{1.84}$$

Обозначим левую часть через  $I_1$ , а слагаемые правой части через  $I_2, I_3, I_4, I_5$  соответственно и преобразуем их, применив формулу интегрирование по частям:

$$\begin{aligned}
I_1 = & \int_0^L \left[ p \delta v_t^{(i)}(z, t) \varphi^{(i)}(z, t) \Big|_0^T - p \delta v^{(i)}(z, t) \varphi_t^{(i)}(z, t) + \right. \\
& \left. + \int_0^T p \delta v^{(i)}(z, t) \varphi_u^{(i)}(z, t) dt + q(z) \delta v(z, t) \varphi(z, t) \Big|_0^T - \int_0^T q \delta v^{(i)}(z, t) \varphi_t^{(i)}(z, t) dt \right] dz.
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.82), и полагая, что

$$\varphi^{(i)}(z, T) = 0, \quad \varphi_t^{(i)}(z, t) \Big|_{t=T} = 0,$$

получим

$$I_1 = \int_0^L \int_0^T \delta v^{(i)}(z, t) p(z) \varphi_u^{(i)}(z, t) dt dz - \int_0^L \int_0^T q(z) \delta v^{(i)}(z, t) \varphi_t^{(i)}(z, t) dt dz$$

Преобразуем слагаемое правой части, т.е.

$$\begin{aligned}
I_2 = & \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial (\delta v^{(i)})}{\partial z} \varphi^{(i)}(z, t) \Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{\mu} \frac{\partial (\delta v^{(i)})}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)}(z, t) dz \right] dt = \\
= & \int_0^T \left[ \frac{1}{\mu} \frac{\partial \delta v^{(i)}}{\partial z} \varphi^{(i)}(z, t) \Big|_0^L - \frac{1}{\mu} \delta v^{(i)}(z, t) \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)}(z, t) \Big|_0^L + \int_0^L \frac{1}{\mu} \delta v^{(i)}(z, t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)}(z, t) \right) dz dt \right].
\end{aligned}$$

Учитывая условие (1.83) и полагая

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu z} \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)} \Big|_{z=0} & = 2[v^{(i)}(0, t; \langle p, q \rangle) - f^{(i)}(t)], \quad i = 1, 2, \\
\varphi^{(i)}(L, t) & = 0.
\end{aligned}$$

Получим, что

$$I_2 = 2 \int_0^T \delta v^{(i)}(0, t) [v^{(i)}(0, t; \langle p, q \rangle) - f^{(i)}(t)] dt + \int_0^T \int_0^L \frac{1}{\mu} \delta v^{(i)}(z, t) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)}(z, t) \right) dz dt$$

Выражения для  $I_3, I_4, I_5$  имеет вид:

$$I_3 = - \int_0^L \int_0^T \frac{1}{\mu} \lambda_{(i)}^2 \delta v^{(i)}(z, t) \varphi^{(i)}(z, t) dz dt,$$

$$I_4 = - \int_0^L \delta p(z) \int_0^T v_u^{(i)}(z, t) \varphi_{(i)}(z, t) dt dz,$$

$$I_5 = - \int_0^L \delta q(z) \int_0^T v_u^{(i)}(z, t) \varphi^{(i)}(z, t) dt dz.$$

Подставляя полученные выражения для  $I_i, i=1, 2, 3, 4, 5$  в исходное соотношение (1.84) и полагая что

$$p(z) \varphi_u^{(i)}(z, t) - q(z) \varphi_t^{(i)}(z, t) - \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \varphi^{(i)} \right) + \frac{1}{\mu} \lambda_{(i)}^2 \varphi^{(i)} = 0,$$

а также учитывая определение, что главная часть приращения функционала есть градиент, т.е.

$$\nabla J(Q) = (\nabla J_1(p), \nabla J_2(q)),$$

где

$$\nabla J_1(p) = \int_0^T v_u^{(1)}(z, t) \varphi^{(1)}(z, t) dt + \int_0^T v_t^{(1)}(z, t) \varphi^{(1)}(z, t) dt,$$

$$\nabla J_2(q) = \int_0^T v_u^{(2)}(z, t) \varphi^{(2)}(z, t) dt + \int_0^T v_t^{(2)}(z, t) \varphi^{(2)}(z, t) dt.$$

Таким образом, в процессе вывода формулы для градиента функционала, мы получили соответствующую ей вспомогательную задачу (1.77)–(1.80). Что требовалось доказать.

Запишем алгоритм решения обратной задачи 3 об определении пары функций  $\langle \varepsilon, \sigma \rangle$ .

1. Задаем начальное приближение  $Q^{(0)} = \langle p^{(0)}(z), q^{(0)}(z) \rangle$  и решаем систему (1.70)–(1.72), получим  $v_{(0)}^{(0)}(0, t; \langle p^{(0)}, q^{(0)} \rangle)$ .

2. Вычислим краевое условие (1.79), и решим сопряженную задачу (1.77)–(1.80), находим  $\varphi_{(0)}^{(i)}(0, t; \langle p^{(0)}, q^{(0)} \rangle)$ .

3. Вычислим градиент функционала по формуле (1.76), т.е. находим  $\nabla J(Q^{(0)})$ .

4. Вычисляем очередное приближение  $Q^{(n+1)}$  по формуле (1.75).

5. Проверяем значение функционала (1.74), если он достиг минимума, то переход к пункту 6, если нет, то полагаем  $Q^{(0)} = Q^{(n+1)}$  и возврат к пункту 1.

6. Полагаем приближение  $Q^{(n)}$  – за приближенное решение обратной задачи.

### 1.3 Условная устойчивость решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики

Перейдем к изучению условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики. В области  $\{x_3 > 0\}$  – земля, рассмотрим (конкретизируем) следующую постановку прямой задачи

$$\tilde{v}_{tt} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \tilde{v}_t = \frac{1}{\mu \varepsilon} \tilde{v}_{x_3 x_3} - \frac{\lambda^2}{\mu \varepsilon} \tilde{g}_\lambda \delta(x_3, t), \quad x_3 > 0, \quad x_3 \in R^1, \quad (1.85)$$

$$\tilde{v}|_{t=0} = 0, \quad \tilde{v}_t|_{t=0} = 0, \quad (1.86)$$

$$\frac{1}{\mu} \tilde{v}_{x_3}(0, t) = f_{(2)}(t), \quad (1.87)$$

$$\tilde{v}(0, t) = f_{(1)}(t). \quad (1.88)$$

Здесь:

$\lambda$  – параметр Фурье;

$$\tilde{v}(x, t) = F_{x_1}[E_2(x_1, 0, x_3, t)]; \quad f_{(1)}(t) = F_{x_1}[\varphi_{(1)}(x_1, t)]; \quad f_{(2)}(t) = F_{x_1}\left[\frac{\partial}{\partial t} \varphi_{(2)}(x_1, t)\right] - \text{образы}$$

Фурье соответственно.

*Прямая задача:* По известным значениям  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  найти  $\tilde{v}(x_3, t)$  как решение смешанной задачи (1.85)-(1.87).

*Обратная задача:* Найти  $\sigma(x_3)$ ,  $\tilde{v}(x_3, t)$  из (1.85)-(1.87) по известной  $f_{(1)}(t)$  при фиксированном  $\lambda = \lambda_0$ .

Для исследования условной устойчивости обратной задачи геоэлектрики удобно перейти к интегральной постановке.

Вначале выпрямим характеристики, для этого предварительно введем обозначения:  $b(x_3) = \frac{1}{\mu \varepsilon(x_3)}$ ,  $a(x_3) = \frac{\sigma(x_3)}{\varepsilon(x_3)}$ , и перейдем к новой переменной:

$$z = z(x_3) = \int_0^{x_3} \sqrt{\mu \varepsilon(\xi)} d\xi, \quad x_3 = \omega(z) \text{ и к новым функциям:}$$

$$a(z) = \frac{\sigma(\omega(z))}{\varepsilon(\omega(z))}, \quad b(z) = \frac{1}{\mu \varepsilon(\omega(z))},$$

$$u(z,t) = v(\omega(z),t), \quad j_0 = -g(\lambda) \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon(0)}}.$$

Тогда (1.85)-(1.88) примет вид:

$$u_{tt}(z,t) = u_{zz}(z,t) - a(z)u_t(z,t) - \frac{b'(z)}{b(z)}u_z(z,t) - (\lambda b(z))^2 u(z,t), \quad (1.89)$$

$$u|_{t<0} = 0, \quad u_t|_{t<0} = 0, \quad (1.90)$$

$$\frac{1}{\mu}u_z(0,t) = f_{(2)}(t), \quad (1.91)$$

$$u(0,t) = f_{(1)}(t). \quad (1.92)$$

В дальнейшем получим уравнение (1.89) без производной  $u_z$ , для этого положим, что

$$u(z,t) = G(z)v(z,t).$$

Вычислим производные:

$$\begin{cases} u_z = G'v + Gv_z, \\ u_{zz} = G''v + 2G'v_z + Gv_{zz}, \\ u_t = Gv_t, \quad u_{tt} = Gv_{tt}. \end{cases} \quad (1.93)$$

Подставим (1.93) в (1.89), получим

$$Gv_{tt} = G''v + 2G'v_z + Gv_{zz} - a(z)Gv_t - \frac{b'}{b}(G'v + Gv_z) - (\lambda b)^2 Gv.$$

Сгруппируем, получим

$$v_{tt} = v_{zz} + \left(2\frac{G'}{G} - \frac{b'}{b}\right)v_z - a(z)v_t + \left(\frac{G''}{G} - \frac{b'}{b}\frac{G'}{G} - (\lambda b)^2\right)v.$$

Положим, что

$$2\frac{G'}{G} - \frac{b'}{b} = 0, \quad (1.94)$$

$$g(z) = \frac{G''}{G} - \frac{b'}{b}\frac{G'}{G} - (\lambda b)^2. \quad (1.95)$$

Окончательно имеем

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{zz} - a(z)v_t + g(z)v, \\ v|_{t<0} = 0, \quad v_t|_{t<0} = 0, \\ \frac{1}{\mu} v_z(0, t) = f_{(2)}(t), \\ v(0, t) = f_{(1)}(t). \end{cases}$$

Из (1.94) имеем

$$\begin{aligned} \frac{G'}{G} &= \frac{b'}{2b}; \quad (\ln G)' = (\ln \sqrt{b})' \\ \ln G &= \ln \sqrt{b} + \ln S(0), \quad S(0) = 1 \\ G(z) &= \sqrt{b(z)}. \end{aligned} \tag{1.96}$$

Таким образом, функция  $g(z)$  однозначно определяется из (1.95) с помощью формулы (1.96).

Для исследования устойчивости рассмотрим задачу с сосредоточенным источником:

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{zz} - a(z)v_t + g(z)v, \\ v|_{t<0} &= 0, \quad v_t|_{t<0} = 0, \\ v_z(0, t) &= \gamma \delta(t), \\ v(0, t) &= f(t). \end{aligned}$$

В области  $\Delta(l) = \{(z, t) | 0 < |z| < t < l\}$  рассмотрим обратную задачу с данными на характеристиках:

$$v_{tt}(z, t) = v_{zz}(z, t) - Pv(z, t), \quad (z, t) \in \Delta l, \tag{1.97}$$

$$v(z, z) = S(z), \quad 0 \leq z \leq l, \tag{1.98}$$

$$v(0, t) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2l, \tag{1.99}$$

$$v_z(0, t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 2l. \tag{1.100}$$

Здесь:

$$\begin{aligned} Pv(z, t) &= a(z)v_t(z, t) + q(z)v(z, t), \\ f(t) &= f_{(1)}(t), \quad \varphi(t) = \mu f_{(2)}(t). \end{aligned} \tag{1.101}$$

Считаем, что функция  $a(z)$  искомая, а функцию  $q(z)$  известной.

Функция  $S(z)$  есть решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$S(z) = \frac{1}{2}\gamma_0 - \frac{1}{2}\int_0^z a(\xi)S(\xi)d\xi, \quad z \in (0, l). \quad (1.102)$$

Обращая в (1.97) оператор  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  с учетом (1.99), (1.100), получим:

$$v(z, t) = \Phi(z, t) + A_{t,z}[Pv] \quad (z, t) \in \Delta(l). \quad (1.103)$$

Здесь обозначено:

$$\Phi(z, t) = \frac{1}{2}[f(t+z) + f(t-z)] + \frac{1}{2}\int_{t-z}^{t+z} \varphi(\xi) d\xi,$$

$$A_{t,z}[v] = \frac{1}{2}\int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} v(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

(1.103) — есть формула Даламбера. Так как в операторе  $Pv(z, t) = a(z)v_t(z, t) + g(z)v(z, t)$  присутствуют производная по  $t$ , коэффициент  $a$  необходимо получить интегральные уравнения относительно их.

Продифференцируем (1.103) по  $t$ , получим:

$$v_t(z, t) = \Phi_t(z, t) + \frac{1}{2}\int_0^z [Pv(\xi, t+z-\xi) - Pv(\xi, t-z+\xi)] d\xi. \quad (1.104)$$

Положим в (1.103)  $t = z + 0$  и воспользуемся условием (1.98), имеем:

$$S(z) = \Phi(z, z+0) + A_{z+0,z}[Pv].$$

Продифференцируем обе части полученного равенства по  $z$ :

$$S'(z) = \Phi'(z, z+0) + \int_0^z Pv(\xi, 2z-\xi) d\xi.$$

Нетрудно установить, что функция  $q(z) = [S(z)]^{-1}$  удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$q(z) = \gamma^{-1} + \frac{1}{2}\int_0^z a(\xi)q(\xi) d\xi, \quad \gamma = \gamma_0/2. \quad (1.105)$$

С учетом этого, и соотношения  $a(z) = 2S'(z)/S(z)$ , получим:

$$a(z) = 2 \left[ \Phi'(z, z+0) + \int_0^z P v(\xi, 2z - \xi) d\xi \right] \cdot \left[ \gamma^{-1} + \frac{1}{2} \int_0^z a(\xi) q(\xi) d\xi \right]. \quad (1.106)$$

Таким образом, мы получили замкнутую систему интегральных уравнений (1.103), (1.104), (1.105), (1.106).

Запишем эту систему в векторной форме:

$$Y = F + K(Y), \quad (1.107)$$

где:

$$\begin{aligned} Y(z, t) &= (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)^T, \\ F(z, t) &= (F_1, F_2, F_3, F_4)^T, \\ K(Y) &= (K_1(Y), K_2(Y), K_3(Y), K_4(Y))^T, \\ Y_1(z, t) &= v(z, t), \quad Y_2(z, t) = v_t(z, t), \\ Y_3(z) &= q(z), \quad Y_4(z) = a(z). \\ F_1(z, t) &= \Phi(z, t), \quad F_2(z, t) = \Phi_t(z, t), \\ F_3 &= \gamma_0^{-1}, \quad F_4(z) = \chi(z), \quad \text{где } \chi(z) = 2\gamma^{-1}\Phi'(z, z+0), \\ K_1(Y) &= \frac{1}{2} \int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} PY(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (z, t) \in \Delta(l), \\ K_2(Y) &= \frac{1}{2} \int_0^z [PY(\xi, t+z-\xi) - PY(\xi, t-z+\xi)] d\xi, \\ K_3(Y) &= \frac{1}{2} \int_0^z Y_4(\xi) Y_3(\xi) d\xi, \\ K_4(Y) &= \Phi'(z, z+0) \int_0^z Y_4(\xi) Y_3(\xi) d\xi + 2 \int_0^z PY(\xi, 2z-\xi) d\xi \cdot \left( \gamma^{-1} + \frac{1}{2} \int_0^z Y_4(\xi) Y_3(\xi) d\xi \right). \end{aligned}$$

Здесь

$$PY(z, t) = Y_4(z) \cdot Y_2(z, t) - q(z) Y_1(z, t).$$

Считаем, что  $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) \in L_2(l)$ , если

$$Y_j(z, t) \in L_2(\Delta(l)), \quad j = 1, 2;$$

$$Y_j(z) \in L_2(0, l), \quad j = 3, 4.$$

Пусть  $Y^{(j)} = (Y_1^{(j)}(z, t), Y_2^{(j)}(z, t), Y_3^{(j)}(z), Y_4^{(j)}(z))^T$ ,  $j = 1, 2$ .

Определим скалярное произведение и норму:

$$\langle Y^{(1)}, Y^{(2)} \rangle = \sum_{k=1}^2 \int_0^l \int_z^{2l-z} Y_k^{(1)}(z, t) Y_k^{(2)}(z, t) dt dz + \sum_{k=3}^4 \int_0^l Y_k^{(1)}(z) Y_k^{(2)}(z) dz$$

$$\|Y\|^2 = \langle Y, Y \rangle.$$

**Обратная задача:** Найти вектор  $Y \in L_2(\Delta(l))$  из (1.107) по известному  $F \in L_2(l)$ .

Перейдем к изучению  $H_1$  - условной устойчивости, по аналогии как в работе [85], исследованной для обратной задачи акустики.

Пусть известно, что  $\|a\|_{L_2(0,l)}^2 = M_1$ ,  $\|f\|_{L_2(0,l)}^2 + \|f'\|_{L_2(0,l)}^2 = M_2$ ,  $\|\varphi\|_{L_2(0,l)}^2 = M_3$ ,  $\|q\|_{L_2(0,l)}^2 = M_4$ .

Определим  $\sum(l, M_i, a_*)$  как класс решений обратной задачи, например  $a(z) \in \sum(l, M_i, a_i, i = \overline{1, n})$ , если  $a(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$1. a(z) \in H_1(0, l), \quad 2. \|a\|_{H_1(0,l)} \leq M_1, \quad 3. 0 < a_* \leq a(z), \quad x \in (0, l).$$

Определим  $F(l, M_2, M_3, M_4, k_0)$  как класс исходных данных, например,  $f \in F(l, Q, k_0)$ , если  $f$  удовлетворяет следующим условиям:

$$1. f \in H_1(0, 2l), \quad 2. \|f\|_{H_1(0,2l)} \leq M_2, \quad 3. f(+0) = k_0, \quad \|\varphi\|_{H_1(0,2l)} \leq M_3.$$

Предположим, что для  $f^{(1)}, f^{(2)} \in F(l, M_2, M_3, M_4, k_0)$  существуют  $a^{(1)}, a^{(2)}$  из  $\sum(l, M_1, a_*)$ , удовлетворяющих обратной задаче:

$$\begin{aligned} v_u^{(j)}(z, t) &= v_{zz}^{(j)}(z, t) - P v^{(j)}(z, t), & (z, t) \in \Delta(l), \\ v^{(j)}(z, z) &= S^{(j)}(z), & 0 \leq z \leq l, \\ v^{(j)}(0, t) &= f^{(j)}(t), & v_z(0, t) = \varphi^{(j)}(t), & 0 \leq t \leq 2l. \end{aligned}$$

для  $j = 1, 2$  соответственно.

Здесь:

$$\begin{aligned} P v^{(j)}(z, t) &= a^{(j)}(z) v_t^{(j)}(z, t) + g(z) v^{(j)}(z, t) \\ f^{(j)}(t) &= f_{(1)}^{(j)}(t), \quad \varphi^{(j)}(t) = \mu f_{(2)}^{(j)}(t) \end{aligned}$$

Считаем, что функция  $g(z)$  известна, а  $a^{(j)}(z)$  - искомая,  $j = 1, 2$ . Запишем раннее полученную замкнутую систему в векторной форме:

$$Y^{(j)} = F^{(j)} + K(Y^{(j)}), \quad j = 1, 2. \quad (1.108)$$

где:

$$\begin{aligned} Y^{(j)} &= (Y_1^{(j)}, Y_2^{(j)}, Y_3^{(j)}, Y_4^{(j)})^T, \\ F^{(j)} &= (F_1^{(j)}, F_2^{(j)}, F_3^{(j)}, F_4^{(j)})^T, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

и отдельно компоненты:

$$\begin{aligned}
Y_1^{(j)}(z, t) &= v^{(j)}(z, t), & Y_2^{(j)}(z, t) &= v_t^{(j)}(z, t) \\
Y_3^{(j)}(z) &= q(z), & Y_4^{(j)}(z) &= a^{(j)}(z). \\
F_1^{(j)}(z, t) &= \Phi^{(j)}(z, t), & F_2^{(j)}(z, t) &= \Phi_t^{(j)}(z, t), \\
F_3 &= j^{-1}, & F_4(z) &= \chi^{(j)}(z), \quad j = 1, 2,
\end{aligned}$$

а также оператор

$$\begin{aligned}
K_1(Y^{(j)}) &= \frac{1}{2} \int_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} P Y^{(j)}(\xi, \tau) d\tau d\xi, \quad (z, l) \in \Delta(l), \\
K_2(Y^{(j)}) &= \frac{1}{2} \int_0^z [P Y^{(j)}(\xi, t+z-\xi) - P Y^{(j)}(\xi, t-z+\xi)] d\xi, \\
K_3(Y^{(j)}) &= \frac{1}{2} \int_0^z Y_4^{(j)} Y_3^{(j)} d\xi, \\
K_4(Y^{(j)}) &= \Phi'^{(j)}(z, z+0) \int_0^z Y_4^{(j)}(\xi) Y_3^{(j)}(\xi) d\xi + \\
&\quad + 2 \int_0^z P Y^{(j)}(\xi, 2z-\xi) d\xi \cdot \left( \gamma^{-1} + \frac{1}{2} \int_0^z Y_4^{(j)}(\xi) Y_3^{(j)}(\xi) d\xi \right).
\end{aligned}$$

Здесь обозначено  $P Y^{(j)}(z, t) = Y_4(z) Y_2(z, t) - g(z) Y_1(z, t)$ .

**Теорема 1.4.** *Предположим, что для  $F^{(j)} \in L_2(l)$ ,  $j = 1, 2$  существует  $Y^{(j)} \in L_2(\Delta(l))$ ,  $j = 1, 2$ , как решение обратной задачи*

$$Y^{(j)}(z, t) = F^{(j)}(z, t) + K(Y^{(j)}), \quad j = 1, 2, \quad (z, t) \in \Delta(l),$$

тогда

$$\|Y^{(1)} - Y^{(2)}\|^2 \leq C \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_{H_1(0, 2l)}^2$$

где:

$$C = C(l, M_1, M_2, M_3, M_4, k_0). \quad (1.109)$$

**Доказательство.**

Введем:

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}(x, t) &= (\tilde{Y}_1(z, t), \tilde{Y}_2(z, t), \tilde{Y}_3(z), \tilde{Y}_4(z)) = Y^{(1)}(z, t) - Y^{(2)}(z, t). \\
\tilde{F}(z, t) &= F^{(1)}(z, t) - F^{(2)}(z, t).
\end{aligned}$$

Тогда из уравнения (1.108) следует, что

$$\tilde{Y}(z, t) = \tilde{F}(z, t) - K(\tilde{Y}), \quad (z, t) \in \Delta(l). \quad (1.110)$$

В векторном уравнении (1.110), оценим каждую компоненту в отдельности, принимая во внимание очевидные неравенства:  $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$  и  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \leq 2a+2b$  для  $a \geq 0, b \geq 0$ .

Получим цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}_1(z, t)| \leq & |\tilde{F}_1(z, t)| + \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^z |\tilde{Y}_3(\xi)|^2 d\xi} \times \left[ \sqrt{\int_0^z |Y_1^{(1)}(\xi, t+z-\xi)|^2 d\xi} + \sqrt{\int_0^z |Y_1^{(1)}(\xi, t-z+\xi)|^2 d\xi} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^z |Y_3^{(2)}(\xi)|^2 d\xi} \times \left[ \sqrt{\int_0^z |\tilde{Y}_1(\xi, t+z-\xi)|^2 d\xi} + \sqrt{\int_0^z |\tilde{Y}_2(\xi, t-z+\xi)|^2 d\xi} \right] \end{aligned}$$

Используя приведенное очевидное неравенство, получим:

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}_1(z, t)|^2 \leq & 3|\tilde{F}_1(z, t)|^2 + \frac{3}{2} \int_0^z |\tilde{Y}_3(\xi)|^2 d\xi \times \int_0^z \left[ |Y_1^{(1)}(\xi, t+z-\xi)|^2 + |Y_1^{(1)}(\xi, t-z+\xi)|^2 \right] d\xi + \\ & + \frac{3}{2} \int_0^z |Y_3^{(2)}(\xi)|^2 d\xi \times \int_0^z \left[ |\tilde{Y}_1(\xi, t+z-\xi)|^2 + |\tilde{Y}_2(\xi, t-z+\xi)|^2 \right] d\xi \end{aligned}$$

Переходим к введенным ранее нормам, имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}_1\|_{L_2(\Delta(t,z))}^2 & \leq 3\|\tilde{F}_1\|_{L_2(\Delta(t,z))}^2 + \\ & + \frac{3}{2} \int_0^z \int_{\xi}^{2l-\xi} \left\{ \int_0^{\xi} |\tilde{Y}_3(\xi')|^2 d\xi' \times \int_0^{\xi} \left[ |Y_1^{(1)}(\xi', \tau+\xi-\xi')|^2 + |Y_1^{(1)}(\xi', \tau-\xi+\xi')|^2 \right] d\xi' + \right. \\ & + \left. \int_0^{\xi} |Y_3^{(2)}(\xi')|^2 d\xi' \times \int_0^{\xi} \left[ |\tilde{Y}_1(\xi', \tau+\xi-\xi')|^2 + |\tilde{Y}_2(\xi', \tau-\xi+\xi')|^2 \right] d\xi' \right\} d\tau d\xi \leq \\ & \leq 3\|\tilde{F}_1\|_{L_2(\Delta(t,z))}^2 + 12Y_*^2 \int_0^z \int_0^{\xi} |\tilde{Y}_3(\xi')|^2 d\xi' d\xi + 12Y_*^2 \int_0^z \|\tilde{Y}_1\|_{L_2(\Delta(t,\xi))}^2 d\xi \end{aligned}$$

Здесь:  $Y_* = \max \{ \|Y^{(1)}\|, \|Y^{(2)}\| \}$ .

