Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

УДК 517.983

На правах рукописи

ТАСПАГАНБЕТОВА ЖАНАР АБДУЛОВНА

Ограниченность и компактность матричных операторов в весовых пространствах последовательностей и их приложения

6D060100 – Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор Ойнаров Р.

Зарубежный консультант
профессор Массимо Ланца
де Кристофорис (Италия)

Казахстан
Астана, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования. Одной из основных задач в теории матриц является нахождение необходимых и достаточных условий на элементы матрицы, при которых матричный оператор действует непрерывно из одного нормированного пространства в другое, при этом очень важно найти значение нормы матричного оператора, в крайнем случае, найти верхние и нижние оценки. Однако в некоторых пространствах, имеющее важное теоретическое и практическое значения, вышеуказанные проблемы являются открытыми. Поэтому исследователи выделяют некоторый класс матричных операторов, и для операторов из этого класса исследуют вопросы ограниченности и компактности.

В работе [1] приведена сводка результатов действия матричных операторов в 11 пространствах последовательностей со значениями норм, однако указано, что нахождение критерия действия матричного оператора из l_p в l_q, $p > 1$, $q > 1$ и значение его нормы в общем случае остается открытым. Эти операторы, имея самостоятельное значение, являются дискретными аналогами интегральных операторов, играющее очень большую роль в функциональном анализе ([2, 3]).

Во второй половине прошлого века исследователями выделен один класс интегральных операторов – операторы типа Харди. Это связано с работой G.H. Hardy 1925 года [4], в которой установлена ограниченность в $L_p(0, \infty)$ интегрального оператора

$$(Hf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(s)ds \quad \forall f \in L_p(0, \infty),$$

с нормой $\|H\|_{p \to p} = \frac{p}{p-1}, 1 < p < \infty$.

В связи с многочисленными приложениями этого результата в различных задачах анализа, например, в теории функций, в гармоническом анализе, в теории дифференциальных уравнений и т.д. возникла задача исследования оператора вида $(\mathcal{K}_0 f)(x) = u(x) \int_0^x v(s)f(s)ds$ с неотрицательными весами $u(x)$ и $v(x)$ в пространствах Лебега. Задача оказалась не простой, только в 1969 году независимо друг от друга итальянские математики G. Talenti [5] и G. Tomaselli [6] впервые установили критерии ограниченности оператора $\mathcal{K}_0$ в $L_p(0,\infty)$. В последующие 11 лет усилиями математиков B. Muckenhoupt [7], J.S. Bradley [8], В.М. Кокилашвили [9], V.G. Maz'ya [10] были получены критерии ограниченности оператора $\mathcal{K}_0$ из $L_p(0,\infty)$ в $L_q(0,\infty)$ при $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Даже первоначальные результаты G. Talenti и G. Tomaselli, B. Muckenhoupt дали новый толчок в исследованиях весовых теорем вложения, спектральных вопросов сингулярных дифференциальных операторов. Так, например, в 70-х годах прошлого века М. Отелбаевым и его учениками получены хорошие результаты в выше указанных областях с применением результатов ограниченности оператора $\mathcal{K}_0$ в $L_p(0,\infty)$ ([11]-[13]). Следующим шагом стало исследование оператора вида

$$(\mathcal{K}f)(x) = \int\limits_0^x K(x,s)f(s)ds$$

с неотрицательным ядром $K(\cdot,\cdot)$, который называют оператором типа Харди. Однако для такого общего вида оператора найти критерий ограниченности в терминах ядра $K(\cdot,\cdot)$ даже в пространствах $L_2(0,\infty)$ является очень трудной и не решенной задачей. Поэтому исследователи выделили класс ядер, удовлетворяющих тем или иным свойствам, и для оператора $\mathcal{K}$ с ядром из этого класса установили критерий ограниченности из $L_p(0,\infty)$ в $L_q(0,\infty)$, $1 < p, q < \infty$.

Первым импульсом в этом направлении были работы F. Martin-Reyes, E. Sawyer [14], В.Д. Степанова [15]-[18], которые установили критерий ограниченности оператора дробного интегрирования Римана-Лиувилля из $L_{p,v}$ в $L_{q,u}$, $1 < p, q < \infty$, который, как известно, имеет многочисленные применения в различных областях естествознания. В 1989 году В.Д. Степанов [19] исследовал оператор $\mathcal{K}$ с ядром $K(x,s) = k(x-s)$, где $k(\cdot)$ не убывает и $k(x+s) \leqslant d(k(x)+k(s))$, $x, s \in (0,\infty)$, $d \geqslant 1$. В 1989-1990 годах Р. Ойнаров [20] и независимо от него в 1991 году американские математики S. Bloom и R. Kerman [21] исследовали оператор $\mathcal{K}$, когда его ядро обладает свойством

$$\frac{1}{d}(K(x,t)+K(t,s)) \leqslant K(x,s) \leqslant d(K(x,t)+K(t,s)),$$

$x \geqslant t \geqslant s > 0$, $d \geqslant 1$. Одно из важных значений этого класса операторов является то, что он включает в себя почти все известные операторы дробного интегрирования. В настоящее время в математической литературе это условие, налагаемое на ядро $K(\cdot,\cdot)$ оператора $\mathcal{K}$, называется "условием Ойнарова"и оператор $\mathcal{K}$ с условием Ойнарова стал объектом исследования многих авторов ([2, 22]). В работе [23] Р. Ойнаровым были получены необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности оператора $\mathcal{K}$ для более широкого класса ядер.

В 20-х годах прошлого века G.H. Hardy рассмотрел дискретный аналог оператора H в виде $(H^d f)_i = \frac{1}{i}\sum\limits_{j=1}^{i} f_j$ и доказал ограниченность оператора H^d в пространстве последовательностей l_p с нормой $\|H^d\|_{p\to p} = \dfrac{p}{p-1}$, $1 < p < \infty$. Как и непрерывный случай, этот результат G.H. Hardy имел различные приложения во многих задачах. Дискретный аналог $(K_0^d f)_i = u_i \sum\limits_{j=1}^{i} v_j f_j$ оператора K_0 исследовался многими авторами, и основные результаты были получены в работах [24]-[29] лишь в 1987-1994 годах. Такое запаздывание на десятки лет связано с дискретностью изменений последовательностей $\{f_j\}$ и $\{(K_0^d f)_i\}$, которые не позволяют перенести методы непрерывного случая, основанные на непрерывности функций $(K_0 f)(\cdot)$. Результаты, полученные для оператора K_0^d успешно применялись математиками разных стран, так например, в Казахстане в работах М. Отелбаева [13], Е.С. Смаилова [30]-[32], А. Стихарного [33], Р. Ойнарова, А. Стихарного [34] и других получены окончательные результаты в различных задачах анализа.

Попытка исследовать более общий матричный оператор типа Харди $(Af)_i = u_i \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j} v_j f_j$, $a_{i,j} \geqslant 0$ имеется в работе K.F Andersen и H.P. Heinig [24], где при некоторых предположениях на матрицы $(a_{i,j})$ даны достаточные условия ограниченности оператора A в пространствах последовательностей l_p.

В последние годы в работах М.Л. Гольдмана [35] разработан метод дискретизации для решения различных задач теории вложения, теории интегральных операторов, где главную роль играет оценка матричных операторов.

Таким образом, теория матричных операторов не только имеет важное значение, но и различные разносторонние применения. Этой актуальной задаче посвящена предлагаемая диссертационная работа.

Цель работы. Основной целью диссертационной работы является получение критериев ограниченности, компактности и оценок норм матричных операторов в пространствах последовательностей и на конусе монотонных последовательностей.