Оценим вторую компоненту из уравнения (1.110):

$$\begin{aligned} |\tilde{Y}_2(z)| \leq & \frac{1}{2} \int_0^z |Y_3^{(1)}(\xi) \tilde{Y}_2(\xi)| d\xi + \frac{1}{2} \int_0^z |Y_2^{(2)}(\xi) \tilde{Y}_3(\xi)| d\xi \leq \\ & \leq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^z |Y_3^{(1)}(\xi)|^2 d\xi} \sqrt{\int_0^z |\tilde{Y}_2(\xi)|^2 d\xi} + \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^z |Y_2^{(2)}(\xi)|^2 d\xi} \sqrt{\int_0^z |\tilde{Y}_3(\xi)|^2 d\xi} \end{aligned}$$

Откуда

$$\|\tilde{Y}_2\|_{L_2(0,z)}^2 \leq \frac{1}{2} Y_*^2 \int_0^z \left[ \|\tilde{Y}_2\|_{L_2(0,\xi)}^2 + \|\tilde{Y}_3\|_{L_2(0,\xi)}^2 \right] d\xi.$$

Оценим третью компоненту из (1.110), имеем:

$$\|\tilde{Y}_3\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \frac{1}{4} M_2 \int_0^z \left[ \|\tilde{Y}_3\|_{L_2(0,\xi)}^2 + M_3 \|\tilde{Y}_4\|_{L_2(0,\xi)}^2 \right] d\xi.$$

И наконец, для четвертой компоненты из (1.110), получим оценку:

$$|\tilde{Y}_4(z)| \leq |\tilde{F}_4(z)| + \sum_{i=1}^4 w_i, \quad (1.111)$$

$$w_1(z) = 2 \left| (f^{(1)})'(z) \right| \left| K_2(Y^{(1)}) - K_2(Y^{(2)}) \right|,$$

$$w_2(z) = \left| K_4(Y^{(1)}) - K_4(Y^{(2)}) \right|,$$

$$w_3 = \left| K_2(Y^{(1)}) \right| w_2(z),$$

$$w_4 = \left| K_4(Y^{(2)}) \right| \left| K_2(Y^{(1)}) - K_2(Y^{(2)}) \right|,$$

$$w_5 = \left| (f^{(1)})' - (f^{(2)})' \right| \left| K_2(Y^{(2)}) \right|,$$

$$K_4(Y) = \int_0^z Y_3(\xi) \Phi_1(\xi, 2z - \xi) d\xi.$$

Оценивая каждое слагаемое  $w_i(z)$ , и подставляя в (1.111), при этом используя очевидное неравенство:

$$\left( \sum_{k=1}^4 |b_k| \right)^2 \leq 4 \sum_{k=1}^4 |b_k|^2,$$

Получим,

$$\begin{aligned} \|\tilde{Y}_4(z)\|_{L_2(0,z)} &\leq v_0 \int_0^z [f'(2\xi)]^2 d\xi + \frac{1}{2} v_1 \|\tilde{Y}_1\|_{L_2(\Delta(l,z))} + \\ &+ \int_0^z v_3(\xi) \|\tilde{Y}_2\|_{L_2(0,\xi)} d\xi + \int_0^z v_3(\xi) \|\tilde{Y}_3\|_{L_2(0,\xi)} d\xi + \int_0^z v_4(\xi) \|\tilde{Y}_4\|_{L_2(0,\xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Собирая все оценки, полученные для четырех компонент (1.110) и для удобства обозначим:

$$\psi_1(z) = \|\tilde{Y}_1\|_{L_2(\Delta(l,z))}^2, \quad z \in (0, l)$$

тогда

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \psi_2(z) + \psi_3(z) + \psi_4(z),$$

и для функции  $\psi$ , получим оценку

$$\psi(z) \leq \eta + \int_0^z \sum_{i=1}^4 \gamma_i(\xi) \psi_i(\xi) d\xi,$$

где  $\eta = \eta(Y_*^2, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4)$ .

Введем новую функцию:

$$\nu(z) = \eta_* + \int_0^z \sum_{i=1}^4 \gamma_i(\xi) \psi_i(\xi) d\xi, \quad \eta < \eta_*, \text{ где } \eta_* - \text{const.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi(z) &\leq \nu(z), \\ \nu'(z) &= \sum_{i=1}^4 \gamma_i(z) Y_j(z) \leq \nu(z) \sum_{i=1}^4 \gamma_i(z) \\ \frac{\nu'(z)}{\nu(z)} &\leq \sum_{i=1}^4 \gamma_i(z) \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, получим:

$$\psi(z) \leq \nu(z) \leq \nu(0) \exp \left\{ \int_0^z \sum_{i=1}^4 \gamma_i(\xi) d\xi \right\} \quad (1.112)$$

$$\int_0^z \sum_{i=1}^4 \gamma_i(\xi) d\xi \leq 25Y_*^2 \times z + 12Y_*^2 \|f^{(1)}\|_{L_2(0,2l)}^2 + 12Y_*^4 + 12Y_*^2(12 + Y_*^2 \cdot z)$$

Тогда из (1.112), получим, что

$$\|Y^{(1)} - Y^{(2)}\|^2 \leq C \|f^{(1)} - f^{(2)}\|_{H_1(0,2l)},$$

где константа  $C > 0$ , и имеет вид (1.109).

Явное выражение для константы  $C$  в результате последовательных вычислений имеет вид:

$$C = \left[ 6l + 6M_1 \left( \frac{4}{k_0^2} + Y_*^4 \right) (1 + 12Y_*^2 l) \right] \times \\ \times \exp \left\{ Y_*^2 \left[ 24l + 8M_2 \left( \frac{4}{k_0^2} + Y_*^4 \right) (M_3 + 36Y_*^2 l) + 6M_2 \Phi^2 + 8M_4 Y_*^4 \right] \right\}.$$

#### 1.4 Оптимизационный метод решения обратной задачи в квазистационарном приближении

Если в системе уравнений Максвелла (1.9) токи смещения намного меньше токов проводимости, то квазистационарное приближение системы уравнения Максвелла имеет вид:

$$\begin{cases} -\operatorname{rot} H + \sigma E + j^{cm} = 0, & x_3 \neq 0, & (x_1, x_2, x_3) \in R^3, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H + \operatorname{rot} E = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (1.113)$$

Здесь:  $E = (E_1, E_2, E_3)^*$ ,  $H = (H_1, H_2, H_3)^*$  - векторы напряженности электрического и магнитного полей;  $\mu$  - магнитная проницаемость среды;  $\sigma$  - проводимость среды;  $j^{cm}$  - плотность сторонних токов.

Рассмотрим геофизическую модель среды состоящая из двух полупространств:  $R_-^3 = \{x \in R^3, x_3 < 0\}$  - воздух;  $R_+^3 = \{x \in R^3, x_3 > 0\}$  - земля.

Пусть источник стороннего тока  $j^{cm}$  имеет вид:

$$j^{cm} = (0, 1, 0)^* g(x_1) \delta(x_3) \theta(t), \quad (1.114)$$

где:  $g(x_1)$  - функция, описывающая поперечный размер источника,  $\delta(x_3)$  - дельта функция Дирака.

Задание стороннего тока в виде (1.114) соответствует мгновенному включению тока, параллельно оси  $x_2$ , по времени порядка 10-50 нс (наносекунд).

На границе  $x_3 = 0$ , коэффициенты  $\mu$ ,  $\sigma$  имеют конечный разрыв (в воздухе они постоянные  $\sigma = 0$ , а в земле считаем гладкими и ограниченными функциями), поэтому требуем выполнения условий:

$$E_j|_{x_3=0} = E_j|_{x_3=+0}, \quad H_j|_{x_3=0} = H_j|_{x_3=+0}, \quad j = 1, 2 \quad (1.115)$$

считаем, что до момента времени  $t = 0$  поле отсутствует:

$$(E, H)|_{t < 0} = 0, \quad j^{cm}|_{t < 0} = 0 \quad (1.116)$$

**Прямая задача:** Найти  $E = (E_1, E_2, E_3)^*$ ,  $H = (H_1, H_2, H_3)^*$  как решение задачи (1.113)-(1.116) при заданных коэффициентах  $\mu$ ,  $\sigma$ .

Пусть относительно решения прямой задачи известна дополнительная информация вида:

$$E_j|_{x_3=0} = f_j(t), \quad j = 1, 2 \quad (1.117)$$

Обратная задача состоит в определении  $\mu$ ,  $\sigma$  по известным (1.117) из соотношений (1.113)-(1.116).

**Лемма 1.2.** Пусть источник электромагнитных волн  $j^{cm}$  имеет вид:

$$j^{cm} = (0, 1, 0)^* g(x_1) \delta(x_3) \theta(t),$$

и распространения электромагнитных волн в среде описывается системой уравнения Максвелла (1.113), (1.114)-(1.16). При предположении, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменной  $x_2$ , в системе останутся ненулевыми только три компоненты  $E_2, H_1, H_3$ . и система сводится к уравнению относительно компоненты  $E_2$ .

**Доказательство.** Используя определения ротора, распишем систему уравнений Максвелла (1.113), окончательно получим систему из шести уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma E_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2} H_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} H_2, \\ \sigma E_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \gamma_2, \\ \sigma E_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} H_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} H_1, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_2} E_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} E_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} E_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} E_1 + \gamma_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} E_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} E_1. \end{aligned}$$

При предположении, что коэффициенты системы уравнений Максвелла не зависят от переменной  $x_2$ , и специальным выбором источника в виде (1.114), в системе останутся ненулевыми только три компоненты  $E_2, H_1, H_3$ .

$$\begin{aligned} \sigma E_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} H_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} H_1 + \gamma_2, \\ \mu \frac{\partial}{\partial t} H_1 &= \frac{\partial}{\partial x_3} E_2, \end{aligned} \quad (1.118)$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial t} H_3 = -\frac{\partial}{\partial x_1} E_2.$$

В системе (1.118) исключим две компоненты,  $H_1, H_3$ , следующим образом: дифференцируем первое уравнение системы (1.118) по  $t$  второе уравнение по  $x_3$  и наконец, третье уравнение по  $x_1$ . Выполнив эти преобразования, запишем окончательное уравнение:

$$\sigma \frac{\partial}{\partial t} E_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right), \quad x_3 > 0, t > 0, \quad (1.119)$$

$$E_2|_{t>0} = 0, \quad (1.120)$$

$$[E_2]_{x_3=0} = 0, \quad \left[ \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) \right]_{x_3=+0} = \mu \varphi(x_1) g'(t), \quad x_3 > 0, t > 0, \quad (1.121)$$

Что требовалось доказать.

**Прямая задача:** При заданных  $\mu, \sigma$  и стороннем токе  $j^{cm}$  найти  $E_2$  из соотношений (1.119)-(1.121).

Пусть относительно решения прямой задачи (1.119)-(1.121) известна дополнительная информация:

$$E_2|_{x_3=+0} = \varphi_{(1)}(x_1, t). \quad (1.122)$$

Условие (1.122) это след решения прямой задачи (1.119)-(1.121).

Поскольку  $\sigma(x_3) = 0$  в воздухе, то в полупространстве  $\{x_3 \leq 0\}$  рассмотрим уравнение эллиптического типа:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_1} E_2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial x_3} E_2 \right) = 0, \quad x_3 < 0.$$

Добавим к этой задаче условия (1.121).

Полагая, что функции  $\sigma(x)$  зависит от глубины  $x_3$ , и применяя преобразование Фурье  $F_{x_1}[x]$ , получим задачу:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v - \lambda^2 v = 0, \quad x_3 \in R_-, \quad (1.123)$$

$$[v]_{x_3=0} = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} v \right]_{x_3=0} = \mu b_\lambda g'(t), \quad (1.124)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad (1.125)$$

$$\sigma(x_3) \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v - \frac{1}{\mu} \lambda^2 v, \quad x_3 \in R_+, \quad (1.126)$$

здесь:  $v = F_{x_1}[E_2(x_1, x_3, t)]$ ,  $b_\lambda = F_{x_1}[b(x_1)]$  - образы Фурье преобразований функции  $E_2$  и  $b(x_1)$ .

Будем рассматривать прямую и обратную задачу только при  $x_3 > 0$  с условием на границе  $x_3 = 0$  вида:

$$(v_{x_3} - |\lambda|v)_{x_3=0} = \mu b_\lambda g'(t). \quad (1.127)$$

Поясним вывод этого условия. Запишем общее решение уравнения (1.123):

$$v(x_3) = C_1 \exp\{-|\lambda|x_3\} + C_2 \exp\{\lambda|x_3\}, \quad x_3 \in R_+$$

Условию затухания решения при  $x_3 \rightarrow -\infty$  соответствует  $C_1 = 0$ .

Из условий сопряжений (1.124) имеем

$$\begin{aligned} C_2 \exp\{\lambda|x_3\} \Big|_{x_3=0} &= v \Big|_{x_3=+0}, \\ |\lambda| C_2 \exp\{\lambda|x_3\} \Big|_{x_3=0} &= \frac{\partial}{\partial x_3} v \Big|_{x_3=+0} - \mu b_\lambda g'(t). \end{aligned}$$

откуда, исключая константу  $C_2$ , получим условие (1.127).

**Прямая задача:** Найти функцию удовлетворяющую условию (1.127) и начальному условию (1.125) и уравнению (1.126).

Пусть относительно решения прямой задачи известна дополнительная информация:

$$v(0, t; \sigma) = f(t), \quad t > 0, \quad (1.128)$$

**Обратная задача:** Найти в области  $\{x_3 > 0\}$  коэффициент  $\sigma(x_3)$  и функцию  $v(x_3, t)$  из соотношений (1.126)-(1.127) по известной (1.128).

Для численных расчётов ограничимся конечной областью  $x_3 \in (0, l)$ .

Если считать параметр  $l$  достаточно большим, учитывая при этом условия убывания  $v(x_3, t)$  при  $x_3 \rightarrow \infty$ , то

$$v \Big|_{x_3=l} = 0.$$

Граничное условие при  $x_3 = l$  можно аппроксимировать значительно точнее:

$$(v_{x_3} + |\lambda|v)_{x_3=l} = 0. \quad (1.129)$$

Условие (1.129) легко получить по аналогии с выводом (1.127).

Применим оптимизационный метод для решения обратной задачи в квазистационарном приближении.

Конкретизируем постановку рассматриваемой задачи. Требуется в области  $Q = [0, l] \times [0, T]$  найти решение следующей задачи:

$$\sigma(x_3) \frac{\partial}{\partial t} v = \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} v - \frac{1}{\mu} \lambda^2 v, \quad (x_3, t) \in Q, \quad (1.130)$$

$$v(x_3, 0) = 0, \quad x_3 \in (0, l), \quad (1.131)$$

$$(v_{x_3} - |\lambda|v)_{x_3=0} = \mu b_\lambda g'(t), \quad (1.132)$$

$$v(l, t) = 0, \quad t \in (0, T). \quad (1.133)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (1.130)-(1.133) известна дополнительная информация:

$$v(0, t; \sigma) = f(t).$$

Приведем задачу (1.162)-(1.165) к удобному виду для численной реализации.

Введем новые переменные [84, с. 186]:

$$z = \theta(x_3), \quad \theta(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{1}{c(\xi)} d\xi, \quad c^2(x_3) = \frac{1}{\mu \delta(x_3)}$$

и новые функции

$$S(z) = \left[ \frac{c(x_3)}{c(0)} \right]^{1/2}, \quad u(z, t) = v(x_3, t), S(z).$$

Тогда задача (1.130)-(1.133) примет вид:

$$u_t = u_{zz} - a(z)u, \quad z \in (0, L), \quad (1.134)$$

$$\left[ u_z - \frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu \delta(+0)}} u \right]_{z=0} = \mu b_\lambda g'(t), \quad (1.135)$$

$$u(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \quad (1.136)$$

$$u(z, 0) = 0, \quad z \in (0, L), \quad L = \theta(l). \quad (1.137)$$

Дополнительные информации имеет вид:

$$u(0,t;a) = f(t), \quad t \in (0,T). \quad (1.138)$$

Обратную задачу об определении функции  $a(z)$  по известной (1.138) будем решать оптимизационным методом.

Пусть  $q(z)$  - приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал:

$$J(q) = \int_0^T [u(0,t;q) - f(t)]^2 dt. \quad (1.139)$$

Минимизируем функционал (1.139) методом наискорейшего спуска. Пусть известно приближение  $q^{(n)}(z)$ , последующие приближения определим из:

$$q^{(n+1)}(z) = q^{(n)}(z) - \alpha_n \nabla J(q^{(n)}). \quad (1.140)$$

Здесь  $\alpha_n$  – коэффициент спуска, который можно определить как в [44, с. 67-68], а  $\nabla J(q^{(n)})$  – градиент функционала.

**Теорема 1.5.** Пусть коэффициенты уравнения (1.134) и функция  $f(t)$  непрерывные функции, тогда градиент функционала (1.139) есть главная часть приращения функционала  $\Delta J(q) = \langle \nabla J, \delta q \rangle_{L_2} + o(\|\delta q\|_{L_2}^2)$  и имеет вид:

$$\nabla J(q) = \int_0^T u(z,t) \psi(z,t) dt, \quad (1.141)$$

где функция  $\psi(z,t)$  - есть решение вспомогательной (сопряженной) задачи:

$$\psi_t = -\psi_{zz} + q(z)\psi, \quad (z,t) \in Q, \quad (1.142)$$

$$\psi(z,T) = 0, \quad z \in (0,L), \quad (1.143)$$

$$\left[ \psi_z - \frac{|\lambda|}{\sqrt{\mu\delta(+0)}} \psi \right]_{z=0} = -2[u(0,t;q) - f(t)], \quad t \in (0,T), \quad (1.144)$$

$$\psi(L,t) = 0. \quad (1.145)$$

Схема доказательства этой теоремы аналогична доказательству теорем 1.1, теоремы 1.2.

Приведем общую схему оптимизационного метода на дифференциальном уровне:

1. Задаем начальное приближение  $q^{(0)}(z)$ , и решаем прямую задачу (1.134)–(1.137) полагая в ней  $q(z) = q^{(0)}(z)$ , находим  $u^{(0)}(z,t; q^{(0)}(z))$ .

2. Вычисляем значение функционала (1.139), если он достиг минимума, то примем  $q^{(0)}(z)$  за приближенное решение обратной задачи, если нет, то далее.

3. Вычисляем краевое условие (1.144) и при  $q(z) = q^{(0)}(z)$ , и решаем задачу (1.142)–(1.145), получим ее решение  $\psi^{(0)}(z, t; q^{(0)}(z))$ .
4. Вычисляем градиент функционала из (1.141), получим  $\nabla J(q^{(0)}(z))$ .
5. По формуле (1.140), находим очередное приближение  $q^{(1)}(z)$ .
6. Вновь вычисляем значение функционала (1.139), если он достиг минимума, то полагаем в качестве приближенного решения функцию  $q(z) = q^{(1)}(z)$ , если нет, то полагая  $q^{(0)}(z) = q^{(1)}(z)$ , возвращаемся к пункту 3.

**Замечание.** При описании алгоритма оптимизационного метода на дифференциальном уровне, мы полагаем, что решение прямой задачи и сопряженной задачи в классическом смысле существует, единственно и устойчиво. Также полагаем, что для решения прямой и сопряженной задач применяются классические методы их решения.

## 2 ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОЭЛЕКТРИКИ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

В данном разделе рассматривается уравнение геоэлектрики в частотной области. Постановка задачи следует из уравнения геоэлектрики с применением преобразования Лапласа по переменной  $t$ . В случае слоистых сред возможно применения аналитических методов. В связи с этим использован известный метод послойного пересчета для уравнения Риккати, например этот метод изложен в работах А.Л.Карчевского [39-42].

В этом подразделе алгоритм послойного пересчета применен для обратной задачи геоэлектрики в частотной области, в случае когда неизвестны мощности слоев и их значения в слоях. Для обратной задачи геоэлектрики в частотной области доказано существование производной функционала невязки по координате точки разрыва среды, и получены аналитические выражения для этой производной [67]. Модель среды – горизонтально-слоистая.

### 2.1 Постановка обратной задачи в частотной области

Приведем постановку обратной задачи в частотной области, рассмотренной в работе [41-42].

Рассмотрим слоистую среду  $N_l$  с границами раздела  $z_k$  ( $k = \overline{0, N_l}$ ),  $z_0 = 0$ ; последний слой  $N_l + 1$ , будет подстилающий полупространства  $[z_{N_l}, \infty)$ , а  $(-\infty, 0]$ , обозначено полупространство - воздух. Обозначим  $m$ -ый слой, как интервал  $[z_{m-1}, z_m]$ .

Геоэлектрический разрез имеет значения:  $\varepsilon_0 \varepsilon$  - диэлектрической проницаемости,  $\sigma$  - проводимости и магнитной проницаемости  $\mu_0 \mu$ ,  $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12}$  Ф/м и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Г/м. Известно, что значения  $\varepsilon$  изменяется в диапазоне  $[1; 80]$ , а магнитная проницаемость постоянна  $\mu = 1$ .

В случае горизонтально-слоистой,  $\varepsilon$ ,  $\sigma$  - кусочно-постоянные функции и  $z$  ( $z \in (-\infty, \infty)$ ).

В качестве источника стороннего тока рассмотрим длинный кабель, протянутый вдоль оси  $y$  и подвешен над поверхностью на высоте  $z_*$ . Повторяя те же рассуждения, которые мы провели в разделе 1, для компоненты  $E_2(t, x, z)$  получим уравнение второго порядка [84, с. 180]:

$$\varepsilon \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} \right).$$

Проделав преобразование Фурье по переменной  $x$  и по переменной  $t$ , получим уравнение:

$$u_{zz} - (\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon + i \omega \mu_0 \sigma) u = 0, \quad (2.1)$$

имеет место условия склейки в точках разрыва ,

$$[u]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{0, N_l}. \quad (2.2)$$

Пусть источник расположен в точке  $z_* < 0$ , тогда в этой точке условия склейки имеет вид:

$$[u]_{z_*} = 0, \quad [u_z]_{z_*} = -f(\omega)\mu_0 \quad (2.3)$$

Условия затухания на бесконечности:

$$u \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm\infty), \quad (2.4)$$

В точке  $z = 0$ , пусть известна дополнительная информация, являющийся следом решения прямой задачи (2.1)-(2.4):

$$u|_{z=0} = g(\omega, \lambda), \quad (2.5)$$

Здесь :  $\lambda$  и  $\omega$  – параметры преобразования Фурье по переменным  $x$  и  $t$ , и  $[\cdot]_z$  обозначения условия склейки:  $[w]_z = w(z+0) - w(z-0)$ .

**Обратная задача:** Найти кусочно-постоянных функций  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , если о решении прямой задачи (2.1)-(2.4) известна информация (2.5).

Введем обозначения:

$$r^2 = \lambda^2 - \chi, \quad \chi = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon - i \omega \mu_0 \sigma,$$

где  $\omega_0$  - фиксированное значение круговой частоты.

В силу того, что  $\varepsilon$  и  $\sigma$  - кусочно-постоянные функции, тогда функция  $\chi_0^2 = \omega_0^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon - i \omega_0 \mu_0 \sigma$  тоже кусочно-постоянная функция. Теперь ясно, что определив  $\chi_0$  как решение задачи (2.1)-(2.5), можем определить одновременно  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , следующим образом:

$$\varepsilon = \text{Re}[\chi_0] / \omega_0^2 \mu_0 \varepsilon_0, \quad \sigma = -\text{Im}[\chi_0] / \omega_0 \mu_0.$$

Будем решать обратную задачу (2.1)-(2.5) оптимизационным методом, суть которой состоит в минимизации функционала :

$$J_\omega[\chi_0] = \sum_\omega h_\omega |u(0, \omega, \lambda_0) - g(\omega, \lambda_0)|^2, \quad (2.6)$$

Здесь:  $h_\omega$  – весовой множитель.

Определим скалярного произведения двух комплексных чисел, следующим образом:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2}(w_1 \bar{w}_2 + \bar{w}_1 w_2). \quad (2.7)$$

Очевидно, что соотношение (2.7) удовлетворяет всем свойствам скалярного произведения. Действительно, пусть  $w_1 = (\alpha_1, \beta_1)$  и  $w_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ , тогда имеет место:  $\langle w_1, w_2 \rangle = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2$  и для соотношения (2.7) имеет место:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = Re[w_1 \bar{w}_2] = Re[\bar{w}_1 w_2].$$

Поскольку мы рассматриваем слоистые среды, то градиент имеет векторный вид, с компонентами:

$$J_\omega[\chi_0] = J_\alpha[\chi_0^1, \dots, \chi_0^m, \dots, \chi_0^{N_l}],$$

где:  $\chi_0^m$  – значения функции  $\chi_0$  на интервале  $[z_{m-1}, z_m]$ .

Стандартным приемом в работе [41-42], получено выражение градиента функционала невязки (2.6), запишем ее окончательный вид:

$$J'_\omega[\chi_0] = (\bar{j}_1, \dots, \bar{j}_m, \dots, \bar{j}_{N_l}), \quad j_m = \sum_{\omega} h_\omega \int_{z_{m-1}}^{z_m} u \psi dz,$$

где:  $\psi$  есть решение вспомогательной (сопряжённой) задачи:

$$\psi_{zz} - (\lambda^2 - \chi_0)\psi = 0, \quad (2.8)$$

$$[\psi]_{z_k} = 0, \quad [\psi_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N_l}, \quad [\psi]_{z_*} = 0, \quad [\psi_z]_{z_*} = -2[\overline{u(0, \omega_0, \lambda)} - \overline{g(\omega_0)}], \quad (2.9)$$

$$\psi \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \pm\infty). \quad (2.10)$$

## 2.2 Алгоритм метода послойного пересчета по определению геоэлектрического разреза в горизонтально-слоистой среде (в частотной области)

Для определения решений прямой задачи (2.1)-(2.4) и сопряжённой задачи (2.8)-(2.10) применим метод сведения дифференциального уравнения второго порядка к решению уравнения Риккати [3-4; 41-42]. Вкратце приведем известный алгоритм послойного пересчета по определению геоэлектрического разреза в горизонтально-слоистой среде (в частотной области), рассмотренной в работе [41-42].

Введём функцию  $s$  при помощи соотношения:

$$u_z(z) = s(z)u(z), \quad (2.11)$$

Очевидно, что уравнение (2.11), удовлетворяет уравнению Риккати

$$s' + s^2 = r^2. \quad (2.12)$$

В каждом интервале  $[z_{m-1}, z_m]$  решение уравнения (2.12) имеет вид:

$$s(z) = r_m \frac{(s^m + r_m)e^{2r_m(z-z_m)} + (s^m - r_m)}{(s^m + r_m)e^{2r_m(z-z_m)} - (s^m - r_m)},$$

Это имеет место в случае вычисления «справа-налево», и в противоположную сторону, определяется соотношением:

$$s(z) = r_m \frac{(s^{m-1} + r_m) + (s^{m-1} - r_m)e^{2r_m(z_{m-1}-z)}}{(s^{m-1} + r_m) - (s^{m-1} - r_m)e^{2r_m(z_{m-1}-z)}},$$

Здесь:  $s^m = s|_{z=z_m}$ , а  $r_m$  – кусочно-постоянная функция определенная на интервале  $[z_{m-1}, z_m]$ ,  $Re[r_m] \geq 0$ .

Вычисления со слоя на слой определим к точке  $z_*$  определяют рекуррентно. В силу условие затухания на бесконечности (2.4), получим:

$$s(z) = -r_{N_l+1}, \quad z \in [z_{N_l}, \infty).$$

Используя (2.2), получим условие склейки

$$[s]_{z_k} = 0. \quad (2.13)$$

Тогда

$$s^{N_l} = -r_{N_l+1}$$

и вычисление значений  $s^m$  «справа-налево» определяются из соотношения:

$$s^{m-1} = r_m \frac{(s^m + r_m)e^{-2r_m h_m} + (s^m - r_m)}{(s^m + r_m)e^{-2r_m h_m} - (s^m - r_m)}, \quad h_m = z_m - z_{m-1}.$$

Вычислив ее, нетрудно получить и значение  $s^* = s|_{z=z_*+0}$ .

По аналогии, учитывая условия затухания на минус бесконечности (2.4) имеем:

$$s(z) = r_0, \quad z \in (\infty, z_*].$$

Таким образом:

$$s|_{z=z_*-0} = r_0.$$

В силу условия (2.13) в точке  $z = z_*$  вычислим значение

$$u|_{z=z_*} \equiv u^* = -\frac{f(\omega)\mu_0}{s^* - r_0}.$$

Затем интегрируя уравнение (2.11) на интервале  $[z_*, 0]$ , получим:

$$u|_{z=0} \equiv u^0 = u^* \frac{2r_0 e^{-r_0 z_*}}{(s^0 + r_0)e^{-2r_0 z_*} - (s^0 - r_0)}$$

По аналогии, интегрируя на каждом интервале  $[z_{m-1}, z_m]$  уравнение (2.11), получим решение прямой задачи (2.1)-(2.4):

$$u(z) = u^{m-1}l(z), \quad l(z) = e^{r_m(z_{m-1}-z)} \frac{(s^m + r_m)e^{2r_m(z-z_m)} - (s^m - r_m)}{(s^m + r_m)e^{-2r_m h_m} - (s^m - r_m)}. \quad (2.14)$$

Аналогично, для сопряженной задачи (2.8)-(2.10) как и прямой задаче (2.1)-(2.4) легко определить, что

$$\psi|_{z=0} \equiv \psi^0 = -\frac{2[\overline{u(0, \omega, \lambda)} - \overline{g(\omega, \lambda)}]}{s^0 - r_0}.$$

Тогда на отрезке  $[z_{m-1}, z_m]$

$$\psi(z) = \psi^{m-1}l(z). \quad (2.15)$$

Из соотношения (2.14) и (2.15) для компонент градиента функционалов невязки  $J_\alpha[\chi_0]$  ( $\alpha = \lambda, \omega$ ), аналитические выражения следуют из соотношения:

$$\int_{z_{m-1}}^{z_m} u\psi dz = \frac{u^{m-1}\psi^{m-1}R^m}{[(s^m + r_m)e^{-2r_m h_m} - (s^m - r_m)]^2},$$

Здесь:

$$R^m = \frac{1 - e^{-2r_m h_m}}{2r_m} [(s^m + r_m)^2 e^{-2r_m h_m} + (s^m - r_m)^2] - 2h_m (s^m + r_m)(s^m - r_m) e^{-2r_m h_m}.$$

### 2.3 Дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва среды в обратной задаче геоэлектрики

**Теорема:** Существует производная функционала невязки по координате точки разрыва среды [67].

**Доказательство.** Доказательство дифференцируемости функционала невязки по координате точки разрыва среды заключается в следующем: доказывается, что производные справа и слева существуют и они равны между собой :

$$f'(z_s) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_s + \Delta z) - f(z_s)}{\Delta z}.$$

Функционал невязки:

$$J[z_s] = \sum_{\omega} |u^0 - f|^2.$$

$\chi$  - кусочно-постоянная,  $\chi = \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu - i\omega \mu \sigma$ ,  $r^2 = \lambda^2 - \chi$ .

Введем  $\chi_+$ , её разрывы в точках совпадают с  $\chi$  кроме местоположения разрыва в точке  $z_s$ .

$$\chi \sim u, \quad \chi_+ \sim u_+$$

$$\frac{J[z_s + h] - J[z_s]}{h} = \frac{1}{h} \sum_{\omega} \left[ (u_+^0 - f)(\overline{u_+ - f}) - (u^0 - f)(\overline{u^0 - f}) \right]. \quad (2.16)$$

Здесь и везде ниже черта сверху обозначает комплекснозначное сопряжение. В выражении (2.16) добавим и отнимем  $\pm (u_+^0 - f)(\overline{u^0 - f})$ . В результате получим:

$$\frac{J[z_s + h] - J[z_s]}{h} = \frac{1}{h} \sum_{\omega} \left[ (u_+^0 - f)(\overline{u_+ - u^0}) + (u_+^0 - u^0)(\overline{u^0 - f}) \right]. \quad (2.17)$$

Введем обозначения  $\frac{u_+^0 - u^0}{h} = w_h$ .

Для (2.17) необходимо доказать предельный переход:

$$\begin{aligned} \frac{J[z_s + h] - J[z_s]}{h} &= \sum_{\omega} \left[ (u_+^0 - f)\overline{w_h} + w_h(\overline{u^0 - f}) \right] \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{\omega} \left[ (u_+^0 - f)\overline{w} + w(\overline{u^0 - f}) \right] = \\ &= \sum_{\omega} 2 \operatorname{Re} \left( (\overline{u^0 - f})w \right) \end{aligned} \quad (2.18)$$

(когда  $h \rightarrow 0$   $\chi_+ \rightarrow \chi$ ,  $u_+ \rightarrow u$ ).

Нетрудно получить постановку задачи для функции  $w_h$ :

$$\begin{cases} (w_h)_{zz} - r_+^2 w_h - \frac{\Delta r^2}{h} u = 0, \\ [(w_h)_z]_{z_k} = 0, & [w_h]_{z_k} = 0, \\ w_h \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

$$\Delta r^2 = (\lambda^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon_+ \mu - i\omega \sigma_+ \mu) - (\lambda^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \varepsilon \mu - i\omega \sigma \mu) = \omega^2 \varepsilon_0 \mu [\varepsilon]_{z_s} - i\omega \mu [\sigma]_{z_s}.$$

Введём функцию на рассмотрение  $\frac{dw_h}{dz} = v$ .

Тогда дифференциальное уравнение из (2.19) сводится к системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{dz} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & r_+^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} = \frac{\Delta r^2}{h} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{d}{dz} U - AU = F.$$

Пусть  $U|_{z=z_s-0} = U_s = U|_{z=z_s+0}$ , последнее равенство имеет место в силу условий склейки для функций  $v$  и  $w_h$ .

Используя метод вариации произвольной переменной, напишем решение:

$$U(z) = e^{A(z-z_s)} U_s + e^{A(z-z_s)} \int_{z_s}^z e^{-A(\xi-z_s)} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi, \quad z \in [z_s, z_s + h].$$

Положим  $z = z_s + h$ , тогда  $U|_{z=z_s+h-0} = e^{Ah} U_s + e^{Ah} \int_{z_s}^{z_s+h} e^{-A(\xi-z_s)} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi$ .

Так как  $u$ ,  $w$  непрерывны, то получим  $U|_{z=z_s+h-0} = U|_{z=z_s+h+0}$ .

Запишем разницу  $U|_{z=z_s+h+0} - U|_{z=z_s-0} = (e^{Ah} - E)U_s + e^{Ah} \cdot \frac{1}{h} \int_{z_s}^{z_s+h} e^{-A(\xi-z_s)} \Delta r^2 u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi$ .

Здесь можно перейти к пределу при  $h \rightarrow 0$ . Поскольку под интегралом непрерывная функция, получим:

$$\begin{array}{ccc} U|_{z=z_s+h+0} - U|_{z=z_s-0} = (e^{Ah} - E)U_s + e^{Ah} \cdot \frac{1}{h} \int_{z_s}^{z_s+h} e^{-A(\xi-z_s)} \Delta r^2 u(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi. & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta r^2 u|_{z=z_s}, \quad h \rightarrow 0 \end{array}$$

Таким образом, скачок матрицы  $U$  равен:

$$[U]_{z_s} = \Delta r^2 u|_{z=z_s} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [U]_{z_s} = \begin{bmatrix} w_z \\ w \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - r^2 w = 0, \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, s-1}, \quad k = \overline{s+1, N} \quad (k \neq s), \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_s} = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu [\varepsilon]_{z_s} - i\omega \mu [\sigma]_{z_s}) \cdot u|_{z=z_s}, \\ [w]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}. \end{cases} \quad (2.20)$$

$$w - \text{предел } w = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_f - u}{h}.$$

Следовательно, доказали существование производной функционала невязки  $J'[z_s]$  справа.

Введем функцию  $w_h = \frac{u_- - u}{h}$ , которая, как нетрудно видеть, удовлетворяет задаче:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_h}{\partial z^2} - r^2 w_h = \frac{\Delta r^2}{h}, \\ \left[ \frac{\partial w_h}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [w_h]_{z_k} = 0, \\ w_h \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Перепишем (2.21) в виде системы двух уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial z} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & r^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w_h \end{bmatrix} = \frac{\Delta r^2}{h} u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial z} U - AU = F, \quad (2.22)$$

где  $v = \frac{\partial w}{\partial z}$ .

Пусть  $U|_{z=z_s+0} = U_s = U|_{z=z_s-0}$ , как и ранее, последнее равенство имеет место в силу условий склейки для функций  $v$  и  $w_h$ . Решаем уравнение (2.22) на интервале  $[z_s - h, z_s]$ , тогда решение уравнения получим в следующем виде:

$$U(z) = e^{A(z-z_s)} U_s + e^{A(z-z_s)} \int_{z_s}^z e^{-A(\xi-z_s)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) d\xi;$$

$$U|_{z=z_s-h+0} = e^{-Ah}U_s + e^{-Ah} \int_{z_s}^{z_s-h} e^{-A(\xi-z_s)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) d\xi.$$

В силу условий склейки  $U|_{z=z_s-h+0} = U|_{z=z_s-h-0}$ . Запишем разность и осуществим предельный переход по  $h$ :

$$U|_{z=z_s+0} - U|_{z=z_s-h-0} = (E - e^{-Ah})U_s + e^{-Ah} \int_{z_s}^{z_s-h} e^{-A(\xi-z_s)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\Delta r^2}{h} u(\xi) d\xi$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta r^2 u|_{z=z_s}, h \rightarrow 0 \end{array}$$

$$[U]_{z_s} = -\Delta r^2 u|_{z=z_s} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

По определению  $[U]_{z_s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} \\ w \end{bmatrix}$ , где

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - r^2 w = 0, \\ [w]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, s-1}, k = \overline{s+1, N} \quad (k \neq s), \\ \left[ \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z_s} = (\omega^2 \varepsilon_0 \mu [\varepsilon]_s - i\omega \mu [\sigma]_s) \cdot u|_{z=z_s}. \end{cases}$$

Следовательно, доказали существование производной функционала невязки  $J'[z_s]$  слева.

Очевидно, что производные слева и справа равны, следовательно, производная существует и даётся формулой (2.18), где функция  $w$  есть решение задачи (2.20).

### 3 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В данном разделе на примере обратной задачи для системы дифференциальных уравнений теории упругости в смещениях доказано существование производной функционала невязки по координате точки разрыва среды, и получены аналитические выражения для этой производной. Модель среды – горизонтально-слоистая. Результаты данного раздела опубликованы в работе [31].

#### 3.1 Постановка обратной задачи для уравнения теории упругости (в смещениях)

Рассмотрим слоистую среду  $N_l$  с границами раздела  $z_k$  ( $k = \overline{0, N_l}$ ),  $z_0 = 0$ ; , последний слой  $N_l + 1$ , будет подстилающий полупространства  $[z_{N_l}, \infty)$ , а  $(-\infty, 0]$ , обозначено полупространство- воздух. Обозначим  $m$ -ый слой, как интервал  $[z_{m-1}, z_m]$ .

Пусть каждый слой имеет следующие физические свойства: упругие постоянные-  $C_{mjkl}$  и плотностью  $\rho$ , как кусочно-постоянные функции по переменной  $z$ ,  $0 < z < \infty$ .

Считаем, что в начальный момент времени  $t = 0$ , источник

$$F(t)\nabla\delta(x, y, z - z_*), \quad z_* \neq z_k, \quad (3.1)$$

помещен в одном из слоев и возбуждает в среде упругие колебания.

$$z_* \neq z_k.$$

Запишем систему дифференциальных уравнений теории упругости (в смещениях):

$$\rho \frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left( C_{mjkl}(x_3) \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right) + F(t) \frac{\partial}{\partial x_m} \delta(x_1, x_2, x_3 - x_3^*),$$

$$m = \overline{1, 3}, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Начальное условие:

$$v_m|_{t=0} = 0, \quad m = \overline{1, 3}.$$

Краевые условия:

$$\sum_{k,l=1}^3 C_{3jkl}(x_3) \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \Big|_{x_3=0} = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Смысл этого условия состоит, в том, что отсутствуют нормальные напряжения на поверхности  $x_3 = 0$ .

В узлах разрывов, ставим условия:

$$\left[ \sum_{k,l=1}^3 C_{3jkl}(x_3) \frac{\partial v_l}{\partial x_k} \right]_{x_3^k} = 0, \quad [v_j]_{x_3^k} = 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Здесь и в дальнейшем для удобства, будем полагать, что  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  и  $x_3 = z$ .

Для констант  $C_{mjkl}$ , имеют место соотношения

$$C_{mjkl} = C_{jmkl} = C_{mjlk} = C_{klmj}, \quad C_{qp} = C_{mjkl},$$

и обозначим:

$$q = (mj), \quad p = (kl),$$

$$(11) \rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, (23) = (32) \rightarrow 4, (13) = (31) \rightarrow 5, (12) = (21) \rightarrow 6.$$

В силу этих соотношений матрица модулей упругости превратится в симметричную квадратную матрицу  $C = \{C_{qp}\}$  размерности 6.

Применив преобразование Лапласа по  $t$ , и Фурье по  $x$  и  $y$

$$u_m(v_1, v_2, z, p) = \int_0^{\infty} e^{pt} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y, z, t) e^{i(v_1 x + v_2 y)} dx dy dt, \quad m = \overline{1,3},$$

Здесь:  $v_1$  и  $v_2$  – параметры Фурье по горизонтальным переменным, а параметры Лапласа:  $p = -\alpha + i\omega$ :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) + iB' \frac{\partial}{\partial z} U - DU = \tilde{F}, \quad (3.2)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right]_{z_k} = 0, \quad [U]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}, \quad (3.3)$$

$$\left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad U \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty), \quad (3.4)$$

Приведем принятые обозначения

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad A = \rho \begin{bmatrix} c_{55} & c_{45} & c_{35} \\ c_{45} & c_{44} & c_{34} \\ c_{35} & c_{34} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \rho v_1 \begin{bmatrix} c_{15} & c_{56} & c_{55} \\ c_{14} & c_{46} & c_{45} \\ c_{13} & c_{36} & c_{35} \end{bmatrix} + \rho v_2 \begin{bmatrix} c_{56} & c_{25} & c_{45} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \\ c_{36} & c_{23} & c_{34} \end{bmatrix},$$

$$D = \rho p^2 E + \rho v_1^2 \begin{bmatrix} c_{11} & c_{16} & c_{15} \\ c_{16} & c_{66} & c_{56} \\ c_{15} & c_{56} & c_{55} \end{bmatrix} + \rho v_2^2 \begin{bmatrix} c_{66} & c_{26} & c_{46} \\ c_{26} & c_{22} & c_{24} \\ c_{46} & c_{24} & c_{44} \end{bmatrix} + \rho v_1 v_2 \begin{bmatrix} 2c_{16} & c_{12} + c_{66} & c_{14} + c_{56} \\ c_{12} + c_{66} & 2c_{26} & c_{25} + c_{46} \\ c_{14} + c_{56} & c_{25} + c_{46} & 2c_{45} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{F}(p, z - z_*) = -F(p)(il_1 \delta(z - z_*) + l_2 \delta'(z - x_*)), \quad l_1 = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad l_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Здесь:  $F(p)$  – образ Лапласа функции  $F(t)$ ;  $c_{ij} = C_{ij}/\rho$  – модули упругости;  $[g]_z$  скачок функции  $g$  в точке  $z$ : обозначение символом ' у матрицы это матрица транспонированная;  $g_s$  – значение кусочно-постоянной функции в  $s$ -ом слое.

Пусть относительно решения прямой задачи (3.2)-(3.4) известна дополнительная информация:

$$u_j(v_1, v_2, z, p)|_{z=0} = u_{j,0}(v_1, v_2, p), \quad j = \overline{1,3}. \quad (3.5)$$

Полагаем, что функция  $\rho$  кусочно-постоянна и известная.

**Обратная задача:** Найти неизвестные приведённые модули упругости  $c_{ij}$  и координаты точек разрывов сред  $z_k$ , если о решении прямой задачи (3.2)-(3.4) известна информация (3.5).

Обратная задача может решаться численно при помощи минимизации функционала невязки

$$J = \sum_{\omega} \sum_{j=1}^3 |u_j(v_1, v_2, 0, p) - u_{j,0}(v_1, v_2, p)|^2 \quad (3.6)$$

(здесь и везде ниже черта сверху над какой-либо величиной будет означать комплексное сопряжение).

### 3.2 Доказательство существования производной функционала невязки для системы дифференциальных уравнений теории упругости

**Теорема 3.1.** *Существует производная функционала невязки по координате точки разрыва среды и она имеет вид:*

$$\frac{\partial}{\partial z_s} J = \sum_{\omega} \sum_{j=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ 2 \overline{(u_j(v_1, v_2, 0, p) - u_{j,0}(v_1, v_2, p))} w_j(v_1, v_2, 0, p) \right\}, \quad (3.7)$$

где  $w_j$  ( $j = \overline{1,3}$ ) являются элементами вектор-столбца

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix},$$

который удовлетворяет следующей прямой задаче:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} W + iBW \right) + iB' \frac{\partial}{\partial z} W - DW = 0, \quad (3.8)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} W + iBW \right]_{z_k} = 0, \quad [W]_{z_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N, \quad (3.9)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} W + iBW \right]_{z_s} = i[B'A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) \Big|_{z=z_s} - [D - B'A^{-1}B]_{z_s} U|_{z=z_s}, \quad (3.10)$$

$$[W]_{z_s} = -[A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) \Big|_{z=z_s} + i[A^{-1}B]_{z_s} U|_{z=z_s},$$

$$\left( A \frac{\partial}{\partial z} W + iBW \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad W \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3.11)$$

**Доказательство.** Фиксируем все точки  $z_k$  кроме  $z_s$ .

Будем рассматривать кусочно-постоянные функции  $\rho_+$  и  $(c_{ij})_+$  с нижним индексом  $_+$ , если их значения в слоях совпадают со значениями функций  $\rho$  и  $c_{ij}$ , все точки разрывов  $z_k$  ( $k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N$ ) совпадают, функции  $\rho_+$  и  $(c_{ij})_+$  в точке  $z_s$  непрерывны, а разрыв находится в точке  $z_s + \tau$  ( $\tau > 0$ ). Также рассмотрим кусочно-постоянные функции  $\rho_-$  и  $(c_{ij})_-$  с нижним индексом  $_-$ , если их значения в слоях совпадают со значениями функций  $\rho$  и  $(c_{ij})_-$ , все точки разрывов  $z_k$  ( $k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N$ ) совпадают, функции  $\rho_-$  и  $(c_{ij})_-$  в точке  $z_s$  непрерывны, а разрыв находится в точке  $z_s - \tau$ .

Соответствующие новым коэффициентам решения прямой задачи (3.2)-(3.4) снабдим теми же индексами:  $U_+$  или  $U_-$ .

Ниже будем использовать кусочно-постоянные функции  $\Delta^+(\cdot)$  и  $\Delta^-(\cdot)$ , которые, например, для кусочно-постоянной функции  $\rho$  действуют по правилу:

$$\Delta^+(\rho) \equiv \rho^+ - \rho = \begin{cases} 0 & , \quad z < z_s, \\ -[\rho]_{z_s} & , \quad z_s \leq z \leq z_s + \tau, \\ 0 & , \quad z > z_s + \tau, \end{cases}$$

$$\Delta^-(\rho) \equiv \rho^- - \rho = \begin{cases} 0 & , \quad z < z_s - \tau, \\ -[\rho]_{z_s} & , \quad z_s - \tau \leq z \leq z_s, \\ 0 & , \quad z > z_s, \end{cases}$$

Рассмотрим правую и левую производные функционала невязки и докажем их равенство, отсюда будет следовать существование производной (3.7).

Итак, для функционала невязки (3.6) мы можем написать

$$\begin{aligned} \frac{J[z_s + \tau] - J[z_s]}{\tau} &= \sum_{\omega} \sum_{j=1}^3 ((u_j)_+ - u_{j,0}) \overline{w_{j+}^{\tau}} + ((\overline{u_j})_+ - \overline{u_{j,0}}) w_{j+}^{\tau}, \\ \frac{J[z_s - \tau] - J[z_s]}{\tau} &= \sum_{\omega} \sum_{j=1}^3 ((u_j)_- - u_{j,0}) \overline{w_{j-}^{\tau}} + ((\overline{u_j})_- - \overline{u_{j,0}}) w_{j-}^{\tau}, \\ w_{j+}^{\tau} &= \frac{(u_j)_+ - u_j}{\tau}, \quad w_{j-}^{\tau} = \frac{(u_j)_- - u_j}{\tau}. \end{aligned}$$

Рассмотрим предел справа

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J[z_s + \tau] - J[z_s]}{\tau}.$$

Нетрудно видеть, что вектор-столбец

$$W_{\tau} = \begin{bmatrix} w_{1+}^{\tau} \\ w_{2+}^{\tau} \\ w_{3+}^{\tau} \end{bmatrix},$$

является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A_+ \frac{\partial}{\partial z} W_{\tau} + iB_+ W_{\tau} \right) + iB'_+ \frac{\partial}{\partial z} W_{\tau} - D_+ W_{\tau} = R \quad (3.12)$$

$$\left[ A_+ \frac{\partial}{\partial z} W_{\tau} + iB_+ W_{\tau} \right]_{z_k} = 0, \quad [W_{\tau}]_{z_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N, \quad (3.13)$$

$$\left[ A_+ \frac{\partial}{\partial z} W_{\tau} + iB_+ W_{\tau} \right]_{z_s} = -\frac{1}{\tau} \left( \Delta^+(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^+(B)U \right) \Big|_{z=z_s+0}, \quad [W_{\tau}]_{z_s} = 0, \quad (3.14)$$

$$\left[ A_+ \frac{\partial}{\partial z} W_{\tau} + iB_+ W_{\tau} \right]_{z_s+\tau} = \frac{1}{\tau} \left( \Delta^+(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^+(B)U \right) \Big|_{z=z_s+\tau-0}, \quad [W_{\tau}]_{z_s+\tau} = 0, \quad (3.15)$$

$$\left( A \frac{\partial}{\partial z} W_{\tau} + iB W_{\tau} \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad W_{\tau} \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3.16)$$

где

$$R = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta^+(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^+(B)U \right) - i\frac{1}{\tau} \Delta^+(B') \frac{\partial}{\partial z} U + \frac{1}{\tau} \Delta^+(D)U,$$

Рассмотрим вектор-столбец

$$Q = A_+ \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + iB_+ W_\tau$$

и вектор столбец 6-ого порядка

$$V = \begin{bmatrix} Q \\ W_\tau \end{bmatrix}$$

тогда дифференциальное уравнение (3.12) можно переписать в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial z} V - GV = K, \quad (3.17)$$

где матрица  $G$  и вектор-столбец  $K$  6-ого порядка имеют вид

$$G = \begin{bmatrix} -iB'_+ A_+^{-1} & D_+ - B'_+ A_+^{-1} B_+ \\ A_+^{-1} & -iA_+^{-1} B_+ \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что из постановки прямой задачи (3.2)-(3.4) следует, что выражения:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) \text{ и } U$$

остаются непрерывными при переходе через точки разрыва среды  $z_k$ . Принимая данный факт во внимание, преобразуем выражение для  $R$ :

$$R = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta^+(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^+(B)U \right) - i\frac{1}{\tau} \Delta^+(B') A_{s+1}^{-1} \left( A_{s+1} \frac{\partial}{\partial z} U + iB_{s+1} \right) + \frac{1}{\tau} \left( \Delta^+(D)U - \Delta^+(B') A_{s+1}^{-1} B_{s+1} \right).$$

Обозначим:

$$R_1 = -\left( \Delta^+(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^+(B)U \right),$$

$$R_2 = -i\Delta^+(B')A_{s+1}^{-1} \left( A_{s+1} \frac{\partial}{\partial z} U + iB_{s+1} \right) + (\Delta^+(D)U - \Delta^+(B')A_{s+1}^{-1}B_{s+1}).$$

Для некоторого фиксированного  $\tau$  система (3.17) может быть решена. Пусть

$$V|_{z=z_s-0} = V_s,$$

где  $V_s$  – известное значение, тогда, принимая во внимание условия склейки (3.14), получим

$$V|_{z=z_s+0} = V_s + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (3.17) на интервале  $[z_s, z_s + \tau]$  может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} V &= e^{G(z-z_s)} \left( V_s + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{z=z_s+0} \right) + e^{G(z-z_s)} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^z e^{-G(\lambda-z_s)} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\lambda = \\ &= e^{G(z-z_s)} V_s + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{G(z-z_s)} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^z e^{-G(\lambda-z_s)} \left( G \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) d\lambda = \\ &= e^{G(z-z_s)} V_s + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{G(z-z_s)} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^z e^{-G(\lambda-z_s)} \begin{bmatrix} -iB'_+ A_+^{-1} R_1 + R_2 \\ A_+^{-1} R_1 \end{bmatrix} d\lambda. \end{aligned}$$

Положим в этом выражении  $z = z_s + \tau$ :

$$V|_{z=z_s+\tau+0} = e^{G(z-z_s)} V_s + \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix} \Big|_{z=z_s+\tau+0} + e^{G(z-z_s)} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \begin{bmatrix} -iB'_+ A_+^{-1} R_1 + R_2 \\ A_+^{-1} R_1 \end{bmatrix} d\lambda.$$

Примем во внимание условия склейки (3.15), получим

$$V|_{z=z_s+\tau+0} = e^{G(z-z_s)} V_s + e^{G(z-z_s)} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \begin{bmatrix} -iB'_+ A_+^{-1} R_1 + R_2 \\ A_+^{-1} R_1 \end{bmatrix} d\lambda.$$

Запишем разность:

$$V|_{z=z_s+\tau+0} - V|_{z=z_s-0} = (e^{G(z-z_s)} - E)V_s + e^{G(z-z_s)} \frac{1}{\tau} \int_{z_s}^{z_s+\tau} e^{-G(\lambda-z_s)} \begin{bmatrix} -iB'_+ A_+^{-1} R_1 + R_2 \\ A_+^{-1} R_1 \end{bmatrix} d\lambda. \quad (3.18)$$

Компоненты вектор-столбца, находящегося под интегралом, могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\begin{aligned} -iB'_+ A_+^{-1} R_1 + R_2 &= i[B'A^{-1}]_{z_s} \left( A_{s+1} \frac{\partial}{\partial z} U + iB_{s+1} U \right) - [D - B'A^{-1}B]_{z_s} U, \\ A_+^{-1} R_1 &= -[A^{-1}]_{z_s} \left( A_{s+1} \frac{\partial}{\partial z} U + iB_{s+1} U \right) + i[A^{-1}B]_{z_s} U \end{aligned}$$

(здесь принято во внимание, что значения матриц с индексом  $_+$  в интервале  $[z_s, z_s + \tau]$  равны значениям матриц в  $s$ -ом слое).