Научная новизна. В диссертационной работе рассматривается треугольный бесконечномерный матричный оператор, где элементы матрицы удовлетворяют более слабому условию, чем были рассмотрены ранее. Вводятся расширяющие классы матричных операторов, изучаются их свойства, приводятся примеры. Доказывается, что эти классы операторов включают в себя широко известные классические операторы анализа, такие как оператор многократного суммирования, операторы Чезаро, Гельдера и другие. Для этих классов матричных операторов получены следующие новые результаты:

– в терминах элементов матрицы и весовых последовательностей необходимые и достаточные условия ограниченности, компактности матричных операторов в весовых Лебеговых пространствах последовательностей при различных соотношениях метрики;

– необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Харди на конусе невозрастающих неотрицательных последовательностей при различных соотношениях метрики;

– критерий ограниченности и компактности суперпозиций матричных операторов в весовых пространствах последовательностей;

– необходимые и достаточные условия выполнения трехвесового неравенства типа Харди в весовых пространствах последовательностей;

– двусторонняя оценка для суммируемых матриц в весовых пространствах последовательностей и на конусе монотонных последовательностей.

Общая методика исследования. Используется метод разбиения на “пачки” последовательности значений матричного оператора в каждой точке, позволяющий удобно оценить суммы по пачкам, благодаря которому достигаются основные результаты данной диссертационной работы. В ходе оценки используются различные классические неравенства, а также весовые неравенства Харди.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть применены в теории функций, в теории вложения дискретных весовых пространств типа Соболева и в теории разностных операторов.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 20 работах, из них 2 статьи в журналах с высоким импакт фактором, 3 статьи в изданиях, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 3 статьи в международных изданиях, 12 работ в материалах международных конференций.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и четырех разделов, заключения и списка использованных источников, включающего 119 наименований. Диссертация состоит из 136 страниц.

Основное содержание диссертации. Раздел 1 диссертационной работы носит обзорный характер. В нем приведены основные известные результаты, близкие к тематике диссертации и опубликованные в последнее время. В первом подразделе - по дискретным неравенствам Харди в весовых пространствах последовательностей, а во втором подраздела - по дискретным неравенствам Харди на конусе невозрастающих и неотрицательных последовательностей.

Основная часть работы состоит из трех разделов.

Раздел 2 состоит из семи подразделов и в нем рассмотрены вопросы ограниченности и компактности матричного оператора из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$.

Пусть $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Пусть $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ – положительные последовательности действительных чисел, в дальнейшем называемые весовыми последовательностями. Через $l_{p,v}$ обозначим пространство последовательностей действительных чисел $f =$

$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ со следующей нормой

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad 1 < p < \infty.$$

В разделе 2 рассматриваются вопросы ограниченности и компактности матричных операторов типа Харди

$$\left(A^+ f\right)_i := \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j, \qquad i \geqslant 1, \tag{0.1}$$

$$\left(A^- f\right)_j := \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i, \qquad j \geqslant 1. \tag{0.2}$$

из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$.

Ограниченность этих операторов эквивалентно выполнению следующего неравенства типа Харди

$$\|A^{\pm} f\|_{q,u} \leqslant C \|f\|_{p,v} \qquad \forall f \in l_{p,v}, \tag{0.3}$$

где C – постоянная, не зависящая от f и $(a_{i,j})$ – треугольная числовая матрица такая, что $a_{i,j} \geqslant 0$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ при $i < j$.

При $a_{i,j} = 1$, $i \geqslant j \geqslant 1$, операторы (0.1), (0.2) совпадают с дискретными классическими операторами Харди $\left(A_0^+ f\right)_i := \sum\limits_{j=1}^{i} f_j$, $\left(A_0^- f\right)_j := \sum\limits_{i=j}^{\infty} f_i$, соответственно. Изучением дискретных и непрерывных неравенств Харди и их обощением занимались многие исследователи, см. например [2, 3, 36].

Ойнаровым Р., Шалгынбаевой С.Х. [37] и Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E. [38] были получены критерий ограниченности и компактности операторов A^+ и A^- из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$, когда элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют дискретному аналогу “условия Ойнарова”.

Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M. [39] и Темирханова А.М. [40] получили необходимые и достаточные условия ограниченности операторов A^+ и A^- из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$ для более широкого класса матричных операторов. Для более подробной информации смотрите диссертационные работы А.М. Темирхановой [41] и C.A. Okpoti [42].

Более того, Okpoti C.A. в своей диссертационной работе [42, Chapter 4] отметил следующие открытые задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства (0.3) для неотрицательных последовательностей $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ для широкого класса ядер.

Задача 2. Найти необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства (0.3) на конусе невозрастающих и неотрицательных последовательностейдля широкого класса ядер.

Основная часть данной диссертации посвящена вышеуказанным открытым задачам. Вводятся широкие классы матриц, которые охватывают ранее рассмотренные классы матриц.

В разделе 2 были получены следующие новые результаты:

– Определяются классы матриц $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$ для $n \geqslant 0$, которые включают в себя все ранее изученные классы матриц в этом направлений. Более того, они охватывают широко известные матричные операторы анализа, такие как суммируемые матрицы, и в частности, матрицы, удовлетворяющие дискретному аналогу "условия Ойнарова" и условию, рассмотренной в работах [39, 40]. Изучем свойства этих классов, которые позволяют рассмотреть вопросы ограниченности и компактности суперпозиций матричных операторов.

– Доказывается, что классам матриц $\mathcal{O}_n^+$ and $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ принадлежат известные классические операторы, такие как оператор многократного суммирования, операторы Гельдера, Чезаро и другие.

– Получены необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности матричных операторов A^+ и A^- из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$, когда соответствующие матрицы $(a_{i,j})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

– Установлен критерий ограниченности матричных операторов A^+ и A^- из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$, когда соответствующие матрицы $(a_{i,j})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_1^-$ при $1 < q < p < \infty$.

Раздел 3 посвящен второй открытой задаче, указанной в [42].

Рассмотрим неравенство следующего вида

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p {f_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.4}$$

на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ из $l_{p,v}$, где C – постоянная, не зависящая от f и $(a_{i,j})$ треугольная матрица такая, что $a_{i,j} \geqslant 0$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ и $i < j$.

Если $a_{i,j} = \frac{1}{i}$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ при $i < j$, получим дискретное неравенство следующего вида

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p {f_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{0.5}$$

для неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$.

Неравенства типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей были интенсивно исследованы за последние двадцать лет. Эта задача имеет приложения в изучении ограниченности операторов в пространствах Лоренца и в теории вложении пространств Лоренца. История изучения неравенства типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей подробно описана в книге A. Kufner, L. Maligranda, L.-E. Persson [3, Chapter 10], и в диссертационной работе О. Поповой [43].

Прорывом в изучении неравенства Харди на конусе монотонных функций была работа E. Sawyer [44], которая позволяет свести неравентсво на конусе монотонных функций к весовому неравенству для некоторых положительных операторов на конусе уже неотрицательных функций. В настоящее время этот результат E. Sawyer известен как “принцип двойственности Сойера”. Многие исследователи изучали некоторые обобщения и дискретные аналоги принципа двойственности Сойера при некоторых условиях на веса ([3, Chapter 10]).

В 1998 Р. Ойнаров и С.Х. Шалгынбаева [45] получили аналог принципа двойственности Сойера для дискретного случая при $1 < p, q < \infty$. Более того, С.Х. Шалгынбаева в своей диссертаций [46] получила критерий выполнения неравенства (0.5) для других значений параметров p и q. Также неравенство

(0.4) было исследовано в [46] при некоторых предположениях на элементы матрицы $(a_{i,j})$.