Под интегралом находятся ограниченные и непрерывные на интервале  $[z_s, z_s + \tau]$  функции, следовательно, можем перейти к пределу  $\tau \rightarrow 0$ . Очевидно, что

$$A_+ \rightarrow A, \quad B_+ \rightarrow B, \quad D_+ \rightarrow D, \quad U_+ \rightarrow U \quad \text{когда } \tau \rightarrow +0.$$

Обозначим

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} W_\tau = W_r,$$

где  $W_r$  – производная справа.

Из (3.18) получим  $[V]_{z_s}$ , откуда, вспоминая определение вектор-столбца  $V$ , можем записать:

$$\begin{aligned} \left[ A \frac{\partial}{\partial z} W_r + iB W_r \right]_{z_s} &= i[B'A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iB U \right) \Big|_{z=z_s} - [D - B'A^{-1}B]_{z_s} U|_{z=z_s}, \\ [W_r]_{z_s} &= -[A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iB U \right) \Big|_{z=z_s} + i[A^{-1}B]_{z_s} U|_{z=z_s} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Из (3.12)-(3.16) после перехода к пределу и из (3.19) получим, что  $W_r$  есть решение следующей прямой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} W_r + iB W_r \right) + iB' \frac{\partial}{\partial z} W_r - D W_r = 0, \quad (3.20)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} W_r + iB W_r \right]_{z_k} = 0, \quad [W_r]_{z_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N, \quad (3.21)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} W_r + iB W_r \right]_{z_s} = i[B'A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) \Big|_{z=z_s} - [D - B'A^{-1}B]_{z_s} U |_{z=z_s}, \quad (3.22)$$

$$[W_r]_{z_s} = -[A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + iBU \right) \Big|_{z=z_s} + i[A^{-1}B]_{z_s} U |_{z=z_s},$$

$$\left( A \frac{\partial}{\partial z} W_r + iB W_r \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad W_r \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty), \quad (3.23)$$

Таким образом, показали существование производной справа:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_s} J \right)_r = \sum_{\omega} \sum_{j=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ 2 \overline{(u_j(v_1, v_2, 0, p) - u_{j,0}(v_1, v_2, p))} w_{j,r}(v_1, v_2, 0, p) \right\}, \quad (3.24)$$

где  $w_{j,r}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) являются элементами вектор-столбца  $W_r$ .

Рассмотрим предел слева

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{J[z_s - \tau] - J[z_s]}{\tau},$$

вектор-столбец

$$W_\tau = \begin{bmatrix} w_{1-}^\tau \\ w_{2-}^\tau \\ w_{3-}^\tau \end{bmatrix},$$

и задачу, решением которой он является

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A_- \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + iB_- W_\tau \right) + iB_- \frac{\partial}{\partial z} W_\tau - D_- W_\tau = R \quad (3.25)$$

$$\left[ A_- \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + iB_- W_\tau \right]_{z_k} = 0, \quad [W_\tau]_{z_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N, \quad (3.26)$$

$$\left[ A_- \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + iB_- W_\tau \right]_{z_s - \tau} = -\frac{1}{\tau} \left( \Delta^-(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^-(B)U \right) \Big|_{z=z_s - \tau + 0}, \quad [W_\tau]_{z_s - \tau} = 0, \quad (3.27)$$

$$\left[ A_- \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + iB_- W_\tau \right]_{z_s} = \frac{1}{\tau} \left( \Delta^+(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i\Delta^-(B)U \right) \Big|_{z=z_s - 0}, \quad [W_\tau]_{z_s} = 0, \quad (3.28)$$

$$\left( A \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + iB W_\tau \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad W_\tau \rightarrow 0 (z \rightarrow \infty), \quad (3.29)$$

где

$$R = -\frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial z} \left( \Delta^-(A) \frac{\partial}{\partial z} U + i \Delta^-(B) U \right) - i \frac{1}{\tau} \Delta^-(B') \frac{\partial}{\partial z} U + \frac{1}{\tau} \Delta^-(D) U,$$

Далее, действуем так, как было показано выше:

- вводим вектор-столбец

$$Q = A_- \frac{\partial}{\partial z} W_\tau + i B_- W_\tau$$

и вектор столбец  $6$ -ого порядка

$$V = \begin{bmatrix} Q \\ W_\tau \end{bmatrix},$$

сводим систему дифференциальных уравнений второго порядка (3.25) к системе дифференциальных уравнений первого порядка для вектор-столбца  $V$ ;

- положим  $V|_{z=z_s+0} = V_s$ ;
- используем условия склейки (3.28), получаем  $V|_{z=z_s-0}$ ;
- записываем решение системы дифференциальных уравнений первого порядка на интервале  $[z_s - \tau, z_s]$  и получаем  $V|_{z=z_s-\tau+0}$ ;
- используем условия склейки (3.27), получаем  $V|_{z=z_s-\tau-0}$ ;
- получаем выражение для разности  $V|_{z=z_s+0} - V|_{z=z_s-\tau-0}$ ;
- переходим к пределу  $\tau \rightarrow +0$ ,  
 $A_- \rightarrow A$ ,  $B_- \rightarrow B$ ,  $D_- \rightarrow D$ ,  $U_- \rightarrow U$  когда  $\tau \rightarrow +0$ .

Обозначим

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} W_\tau = W_l,$$

где  $W_l$  – производная слева.

В результате этих действий и из (3.25)-(3.29) после перехода к пределу получим, что  $W_l$  есть решение прямой задачи

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} W_l + i B W_l \right) + i B' \frac{\partial}{\partial z} W_l - D W_l = 0, \quad (3.30)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} W_l + i B W_l \right]_{z_k} = 0, \quad [W_l]_{z_k} = 0, \quad k = 1, \dots, s-1, s+1, \dots, N, \quad (3.31)$$

$$\left[ A \frac{\partial}{\partial z} W_l + i B W_l \right]_{z_s} = i [B' A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + i B U \right) \Big|_{z=z_s} - [D - B' A^{-1} B]_{z_s} U \Big|_{z=z_s}, \quad (3.32)$$

$$[W_l]_{z_s} = -[A^{-1}]_{z_s} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + i B U \right) \Big|_{z=z_s} + i [A^{-1} B]_{z_s} U \Big|_{z=z_s},$$

$$\left( A \frac{\partial}{\partial z} W_l + i B W_l \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad W_l \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3.33)$$

Таким образом, показали существование производной слева:

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_s} J \right)_l = \sum_{\omega} \sum_{j=1}^3 \operatorname{Re} \left\{ 2 \overline{(u_j(v_1, v_2, 0, p) - u_{j,0}(v_1, v_2, p))} w_{j,l}(v_1, v_2, 0, p) \right\}, \quad (3.34)$$

где  $w_{j,l}$  ( $j = \overline{1,3}$ ) являются элементами вектор-столбца  $W_l$ .

Поскольку постановки задач (3.20)-(3.23) и (3.30)-(3.33) совпадают, то

$$W_r = W_l \equiv W.$$

Существование правой  $W_r$  и левой  $W_l$  производных означает, что функция  $U$  непрерывна слева и справа в окрестности точки  $z_s$ ; поскольку

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} U_+ = \lim_{\tau \rightarrow +0} U_- = U,$$

то функция  $U$  непрерывна в точке  $z_s$ .

Таким образом, поскольку правая (3.24) и левая (3.34) производные равны, следовательно, существует производная и она равна (3.7).

Что требовалось доказать.

## 4 ИССЛЕДОВАНИЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В ОПТИМИЗАЦИОННОМ МЕТОДЕ

В этом разделе рассматриваются алгоритмы численного решения обратных задач геоэлектрики на дискретном уровне. В работах Б.Рысбайулы в соавторстве [55-58], а также в серии работ А.Л.Карчевского [82-83], показано, что эффективно построить вспомогательную (сопряженную) задачу на дискретном уровне, которая будет сопряжена на разностном уровне к исходной дискретной прямой задаче. Подробный сравнительный анализ традиционного подхода и дискретного на ряде численных примеров изложено в работе А.Л.Карчевского [82].

В этой работе А.Л.Карчевским приведены следующие схемы в способе выведения градиента функционала:

I. Пусть  $p$  – приближенное решение обратной задачи. Придав приращение  $p + \delta p$ , а затем вычислив приращение функционала невязки, находим градиент функционала, как главную часть приращения функционала. Запишем в операторном виде:  $\nabla J(p) = A(u_p, \psi)$  где  $\psi$  – есть решение соответствующей сопряженной задачи. Все полученные формулы при выводе точны, так как они строго математически выведены.

II. Используем все готовые рабочие формулы полученные в предыдущем пункте, которым относим исходную задачу, сопряженную задачу, сам функционал и ее градиент. Тем или иным способом аппроксимируем все рабочие формулы.

III. В этом случае все выкладки получения дискретного аналога градиента проводим на дискретном уровне в сеточном пространстве, по аналогии как в первом способе.

Из этой схемы расчетов получения аппроксимации сопряженной задачи во втором случае, нет гарантии, что дискретный аналог сопряженной задачи будет соответствовать (согласована) к исходной.

В связи с этим мы отдаем предпочтение третьему способу. Для этого мы получили градиент и соответствующей ей сопряженную задачу на дискретном уровне.

Используя эту методику построения согласовано-сопряженных разностных схем, во втором подразделе нами построены консервативные разностные схемы рассматриваемых обратных задач для уравнения геоэлектрики в разделе 1.

### 4.1 Консервативные разностные схемы решения прямой и сопряженной задачи

В подразделе предложена методика построения сопряжено-согласованных разностных схем для оптимизационного метода. При численном решении обратных задач оптимизационным методом, в результате построения градиента функционала и сопряженной задачи, возникает необходимость аппроксимации полученных формул на дифференциальном уровне. При прямой аппроксимации

сопряженной задачи, тем или иным разностным методом, нарушается свойство консервативности разностной задачи в целом.

Для ясности рассуждений, мы построим согласованные сопряженные разностные схемы на примере решения обратной задачи для уравнения параболического типа (квазистационарное приближение).

Действуем по указанной схеме.

**1-этап.** Рассмотрим постановку оптимизационной задачи на дифференциальном уровне и выпишем все рабочие формулы.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - q(x)u, & 0 < x < L, 0 < t \leq T, \\ u_x(0, t) = \alpha_1(t), & 0 < t \leq T, \\ u(L, t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x). & 0 \leq x \leq L. \end{cases} \quad (4.1)$$

Пусть относительно решения прямой задачи (4.1), известна дополнительная информация:

$$u(0, t; q) = f(t), \quad 0 < t \leq T \quad (4.2)$$

**Обратная задача:** По известной дополнительной информации (4.2), найти функции  $q(x)$ ,  $u(x, t; q(x))$  из соотношений (4.1).

Пусть  $p(x)$  - приближенное решение обратной задачи. Рассмотрим функционал:

$$J(p) = \int_0^T [u(0, t; p) - f(t)]^2 dt \quad (4.3)$$

Пусть  $p(x) + \delta p(x)$ ,  $\delta u = u(x, t; p + \delta p) - u(x, t; p)$

Приращение функционала имеет вид:

$$\Delta J(p) = J(p + \delta p) - J(p) = 2 \int_0^T \delta u(0, t) [u(0, t; p) - f(t)] dt + o(\|\delta p\|^2).$$

Градиент функционала (4.3) имеет вид:

$$\nabla J(p)(x) = \int_0^T u(x, t) \bar{\psi}(x, t) dt,$$

где  $\bar{\psi}(x, t)$  - есть решение сопряженной задачи:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_t = -\bar{\psi}_{xx} + p(x)\bar{\psi}, & 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T, \\ \bar{\psi}(x, T) = 0, & 0 \leq x \leq L, \\ \bar{\psi}(L, t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ \bar{\psi}_x(0, t) = 2[u(0, t; p) - f(t)], & 0 < t \leq T. \end{cases}$$

**2-этап.** Согласно схеме, для всех готовых рабочих формулы из алгоритма оптимизационного метода тем или иным способом аппроксимируем разностным аналогом.

Приведем численное решение оптимизационной задачи формальной аппроксимацией

Пусть  $g(x_i)$  - приближенное решение обратной задачи (4.1).

Аппроксимируем задачу (4.1) разностной схемой:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}^{j+1} - g_i v^{j+1}, & (x_i, t_j) \in \omega_{h\tau}, \\ v_{x,0}^{j+1} &= \alpha_1(t), & 0 \leq j \leq M-1, \\ v_N^{j+1} &= 0, & 0 \leq j \leq M-1, \\ v_i^0 &= u_0(x_i), & 0 \leq j \leq N. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Пусть известна дополнительная информация

$$v_0^j = f(t_j), \quad 1 \leq j \leq M.$$

Рассмотрим функционал:

$$J_h\{g_i\} = \tau \sum_{j=0}^{M-1} [v_0^j\{g_i\} - f^j]^2.$$

Аппроксимация градиента функционала, примем в виде:

$$\nabla J_h\{g_i\} = \tau \sum_{j=0}^{M-1} v_i^j \psi_i^j, \tag{4.5}$$

где  $\psi_i^j$  - есть решение сопряженной задачи:

$$\begin{cases} \psi_t = -\psi_{xx}^{j-1} + g_i \psi^{j-1}, & j = M, M-1, \dots, 1 \\ \psi_i^M = 0, & 0 \leq i \leq N \\ \psi_N^{j-1} = 0, & j = M, \dots, 1 \\ \psi_{x,0}^{j-1} = 2[v_0^{j-1} - f^{j-1}] & j = M, \dots, 1. \end{cases} \tag{4.6}$$

**3-этап.** Согласно общей схеме получим формулы для вычисления градиента и сопряженной задачи на разностном уровне, повторяя все выкладки которые мы провели на первом этапе.

Пусть  $p_h(x_i)$  - приближенное решение обратной задачи. Аппроксимируем задачу (4.1) явной разностной схемой:

$$\begin{aligned} y_t &= y_{xx}^{j+1} - p_i y^{j+1}, & (x_i, t_j) \in \omega_{h\tau}, \\ y_{x,0}^{j+1} &= \alpha_1(t_j), & 0 \leq j \leq M-1, \\ y_N^{j+1} &= 0, & 0 \leq j \leq M-1, \\ y_i^0 &= u_0(x_i), & 0 \leq i \leq N, \end{aligned}$$

где:  $\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau}$ ;  $\overline{\omega_h} = \{x_i = ih, \quad i = \overline{0, N}, \quad h = L/N\}$ ,  $\overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, M}, \quad \tau = T/M\}$  - сеточные области.

Пусть известна дополнительная информация:

$$y_0^j = f(t_j), \quad 1 \leq j \leq M.$$

Рассмотрим дискретный аналог функционала (4.3):

$$J_h\{p_h\} = \tau \sum_{j=1}^M [y_0^j\{p_h\} - f^j]^2.$$

Зададим приращение  $p_i^h + \delta p_i^h$ ,  $\delta y_i^j = y_i^j\{p_i^h + \delta p_i^h\} - y_i^j\{p_i^h\}$ .

Для приращения  $\delta y_i^j$  получим разностную задачу:

$$\begin{cases} \delta y_t = \delta y_{xx}^{j+1} - y^{j+1} \delta p_h - p_h \delta y^{j+1}, & (x_i, t_j) \in \omega_{h\tau}, \\ \delta y_{x,0}^{j+1} = 0, & 0 \leq j \leq M-1, \\ \delta y_N^{j+1} = 0, & 0 \leq j \leq M-1, \\ \delta y_i^0 = 0. & 0 \leq i \leq N. \end{cases}$$

Градиент функционала:

$$\nabla J_h\{p_i^h\} = \tau y_i^0 \varphi_i^1 + \tau \sum_{j=0}^{M-1} y_i^{j+1} \varphi_i^j, \quad (4.7)$$

где  $\varphi_i^j$  - есть решение сопряженной задачи:

$$\begin{cases} \varphi_i^j = -\varphi_{xx}^{j-1} + p_i \varphi^{j-1}, & j = M-1, \dots, 1, \\ \varphi_i^{M-1} = 0, & i = 0, \dots, N, \\ \varphi_N^{j-1} = 0, & j = 1, \\ \varphi_{x,0}^{j-1} = 2[y_0^{j-1}\{p_i^h\} - f^{j-1}] & j = M-1, \dots, 1. \end{cases}$$

Теперь сравнивая дискретной аналог оптимизационного метода и формальной аппроксимации, мы видим различия как градиента (см. формулы (4.4) и (4.7), так и сопряженных задач (см.(4.5) и (4.7)). Почему так происходит, выясним в следующем подразделе.

**Теорема 4.1.** *Разностная схема (4.6) для вспомогательной задачи при формальной аппроксимации является не сопряженной к исходной разностной задаче (4.4).*

**Доказательство.** Рассмотрим разностную схему, при формальной аппроксимации, т.е. сопряженную задачу (4.6):

$$\psi_i = -\psi_{xx}^{j-1} + g_i \psi^{j-1}, \quad j = M, \dots, 1, \quad (4.8)$$

$$\psi_i^M = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.9)$$

$$\psi_N^{j-1} = 0, \quad j = M-1, \dots, 1, \quad (4.10)$$

$$\psi_{x,0}^{j-1} = 2[v_0^{j-1} - f^{j-1}], \quad j = M, \dots, 1. \quad (4.11)$$

Умножим (4.8) на  $\delta v_i^j$  и суммируем по  $j$  от 1 до  $M$ , по  $i$  от 1 до  $N-1$  рассмотрим скалярные произведения:

$$\langle \psi_i, \delta v_i^j \rangle = -\langle \psi_{xx}, \delta v_i^j \rangle + \langle g_i \psi^{j-1}, \delta v_i^j \rangle. \quad (4.12)$$

где:  $\langle u, W \rangle = h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} u_i^j W_i^j$ , обозначим через  $S_1 = \langle \psi_i, \delta v_i^j \rangle$ ,  $S_2 = -\langle \psi_{xx}, \delta v_i^j \rangle$ ,  $S_3 = \langle g_i \psi^{j-1}, \delta v_i^j \rangle$ .

Раскроем соотношения (4.12) в отдельности левую и правую часть, получим:

$$S_1 = \langle \psi_i, \delta v_i^j \rangle = h \sum_{i=1}^{N-1} \tau \sum_{j=1}^M \psi_i \delta v_i^j = h \sum_{i=1}^{N-1} (\nabla \psi_i^j, \delta v_i^j). \quad (4.13)$$

Используем разностный аналог интегрирования по частям

$$(y, \Delta v) = -(v, \nabla y) + y^M v^M - y^0 v^1, \quad (y, \nabla v) = -[v, \Delta y] + y^M v^{M-1} - y^0 v^0,$$

где  $(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} h u_i v_i$ ,  $(u, v) = \sum_{i=1}^N h u_i v_i$ .

Соотношение (4.13) примет вид:

$$S_1 = h \sum_{i=1}^{N-1} (\nabla \psi_i^j, \delta v_i^j) = h \sum_{i=1}^{N-1} \{(\delta v_i^M \psi_i^M - \delta v_i^1 \psi_i^0 - (\psi, \Delta \delta y))\}.$$

Далее продолжим, рассмотрим правую часть (4.12)

$$\begin{aligned} S_2 &= -\tau \sum_{j=1}^M h \sum_{i=1}^{N-1} \psi_{xx}^{j-1} \delta v_i^j = -\tau \sum_{j=1}^M h \sum_{i=1}^{N-1} (\Delta \psi_i^{j-1} - \nabla \psi_i^{j-1}) \delta v_i^j = \\ &= -\tau \sum_{j=1}^M h \sum_{i=1}^{N-1} \Delta \psi_i^{j-1} \cdot \delta v_i^j + \tau \sum_{j=1}^{M-1} h \sum_{i=1}^{N-1} \nabla \psi_i^{j-1} \cdot \delta v_i^j. \end{aligned}$$

Используя формулы суммирования по частям, имеем:

$$S_2 = -\tau \sum_{j=1}^M (\delta v_N \psi_N^{j-1} - \delta v_0 \psi_1^{j-1} - \sum_{i=1}^N \psi_i^{j-1} \nabla \delta v_i^j) + \tau \sum_{j=1}^M (\delta v_N \psi_{N-1}^{j-1} - \delta v_0 \psi_0^{j-1} - \sum_{i=0}^{N-1} \psi_i^{j-1} \Delta \delta v_i^j).$$

Раскрывая суммы, получим

$$\begin{aligned} S_2 &= -\tau \sum_{j=1}^M \left( \delta v_N^j \psi_N^{j-1} - \delta v_0^j \psi_1^{j-1} - \psi_N^{j-1} (\delta v_N^j - \delta v_{N-1}^j) - \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^{j-1} \nabla \delta v_i^j \right) + \\ &+ \tau \sum_{j=1}^M (\delta v_N^j \psi_{N-1}^{j-1} - \delta v_0^j \psi_0^{j-1} - \psi_0^{j-1} (\delta v_1^j - \delta v_0^j) - \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^{j-1} \Delta \delta v_i^j). \end{aligned}$$

Сокращая одинаковые члены, и объединяя суммы, получим

$$S_2 = -\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^{j-1} (\Delta \delta v_i^j - \nabla \delta v_i^j) - \tau \sum_{j=1}^M (-\delta v_0^j \psi_1^{j-1} + \psi_N^{j-1} \delta v_{N-1}^j - \delta v_N^j \psi_{N-1}^{j-1} + \psi_0^{j-1} \delta v_1^j).$$

Выделим разностные производные  $\psi_{x,0}, \delta v_{x,0}$ , для этого добавим и вычислим  $\delta v_0^j \psi_0^{j-1}$ :

$$\begin{aligned} S_2 &= -\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^{j-1} (\Delta \delta v_i^j - \nabla \delta v_i^j) - \\ &- \tau \sum_{j=1}^M [-\delta v_0^j (\psi_1^{j-1} - \psi_0^{j-1}) + \psi_0^{j-1} (\delta v_1^j - \delta v_0^j) + \psi_N^{j-1} \delta v_{N-1}^j - \delta v_N^j \psi_{N-1}^{j-1}]. \end{aligned}$$

Используя условие (4.11), и задавая условия  $\delta v_{x,0} = 0$ , запишем последнее соотношение иначе:

$$S_2 = -\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^{j-1} (\Delta \delta v_i^j - \nabla \delta v_i^j) - \tau \sum_{j=1}^M [2\delta v_0^j (v_0^{j-1} - f^{j-1}) + \psi_N^{j-1} \delta v_{N-1}^j - \delta v_N^j \psi_{N-1}^{j-1}].$$

Проведем замену индексов  $j' = j-1$ , и задавая условие  $\delta v_N^j = 0$  и учитывая, что  $\psi_N^{j-1} = 0$ , получим

$$S_2 = -\sum_{j=0}^M \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i \left( \delta v_{xx}^{j+1} \right) + 2\tau \sum_{j=1}^{M-1} \delta v_0^{j+1} \left( v_0^j - f^j \right) - 2\tau^2 \sum_{j=1}^{M-1} \delta v_0^j \left( v_0 - f \right).$$

Преобразуем выражение для  $S_1$ :

$$S_1 = \sum_{i=1}^{M-1} \left[ \delta v_i^M \psi_i^M - \delta v_i^1 \psi_i^0 - \tau \sum_{j=1}^{M-1} \psi_i^j \left( \frac{\delta y^{j+1} - \delta y^j}{\tau} \right) \right].$$

Для выражения  $S_3$  имеем:

$$S_3 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^M g_i \psi^{j-1} \delta v_i^j = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{M-1} g_i \psi^j \delta v_i^{j+1}$$

Таким образом, после ряда преобразований для  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , соотношения (4.12) окончательно примет вид:

$$\delta \sigma_1^M \psi_i^M - \delta v_i^1 \psi_i^0 - \tau \sum_{j=1}^{M-1} \delta v_i \psi_i^j = -\sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \psi_i^j \delta v_{xx}^{j+1} + \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} g_i \psi^j \delta v_i^{j+1} + 2\tau \sum_{j=1}^{M-1} \delta v_0 \left( v_0^{j-1} - f^{j-1} \right).$$

Для приращения  $\delta v_i$ , имеем задачу:

$$\begin{cases} \delta v_i = \delta v_{xx}^{j+1} - g_i \delta v^{j+1} - \delta g_i v^{j+1}, & i = \overline{1, N-1}, j = \overline{0, M-1}, \\ \delta v_{x,0}^{j+1} = 0, & j = \overline{0, M-1}, \\ \delta v_N^{j+1} = 0, & j = \overline{0, M-1}, \\ \delta v_i^1 = 0, & i = \overline{0, N}. \end{cases}$$

В полученной задаче исчезла вариация в  $(.) \delta v_i$ , т.е. начальное условие. Таким образом, вспомогательная разностная задача (4.6) не сопряжена к исходной разностной задаче (4.4).

Что требовалось доказать.

### Замечание

1. Если использовать формальную аппроксимацию готовых формул, то необходимо пересчитать начальное условие заданное в  $(.) x^0$ , в точке  $x^1$  (используя например разностную аппроксимацию в  $(.) x^0$  исходного уравнения). А также необходимо задать условие для сопряженной задачи в  $(.) t_{N-1}$ , т.е.  $\psi^{N-1}$ . Так как попытка задать условие в  $(.) t_N$  - приводит к смешению начального условия исходной задачи на шаг.

2. Если использовать дискретную аппроксимацию, то в ней уже учтено, что для сопряженной задачи мы задаем условие в точке  $(\cdot)_{t_{N-1}}$ , и сдвига индекса для исходной задачи в начальном условии не происходит.

#### 4.2 Согласованно-разностная схема решения прямых и обратных задач для уравнения геоэлектрики

Убедившись в подразделе 4.1, что необходимо следовать схеме 2-этапа, мы построим согласованно-разностные схемы для обратных задач, изученных нами в разделе 1.

*Дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи 1*  
 Конкретизируем постановку прямой задачи в случае линейного источника. В области  $Q = [0, L] \times [0, T]$  найти решение  $v(z, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 v - g(z, t), \quad 0 < t \leq T, \quad 0 < z < L, \quad (4.14)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad (4.15)$$

$$\frac{1}{\mu} v_z \Big|_{z=0} = f_{(2)}(t), \quad v|_{z=L} = 0. \quad (4.16)$$

Дополнительная информация:

$$v(0, t; \varepsilon) = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (4.17)$$

Суть обратной задачи 1 состоит в определении коэффициента  $\varepsilon(z)$  и  $v(z, t; \varepsilon)$  из соотношений (4.14)-(4.16) по известной дополнительной информации (4.17). Обратную задачу решаем оптимизационным методом. Приведем окончательные формулы, приведенные в разделе 1, полученные на дифференциальном уровне:

1. Функционал:

$$J(p) = \int_0^T [v(0, t; \varepsilon) - f(t)]^2 dt, \quad (4.18)$$

где  $p(z)$  - приближенное решение обратной задачи 1.

2. Градиент функционала:

$$\nabla J(p^{(k)}) = \int_0^T v_{tt}(z, t; p^{(n)}) \cdot \psi(z, t; p^{(n)}) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.19)$$

3. Сопряженная задача:

$$p(z)\psi_{tt} - \sigma(z)\psi_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi \right) - \frac{\lambda^2}{\mu} \psi, \quad (4.20)$$

$$\psi_z|_{z=0} = 2[\nu(0, t; p) - f], \quad \psi(L, t) = 0, \quad (4.21)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \psi_t|_{t=T} = 0. \quad (4.22)$$

Далее получим формулы (4.18)-(4.22) на дискретном уровне. Для этого поступим следующим образом:

а) Область непрерывного изменения аргументов  $Q = [0, T] \times [0, L]$  заменим сеточной  $\Omega_h = \{(i, h, \tau, j), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, h = L/N, \tau = T/M\}$ .

Аппроксимируем задачу (4.14)-(4.16) разностной схемой:

$$p_i y_{tt} + \sigma_i y_t = \frac{1}{\mu} (y_{z,i}^-)_{z,i} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 y_i - g_i^j, \quad i = \overline{1, N-1}, \quad j = \overline{2, M},$$

$$y_i^0 = 0, \quad y_{t,i}^0 = 0, \quad y_0^j = y_1^j, \quad y_N^j = 0, \quad j = \overline{2, M}.$$

Дополнительная информация:

$$y_0^j \{p_i\} = f^j, \quad j = \overline{2, M}.$$

б) Рассмотрим дискретный аналог функционала (4.18), например следующего вида:

$$J[p] = \tau \sum_{j=1}^M [y_0^j \{p_i\} - f^j]^2.$$

в) Зададим приращение  $p_i + \delta p_i$  и  $\delta y_i = y_i^j(p_i + \delta p_i) - y_i^j \{p_i\}$ . Относительно приращения  $\delta y_i$ , получим разностную задачу:

$$p \delta y_{tt} + \sigma \delta y_t = \frac{1}{\mu} (\delta y_{z,i}^-)_{z,i} - \delta p y_{tt}, \quad (4.23)$$

$$\delta y_i^0 = 0, \quad \delta y_i^1 = 0, \quad \delta y_0^j = \delta y_1^j, \quad \delta y_N^j = 0. \quad (4.24)$$

г) Умножим обе части разностного соотношения (4.23) на сеточную функцию  $\varphi_i^j$  и суммируем по  $j$  от 1 до  $M-1$  и по индексу  $i$  от 1 до  $N-1$  получим

$$\sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \{p_i (\delta y_{tt})_i^j \varphi_i^j + (\sigma_i \delta y_t)_i^j \varphi_i^j\} = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\mu} (\delta y_{z,i}^-)_{z,i} \cdot \varphi_i^j - \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\delta p y_{tt})_i^j \varphi_i^j. \quad (4.25)$$

Обозначим слагаемые через  $S_1$  в левой части и  $S_2, S_3$  в правой части в этом соотношении и преобразуем их в отдельности:

$$S_1 = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ p_i \left( \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^j}{\tau} - \frac{\delta y_i^j - \delta y_i^{j-1}}{\tau} \right) \varphi_i^j + \sigma_i \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^j}{\tau} \varphi_i^j \right\} =$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{N-1} \{ p_i(\varphi, \Delta \delta y) - p_i(\varphi, \nabla \delta y) + \sigma_i(\varphi, \Delta \delta y) \}.$$

Здесь обозначено:

$$\Delta y^j = y^{j+1} - y^j, \quad \nabla y^j = y^j - y^{j-1}.$$

Далее применим к соотношению для  $S_1$ , разностные аналоги интегрирования по частям:

$$(y, \Delta v) = -(v, \nabla y) + y^M v^M - y^0 v^1,$$

$$(y, \nabla v) = -[v, \Delta y] + y^M v^{M-1} - y^0 v^0,$$

$$(y, v) = \sum_{j=1}^{M-1} y^j v^j, \quad (y, v) = \sum_{j=1}^M y^j v^j.$$

Тогда выражение для  $S_1$  примет вид:

$$S_1 = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{N-1} \{ -(\delta y, p_i \nabla \varphi) + \delta y^M p_i \varphi^M - \varphi^0 p_i \delta y^1 \} -$$

$$- \{ -[\delta y, p_i \Delta \varphi] + p_i \varphi^M \delta y^{M-1} - p_i \varphi^0 \delta y^0 \} + \sigma_i(\delta y, \varphi) =$$

$$= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{N-1} \{ p_i[\delta y, \Delta \varphi] - p_i(\delta y, \nabla \varphi) + p_i \delta y^M \varphi^M - p_i \varphi^0 \delta y^1 - p_i \varphi^M \delta y^{M-1} + p_i \varphi^0 \delta y^0 + \sigma_i(\delta y, \varphi) \} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{M-1} p_i \delta y_i^j \left( \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} \right) - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^M p_i \delta y_i^j \left( \frac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\tau} \right) + \sigma_i(\delta y, \varphi) + \right.$$

$$\left. + p_i \delta y_i^M \varphi_i^M - p_i \varphi_i^0 \delta y_i^1 - p_i \varphi_i^M \delta y_i^{M-1} + p_i \varphi_i^0 \delta y_i^0 \right\}.$$

Далее сведем к суммированию по индексу  $j$  от 1 до  $M-1$ , получим

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} p_i \delta y_i^j - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\tau} p_i \delta y_i^j + p_i \delta y_i^0 (\varphi_i^1 - \varphi_i^0) - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^M \frac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\tau} \sigma_i - \right.$$

$$\left. - p_i \delta y_i^M (\varphi_i^M - \varphi_i^{M-1}) + p_i \delta y_i^M \varphi_i^M - p_i \varphi_i^0 \delta y_i^1 - p_i \varphi_i^M \delta y_i^{M-1} + \sigma_i \varphi_i^0 \delta y_i^0 \right].$$

После приведения подобных и перехода к разностной производной для  $\varphi_i^j$  имеем:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} p_i \delta y_i^j \varphi_{i,t} + \sigma_i \varphi_i \delta y_i + \sum_{i=1}^{N-1} [\delta y_i^M \varphi_i^{M-1} - \varphi_i^M \delta y_i^M + \delta y_i^0 \varphi_i^1 - y^0 \delta y_i^1] p_i.$$

Во втором слагаемом добавим и вычтем значение  $\delta y_i^0 \varphi_i^0$ ,  $\delta y_i^M \varphi_i^M$ , получим

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \delta y^j p_i \varphi_{it} + \sigma_i \varphi_i \delta y_i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \delta y_i^0 (\varphi_i^1 - \varphi_i^0) - \varphi_i^0 (\delta y_i^1 - \delta y_i^0) + \delta y_i^M (\varphi_i^M - \varphi_i^M) + \varphi_i^M (\delta y_i^M - \delta y_i^0) \right] p_i.$$

Учитывая условие (4.24) и полагая, что  $\varphi_i^M = 0$ ,  $\varphi_{it}^M = 0$  получим

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \delta y^j p_i \varphi_{it} + \sigma_i \delta y_i p_i. \quad (4.26)$$

Проведем преобразование для выражения  $S_2$ , раскрыв разностные производные имеем

$$S_2 = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{z_i} \left( z_{i+1} \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^{j+1}}{h} - z_{i-1/2} \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_{i-1}^{j-1}}{h} \right) \cdot \varphi_i^j = \\ = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{h^2 z_i} \left( z_{i-1} \cdot \Delta \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j + z_{i-1/2} \cdot \nabla \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j \right), \\ S_2 = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N-1} \left( \frac{\delta y_{i+1}^{j+1} - \delta y_i^{j+1}}{h} - \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_{i-1}^{j-1}}{h} \right) \cdot \varphi_i^j = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{h^2} \left( \Delta \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j + \nabla \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j \right).$$

Используя разностные аналоги интегрирования по частям, имеем:

$$S_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ -\frac{1}{z_i} z_{i+1} (\delta y_i^{j+1}, \nabla \varphi_i^j) + \varphi_N \delta y_N^{j+1} - \varphi_0 \delta y_1^{j+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{z_i} z_{i-1} (\delta y_i^{j+1}, \Delta \varphi_i^j) - \delta y_{N-1}^{j+1} \varphi_M^j + \varphi_0 \delta y_0^{j+1} \right\}.$$

Раскрыв скалярные произведения, получим

$$S_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{M-1} \left[ - \sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j+1} \frac{1}{z_i} (z_{i+1} \nabla \varphi_i^j - z_{i-1} \Delta \varphi_i^j) - \varphi_0^j \delta y_1^{j+1} - \delta y_{N-1}^{j+1} \varphi_N^j + \varphi_{N-1}^j \delta y_N^{j+1} + \delta y_0^{j+1} \varphi_1^j \right].$$

Введем замену  $j' = j + 1$ , имеем

$$S_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^M \left[ - \sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j'} \frac{1}{z_i} (z_{i+1} \nabla \varphi_i^{j'-1} - z_{i-1} \Delta \varphi_i^{j'-1}) - \varphi_0^{j'-1} \delta y_1^{j'} - \delta y_{N-1}^{j'} \varphi_N^{j'-1} + \varphi_{N-1}^{j'-1} \delta y_N^{j'} + \delta y_0^{j'} \varphi_1^{j'-1} \right]. \quad (4.27)$$

Рассмотрим оставшиеся выражения для  $S_3$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} (y_{it} \delta p_i) \varphi_i^j - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j-1} \varphi_i^j.$$

Введем замену  $j' = j+1$ , получим

$$S_3 = \sum_{j=2}^M \sum_{i=1}^{N-1} \delta p_i y_{it}^j \varphi_i^{j-1} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \sum_{j=2}^M \sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^j \varphi_i^{j-1}.$$

Запишем вспомогательную задачу (разностную сопряженную):

$$p_i \varphi_{it} - \sigma_i \varphi_i = \frac{1}{\mu} (y_{z,i}^j)_{z,i} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi_i^{j-1}, \quad (4.28)$$

$$\varphi_i^M = 0, \quad \varphi_i^{M-1} = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad j = M-1, M-2, \dots, 2, \quad (4.29)$$

$$\frac{1}{\mu} \varphi_{z,0}^j = 2[y_0^j \{p_i\} - f^j], \quad j = M-2, \dots, 1. \quad (4.30)$$

$$\varphi_N^j = 0, \quad j = M-2, \dots, 1. \quad (4.31)$$

Подставляя (4.26), (4.27), (4.28) в (4.25) и учитывая условие (4.24), а также (4.29)-(4.31), получим, что

$$\nabla J(p_i) = \tau \sum_{j=2}^{M-1} y_{it}^j \varphi_i^{j-1} + \frac{1}{\tau} \left( \frac{\varphi_i^2 - \varphi_i^1}{\tau} - \frac{\varphi_i^1 - \varphi_i^0}{\tau} \right) \cdot y_i^1.$$

### *Дискретный оптимизационный метод решения обратной задачи 2*

Конкретизируем постановку прямой задачи в случае линейного источника. В области  $Q = [0, L] \times [0, T]$  найти решение  $v(z, t)$  из соотношений:

$$\varepsilon v_{tt} + \sigma v_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 v - g(z, t), \quad 0 < t \leq T, 0 < z < L, \quad (4.32)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{\mu} v_z \Big|_{z=0} = f_{(2)}(t), \quad v|_{z=L} = 0. \quad (4.34)$$

Дополнительная информация:

$$v(0, t; \sigma) = f(t), \quad 0 < t \leq T. \quad (4.35)$$

Суть обратной задачи 2 состоит в определении коэффициента  $\sigma(z)$  и  $v(z, t; \varepsilon)$  из соотношений (4.32) по известной дополнительной информации (4.35). Обратную задачу решаем оптимизационным методом. Приведем

окончательные формулы, приведенные в разделе 1, полученные на дифференциальном уровне:

1. Функционал:

$$J(p) = \int_0^T [v(0, t; p) - f(t)]^2 dt, \quad (4.36)$$

где  $p(z)$  - приближенное решение обратной задачи 2.

2. Градиент функционала:

$$\nabla J(p^{(k)}) = \int_0^T v_t(z, t; p^{(n)}) \cdot \psi(z, t; p^{(n)}) dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.37)$$

3. Сопряженная задача:

$$\varepsilon(z) \psi_{tt} - p(z) \psi_t = \frac{1}{\mu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \psi \right), \quad (4.38)$$

$$\psi_z|_{z=0} = 2[v(0, t; p) - f], \quad \psi(L, t) = 0, \quad (4.39)$$

$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \psi_t|_{t=T} = 0. \quad (4.40)$$

Далее получим формулы (4.36)-(4.40) на дискретном уровне. Для этого поступим следующим образом:

а) Область непрерывного изменения аргументов  $Q = [0, T] \times [0, L]$  заменим сеточной  $\Omega_h = \{(i, h, \tau, j), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}, h = R/N, \tau = T/M\}$ .

Аппроксимируем задачу (4.32)-(4.34) разностной схемой:

$$\varepsilon_i y_{it} + p_i y_t = \frac{1}{\mu} (z_i y_{z,i})_{z,i} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 y_i^j - g_i^j \quad i = \overline{1, N-1}; j = \overline{2, M},$$

$$y_i^0 = 0, \quad y_{t,i}^0 = \varepsilon^{-1} \eta^j q_0, \quad y_0^j = y_1^j, \quad y_N^j = 0, \quad j = \overline{2, M}.$$

Дополнительная информация:

$$y_0^j = f^j, \quad j = \overline{2, M}.$$

б) Рассмотрим дискретный аналог функционала (4.36), например следующего вида:

$$J[p] = \tau \sum_{j=1}^M [y_0^j \{p_i\} - f^j]^2.$$

в) Зададим приращение  $p_i + \delta p_i$  и  $\delta y_i = y_i^j(p_i + \delta p_i) - y_i^j \{p_i\}$ . Относительно приращения  $\delta y_i$ , получим разностную задачу:

$$\varepsilon \delta y_{tt} + p \delta y_t = \frac{1}{\mu} (\delta y_{z,i}^-)_{z,i} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta y_i - \delta p y_t, \quad (4.41)$$

$$\delta y_i^0 = 0, \quad \delta y_i^1 = 0, \quad \delta y_0^j = \delta y_1^j, \quad \delta y_N^j = 0. \quad (4.42)$$

г) Умножим обе части разностного соотношения (4.41) на сеточную функцию  $\varphi_i^j$  и суммируем по  $j$  от 1 до  $M-1$  и по индексу  $i$  от 1 до  $N-1$  получим

$$\sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \varepsilon_i (\delta y_{tt})_i^j \varphi_i^j + (p_i \delta y_t)_i^j \varphi_i^j \right\} = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{\mu} (\delta y_{z,i}^-)_{z,i} \cdot \varphi_i^j - \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (\delta p y_t)_i^j \varphi_i^j - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta y_i \varphi_i^j \right\}. \quad (4.43)$$

Обозначим слагаемые через  $S_1$  в левой части и  $S_2, S_3$  в правой части в этом соотношении и преобразуем их в отдельности

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ \varepsilon_i \left( \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^j}{\tau} - \frac{\delta y_i^j - \delta y_i^{j-1}}{\tau} \right) \varphi_i^j + p_i \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_i^j}{\tau} \varphi_i^j \right\} = \\ &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \varepsilon_i (\varphi, \Delta \delta y) - \varepsilon_i (\varphi, \nabla \delta y) + p_i (\varphi, \Delta \delta y) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь обозначено:

$$\Delta y^j = y^{j+1} - y^j, \quad \nabla y^j = y^j - y^{j-1},$$

Далее применим к соотношению для  $S_1$ , разностные аналоги интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} (y, \Delta v) &= -(v, \nabla y) + y^M v^M - y^0 v^1, \\ (y, \nabla v) &= -(v, \Delta y) + y^M v^{M-1} - y^0 v^0, \\ (y, v) &= \sum_{j=1}^{M-1} y^j v^j, \quad (y, v) = \sum_{j=1}^M y^j v^j. \end{aligned}$$

Тогда выражение для  $S_1$  примет вид:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ -(\delta y, \varepsilon_i \nabla \varphi) + \delta y^M \varepsilon_i \varphi^M - \varphi^0 \varepsilon_i \delta y^1 \right\} - \\ &- \left\{ -[\delta y, \varepsilon_i \Delta \varphi] + \varepsilon_i \varphi^M \delta y^{M-1} - \varepsilon_i \varphi^0 \delta y^0 \right\} + p_i (\delta y, \varphi) = \\ &= \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \varepsilon_i [\delta y, \Delta \varphi] - \varepsilon_i (\delta y, \nabla \varphi) + \varepsilon_i \delta y^M \varphi^M - \varepsilon_i \varphi^0 \delta y^1 - \right. \\ &- p_i \varphi^M \delta y^{M-1} + p_i \varphi^0 \delta y^0 + p_i (\delta y, \varphi) \left. \right\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon_i \delta y_i^j \left( \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} \right) - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^M p_i \delta y_i^j \left( \frac{\varphi^j - \varphi^{j-1}}{\tau} \right) + p_i (\delta y, \varphi) + \right. \\ \left. + p_i \delta y^M \varphi^M - p_i \varphi^0 \delta y^1 - p_i \varphi^M \delta y^{M-1} + p_i \varphi^0 \delta y \right\}.$$

Далее сведем к суммированию по индексу  $j$  от 1 до  $M-1$ , получим

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \left[ \frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} \varepsilon_i \delta y_i^j - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\tau} \varepsilon_i \delta y_i^j + p_i \delta y_i^0 (\varphi_i^1 - \varphi_i^0) - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^M \frac{\varphi_i^j - \varphi_i^{j-1}}{\tau} p_i - \right. \\ \left. - p_i \delta y_i^M (\varphi_i^M - \varphi_i^{M-1}) + p_i \delta y_i^M \varphi_i^M - p_i \varphi_i^0 \delta y_i^1 - p_i \varphi_i^M \delta y_i^{M-1} + p_i \varphi_i^0 \delta y_i^0 \right]$$

После приведения подобных и переходя к разностной производной для  $\varphi_i^j$  имеем:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \varepsilon_i \delta y^j \varphi_{it} + p_i \varphi_i \delta y_i + \sum_{i=1}^{N-1} [\delta y^M \varphi^{M-1} - \varphi^M \delta y^M + \delta y^0 \varphi^1 - y^0 \delta y^1] \varepsilon_i.$$

Во втором слагаемом добавим и вычтем значение  $\delta y_i^0 \varphi_i^0$ ,  $\delta y_i^M \varphi_i^M$ , получим

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \delta y^j \varepsilon_i \varphi_{it} + p_i \varphi_i \delta y_i + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} [\delta y_i^0 (\varphi_i^1 - \varphi_i^0) - \varphi_i^0 (\delta y_i^1 - \delta y_i^0) + \delta y_i^M (\varphi_i^M - \varphi_i^{M-1}) + \varphi_i^M (\delta y_i^M - \delta y_i^{M-1})] \varepsilon_i.$$

Учитывая условие (4.42) и полагая, что  $\varphi_i^M = 0$ ,  $\varphi_{it}^M = 0$  получим

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \delta y^j \varepsilon_i \varphi_{it} + p_i \delta y_i \varphi_i. \quad (4.44)$$

Проведем преобразование для выражения  $S_2$ , раскрыв разностные производные имеем

$$S_2 = \sum_{j=1}^{M-1} \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{z_i} \left( z_{i+1} \frac{\delta y_{i+1}^{j+1} - \delta y_i^{j+1}}{h} - z_{i-1} \frac{\delta y_i^{j+1} - \delta y_{i-1}^{j+1}}{h} \right) \cdot \varphi_i^j = \\ = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{1}{h^2 z_i} (z_{i+1} \cdot \Delta \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j + z_{i-1} \cdot \nabla \delta y_i^{j+1} \varphi_i^j).$$

Используя разностные аналоги интегрирования по частям, имеем:

$$S_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ -\frac{1}{z_i} z_{i+1} (\delta y_i^{j+1}, \nabla \varphi_i^j] + \varphi_N \delta y_N^{j+1} - \varphi_0 \delta y_1^{j+1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{z_i} z_{i-1} (\delta y_i^{j+1}, \Delta \varphi_i^j] - \delta y_{N-1}^{j+1} \varphi_M^j + \varphi_0 \delta y_0^{j+1} \right\}.$$

Раскрыв скалярные произведения, получим

$$S_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j=1}^{M-1} \left\{ -\sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j+1} \frac{1}{z_i} (z_{i+1} \nabla \varphi_i^j - z_{i-1} \Delta \varphi_i^j) - \varphi_0^j \delta y_1^{j+1} - \delta y_{N-1}^{j+1} \varphi_N^j + \right. \\ \left. + \varphi_{N-1}^j \delta y_N^{j+1} + \delta y_0^{j+1} \varphi_1^j \right\}.$$

Введем замену  $j' = j+1$ , имеем

$$S_2 = \frac{1}{h^2} \sum_{j'=1}^M \left[ -\sum_{i=1}^{N-1} \delta y_i^{j'} \frac{1}{z_i} (z_{i+1} \nabla \varphi_i^{j'-1} - z_{i-1} \Delta \varphi_i^{j'-1}) - \right. \\ \left. - \varphi_0^{j'-1} \delta y_1^{j'} - \delta y_{N-1}^{j'} \varphi_N^{j'-1} + \varphi_{N-1}^{j'-1} \delta y_N^{j'} + \delta y_0^{j'} \varphi_1^{j'-1} \right]. \quad (4.45)$$

Рассмотрим оставшиеся выражения для  $S_3$

$$S_3 = \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ (y_i \delta p_i) \varphi_i^j - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta y_i^j \varphi_i^j \right\}$$

Введем замену  $j' = j+1$ , получим

$$S_3 = \sum_{j'=2}^M \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \delta p_i y_i^{j'} \varphi_i^{j'-1} - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \delta y_i^{j'} \varphi_i^{j'} \right\}.$$

Запишем вспомогательную задачу (разностную сопряженную):

$$\varepsilon_i \varphi_{it} - p_i \varphi_t = \frac{1}{\mu} (\varphi_{z,i}^-) - \frac{1}{\mu} \lambda^2 \varphi_i^{j-1}, \quad (4.46)$$

$$\varphi_i^M = 0, \quad \varphi_i^{M-1} = 0, \quad 0 \leq i \leq N, \quad (4.47)$$

$$\frac{1}{\mu} \varphi_{z,0}^j = 2[y_0^j \{p_i\} - f^j], \quad j = M-2, \dots, 1. \quad (4.48)$$

$$\varphi_N^j = 0, \quad j = M-2, \dots, 1. \quad (4.49)$$

Подставляя (4.44), (4.45), (4.46) в (4.43) и учитывая условие (4.42), а также (4.46)-(4.49), получим, что

$$\nabla J(p_i) = \tau \sum_{j=2}^{M-1} y_i \varphi_i^{j-1} + \left( \frac{\varphi_i^1 - \varphi_i^0}{\tau} \right) \cdot y_i^1.$$

Примечание - Для построения дискретного аналога оптимизационного метода для решения обратной задачи 3, из предыдущих результатов, следует, что мы уже получили компоненты, вектора в случае одновременного определения коэффициентов диэлектрической проницаемости и проводимости сред.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе для достижения поставленной цели автором получены следующие научные результаты:

- получены формулы вычисления градиента функционала для решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики (с учетом влияния воздуха);

- получена оценка условной устойчивости решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики, сформулированной в интегральной постановке;

- получена формула вычисления градиента функционала и доказана её дифференцируемость по координате точки разрыва среды для уравнения геоэлектрики;

- доказана дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва среды для системы дифференциальных уравнений теории упругости для смещения;

- получен алгоритм одновременного определения коэффициента и координат точек разрыва для уравнения геоэлектрики на основе метода послойного пересчёта;

- доказана согласованность разностного алгоритма сопряженной задачи к исходной в дискретной обратной коэффициентной задачи для уравнения геоэлектрики (в случае временной области);

- определен критерии выбора частотной области на основе численного решения обратных коэффициентных задач для уравнения геоэлектрики методом послойного пересчета;

- проведены численные расчеты решения обратных задач геоэлектрики во временной области с использованием согласованных разностных алгоритмов;

- приведены инженерно-технические приемы по интерпретации радарограмм на основе серии экспериментальных исследований с применением прибора «Георадар «Лоза В».