В 2006 G. Bennett и K.-G. Grosse-Erdmann [47] дали полную характеристику на веса для выполнения неравентсва Харди (0.5) на конусе монотонных последовательностей в других терминах чем в работе С.Х. Шалгынбаевой.

В [48] С.Х. Шалгынбаева получила необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства (0.4) на конусе монотонных последовательностей при $1 < p \leqslant q < \infty$, когда элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяет дискретному аналогу "условия Ойнарова".

Раздел 3 содержит следующие новые результаты:

– Необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (0.4) на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \geqslant 0$, когда соответствующая матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

– Двусторонняя оценка для матричного оператора на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \geqslant 0$ при $1 < q < p < \infty$, когда соответствующая матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классам $\mathcal{O}_1^+$ и $\mathcal{O}_1^-$.

Раздел 4 посвящен применению основных результатов. Результаты разделов 2 и 3 применяются к суперпозиции матричных операторов, трехвесовому неравенству типа Харди, суммируемым матрицам.

В разделе 4 получены следующие новые результаты:

– Получены критерий ограниченности и компактности суперпозиции матричных операторов в весовых пространствах последовательностей, когда соответствующая матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

– Необходимые и достаточные условия выполнения трехвесового неравенства типа Харди, когда соответствующая матрица принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

– Необходимые и достаточные условия выполнения трехвесового неравенства типа Харди, когда соответствующая матрица принадлежит классу $\mathcal{O}_1^-$ при $1 < q < p < \infty$.

– Двусторонняя оценка для суммируемых матриц в весовых пространствах последовательностей и на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей.

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность научному руководителю – доктору физико-математических наук, профессору Р. Ойнарову за постановку задачи, неоценимую помощь при работе над диссертацией и постоянную поддержку, а также научному консультанту профессору Массимо Ланца де Кристофорис за ценные советы.

1 ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ

1.1 Дискретные неравенства типа Харди в весовых пространствах последовательностей

Так как тематика диссертационной работы относится к весовым неравенствам Харди, в этом подразделе приведем некоторые краткие исторические справки и сводку результатов по дискретным неравенствам типа Харди.

Изучение неравенства типа Харди в весовых пространствах Лебега началось в 1915 году в работе G.H. Hardy. В 1925 году G.H. Hardy доказал следующее неравенство [4]:

Пусть $p > 1$ и $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность неотрицательных действительных чисел такая, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$ сходится. Тогда выполняется известное *дискретное неравенство Харди*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p. \tag{1.1}$$

Непрерывное неравенство Харди: если $p > 1$ и f неотрицательная функция, интегрирумая в p-степени на $(0,\ \infty)$, тогда f интегрируемая на интервале $(0,\ x)$ для любого $x > 0$ и

$$\int\limits_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int\limits_0^{x} f(t)dt\right)^p dx \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^{\infty} f^p(x)dx. \tag{1.2}$$

Следует отметить, что постоянная $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ в правых частях в неравентсвах (1.1) и (1.2) являются наилучшими.

Из неравентсв (1.1) и (1.2) вытекает следующее:

$$\text{Если} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty, \quad \text{то} \quad \sum_{n=1}^{\infty} h_n^p(a) < \infty, \tag{1.3}$$

где $a = \{a_n\}$ такая, что $a_n \geqslant 0$ и $h(a) = \{h_n(a)\}$, $h_n(a) := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k < \infty$ – *дискретный оператор Харди.* Также в непрерывном случае, имеем:

$$\text{Если} \quad \int_0^\infty f^p(x)dx < \infty, \quad \text{то} \quad \int_0^\infty (Hf(x))^p\, dx < \infty, \tag{1.4}$$

где $f(x) \geqslant 0$ и $Hf(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ – *непрерывный оператор Харди.*

Заметим, что (1.3) и (1.4) называются слабыми формами неравенств (1.1) и (1.2), соответственно.

Неравенства (1.1) и (1.2) означают, что операторы Харди h и H непрерывно действуют из l_p в l_p и из L_p в L_p ($p > 1$), соответственно, и их нормы равны $p' = \frac{p}{p-1}$. Здесь и далее, пространства l_p и L_p – Лебегово пространство последовательностей $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ действительных чисел и Лебегово пространство измеримых функции $f = f(x)$ на $(0, \infty)$ со следующими нормами

$$\|a\|_{l_p} := \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{и} \quad \|f\|_{L_p} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

соответственно.

Основная цель G.H. Hardy была найти новый и более простой метод метод доказательства неравентсва Гильберта для двойного ряда, и на этом пути он доказал выполнение неравенства (1.1). Поиском более элементарных доказательств неравенства (1.1) и ее обобщением занимались G.H. Hardy (1925), Elloit (1926,1929), Copson (1927, 1928), Kaluza-Szegö (1927), Hadry-Littlewood (1927), Broadbent (1928), Grandjot (1928), Knopp (1928, 1929, 1930) и Mulholland (1932).

Много книг и статей было посвящено изучению и обобщению неравенств Харди. Первая книга, посвященная неравенству Харди, была книга G.H. Hardy, J.E. Littlewood и G. Pólya *Inequalities* [49] 1934 года. Первая книга, полностью посвященная неравенствам Харди, была опубликована в 1990 году B. Opic, A. Kufner [50]. Также стоит отметить книгу A. Kufner и L.-E. Persson *Weighted Inequalities of Hardy Type* [2], которая посвящена основному обзору по весовым неравенствам типа Харди в весовых пространствах Лебега.

Описание основных результатов в развитии неравенств Харди было дано в книге A. Kufner, L. Maligranda и L.-E. Persson [3].

В 1928 году G.H. Hardy [51] доказал первую "весовую" модификацию неравенства (1.2) для некоторых интегральных операторов, а именно, неравенство

$$\int\limits_{o}^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int\limits_{0}^{x}f(t)dt\right)^{p}x^{\varepsilon}dx\leqslant\left(\frac{p}{p-\varepsilon-1}\right)^{p}\int\limits_{0}^{\infty}f^{p}(x)x^{\varepsilon}dx. \tag{1.5}$$

для всех измеримых неотрицательных функций f и для $p>1$, $\varepsilon<p-1$. Здесь постоянная $\left(\dfrac{p}{p-\varepsilon-1}\right)^{p}$ наименьшая из возможных.

Некоторыми обобщениями неравенств Харди (1.1) и (1.2) занимались Higaki (1935), Takahashi (1935), Chow (1939), Beesack (1961), Petersen (1962), Levinson (1964) и другие.

Весовыми обобщениями классических неравенств (1.1) и (1.2) являются неравенства

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{p}v_n\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.6}$$

$$\left(\int\limits_{a}^{b}\left|\int\limits_{a}^{x}f(t)dt\right|^{q}u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\left(\int\limits_{a}^{b}|f(x)|^{p}v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.7}$$

соответственно, которые называются весовыми неравенствами Харди.

В 1930 году G.H. Hardy и J.E. Littlewood [52], и G.A. Bliss [53] изучали неравенство (1.7) с различными параметрами p и q в случае, когда $1<p<q<\infty$. Они рассмотрели интервал $(0,\ \infty)$ и весовые функции $v(x)\equiv 1$, $u(x)=x^{r-q}$ при $r=\frac{q-p}{p}$ и доказали неравенство (1.7). Более того, G.A. Bliss нашел наименьшую постоянюю в этом случае.