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А.Н. О единственности решения задачи электроразведки // ДАН СССР. - 1949. - Т.69, №6. - С. 797-800.
2. Тихонов А.Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры // ДАН СССР. - 1950. - Т.73, №2. - С. 295-297.
3. Дмитриев В.И. Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде // Вычислительные методы и программирование. - 1968. - Вып. 10. - С. 55-65.
4. Дмитриев В.И., Федорова Э.А. Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах // Вычислительные методы и программирование. - 1980. - Вып. 32. - С. 150-183.
5. Ваньян Л.А. Основы электромагнитных зондирований. - М.: Недра, 1965. - 106 с.
6. Дмитриев В.И. Осесимметричное электромагнитное поле в цилиндрической слоистой среде // Изв. АН СССР. Физика Земли. - 1972.- №11. - С. 56-61.
7. Дмитриев В.П., Захаров Е.В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред // ЖШ и МФ. - 1970. - Т. 10, № 6. - С.1458-1464.
8. Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. - Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. - 92 с.
9. Лаврентьев М.М., Романов А.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. - Новосибирск: Наука, 1980. - 286 с.
10. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. - Новосибирск: Наука, 1969. - 68 с.
11. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. - 264 с.
12. Романов В.Г., Кабанихин С.И., Пухначева Т.П. Обратные задачи электродинамики. - Новосибирск: Изд-во вычислительного центра, 1984. - 201 с.
13. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1988. - 168 с.
14. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики (Теоремы существования и единственности). – Новосибирск: Препринт АН СССР. Сиб. отделение. ИМ, 1989. - 51 с.
15. Романов В.Г., Кабанихин С.И., Абдиев К.С. Численные решения одномерных обратных задач электродинамики. – Новосибирск: Препринт АН СССР. Сиб. отделение. ВЦ, 1985. - 48 с.
16. Кабанихин С.И., Мартаков С.В. Исследование проекционно-разностного метода решения прямой и обратной задачи геоэлектрики. – Новосибирск: Препринт АН СССР. Сиб. отделение. ИМ, 1988. - 51 с.
17. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. - 1963. - Т. 151, №3. - С. 501-504.

18. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1979.- 285 с.
19. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. - М.: Наука, 1983. - 198 с.
20. Тихонов А.Н., Леонов А.С., Ягола А.Г. Нелинейные некорректные задачи. - М.: Наука, 1995. - 311 с.
21. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. - М.: Наука, 1978. - 206 с.
22. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1989. - 608 с.
23. Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии // Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных. - 1967. - С. 9-84.
24. Алексеев А.С. Алгоритмы и программы решения прямых и обратных задач электромагнитной индукции в Земле. - М.: НЗМИРАН, 1982. - 140 с.
25. Bamberger A., Chavent G., Lailly P. About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations – applications to the interpretation of seismic profiles // Appl. Math. Optim. - 1975. - Vol. 5, №1. - P. 1-47.
26. Chavent G., Dupuy M., Lemonnier P. History matching by use of optimal control theory // Full Meeting of Society of Petroleum Engineers. – 1975. - Vol. 2. - P. 75-86.
27. Santosa F., Symes W.W., Raggio G. Inversion of band-limited reflection seismograms using stacking velocities as constraints // Inverse Probl. - 1987. - Vol. 3. - P. 477-499.
28. Алексеев А.С., Авдеев А.В., Фатьянов А.Г., Чеверда В.А. Волновые процессы в вертикально-неоднородных средах: прямые и обратные задачи. - Новосибирск: Препринт АН СССР. Сиб. отделение. ВЦ, 1991. - 44с.
29. Iskakov K.T., Kabanikhin S.I. The solution of one-dimensional inverse problem of geoelectrics by the method of conjugate gradients // Russian J.Theor.Appl.Mechanics. - 1992. - Vol. 2, №3. - P.197-221.
30. Гурвич И.И. Сейсмическая разведка. - М.: Недра, 1970. - 552 с.
31. Oralbekova Zh.O., Iskakov K.T., Karchevsky A.L. Existence of the residual functional derivative with respect to a coordinate of gap point of medium // International Journal of Applied and Computational Mathematics. - 2013. - Vol.12, №2. - P. 222-233 // <http://www.acmij.az/view.php?lang=az&menu=journal&id=323>
32. Karchevsky A.L. Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2010. - Vol.18. - P. 371-388.
33. Карчевский А.Л. Горизонтально-слоистая среда: дифференцирование по координате точки разрыва среды // Технологии сейсморазведки. - 2011. - №3. - С. 17-22.
34. Karchevsky A.L. Reconstruction of pressure and shear velocities and boundaries of thin layers in thinly stratified layer // Numerical Analysis and Applications. - 2012. - Vol.15. - P. 67-82.

35. Тихонов А.Н., Шахсуваров Д.Н., Метод расчета электромагнитных полей, возбуждаемых переменным током в слоистых средах // Известия АН СССР. Серия геофизическая. - 1956. - № 3. - С. 251-254.
36. Гельфанд И.М., Локуциевский О.В. Метод «прогонки» для решения разностных уравнений // В кн.: Годунов С.К., Рябенский В.С. Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, 1962. - С. 283-309.
37. Аккуратов Г.В., Дмитриев В.И. Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде // В кн.: Численные методы в геофизике. - М.: МГУ, 1979. - С. 3-12.
38. Фатьянов А.Г., Михайленко Б.Г. Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах // Доклады АН СССР. - 1988. - Т. 301. - С. 834-839.
39. Карчевский А.Л. Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды // Геология и Геофизика. - 2005. - Т. 46, №3. - С. 339-351.
40. Карчевский А.Л. Прямая динамическая задача сейсмологии для горизонтально-слоистых сред // Сибирские Электронные Математические Известия. - 2005. - Т. 2. - С. 23-61 // <http://semr.math.nsc.ru/v2/p23-61.pdf>
41. Карчевский А.Л. Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред // Геология и Геофизика. - 2007. - Т. 48, №8. - С. 889-898.
42. Karchevsky A.L., Oralbekova Zh.O., Iskakov K.T. Solution of the inverse problem of subsurface electric exploration for horizontally stratified medium // International Journal of Applied Mathematics. - 2013. - Article ID 432121. - 14 p.
43. Алифанов О.М., Артюхин К.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. - М.: Наука, 1988. - 286с.
44. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач: задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация. - М.: Наука, 1981 - 400 с.
45. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Наука, 1988. - 550 с.
46. Васин В.В. Методы решения неустойчивых задач. - Свердловск: Изд-во УрГУ, 1989. - 94 с.
47. Искендеров А.Д., Тагиев Р.К. Задачи оптимизации с управлениями в коэффициентах параболического уравнения // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т. 19, №8. - С. 1324-1334.
48. Султангазин У.М. Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. - Алма-Ата: Наука, 1979. - 268 с.
49. Темирбулатов С.И. Обратные задачи для эллиптических уравнений. - Алма-Ата: Изд-во КазГУ, 1975. - 72 с.
50. Лукьянов А.Т., Серовайский С.Я. Метод последовательных приближений в задаче оптимального управления одной нелинейной параболической системой // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1984. - Т.24,

№11. - С. 1638-1648.

51. Данаев Н. Т., Корсакова Н. К., Пеньковский В. И. Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пластов. - Алматы: КазНУ им. аль-Фараби, 2005. - 180 с.

52. Кальменов Т.Ш., Сураган Д. Перенос условий излучения Зоммерфельда на границу ограниченной области // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 2012. - Т. 52, №6. - С. 1063-1068.

53. Отельбаев М., Рысбайулы Б. Приближенный метод решения нелинейных операторных уравнений: итерационный процесс, оценка скорости сходимости // Доклады НАН РК. - 1999. - Т. 5. - С. 20-25.

54. Отельбаев М., Елеуов А., Акжалова А.Ж. Об одном методе нахождения всех собственных чисел матрицы // Тезисы докладов 10-й Международной конференции по математике и механике. - Алматы, 2004. - С. 214.

55. Рысбайулы Б., Адамов А.А. Сходимость и устойчивость приближенного метода решения задачи определения глубины промерзания земляного полотна // Доклады НАН РК. - 2005. - № 2. - С. 17-20.

56. Рысбайулы Б., Исмаилов А.О. Определение коэффициента теплопроводности однородного грунта в процессе промерзаний // Доклады НАН РК. -2008. -№2. - С. 26-28.

57. Rysbaiuly B., Baymankulov A.T. Variational-difference method for determining the diffusion coefficient of soil water // International Journal of Academic Research. - 2010. - Vol. 2, № 3. - P. 84-91.

58. Rysbaiuly B., Akishev T.B. The calculation of the coefficient of heat capacity and heat transfer of multilayer ground by taking into account data from the Earth surface // Asian Journal of Natural & Applied Sciences. - 2012. - Vol. 1, №1. - P. 5-17.

59. Бидайбеков Е.Ы., Акжалова А.Ж. К вопросу численного решения обратных задач // Материалы II международной научно-методической конференции "Математическое моделирование и информационные технологии в образовании и науке", посвященной 75-летию АГУ имени Абая. - Алматы, 2003. - С. 92-95.

60. Даирбаева Л.М., Акжалова А.Ж. Об одном приближенном методе решения задачи восстановления коэффициента двумерного квазилинейного уравнения теплопроводности // Вычислительные технологии. - 2001. - Т.6, №6. - С.32-38.

61. Бердышев А.С., Шолпанбаев Б.Б., Оралбекова Ж.О. Методы идентификации археологических объектов и состояния подповерхностных покрытий с помощью прибора «Георадар «Лоза-1В». - Алматы: Нұр-Принт, 2013. - 82 с.

62. Оралбекова Ж.О. Дискретный аналог оптимизационного метода граничной задачи // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2010г. - №4(32). - С. 110-113.

63. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Дискретный аналог оптимизационного метода решения обратной задачи для параболического уравнения // Вестник КарГУ им. Е.А.Букетова. Серия математика. - 2010. - №2(58). - С. 56-59.
64. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Технология построения сопряжено-согласованных разностных схем для оптимизационного метода // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия естественно-технических наук. - 2012. - №4 (89). - С. 66-71.
65. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Условная устойчивость обратной задачи для уравнения геоэлектрики // Вестник ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. Серия естественно-технических наук. - 2013. - №4 (95). - С. 124-133.
66. Оралбекова Ж.О. Консервативные разностные схемы в оптимизационном методе // Вестник КазПНУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2013. - №2(42). - С. 148-153.
67. Оралбекова Ж.О., Карчевский А.Л., Искаков К.Т. Дифференцируемость функционала невязки по координате точки разрыва горизонтально-слоистой среды в обратной задаче для уравнения геоэлектрики // Вестник КазПНУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2013. - №2(42). - С. 154-160.
68. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Оптимизационный метод решения обратной задачи для волнового уравнения // Вестник КарГУ им. Е.А.Букетова. Серия математика. - 2013. - №3(71). - С. 43-48.
69. Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Анализ измерений подповерхностных покрытий с использованием георадара // Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики», посвященной 20-летию Независимости Республики Казахстан. - Алматы, 2011. - С. 319-320.
70. Искаков К.Т., Муканова Б.Г., Оралбекова Ж.О. Применение георадара в задачах идентификации подповерхностных покрытий // Третья международная молодежная научная школа-конференция «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». - Новосибирск, 2011. - С. 24-25.
71. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Обратная задача для волнового уравнения в георадарных исследованиях // Труды II международной научно-практической конференции «Информационно-инновационные технологии: интеграция науки, образования и бизнеса», посвященной 20-летию Независимости Республики Казахстан. - Алматы: КазНТУ им. К.И. Сатпаева, 2011. - Т. II. - С. 357-361.
72. Karchevsky A.L., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O. Solution of the inverse problem of surface probing // Abstracts of the 6th International conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation". - Antalya, 2012. - P. 40-41.
73. Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О. Результаты экспериментальных исследований по идентификации состояния подповерхностных покрытий // Международная конференция «Обратные и некорректные задачи математической физики», посвященная 80-летию со дня рождения академика М.М. Лаврентьева. - Новосибирск, 2012. - С. 199.

74. Оралбекова Ж.О., Исаков К.Т. Исследование решения некорректной задачи для уравнения геоэлектрики // Труды I международной научно-практической конференции «Интеллектуальные информационные и коммуникационные технологии – средство осуществления третьей промышленной революции в свете Стратегии «Казахстан-2050». - Астана, 2013. - С. 407-410.
75. Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O. Effective numerical method for inverse problem for geoelectric equation // Abstracts of the 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS). - Baku, 2011. - P.332.
76. Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Z.O. Analysis of the measurements of subsurface coatings using Georadar // The 8th international congress of the ISAAC. - Moscow, 2011. - P. 291.
77. Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O. Numerical methods for 2d Maxwell's equations // Abstracts of the International Conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation". - Fethiye, 2008. - P. 75-76.
78. Оралбекова Ж.О., Исаков К.Т., Карчевский А.Л. Обратная задача акустики для горизонтально-слоистых сред // 4-я международная конференция, посвящённая 90-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. - Москва, 2013. - С. 449.
79. Оралбекова Ж.О. Исследование граничной задачи по определению водонасыщенности // Вестник КазНПУ им. Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2010. - №4(32). - С. 113-117.
80. Жумагулов Б.Т., Мукимбаев М.Ж., Оралбекова Ж.О. Об одной задаче определения параметров нефтяного пласта // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия «Математика, механика, информатика». - 2010. - №3(66). - С. 244-248.
81. Карчевский А.Л., Исаков К.Т., Оралбекова Ж.О., Мирзагаликызы Т. Формулы для численного решения прямой динамической задачи сейсмологии в частотной области для горизонтально-слоистых сред // Вестник ЕНУ им.Л.Н.Гумилева. Спец.выпуск. - 2012. - С. 250-270.
82. Карчевский А.Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сибирские электронные математические известия. - 2008. - Т. 5, С. 609-619.
83. Karchevsky A.L. A proper flow chart for a numerical solution of an inverse problem by an optimization method // Numerical analysis and applications. - 2008. - Vol.1, №2. - P. 114-122.
84. Романов В.Г., Кабанихин С.И. Обратные задачи геоэлектрики. - М.: Наука, 1991. - 303с.
85. Kabanikhin S. I., Iskakov K. T., Yamamoto M. H1-conditional stability with explicit Lipschitz constant for a one-dimensional inverse acoustic problem // J. Inv. Ill-Posed Problems. - 2001. - Vol. 9, № 3. - P. 249-267.
86. Karchevsky A.L. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2009. - Vol. 17, №4. - P. 385-402.
87. Инструкция по настройке георадара и подготовке его к проведению

измерений. Георадары серии «ЛОЗА». Модели «В», «В1», «В2», «Н» и «Н1». - М.: ООО ВНИИСМИ - 53 с.

88. Владов М.Л., Старовойтов А.В. Введение в георадиолокацию. - М.: Издательство МГУ, 2004. - 153 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Анализ численных расчетов свойств алгоритма оптимизационного метода

В этом приложении приведены результаты численных расчетов. Исследование математических свойств функционала невязки позволило предложить численный метод решения обратной задачи по одновременному определению диэлектрической проницаемости и проводимости. Работоспособность метода подтверждается примерами восстановления данных функций на данных с внесённой случайной ошибкой. Цель приведенных ниже численных экспериментов выявить значения параметров функционала невязки, которые позволяют решить обратную задачу наилучшим образом. Численный алгоритм решения обратной задачи представлен в работе [86]. Нами в результате численных экспериментов изучена свойства поведения функционала зависимости изменения параметров Фурье и частоты. Определена опорная частота и зависимости отклонения от нее выявлено поведение функционала невязки. Результаты этих исследований опубликованы в работе [42].

#### А1 Анализ усредненных частот

Пусть нам известны для изучаемой среды средние значения диэлектрической проницаемости и проводимости.

Напомним обозначение принятое в разделе 2:

$$r^2 = \lambda^2 - (\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon - i \omega \mu_0 \sigma).$$

Проведя ряд вычислений, убедимся,

$$r = \sqrt[4]{[\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon]^2 + [\omega \mu_0 \sigma]^2} e^{i\beta/2}, \quad \beta = \begin{cases} \arctg \frac{\omega \mu_0 \sigma}{\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon}, & \lambda^2 > \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon, \\ \pi/2, & \lambda^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon, \\ \pi + \arctg \frac{\omega \mu_0 \sigma}{\lambda^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon}, & \lambda^2 < \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon. \end{cases}$$

Анализируя это убеждаемся: вариация решения прямой задачи зависит от факта поведения функции  $r$  при вариации  $\varepsilon$  и  $\sigma$ . Причем наибольшее изменение значения  $r$  зависит от изменения  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , т.е в случае

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon \approx \omega \mu_0 \sigma \text{ и } \lambda^2 \sim \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon.$$

Пусть  $\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon = \omega \mu_0 \sigma$ , имеет место:

$$\omega_* = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}$$

где:  $\omega_0$  - опорная частота.

Рассмотрим следующие данные (таблица А1):

Таблица А1 – Значения геоэлектрических параметров

Нумерация слоев	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon$	18.5	22.8	18.4	19.2	28.3	30.0
$\sigma$	0.017	0.024	0.016	0.017	0.022	0.024
$z_k$	0.11	0.21	0.39	0.58	0.82	

Зададим средние значения  $\varepsilon = 20$  и  $\sigma = 0,020$ , нетрудно вычислить что  $\omega_* = 1,12 \cdot 10^8$ . Значение скин-слоя:

$$h_s = \sqrt{\frac{2}{\omega_0 \mu_0 \sigma}} \approx 0,84 (m).$$

Фиксируем  $\varepsilon_m$  и  $\sigma_m$  ( $m = \overline{2,5}$ ), и изменяем величины диэлектрической проницаемости и проводимости первого слоя из диапазона:  $\varepsilon_1 \in [1;40]$ ,  $\sigma \in [0,01;0,03]$ , задавая  $\omega = r \omega_0$ , в случае  $r = \{1/10, 1/7, 1/5, 1/2, 1, 2, 5, 7, 10\}$ .

Вычисляем значение в каждом случае

$$\Delta\omega = |u(0, \omega, \lambda_0) - g(\omega, \lambda_0)|^2.$$

Численные расчеты изображены на рисунке А1.

Из анализа вычислений следует: если значение  $\omega$  намного меньше значения  $\omega_0$  то функционал не чувствителен к вариациям  $\varepsilon_1$ , в случае, когда  $\omega$  больше чем  $\omega_0$ , он не чувствителен к вариациям  $\sigma_1$ , т.е он становится более выпуклым вниз.

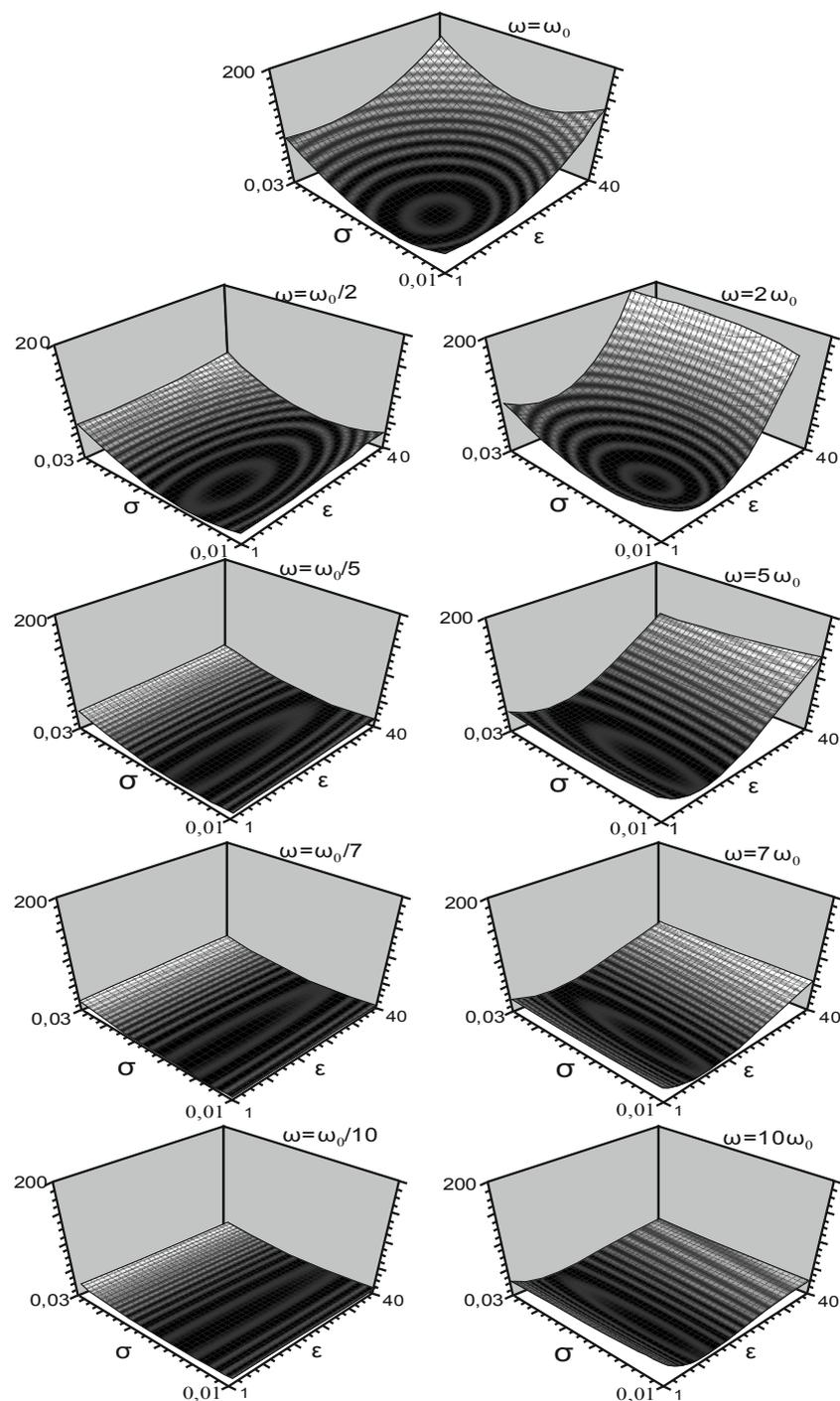


Рисунок А1 – Значение разности наблюдаемого и расчетных величин  $\omega$

## А2 Анализ функционала невязки от поведения параметра Фурье

Проведены численные расчеты по экспериментальному исследованию поведения функционала в зависимости от изменения параметров Фурье. За основу данных геоэлектрического разреза взяты из таблицы А1.

На рисунке А2 представлены эти результаты.

Из рисунка А2 видно, функционал становится чувствительным при увеличении параметров Фурье. В особенности это заметно на нижних фрагментах, овраг становится растянутым.

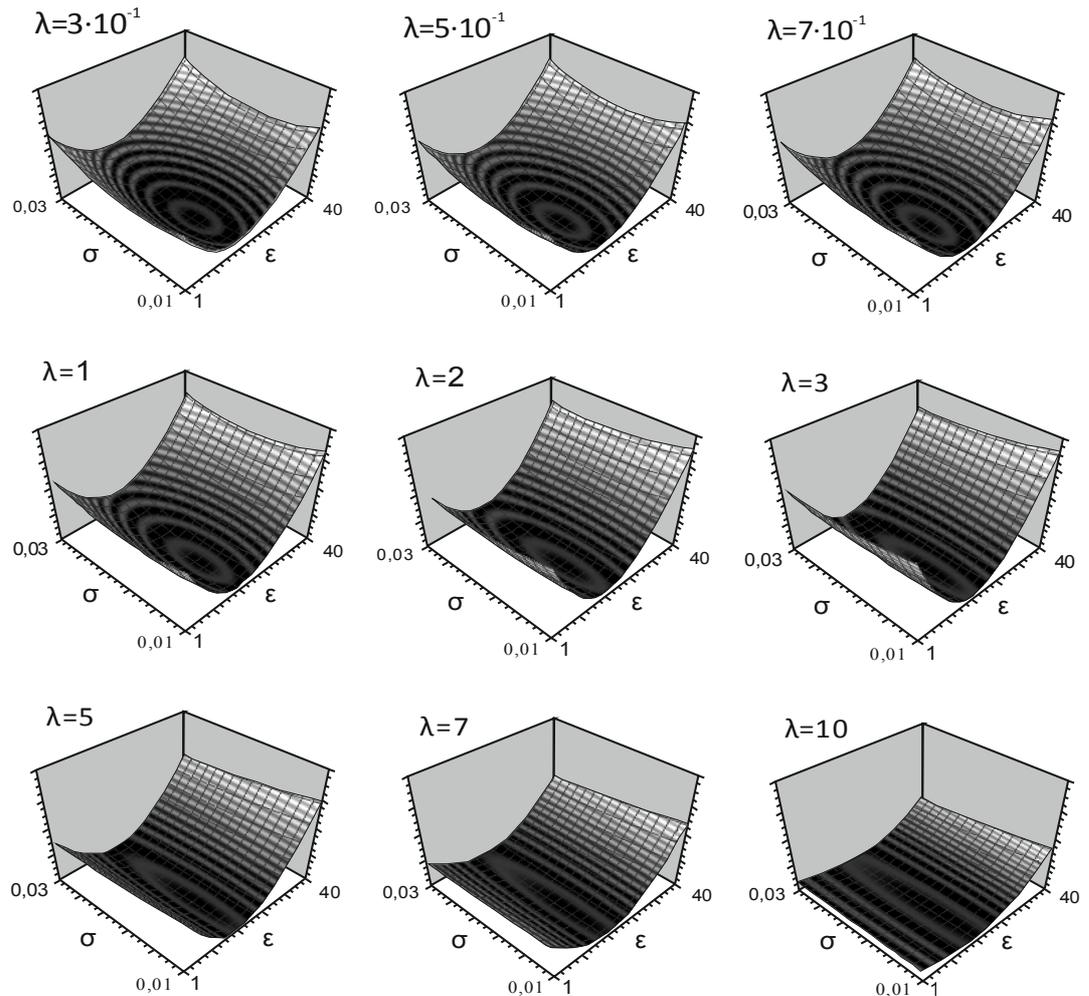


Рисунок А2 – Анализ функционала для ряда величин параметра Фурье

Для численных расчетов проведено для 430 величин частоты из диапазона  $[\omega_0/10; 10\omega_0]$ , шаг постоянен.

### А3 Численные примеры решения обратной задачи в частотной области

Вначале вычисляем прямую задачу (2.1)-(2.4), откуда нетрудно определить дополнительную информацию. Для анализа берем дополнительную информацию ошибочную:

$$\tilde{g}(\omega, \lambda_0) = g(\omega, \lambda_0) \left( 1 + \frac{P}{100} \xi \right),$$

здесь:  $\xi$  – случайное значение,  $P$  – ошибка в процентах.

Результаты вычислений приведены ниже на рисунке А3.

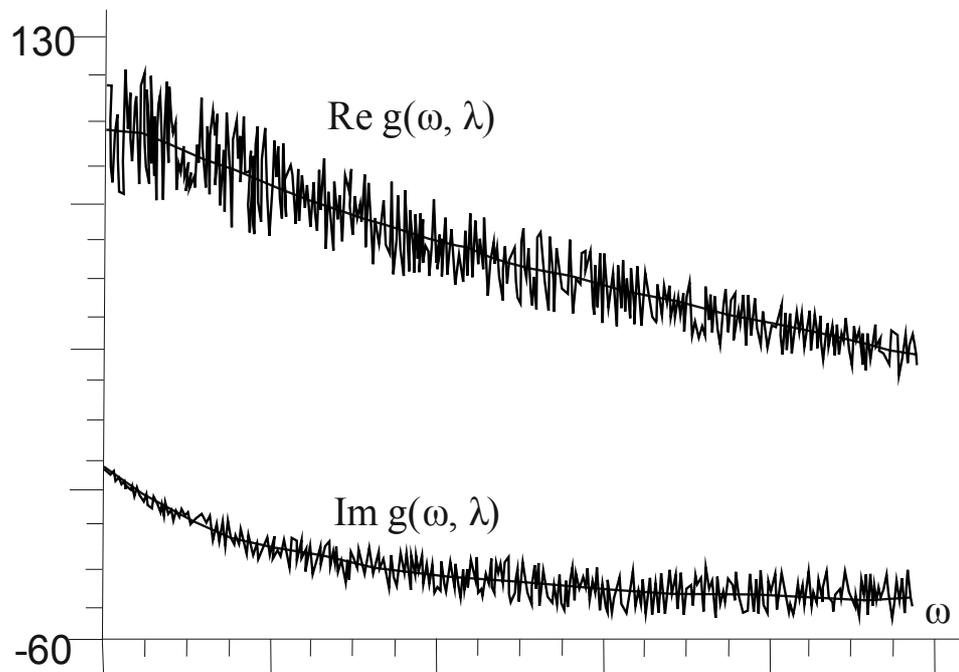


Рисунок А3 - Информации  $g(\omega, \lambda)$  с введением ошибок порядка двадцати процентов

Расчеты были проведены для следующих моделей:

Таблица А2 - Среда вторая

Слои	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon$	20,5	22,7	17,9	22,8	21,0	30,0
$\sigma$	0,021	0,023	0,020	0,021	0,020	0,025
$z_k$	0,11	0,22	0,39	0,62	0,82	

Таблица А3 – Среда третья

Слои	1	2	3	4	5	6
$\varepsilon$	2,05	2,27	2,05	2,08	1,93	2,50
$\sigma$	0,0021	0,0023	0,0020	0,0021	0,0020	0,0025
$z_k$	0,48	0,88	1,38	2,00	2,50	

Таблица А4 – Среда четвертая

Слои	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\varepsilon$	20,2	21,3	22,1	20,4	18,4	16,2	17,8	18,8	22,2	23,3	25,0
$\sigma$	0,0018	0,0021	0,0020	0,0021	0,0020	0,0018	0,0019	0,0021	0,0022	0,0023	0,0025
$z_k$	0,72	1,53	2,91	3,65	4,45	5,05	6,00	6,65	7,23	8,20	

Таблица А5 – Среда пятая

Слои	1	2	3	4	5	6	7	8
$\varepsilon$	20,2	19,3	20,2	20,9	21,1	19,2	23,4	2,50
$\sigma$	0,021	0,020	0,021	0,019	0,018	0,019	0,022	0,025
$z_k$	0,11	0,22	0,33	0,44	0,59	0,72	0,83	

Нами принято, координаты границ замыкающих слоев совпадет с значениями скинов-слоев.

Значения для функционалов, представлены ниже:

Таблица А6 Общая схема моделей

Среды	$\omega_0$	Диапазон частот	Количество омега
Среда первая	$1,12 \cdot 10^8$	$[\omega_0/10, 10\omega_0]$	2500
Среда вторая	$1,12 \cdot 10^8$	$[\omega_0/10, 10\omega_0]$	2500
Среда третья	$1,12 \cdot 10^8$	$[\omega_0/10, 10\omega_0]$	2500
Среда четвертая	$1,12 \cdot 10^7$	$[\omega_0/40, 40\omega_0]$	6000
Среда пятая	$1,12 \cdot 10^8$	$[\omega_0/40, 40\omega_0]$	6000

Для начального приближения диэлектрической проницаемости и проводимости использовали ее значение в последнем слое.

Функционал минимизировали следующими формулами [45, с. 323-326]:

$$\chi_0^{n+1} = \chi_0^n - \alpha_n p_n,$$

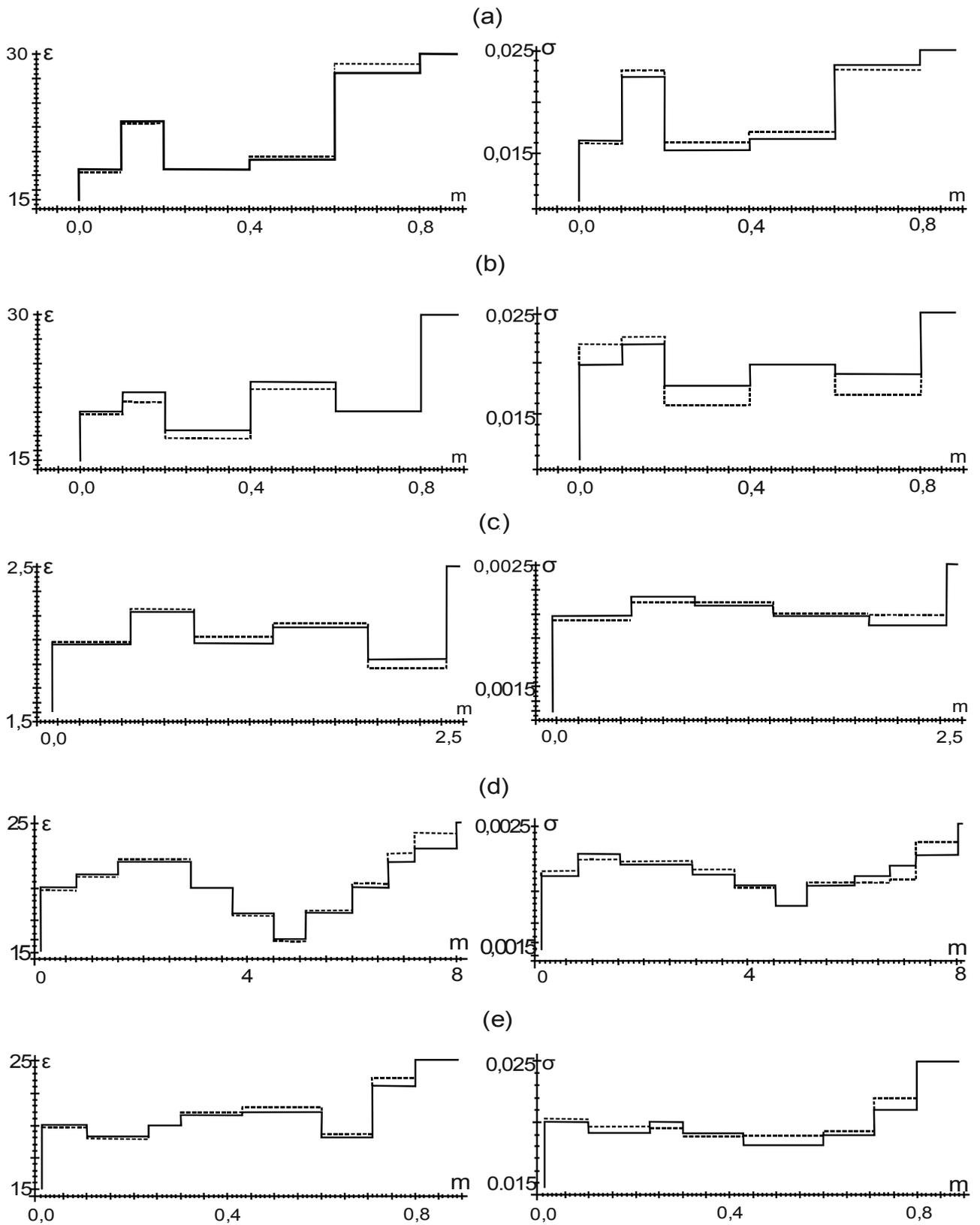
$$p_n = J'[\chi_0^n] - \beta_n p_{n-1},$$

$$p_0 = J'[\chi_0^0],$$

$$\beta_n = -\frac{\|J'[\chi_0^n]\|^2}{\|J'[\chi_0^{n-1}]\|^2},$$

$$\alpha_n = \arg \min_{\alpha > 0} J[\chi_0^n - \alpha_n p_n].$$

Решение обратной задачи по определению диэлектрической проницаемости и проводимости, представлен ниже на рисунке А4.



Непрерывная линия – точные решения, прывистая - приближенное для всех указанных моделей сред

Рисунок А4 – Определение геоэлектрического разреза

#### А4 Численные расчеты для решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики (во временной области)

В этом подразделе рассматривается тестовая модель для численного решения обратной задачи для уравнения геоэлектрики близкой к реальной ситуации. Применены алгоритмы оптимизационного метода решения обратной задачи 1, подробно описанной в разделе 4.

Пусть на земной поверхности включается источник стороннего тока  $j^{cm}$ , имеющий по времени колоколо-образный вид  $r(t)$  и длительность воздействия порядка двух наносекунд. Там же на этой поверхности в течении примерно 50 наносекунд измеряется электромагнитное поле (отклик среды), по которому требуется определить  $\varepsilon$  на глубине от нуля до 2,2 метра.

Как ранее отметили в разделе 1, рассмотрим вариант указанной задачи, когда  $\varepsilon$  и  $\sigma$  зависят от глубины  $x_3$ , а источником стороннего тока является достаточно длинный кабель, расположенный по центру и протянутый вдоль по оси  $x_2$ .

Известно, что:  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_{отн}$ ,  $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{\text{М}}$ ,  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_{отн}$ ,  $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma}{\text{М}}$ ,  $\mu_{отн} = 1$ . Пусть заданы: мощности слоев  $x_3^1 = 0.2\text{м}$ ,  $x_3^2 = 1.2\text{м}$ ,  $x_3^3 = 2.2\text{м}$  - которым соответствуют границы раздела сред между однородными средами, в каждой из которых считаем, что значения  $\varepsilon_{отн}$  и  $\sigma$  - постоянны.

Проведены численные расчеты для решения прямой задачи, приняв во внимание все указанные входные данные. Для решения обратной задачи, нам нужна дополнительная информация. Поскольку в результате решения прямой задачи, известно нам решение, примем в качестве дополнительной информации след решения в точке 0 (рисунок А5).

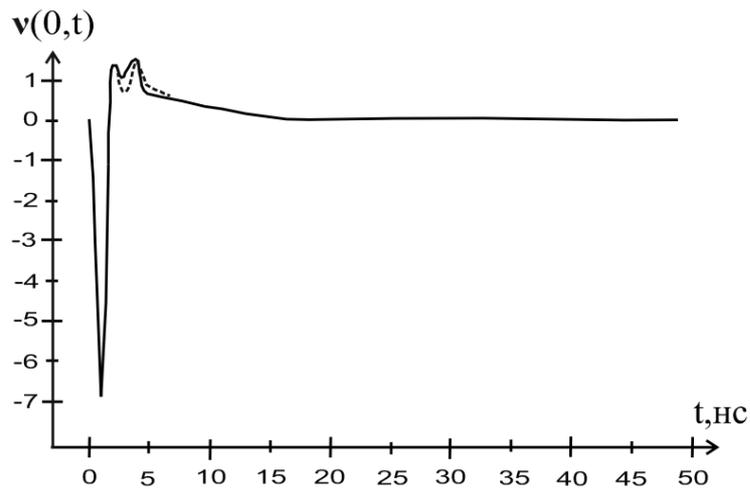


Рисунок А5 - Дополнительная информация

Используя общий алгоритм решения обратной задачи оптимизационным методом, описанной в разделе 1 (на примере решения обратной задач 1), строим

итерационную процедуру метода наискорейшего спуска. Зададим начальное приближение для диэлектрической проницаемости (рисунок А6).

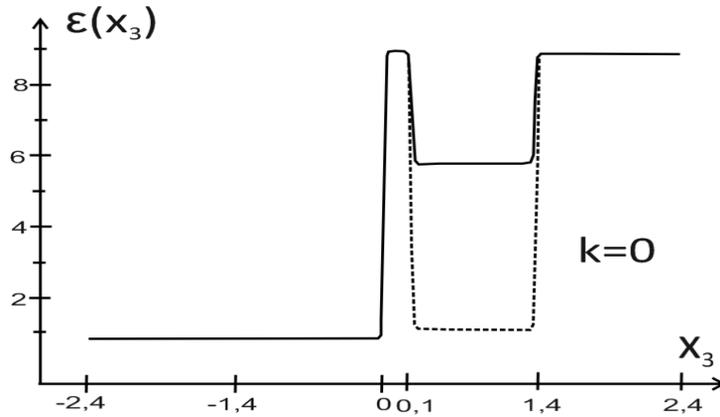


Рисунок А6 - Сплошная линия – точное значение диэлектрической проницаемости, пунктирная линия – приближение на итерации  $k = 0$

В результате расчетов численного решения прямой задачи и согласованно-разностной сопряженной задачи (схема действий 2, рассмотренный в разделе 4), минимум функционала достигнут на итерации  $k=12$  (рисунок А7).

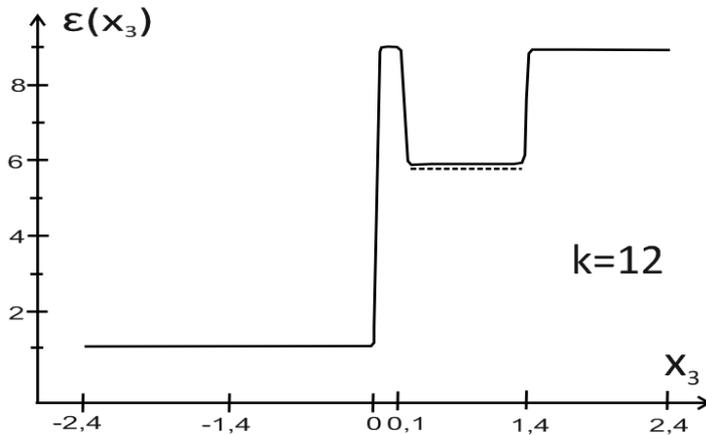


Рисунок А7 - Сплошная линия – точное значение диэлектрической проницаемости, пунктирная линия – приближение на итерации  $k = 12$

Отметим, что в расчетах, нами использовалось влияние воздуха, технология этого влияния достаточно подробно, с доказательствами изложено в разделе 1, как видно на рисунках А6, А7 значения меньше нуля.

Параметры расчетов: Число узлов по пространственной переменной 50 узлов (в воздухе), число узлов (в глубину- 200). Время счета всех итерации, порядка 9 минут. Рассматривались неявные схемы, абсолютно устойчивые.

Для подтверждения результатов из подраздела 4.1, что полезно считать по схеме действий 2, проведены серии расчетов. Для наглядности, нами рассматривалась обратная коэффициентная задача для волнового уравнения.

Пусть точное значение коэффициента имеет вид:

$$q(x) = 1 + e^{-x/2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin 11x - \frac{1}{5} \sin 55x + \frac{1}{7} \sin 109x \right).$$

Обозначим через  $p_j$  приближенное значение.

Результаты определения функции  $p_j$  на  $n_1$  итераций приведены на рисунке А8.

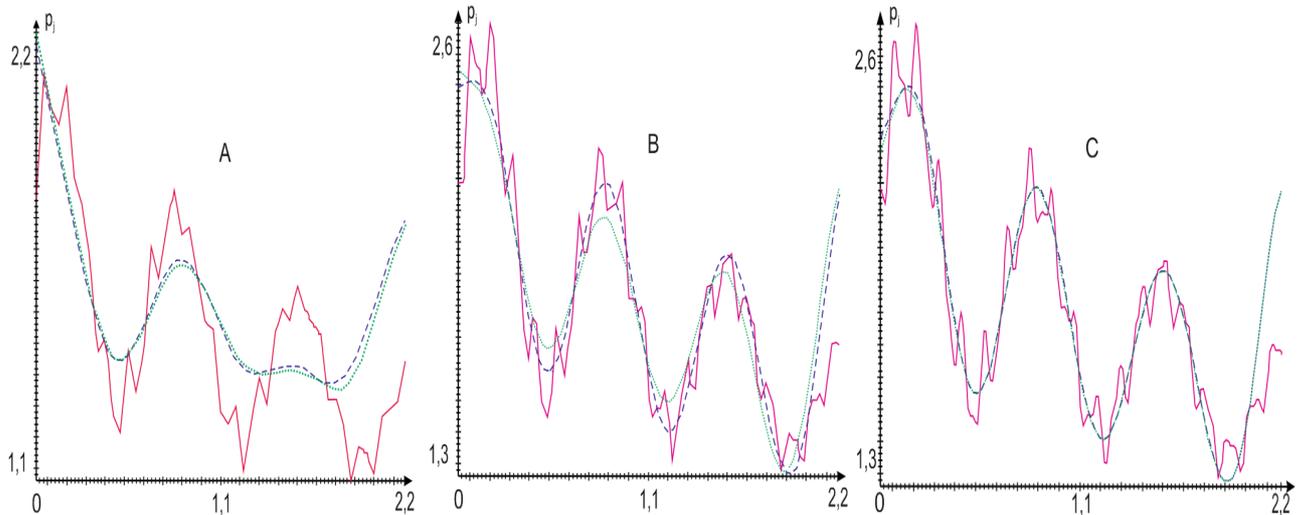


Рисунок А8 – Определение функции  $p_j$

Здесь обозначено: Точное значение функции  $p_j$  - сплошной линией; значение функции по второй схеме действий - пунктирной линией; и значение функции по третьей схеме действий точечной линией.

Серии расчетов и количество итераций равно  $n_1$ , для левого рисунка А:  $n_1=8$ , для среднего В:  $n_1=15$ , и для правого С:  $n_1=20$ .

Из анализа расчетов следует, что самым эффективным является схема действий 3, т.е построение сопряженной задачи на дискретном уровне строго согласованной к исходной. Почему это происходит, см. доказательство теоремы приведенной в подразделе 4.2.

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Экспериментальные исследования с применением георадара в задачах идентификации подповерхностных покрытий

В этом приложении приведены инженерно-технические приемы по идентификации радарограмм. С этой целью проведены экспериментальные исследования по диагностике взлетно-посадочной полосы коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области РК, с использованием георадара (GPR). По результатам радарограмм проведен анализ показывающих причину повреждения (дефекта) верхних слоев выбранного участка взлетно-посадочной полосы [68-73; 76].

Проведены эксперименты, позволяющие выработать технологию по интерпретации георадарных данных. Это позволило провести сравнительный анализ результатов данных аналогичных радарограмм и экспериментальных исследований.

#### **В1 Постановка технической проблемы**

Постановка задачи состояла в следующем: выявление внутренней структуры строения участка взлетно-посадочной полосы (с явным дефектом), представленный на рисунке В1. Обследование структуры грунта на предмет обнаружения причин дефекта поверхности полосы. Постановка задачи требует применения неразрушающего метода, дающего представление о состоянии грунта расположенного под рабочей покрытий полосы.

Экспериментальные исследования проведены: руководителем службы безопасности полетов аэродрома полковником А.Оразбаевым, профессором К.Т. Искаковым и докторантом PhD Ж.О.Оралбековой [69-71; 76].



Рисунок В1 - Взлетно-посадочная полоса и георадар

Экспериментальные исследования состояла из следующих частей: описание объекта и ее физическое состояние; схема разметки участка полосы для проведения георадарных измерений; данные геологических профилей исследуемых объектов; экспертное заключение по диагностике (дефекта) исследуемого объекта.

Экспериментальные исследования выполнены геофизическим комплексом «Лоза В», с использованием антенны 100см (100МГц), шаг по профилю 10см. по первой трассе (отмечена на рисунке 10 красной стрелкой). С использованием антенны 150 см. (150 МГц) с шагом 20 см. по второй трассе, указано на рисунке В2 синей стрелкой.

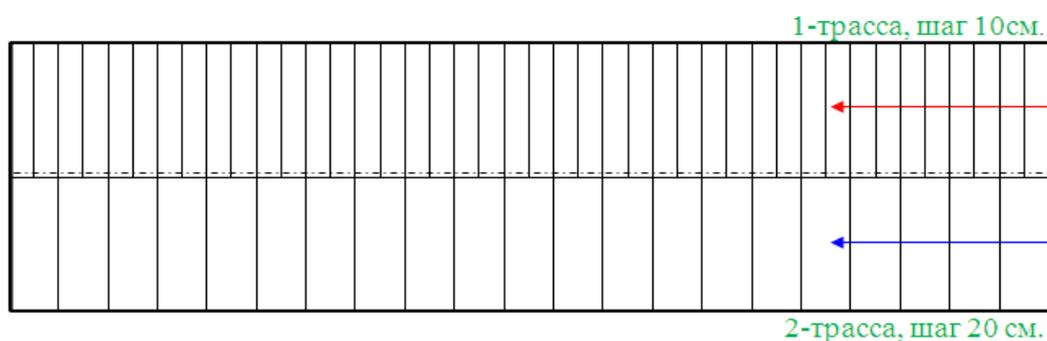


Рисунок В2 - Схема трасс

**В2 Данные георадарных экспериментальных исследований объекта**  
Ниже на рисунке В3 показан профиль первой трассы:

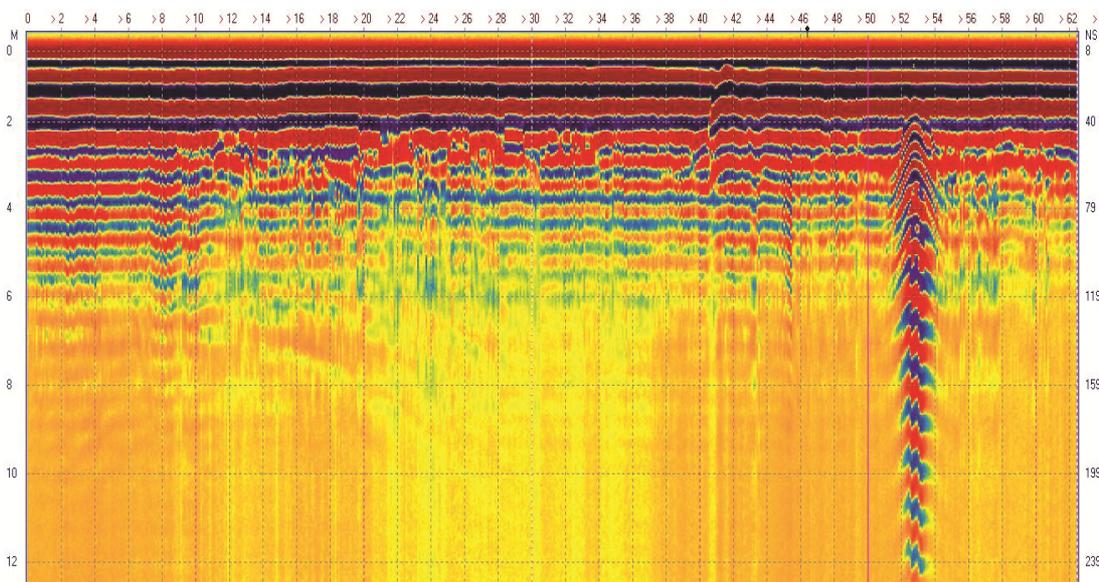


Рисунок В3 - Профиль трассы с шагом 10 см. с расстоянием между антеннами 100 см

Далее на рисунке 12 показан тот же профиль после применения низкочастотного фильтра, сглаживающего осцилляции вдоль трассы:

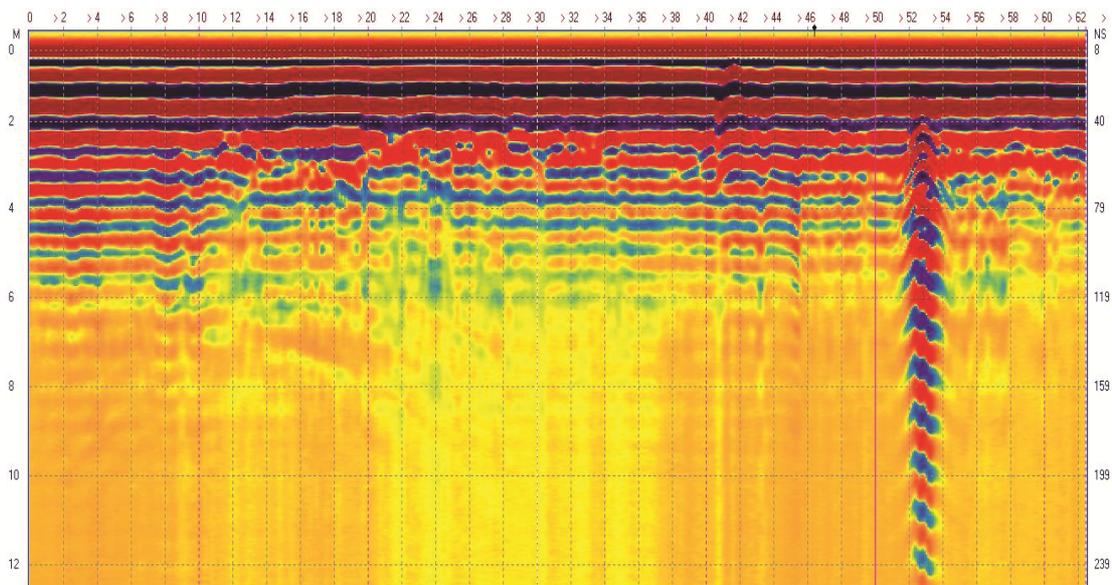


Рисунок В4 - Обработка профиля низкочастотным фильтром

На рисунках цифры слева направо по оси абсцисс – это координата в метрах, измеренная вдоль профиля, вертикальная шкала справа – время регистрации сигнала приемной антенной в нс.