Исследование неравенства (1.7) началось в 50-60 годах прошлого века для случая $p=q$ в работах P.R. Beesack [54, 55], J. Kadlec и A. Kufner [56], В.Р. Портнов [57], В.Н. Седов [58], G. Talenti [5], G. Tomaselli [6]. Стоит отметить, что G. Talenti и G. Tomaselli получили необходимое и достаточное условие выполнения неравенства (1.7) при $p = q$

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Это условие называется условием Макенхаупта (B. Muckenhoupt), который получил хорошое доказательство этого результата в [7] в более общей форме при $1 \leqslant p = q < \infty$ и для Борелевой меры $d\mu(x)$, $d\nu(y)$ вместо $u(x)dx$ и $v(y)dy$.

J.S. Bradley [8] рассмотрел случай с различными параметрами p и q. Он рассмотрел неравентсво (1.7) и $(a,\ b) = (0,\ \infty)$ и доказал, что условие

$$\sup_{t>0}\left(\int_t^\infty u(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t v^{1-p'}(y)dy\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

является необходимым для execution выполения неравенства (1.7) при $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, а также достаточным при $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$.

Начиная с 60-х годов прошлого века началось интенсивное исследование весовых неравенств Харди. Отметим некоторые из них: В.М. Кокилашвили [9], V.G. Maz'ya [10], K.F. Andersen и B. Muckenhoupt [59], L.-E. Persson и V.D. Stepanov [60], R.K. Juberg [61], В.Д. Степанов [62], G. Bennett [28], V.M. Manakov [63], V.G. Maz'ya и A.L. Rozin [10], G. Sinnamon [64, 65], G. Sinnamon и V.D. Stepanov [66] и другие. Более того, история развития этих неравенств и сводка результатов даны в книгах [49], [50], [2], [67], [68] и в диссертациях М. Насырова [69], Д.В. Прохорова [70], и A. Wedestig [71].

Первые результаты по неравенству (1.6) принадлежат K.F. Andersen и H.P. Heinig ([24], Теорема 4.1). В 1983 году они доказали, что если $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ и

$$\sup_{n\in N}\left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

то выполняется неравенство (1.6).

В 1985 году H.P. Heinig [25] получил достаточное условие выполнения неравенства (1.6). А именно, он доказал, что если $1 \leqslant q < p < \infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ и

$$B := \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{k=-\infty}^{n} v_k^{1-p'} \right)^{\frac{r}{q'}} v_n^{1-p'} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

то выполняется неравенство (1.6) с $C \leqslant q^{\frac{1}{q}} (p')^{\frac{1}{q'}} B$.

В 1987-1991 годах G. Bennett [26]-[28] дал полное описание выполнения оценки (1.6) для всех случаев p, q, кроме случая $0 < q < 1 < p < \infty$, критерии которого даны в работе M.S. Braverman и V.D. Stepanov [29] 1992 года.

Ниже мы приведем основные результаты, которые приведены в работе Беннета [28, 3]:

Теорема 1.1. *(i) Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Неравенство (1.6) выполняется тогда и только тогда, когда*

$$A_1 := \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

или

$$A_2 := \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'} \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \left(\sum_{m=1}^{k} v_m^{1-p'} \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

или

$$A_3 := \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right)^{-\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} v_k^{1-p'} \left(\sum_{m=k}^{\infty} u_m \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

(ii) Пусть $0 < p \leqslant 1$, $p \leqslant q < \infty$. Неравенство (1.6) выполняется тогда и только тогда, когда

$$A_4 := \sup_{n \in N} \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right)^{\frac{1}{q}} v_n^{-\frac{1}{p}} < \infty.$$

(iii) Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q < p$ и $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Неравенство (1.6) выполняется тогда и только тогда, когда

$$A_5 := \sum_{n=1}^{\infty} \left(u_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} u_k \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} \right) < \infty.$$

(iv) Пусть $q < p = 1$. Неравенство (1.6) выполняется тогда и только тогда, когда

$$A_6 := \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)^{\frac{q}{1-q}}\max_{1\leqslant k\leqslant n}v_k^{\frac{q}{q-1}}\right) < \infty.$$

(v) Пусть $0 < q < 1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}$. Неравенство (1.6) выполняется тогда и только тогда, когда

$$A_7 := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=n}^{\infty}u_k\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}v_k^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}}v_n^{1-p'}\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Более общий оператор типа Харди $(\mathcal{K}f)(x) = \int\limits_0^x K(x,s)f(s)ds$ с неотрицательным ядром $K(\cdot,\cdot)$ был исследован в работах многих автором, в том числе в работах F. Martin-Reyes и E. Sawyer [14], В.Д. Степанов [15]-[19], Р. Ойнаров [20], [23], S. Bloom и R. Kerman [21], L.-E. Persson, В.Д. Степанов [60], Д.В. Прохоров [70].

Естественно возникает задача исследования дискретного неравенства типа Харди

$$\left(A^+f\right)_i := \sum_{j=1}^{i}a_{i,j}f_j, \qquad i \geqslant 1, \tag{1.8}$$

$$\left(A^-f\right)_j := \sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}f_i, \qquad j \geqslant 1, \tag{1.9}$$

где $(a_{i,j})$ – треугольная матрица такая, что $a_{i,j} \geqslant 0$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ при $i < j$.

Ограниченность этих операторов из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$ эквивалентно нахождению необходимых и достаточных условий на веса $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ при которых выполняется следующее дискретное неравенство типа Харди

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}u_i^q\left|(A^{\pm}f)_i\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{\infty}v_i^p|f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.10}$$

для всех $f \in l_{p,v}$.

Когда один из параметров p и q равен 1 или ∞, необходимые и достаточные условия выполнения неравенства (1.10) с наименьшей постоянной $C > 0$ были получены в работе [1]. При $1 < p, q < \infty$ вопрос выполнения неравенств типа (1.10) для произвольных матриц $(a_{i,j})$ является открытым. Поэтому неравенство (1.10) исследуется с налажением некоторых условий на элементы матрицы $(a_{i,j})$.

Первые результаты в этом направлений были получены в работах K.F. Andersen и H.P. Heinig [24], которые получили достаточное условие выполнения дискретного неравенства типа Харди (1.10) при $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$ для неотрицательной матрицы $(a_{i,j})$, где элементы матрицы не убывают по i и не возрастает по j.

В [72] C.A. Okpoti, L-E. Persson, A. Wedestig исследовали неравенство (1.10) в случая, когда $a_{i,j} = \alpha_i \beta_j$, $i \geqslant j \geqslant 1$, где $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ – положительные последовательности. Более того, в [73] они получили достаточное условие для выполнения неравенства (1.10) для более общего ядра.

Далее неравенства вида $M \leqslant cK$, когда значение положительной постоянной c для нашей цели не существенно, будем писать $M \ll K$, а $M \approx K$ будет означать $M \ll K \ll M$.

Ойнаров Р., Шалгынбаева С.Х.[37] и Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E. [38] получили необходимое и достаточное условия для выполнения неравенства (1.10) для $1 < p, q < \infty$ при предположениях, что существует $d \geqslant 1$ такая, что

$$a_{i,j} \approx \frac{a_{i,k}}{c_k} c_j + \frac{a_{k,j}}{b_k} b_i, \quad \text{при} \quad i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1, \tag{1.11}$$

где $c = \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$, $b = \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательности положительных чисел.

Однако неравенство (1.10) эквивалентно следующему неравенству

$$\|\widetilde{A}^{\pm} f\|_{q,\widetilde{u}} \leqslant C \|f\|_{p,\widetilde{v}},$$

где $\widetilde{u}_i = u_i b_i^q$, $\widetilde{v}_i = v_i c_i^{-p}$, $i \geqslant 1$ и элементы $\widetilde{a}_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{b_i c_j}$ матрицы $(\widetilde{a}_{i,j})$ оператора $\widetilde{A}$ удовлетворяют следующему условию

$$\widetilde{a}_{i,j} \approx \widetilde{a}_{i,k} + \widetilde{a}_{k,j} \quad \text{при} \quad i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1,$$

которое эквивалентно условию (1.11).