Далее приведены аналогичные рисунки (георадарный профиль) для второй трассы (рисунок В5):

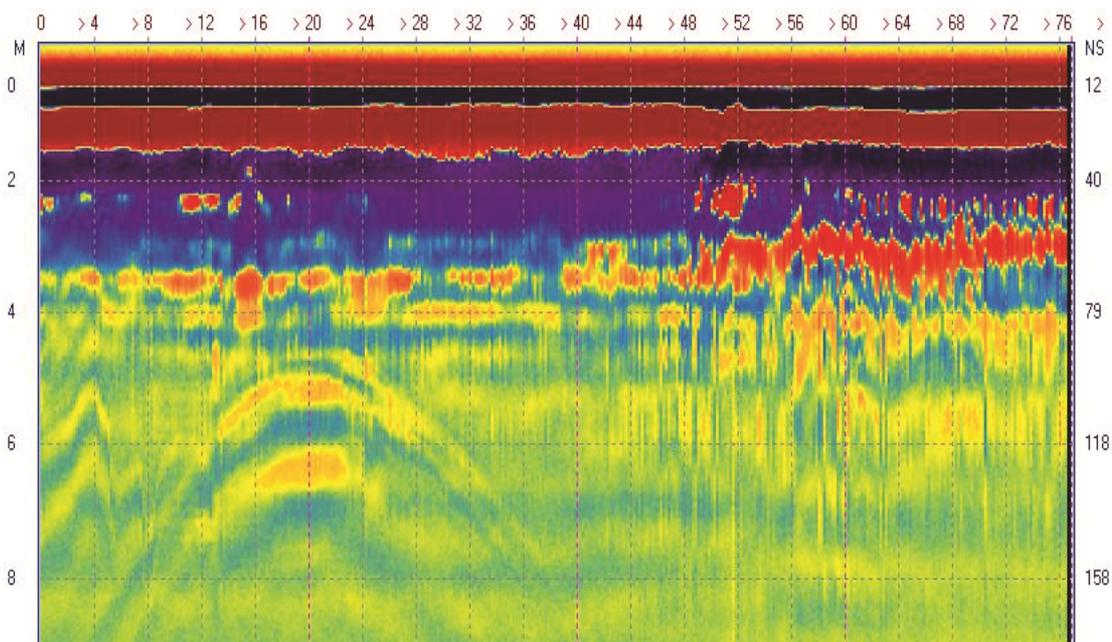


Рисунок В5 - Профиль трассы с шагом 20 см. с расстоянием между антеннами 150 см

На рисунке В6 показан тот же профиль, после применения низкочастотного фильтра.

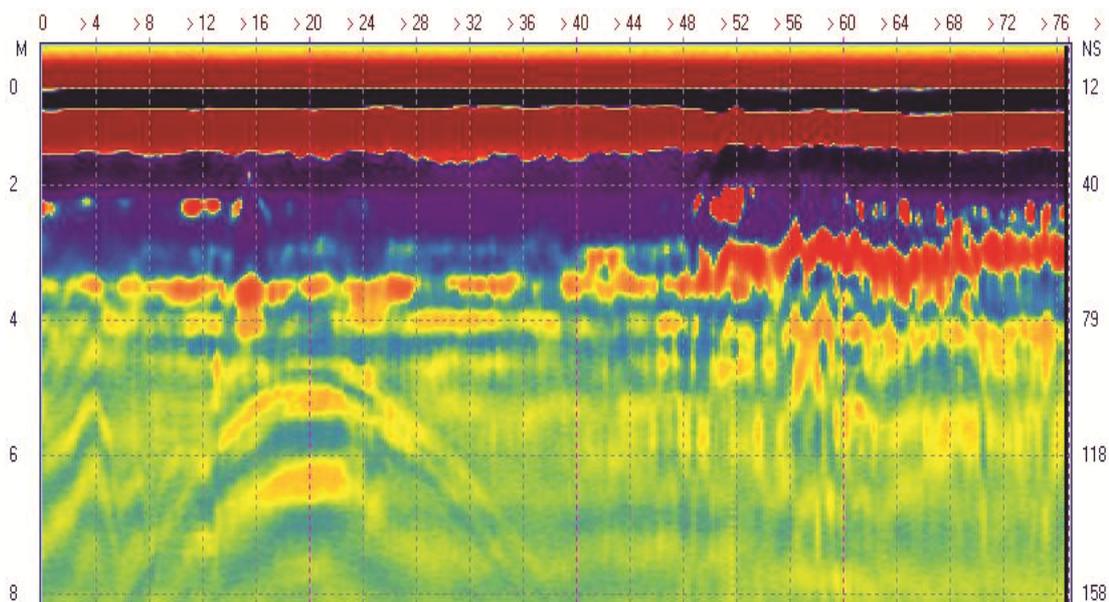


Рисунок В6 - Обработка профиля низкочастотным фильтром

На обеих радарограммах наблюдается картина, характерная для отражения от подземного объекта типа трубы (куполообразные волновые картины). Особенно отчетливо картина отражения видна на второй трассе, где вершина купола находится в 20м. от начала трассы, а на первой радарограмме вершина купола находится в 12м. Следовательно, труба проходит по косой к взлетно-посадочной полосе.

Упомянутые выше фрагменты радарограмм, характерные для отражения от подземных труб вынесены отдельно на рисунке В7.

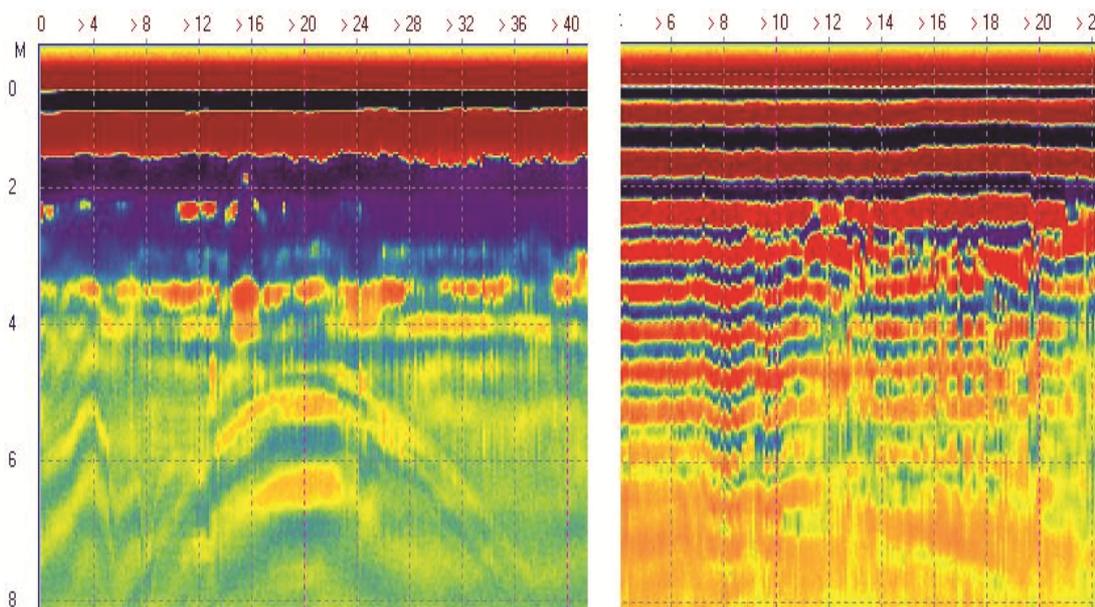


Рисунок В7 - Куполообразные волновые профили на радарограмме, характерные для отражения от подземных протяженных объектов, типа труб

На рисунке В8 показана амплитуда сигнала по времени [87]. Положительная часть отмечено черным цветом и отрицательная часть светлым цветом. В зависимости от максимальной амплитуды и ее изменения отмечают цветовой палитрой. Например, эта шкала представлена на рисунке 20, где максимальное значение амплитуды в положительной полуоси отмечено красным, а в отрицательной полуоси – синим. В зависимости уменьшения величины изменяется и их тональность по цвету.

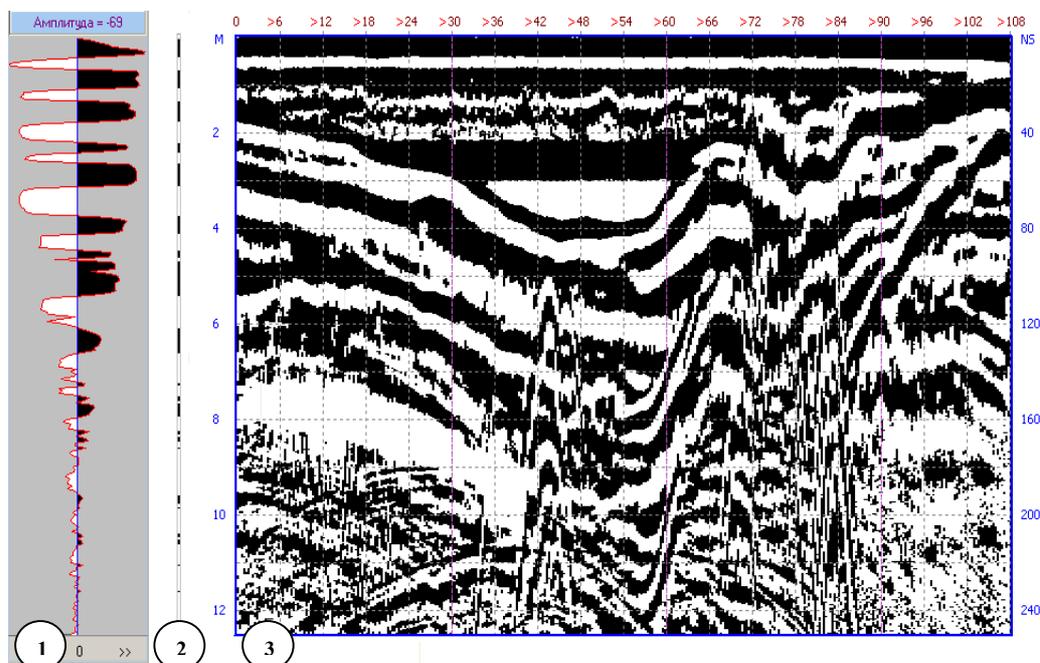


Рисунок В8 - Амплитуда сигнала по времени

Для вычисления мощности слоев и локализованных предметов, требуются значения скорости пробега волн в этих средах.

В программном обеспечении георадара имеется процедура для вычисления этой величины, и определяется из формулы [88]:

$$T = \frac{(S^2 + 4 * d^2)^{1/2}}{V_{\sigma}} ,$$

Здесь: S – разнос антенн, d – величина залегающего слоя отраженного,  $V_{\sigma}$  - скорости в слоях.

На рисунке В9 приведен годограф скоростей [87].

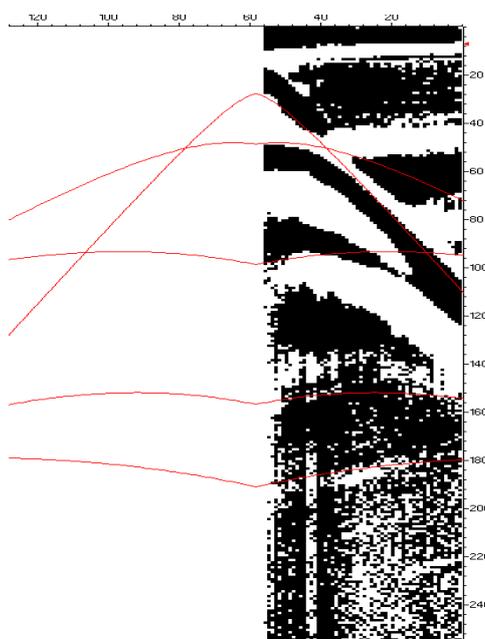


Рисунок В9 - Годограф

### **В3 Анализ и выводы экспериментальных исследований (эксперимент №1)**

Картины радарограмм визуально похожи на возмущения поверхности жидкости плоской волной, фронт которой совпадает с «берегом».

Основания для проводимой здесь гидродинамической аналогии следующие [70]:

1. Модель распространения электромагнитных колебаний в среде, которое используется как базовая модель в радиолокации, совпадает с уравнениями распространения волн поверхности жидкости. В обоих случаях мы имеем дело с волновыми явлениями.

2. Радарограмма получается при последовательной записи отклика среды на возмущение при перемещении источника вдоль трассы. При этом расстояние между приемной и излучающей антеннами существенно меньше длины трассы.

3. Представим, что мы одновременно возмутили среду источниками, помещенными во всех точках трассы (которые на самом деле мы проходили последовательно, одна за другой). Т.е. как будто мы одновременно включили столько установок, сколько точек измерения было на трассе

4. Такое одновременное возмущение многими источниками можно трактовать как возмущение поверхности среды плоской волной, падающей на поверхность.

Если на пути волн имеются непроницаемые препятствия, волны их огибают и возникают куполообразные волновые картины (рисунки В5 и В6), похожие на волновую картину, образующуюся за выступающим из воды камнем, например.

Если препятствия представляют собой нечто вроде ворот, то волна проходит в ворота, а за стенами наблюдается штиль. На рисунке В4 интервал

на расстоянии 52 – 54 метра от начала координат – нечто вроде «ворот», скорее, «дверей».

Эти соображения и позволили нам сделать выводы о наличии «трубы» – непроницаемой для электромагнитных колебаний препятствия. Основание – картина радарограммы похожа на волновую картину в окрестности выступающего из воды утеса в предложенной нами здесь гидродинамической аналогии.

На тех же основаниях мы сделали вывод о возможности «щели», узкой области под первой трассой, прозрачной для радиоволн.

Выводы об угасании сигнала сделаны только на основании ослабления отраженного сигнала и сравнении соседних участков радарограммы. Там где угасание больше – там больше проводимость, а значит, вероятнее всего, влажность среды.

#### **В4 Дополнительные экспериментальные исследования (эксперимент №2)**

Повторные экспериментальные исследования на вышеуказанном объекте (рисунок В10) проведены руководителем службы безопасности полетов аэродрома полковником Б.Кулназаровым и докторантом PhD Ж.О.Оралбековой [72-73].

Экспериментальные исследования состояла из следующих частей: описание объекта и ее физическое состояние; новая схема разметки участка полосы для проведения георадарных измерений (рисунок В11); данные геологических профилей исследуемых объектов; экспертное заключение по диагностике (дефекта) исследуемого объекта.

Экспериментальные исследования выполнены геофизическим комплексом Лоза-В, с использованием антенны 100см (100МГц), шаг по профилю 10см. и с шагом 20 см. трассам отмеченных на рисунке 20.



Рисунок В10 - Взлетно-посадочная полоса и георадар (эксперимент 2)

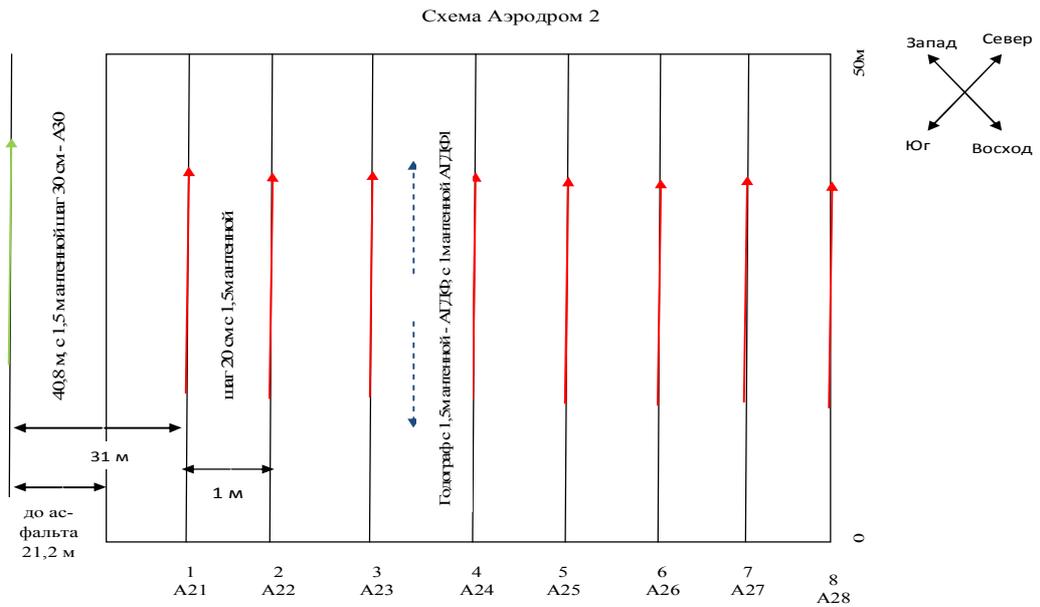


Рисунок В11 - Схема трасс (эксперимент 2)

Данные георадарных экспериментальных исследований объекта приведены на рисунке В12.

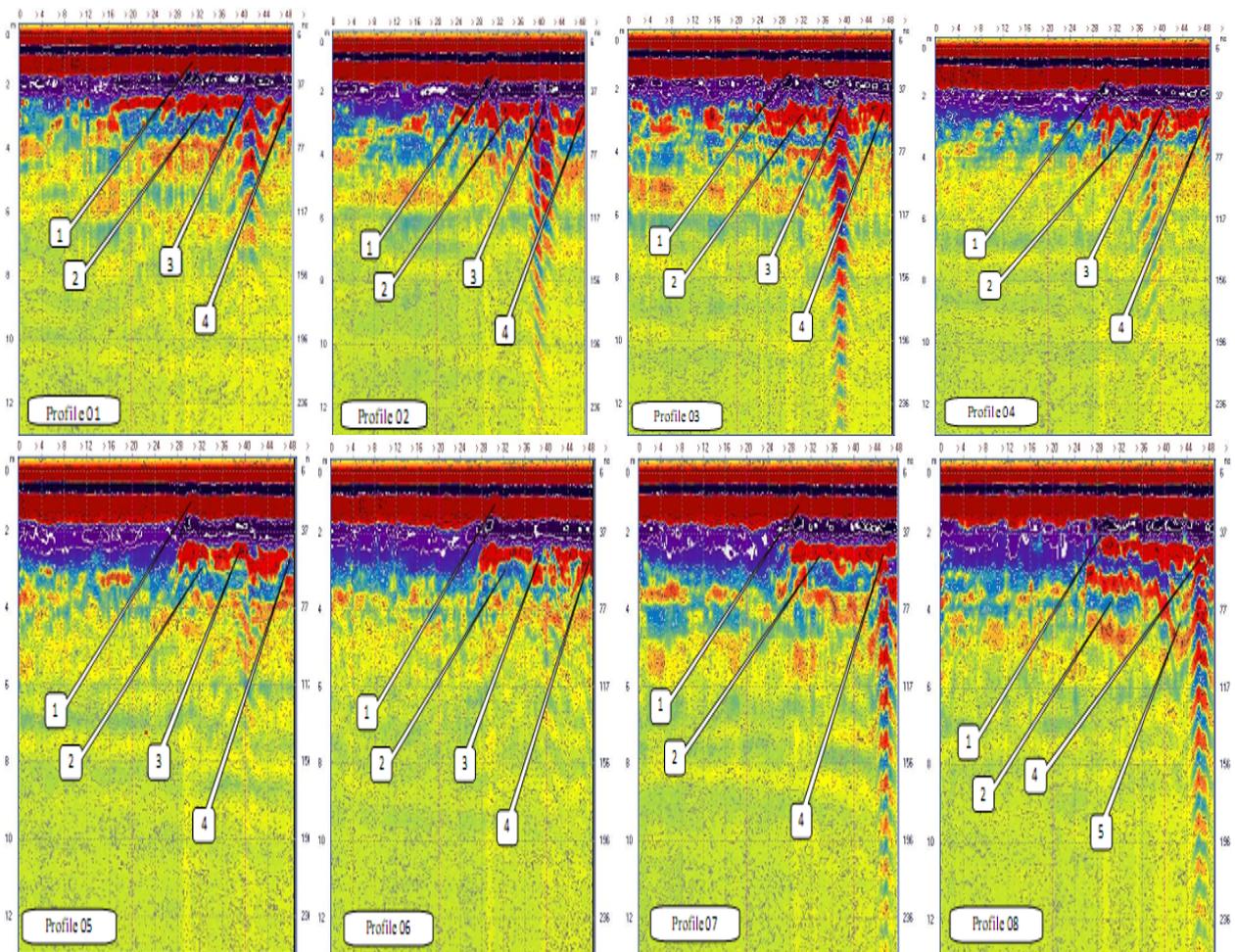


Рисунок В12 - Данные георадарных экспериментальных исследований

В результате проведенного анализа приходим к следующему заключению:

- 1 – линейно протяженный объект (трещина, шов, кабель....)
- 2 – плотный слой грунта (глина, подсыпка гравия с крупным камнем....)
- 3 – железобетонный лоток (дренаж, трубы....)
- 4 – железобетонный лоток (дренаж, трубы....)
- 5 – яма, старое русло ручья...

Ниже приведена 3D обработка, полученных профилей (рисунок В13):

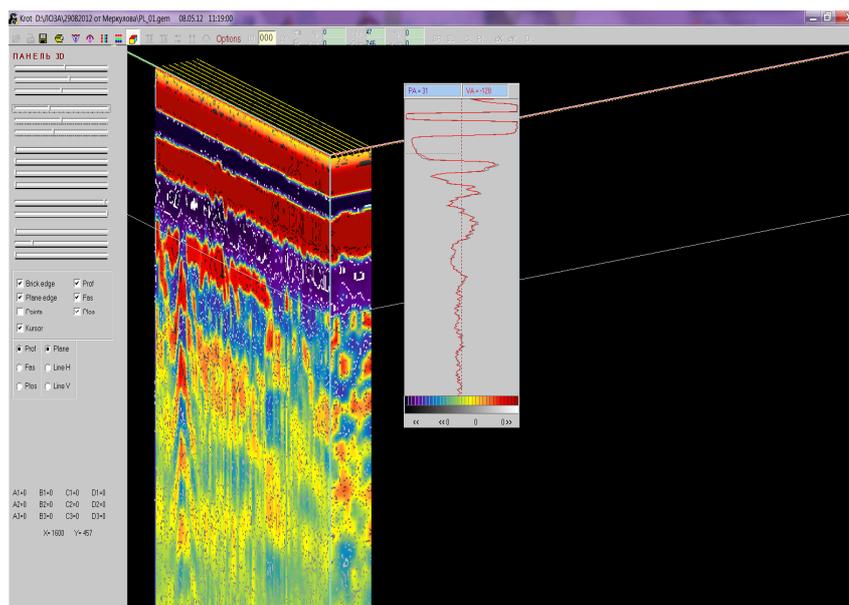
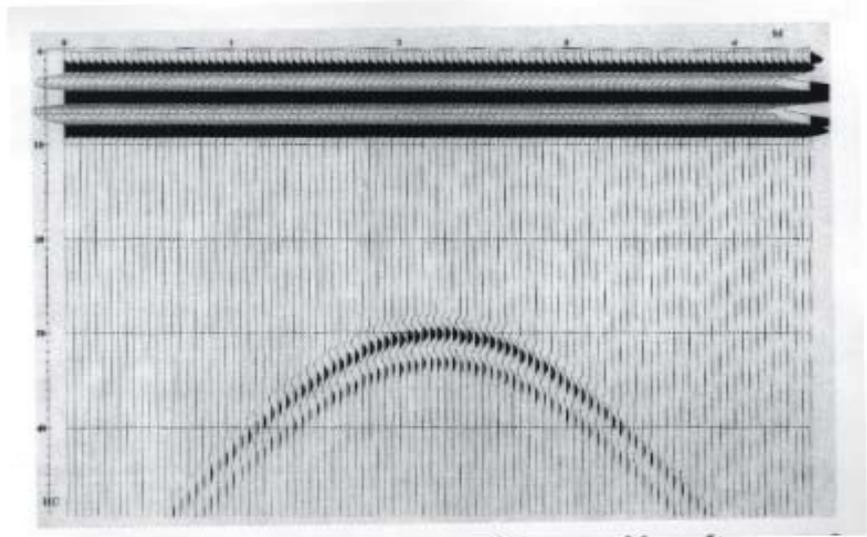


Рисунок В13 - 3D обработка профилей

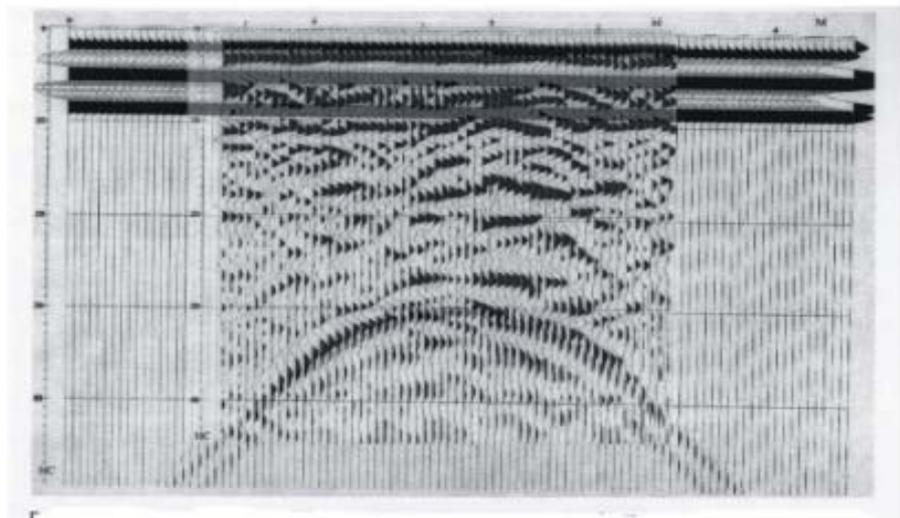
**Замечание.** В случае проведения экспериментальных измерений параллельных вдоль предполагаемого исследуемого объекта, как видно из заключения, мы получаем более подробную картину об исследуемом дефекте поверхности аэродрома. Как показало экспериментальные исследования, необходимо проведения двух этапов эксперимента, на первом выявляется предполагаемый объект, а на втором вокруг этого объекта нужно провести тщательные измерения.

Для построения математической модели, в лабораторных условиях получают синтетическую радарограмму (рисунок В14) верхний фрагмент [88, с. 49-51], и сравнивают с результатами полевых записей радарограмм (см. рисунок В14, нижний фрагмент).

Для численных расчетов принимаются эти данные, и тем самым обосновывается достоверность построенной математической модели.



1



2

1 – синтетическая радарограмма  
 2 - результаты полевых наблюдений

Рисунок В14 – Сопоставление синтетических данных и результатов полевых наблюдений