Приведем результаты работ Ойнарова Р., Шалгынбаевой С.Х. [37] и Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E.[38].

Теорема 1.2. *[37] Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.11). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.8) выполняется тогда и только тогда, когда $M = \max\{M_1, M_2\} < \infty$, где*

$$M_1 = \sup_{k \geqslant 1} \frac{1}{c_k} \left(\sum_{j=1}^{k} c_j^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$M_2 = \sup_{k \geqslant 1} \frac{1}{b_k} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} b_i^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом, для наименьшей постоянной C в (1.10) справедлива оценка $M \approx C$.

Теорема 1.3. *[37] Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.11). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.9) выполняется тогда и только тогда, когда $M^* = \max\{M_1^*, M_2^*\} < \infty$, где*

$$M_1^* = \sup_{k \geqslant 1} \frac{1}{c_k} \left(\sum_{j=1}^{k} c_j^{q} u_j^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$M_2^* = \sup_{k \geqslant 1} \frac{1}{b_k} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{k,j}^{q} u_j^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} b_i^{-p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

При этом, для наименьшей постоянной C в (1.10) справедлива оценка $M^* \approx C$.

Теорема 1.4. *[38] Пусть $1 < q < p < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.11). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.8) выполняется тогда и только тогда, когда $B := \max\{B_1, B_2\} < \infty$, где*

$$B_1 := \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{-p'} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\frac{1}{c_k^{p'}} \sum_{i=1}^{k} c_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

и

$$B_2 := \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\frac{1}{b_k^q} \sum_{i=k}^{\infty} b_i^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

При этом, для наименьшей постоянной C в (1.10) справедлива оценка $B \approx C$.

Теорема 1.5. *[38] Пусть $1 < q < p < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.11). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.9) выполняется тогда и только тогда, когда $B^* := \max\{B_1^*, B_2^*\} < \infty$, где*

$$B_1^* := \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\frac{1}{c_k^q} \sum_{i=1}^{k} c_i^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

и

$$B_2^* := \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{-p'} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{i,k}^{q} u_i^{q} \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\frac{1}{b_k^{p'}} \sum_{i=k}^{\infty} b_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

При этом, для наименьшей постоянной C в (1.10) справедлива оценка $B^* \approx C$.

Определение 1.6. *Последовательность действительных чисел $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется почти не убывающей (почти не возрастающей), если существует постоянная $c > 0$ и выполняется $c\alpha_i \geqslant \alpha_k$ ($\alpha_k \leqslant c\alpha_j$) для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$.*

Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M. [39] и A.M. Темирханова [40] исследовали оценку (1.10) для $1 < p, q < \infty$ при предположениях, что существуют постоянная $d \geqslant 1$ и последовательность положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, неотрицательная матрица $(b_{i,j})$, где $b_{i,j}$ почти не убывают по i и почти не возрастает по j, такие, что выполняются неравенства

$$\frac{1}{d}(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}) \leqslant a_{i,j} \leqslant d(b_{i,k}\omega_j + a_{k,j}) \tag{1.12}$$

для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$.

Приведем основные результаты работ [39] и [40].

Теорема 1.7. *[39] Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Пусть элементы матрицы* $(a_{i,j})$ *оператора (1.8) удовлетворяют условию (1.12). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.8) выполняется тогда и только тогда, когда* $\mathbb{G} = \max\{\mathbb{G}_1,\ \mathbb{G}_2\} < \infty$, *где*

$$\mathbb{G}_1 = \sup_{n\geqslant 1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} b_{i,n}^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{n}\omega_j^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\ \mathbb{G}_2 = \sup_{n\geqslant 1}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{n,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

При этом, $\mathbb{G} \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (1.10).*

Теорема 1.8. *[39] Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Пусть элементы матрицы* $(a_{i,j})$ *оператора (1.9) удовлетворяют условию (1.12). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.9) выполняется тогда и только тогда, когда* $\mathbb{G}^* = \max\{\mathbb{G}_1^*, \mathbb{G}_2^*\} < \infty$, *где*

$$\mathbb{G}_1^* = \sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i=k}^{\infty} b_{i,k}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=1}^{k}\omega_j^{q}u_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}},\ \mathbb{G}_2^* = \sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i=k}^{\infty} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{k,j}^{q}u_j^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом, $\mathbb{G}^* \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (1.10).*

Теорема 1.9. *[40] Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Пусть элементы матрицы* $(a_{i,j})$ *оператора (1.8) удовлетворяют условию (1.12). Тогда неравенство (1.10) для оператора (1.8) выполняется тогда и только тогда, когда* $\mathcal{G} = \max\{\mathcal{G}_1,\ \mathcal{G}_2\} < \infty$, *где*

$$\mathcal{G}_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}\omega_i^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\omega_k^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{G}_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{k,i}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}u_k^{q}\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

При этом, $\mathcal{G} \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (1.10).*

Теорема 1.10. *[40] Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Пусть элементы матрицы* $(a_{i,j})$ *оператора (1.9) удовлетворяют условию (1.12). Тогда неравенство*

(1.10) для оператора (1.9) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{G}^* = \max\{\mathcal{G}_1^*,\ \mathcal{G}_2^*\} < \infty$, *где*

$$\mathcal{G}_1^* = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} \omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \omega_k^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathcal{G}_2^* = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

При этом, $\mathcal{G}^* \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (1.10).*

1.2 Весовые неравенства типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей

Свойства конусов монотонных последовательностей чисел, монотонных функций и различные экстремальные задачи на них имеют большое значение в теорий функции, в функциональном анализе, в задачах математической экономики, в теории вероятностей и математической статистике. Аппроксимативные числа операторов, поперечники пространств, количественные характеристики наилучших приближений функции, моментные последовательности функции и другие являются монотонными последовательностями чисел, несущими в себе определенные информации соответствующих объектов, а многие качественные свойства этих объектов выражаются функциональными соотношениями монотонных последовательностей.

Известно, что свойства класса функции или класса последовательностей чисел можно получать из функциональных соотношений их невозрастающих перестановок, которые являются, соответственно, монотонными функциями или последовательностями.

Неравенства типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей имеют приложения в исследований ограниченности оператороа в пространствах Лоренца и в теории вложений пространств Лоренца. В 1951 году G. Lorentz [74] впервые ввел пространство Лоренца

$\Lambda^p(u)$, $0<p<\infty$.

$$\Lambda^p(u) := \left\{ f: \ \|f^*\|_{p,u} = \left(\int\limits_0^\infty (f^*(t))^p \, u(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Здесь f^* – невозрастающая перестановка функции $|f|$, которая определяется формулой

$$f^*(t) := \inf\{y>0: \ \lambda_f(y) \leqslant t\},$$

где λ_f – функция распределения:

$$\lambda_f(y) := meas\{x \in X: \ |f(x)| > y\}.$$

Весовая характеристика классических операторов в пространствах Лоренца сводится к необходимости изучения операторов на конусе убывающих функций.

Рассмотрим максимальную функцию Харди-Литтлвуда Mf, которая определяется формулой

$$(Mf)(x) := \sup_{x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q |f(z)|dz, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где Q – куб в $\mathbb{R}^n$, стороны которого параллельна осьям координат и $|Q|$ – его Лебегово мера. Известно, что

$$(Mf)^*(t) \approx \frac{1}{t} \int\limits_0^t f^*(s)ds, \quad t>0$$

(для доказательства и исторических заметок по этой оценке, см. например [75], [76]). Таким образом, характеристика весовых функций u и v, для которой отображение

$$M: \ \ \Lambda^p(v) \to \Lambda^q(u), \quad 1<p,q<\infty$$

ограничено в пространстве Лоренца, эквивалентно характеристике весовых функций u и v, для которой следующее неравенство Харди

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t f(s)ds \right)^q u(t)dt \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\int\limits_0^\infty f^p(t)v(t)dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.13}$$

выполняется для всех убывающих функций $f \geqslant 0$.

Неравенства типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей интенсивно исследуется в течение последних двадцати лет. В 1990 году M. Ariño и B. Muckenhoupt [77] получили необходимое и достаточное условие выполнения неравенства (1.13) на конусе неотрицательных и невозрастающих функций f при $1 \leqslant p = q < \infty$ и $u(t) = v(t)$:

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда неравенство*

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)ds\right)^p v(t)dt\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \left(\int\limits_0^\infty f^p(t)v(t)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

выполняется для всех неотрицательных и невозрастающих функций f *тогда и только тогда, когда существует постоянная* $D > 0$ *такая, что*

$$\int\limits_t^\infty s^{-p}v(s)ds \leqslant Dt^{-p}\int\limits_0^t v(s)ds \quad \text{для всех} \quad t > 0.$$

Ранее такие задачи рассматривались в работе D.W. Boyd [78] 1967 года и и в книге С.Г. Крейна, Ю.И. Петунина, Е.М. Семенова [79].

E. Sawyer [44] расширил результат M. Ariño и B. Muckenhoupt для случая различных весов v и u и при $1 < p, q < \infty$. Этот результат E. Sawyer известен как принцип двойственности Сойера.

Принцип двойственности Сойера. *Пусть* $1 < p < \infty$, g, v *неотрицательные измеримые функций на* $(0,\ \infty)$. *Тогда*

$$\sup_{0\leqslant f\downarrow} \frac{\int_0^\infty f(x)g(x)dx}{\left(\int_0^\infty f^p(x)v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}$$

$$\approx \left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x g(t)dt\right)^{p'} \left(\int\limits_0^x v(t)dt\right)^{-p'} v(x)dx\right)^{\frac{1}{p'}} + \frac{\int_0^\infty g(x)dx}{\left(\int_0^\infty v(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}}$$

Если $\int\limits_0^\infty v(x)dx = \infty$, то второе слагаемое в правой части равна нулю.

Более того, E. Sawyer [44] использовал принцип двойственности для получения необходимых и достаточных условий выполнения неравенства (1.13) для всех неотрицательных и невозрастающих функций f при $1 < p, q < \infty$. Этот результат E. Sawyer был расширен В.Д. Степановым [80] для случая $0 < q < 1 < p < \infty$ и $0 < p \leqslant q < \infty$, $0 < p < 1$. М.Л. Гольдман [35], G. Bennett и K.-G. Grosse-Erdmann [47] дали полную характеристику на веса u и v, при которых неравенство (1.13) выполняется для всех неотрицательных ии невозрастающих функций f при $0 < q < p < 1$. Принцип двойственности для случая $0 < p \leqslant 1$ был получен в [80], [81] и [82]. Более элементарное доказательства принципа двойственности Сойера был получен В.Д. Степановым [80], M.J. Carro и J. Soria [81]. Некоторые обобщения принципа двойственности Сойера были доказаны D.E. Edmunds, R. Kerman, L. Pick [83] и A. Kamińska, M. Mastylo [84].

Различные аспекты весовых неравенств для монотонных функций и их приложения к оценке максимальных функций, в теории интерполяции операторов, в теории вложения и их связи с стохастическими неравенствами исследованы в работах [21], [80], [85]-[93]. Такие интенсивные исследования различных весовых неравенств на конусе монотонных функций в последние годы стали возможными благодаря достижениям исследований весовых неравенств в различных пространствах ([7]-[10], [16], [17], [20], [50] и другие).

В то же время интенсивно развивалось исследование и обобщение дискретного неравенства Харди

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \left(\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i {f_i}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.14}$$

на конусе монотонных последовательностей $f \geqslant 0$. Основные результаты по весовым неравенствам Харди на конусе монотонных последовательностей были получены K.F. Andersen, H.P. Heinig [24], H.P. Heinig [25], L. Leindler [94], M.Sh. Braverman, В.Д. Степановым [29], J. Nemeth [95], F.P. Cass, W. Kratz [96], P.D. Johnson, R.N. Mohapatra, David Ross [97], Р. Ойнаровым, С.Х. Шалгынбаевой [45], G. Bennett, K.-G. Grosse-Erdmann [47], М.Л. Гольдман

[35], [98], [99], С.Х. Шалгынбаевой [48] и другими.

В 1998 году Р. Ойнаров, С.Х. Шалгынбаева [45] получили аналог принципа двойственности Сойера для дискретного случая при $1 < p,q < \infty$. Этот результат Р. Ойнарова и С.Х. Шалгынбаевой позволяет свести неравенство Харди на конусе монотонных последовательностей к некоторому неравенству для всех неотрицательных последовательностей из $l_{p,v}$.

Теорема 1.11. *[45] Пусть* $1 < p,\ q < \infty$. *Пусть* $(a_{i,j})$ *треугольная матрица такая, что* $a_{i,j} \geqslant 0$ *при* $i \geqslant j \geqslant 1$ *и* $a_{i,j} = 0$ *при* $i < j$. *Пусть* $\mathbb{V}_k = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$ *при* $k \geqslant 1$. *Тогда неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i f_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.15}$$

на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *из* $l_{p,v}$ *эквивалентно неравенству*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right)^{p'} \left(\mathbb{V}_k^{-\frac{p'}{p}} - \mathbb{V}_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \widetilde{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{1.16}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, *если* $\mathbb{V}_\infty = \lim\limits_{k \to \infty} \mathbb{V}_k = \infty$, *и неравенству*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right)^{p'} \left(\mathbb{V}_k^{-\frac{p'}{p}} - \mathbb{V}_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right)^{-\frac{1}{p}} \leqslant \overline{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{1.17}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, *if* $\mathbb{V}_\infty < \infty$.

При этом, $\widetilde{C} \approx C$ *при* $\mathbb{V}_\infty = \infty$, *и* $\overline{C} \approx C$ *при* $\mathbb{V}_\infty < \infty$, *где* C, $\widetilde{C}$ *и* $\overline{C}$ *– наименьшие постоянные в (1.15), (1.16), (1.17), соответственно.*

Более того, С.Х. Шалгынбаева в своей диссертационной работе [46] получила критерий выполнения неравенства (1.14) и для других значений параметров p и q.

В 2006 году G. Bennett и K.-G. Grosse-Erdmann [47] дали полную характеристику на веса при которых неравенство Харди (1.14) выполняется на конусе монотонных последовательностей в других терминах чем условия, полученные С.Х. Шалгынбаевой.

М.Л. Гольдман исследовал неравенство типа (1.14) о на конусе монотонных последовательностей и применил соответсвующие результаты для установления неравенств Харди на конусе квази-монотонных последовательностей, см. например [35], [98], [99].

В работе [48] С.Х. Шалгынбаева получила необходимое и достаточное условие выполнения неравенства (1.15) на конусе монотонных последовательностей для $1 < p \leqslant q < \infty$ при предположениях, что существует постоянная $d \geqslant 1$ такая, что

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + a_{k,j}) \leqslant a_{i,j} \leqslant d(a_{i,k} + a_{k,j}), \qquad i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1. \tag{1.18}$$

А именно, следующий результат:

Теорема 1.12. *[48] Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$*. Пусть элементы матрицы* $(a_{i,j})$ *в (1.15) удовлетворяют условию (1.18). Пусть* $\mathbb{V}_k = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i$ *для* $k \geqslant 1$ *и* $A_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{i,j}$ *для всех* $i \geqslant k \geqslant 1$*. Тогда неравенство (1.15) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей* $f \geqslant 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{H}_0 \equiv \max\{\mathcal{H}_1,\ \mathcal{H}_2,\ \mathcal{H}_3\} < \infty$*, где*

$$\mathcal{H}_1 = \sup_{s \geqslant 1} \mathbb{V}_s^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{s} A_{ii}^q u_i \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{H}_2 = \sup_{s \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{s} k^{p'} \left(\mathbb{V}_k^{-\frac{p'}{p}} - \mathbb{V}_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=s}^{\infty} a_{ik}^q u_i \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{H}_3 = \sup_{s \geqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{s} A_{si}^{p'} \left(\mathbb{V}_i^{-\frac{p'}{p}} - \mathbb{V}_{i+1}^{\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=s}^{\infty} u_k \right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом, $\mathcal{H}_0 \approx C$*, где* C *– наименьшая постоянная в (1.15).*

В настоящее время неравенства на конусе монотонных функций и последовательностей являются объектом исследования многих авторов, что доказывается огромным количествомм недавних публикации [2], [36], [66], [87], [91], [100]-[113], [99] и [114]. История развития неравенств типа Харди на конусе монотонных функций и последовательностей и сводка результатов приведена в книге A. Kufner, L. Maligranda и L.-E. Persson [3, Chapter 10], и в диссертационной работе О. Поповой [43].

2 ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ ЛЕБЕГОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

2.1 Постановка задачи

В этом разделе рассматривается вопрос ограниченности и компактности матричных операторов

$$\left(A^+f\right)_i := \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j, \qquad i \geqslant 1, \tag{2.1}$$

$$\left(A^-f\right)_j := \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i, \qquad j \geqslant 1. \tag{2.2}$$

из весового пространтсва $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$. Ограниченность этих операторов эквивалентна выполнению неравенства типа Харди следующего вида

$$\|A^{\pm}f\|_{q,u} \leqslant C\|f\|_{p,v} \qquad \forall f \in l_{p,v}, \tag{2.3}$$

где C – постоянная, не зависящая от f и $(a_{i,j})$ – треугольная числовая матрица такая, что $a_{i,j} \geqslant 0$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ при $i < j$.

Здесь и далее $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ и $u = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $v = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ – положительные последовательности действительных чисел. $l_{p,v}$ – пространство последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ действительных чисел такое, что

$$\|f\|_{p,v} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \qquad 1 < p < \infty.$$

В этом разделе мы рассматриваем неравенство (2.3) при $1 < q < p < \infty$ при следующих предположениях:

Предположение A. Существует постоянная $d \geqslant 1$, последовательность положительных чисел $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, и неотрицательная матрица $(b_{i,j})$, где $b_{i,j}$ почти не убывет по первому индексу i и не возрастает по второму индексу j, такие, что

$$\frac{1}{d}(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i) \leqslant a_{i,j} \leqslant d(a_{i,k} + b_{k,j}\omega_i) \tag{2.4}$$

при всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$.

Пусть $\alpha > 0$. Пусть $a_{i,j} = (b_i - d_j)^\alpha$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ при $i < j$, где последовательности $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{d_i\}_{i=1}^\infty$ такие, что $b_i \geqslant d_j$, $i \geqslant j \geqslant 1$. Если $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ – неубывающая последовательность и $\{d_i\}_{i=1}^\infty$ – произвольная последовательность, то элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.12). Действительно, имеем $a_{i,j} \approx (b_i - b_k)^\alpha + a_{k,j}$, $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$. В общем случае, элементы $a_{i,j}$ не удовлетворяют условию (2.4). Если $\{d_i\}_{i=1}^\infty$ – неубывающая последовательность и $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ – произвольная последовательность, то элементы $a_{i,j}$ удовлетворяют условию (2.4), но в общем случае, не удовлетворяют условию (1.12).

Таким образозом, (1.12), (2.4) охватывают условие (1.11) и дополняют друг друга.

Более того, в этом разделе вводятся расширяющие классы матриц и для них устанавливаются необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности операторов (2.1) и (2.2). Эти классы матриц намного шире, чем ранее исследованные классы матриц в теории дискретных неравенств типа Харди.

Раздел 2 состоит из следующих подразделов. В подразделе 2.2, дается определение классов матриц $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$ для $n \geqslant 0$, которые включают в себя широко известные матрицы анализа, в частности, матрицы, удовлетворяющие условиям (1.11), (1.12), (2.4). Более того, в этом подразделе изучаются свойства этих классов. Подраздел 2.3 содержит примеры матриц из этих классов, и доказывается, что эти классы охватывают известные классические операторы, такие как оператор многократного суммирования, операторы Чезаро, Гельдера. В подразделе 2.4 установлены критерий ограниченности операторов (2.1) и (2.2) в весовых пространствах последовательностей, когда соответствующие матрицы принадлежат классам $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$. В подразделе 2.5 получены необходимые и достаточные условия компактности матричных операторов (2.1) и (2.2), когда соответствующие матрицы принадлежат классам $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Подраздел 2.6 содержит основные результаты при $1 < p \leqslant q < \infty$ и их доказательства. В подразделе 2.7 рассматривается вопрос ограниченности операторов (2.1) и (2.2) в весовых пространствах последовательностей, когда элементы соответствующих матриц удовлетворяют Предположению А при $1 < q < p < \infty$.

Для доказательства основных теорем нам понадобятся следующие известные результаты по дискретным весовым неравенствам Харди (см. [3]) и критерий предкомпактности множеств в l_p (см. [115, p. 32]).

Теорема А. *Пусть* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ *неотрицательная последовательность действительных чисел.*

(*i*) *Если* $1 < p \leqslant q < \infty$, *то неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=1}^{i}\mu_j f_j\right|^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.5}$$

выполняется для всех $f \in l_{p,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$H_0 = \sup_{n\geqslant 1}\left(\sum_{j=n}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_i^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Более того, $H_0 \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная, для которой выполняется неравенство (2.5).*

(*ii*) *Если* $1 < q < p < \infty$, *то неравенство (2.5) выполняется для всех* $f \in l_{p,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$H_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{k}\mu_j^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\mu_k^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Более того, $H_1 \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная.*

Теорема В. *Пусть* $\{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ *неотрицательная последовательность действительных чисел.*

(*i*) *Если* $1 < p \leqslant q < \infty$, *то неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\sum_{j=i}^{\infty}\mu_j f_j\right|^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{\infty}|v_i f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.6}$$

выполняется для всех $f \in l_{p,v}$ *тогда и только тогда, когда*

$$H_2 = \sup_{n\geqslant 1}\left(\sum_{j=1}^{n}u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\mu_i^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Более того, $H_2 \approx C$, где C – наименьшая постоянная, для которой выполняется неравенство (2.6).

(ii) Если $1 < q < p < \infty$, то неравенство (2.6) выполняется для всех $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда

$$H_3 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=k}^{\infty} \mu_j^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \mu_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Более того, $H_3 \approx C$, где C – наименьшая постоянная, для которой выполняется неравенство (2.6).

Теорема C. *Пусть T множество из l_p, $1 \leqslant p < \infty$. Множество T компактно тогда и только тогда, когда T ограничено и для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такая, что для всех $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \in T$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i=N}^{\infty} |x_i|^p < \varepsilon.$$

Нам также понадобится следующий известный результат (см. [38]).

Лемма D. *Пусть $\gamma > 0$. То существует $c > 0$ такая, что*

$$\frac{1}{c} \left(\sum_{k=1}^{j} \beta_k \right)^{\gamma} \leqslant \sum_{k=1}^{j} \beta_k \left(\sum_{i=1}^{k} \beta_i \right)^{\gamma-1} \leqslant c \left(\sum_{k=1}^{j} \beta_k \right)^{\gamma} \quad \forall j \in \mathbb{N} \tag{2.7}$$

для всех последовательностей $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных действительных чисел.

Более того, существует $c_1 \geqslant 1$ такая, что

$$\frac{1}{c_1} \left(\sum_{k=j}^{N} \beta_k \right)^{\gamma} \leqslant \sum_{k=j}^{N} \beta_k \left(\sum_{i=k}^{N} \beta_i \right)^{\gamma-1} \leqslant c_1 \left(\sum_{k=j}^{N} \beta_k \right)^{\gamma} \tag{2.8}$$

для всех $j, k \in \{1, 2, ..., N\}$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и последовательностей $\{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительных действительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$.

2.2 Определение классов матриц и их свойства

Для $n \geqslant 1$, определим классы $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$ матриц $(a_{i,j})$. $(a_{i,j})$ обозначим через $\left(a_{i,j}^{(n)}\right)$, если $(a_{i,j})$ принадлежит $\mathcal{O}_n^+$ или $\mathcal{O}_n^-$.

Для начала определим множество M^+ как множество неотрицательных матриц $(a_{i,j})$, где $a_{i,j}$ не убывает по первому индексу для всех $i \geqslant j \geqslant 1$. Определим классы $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$ по математической индукции. При $n = 0$ определим класс $\mathcal{O}_0^+$ как множество матриц из M^+ следующего вида $a_{i,j}^{(0)} = \alpha_j$, $\forall i \geqslant j \geqslant 1$. Предположим, что классы $\mathcal{O}_\gamma^+$ определены для $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, $n \geqslant 1$. По определению, матрица $(a_{i,j}) \equiv (a_{i,j}^{(n)})$ из M^+ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$ тогда и только тогда, когда существуют матрицы $(a_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$ и постоянная $r_n > 0$ такие, что

$$a_{i,j}^{(n)} \leqslant r_n \sum_{\gamma=0}^{n} b_{i,k}^{n,\gamma} a_{k,j}^{(\gamma)} \tag{2.9}$$

для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$, где $b_{i,k}^{n,n} \equiv 1$ и

$$b_{i,k}^{n,\gamma} = \inf_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{a_{i,j}^{(n)}}{a_{k,j}^{(\gamma)}}, \quad \gamma = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.10}$$

Из (2.10) следует, что элементы матрицы $(b_{i,k}^{n,\gamma})$ не убывают по первому индексу и не возрастают по второму индексу. Более того, из (2.10) вытекает выполнение неравенства

$$a_{i,j}^{(n)} \geqslant b_{i,k}^{n,\gamma} a_{k,j}^{(\gamma)} \tag{2.11}$$

для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1,\ \gamma = 0, 1, \ldots, n,\ n = 0, 1, \ldots$ То для $(a_{i,j}^{(n)}) \in \mathcal{O}_n^+$ имеем

$$a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} b_{i,k}^{n,\gamma} a_{k,j}^{(\gamma)}, \qquad n \geqslant 0 \tag{2.12}$$

для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$.

Замечание 2.1. *Легко заметить, что если для матрицы* $(a_{i,j}^{(n)})$, $n \geqslant 0$ *существуют матрицы* $(a_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, *и матрицы* $(\widetilde{b}_{i,k}^{n,\gamma})$, $\gamma = 0, 1, \ldots, n$ *такие, что выполняется оценка (2.12) для всех* $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$, *то* $(a_{i,j}^{(n)}) \in \mathcal{O}_n^+$ *и* $\widetilde{b}_{i,k}^{n,\gamma} \approx b_{i,k}^{n,\gamma}$. *Следовательно, можно предполагать, что матрицы* $(b_{i,k}^{n,\gamma})$ *произвольные неотрицательные матрицы, удовлетворяющие (2.12).*

Для доказательства основных результатов нам также понадобятся следующие неравенства. Пусть $n \geqslant l \geqslant \gamma$. То имеем

$$b_{i,k}^{n,\gamma} \geqslant b_{i,s}^{n,l} \cdot b_{s,k}^{l,\gamma} \qquad \forall i \geqslant s \geqslant k \geqslant 1. \tag{2.13}$$

Действительно, используя (2.11) для всех $i \geqslant s \geqslant k \geqslant 1$, $n \geqslant l \geqslant \gamma$, имеем

$$b_{i,k}^{n,\gamma} = \inf_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{a_{i,j}^{(n)}}{a_{k,j}^{(\gamma)}} \geqslant b_{i,s}^{n,l} \cdot \inf_{1 \leqslant j \leqslant k} \frac{a_{s,j}^{(l)}}{a_{k,j}^{(\gamma)}} = b_{i,s}^{n,l} \cdot b_{s,k}^{l,\gamma}.$$

Как выше, определим классы $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Для начала, определим множество M^- как множество неотрицательных матриц $(a_{i,j})$, где $a_{i,j}$ не возрастает по второму индексу для всех $i \geqslant j \geqslant 1$. По определению, матрица $(a_{i,j}) = (a_{i,j}^{(0)})$ из M^- принадлежит классу $\mathcal{O}_0^-$ тогда и только тогда, когда $a_{i,j}^{(0)} = \beta_i$ для всех $i \geqslant j \geqslant 1$. Предположим, что классы $\mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$, $m \geqslant 1$ определены. Матрица $(a_{i,j}) = (a_{i,j}^{(m)})$ из M^- принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$ тогда и только тогда, когда существуют матрицы $(a_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$ и постоянная $h_m > 0$ такие, что

$$a_{i,j}^{(m)} \leqslant h_m \sum_{\gamma=0}^{m} a_{i,k}^{(\gamma)} d_{k,j}^{\gamma,m} \tag{2.14}$$

для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$, где $d_{k,j}^{m,m} \equiv 1$ и

$$d_{k,j}^{\gamma,m} = \inf_{k \leqslant i \leqslant \infty} \frac{a_{i,j}^{(m)}}{a_{i,k}^{(\gamma)}}, \quad \gamma = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.15}$$

По определению матрицы $(d_{k,j}^{\gamma,m})$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m-1$, $m = 0, 1, \ldots$, очевидно, что элементы матрицы $(d_{k,j}^{\gamma,m})$ не убывают по первому индексу и не возрастают по второму индексу и для всех $m \geqslant l \geqslant \gamma$, $k \geqslant s \geqslant j$ удовлетворяют следующему неравенству

$$d_{k,j}^{\gamma,m} \geqslant d_{k,s}^{\gamma,l} \cdot d_{s,j}^{l,m}. \tag{2.16}$$

Из (2.15) вытекает, что для всех $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$

$$a_{i,j}^{(m)} \geqslant a_{i,k}^{(\gamma)} d_{k,j}^{\gamma,m}, \quad \gamma = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.17}$$

Как и в (2.12) каждый класс $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$ матриц $(a_{i,j}^{(m)})$ характеризуется следующим соотношением

$$a_{i,j}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} a_{i,k}^{(\gamma)} d_{k,j}^{\gamma,m} \tag{2.18}$$

для всех $i \geqslant k \geqslant j$, где $d_{k,j}^{\gamma,m}$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m$ определяется формулой (2.15).

Замечание 2.2. *Как выше, можно предполагать, что* $(d_{k,j}^{\gamma,m})$, $\gamma = 0, 1, \ldots, m$, $m \geqslant 0$ *произвольные матрицы, удовлетворяющие (2.18).*

Замечание 2.3. *По определению классов* $\mathcal{O}_n^\pm$, $n \geqslant 0$ *имеем* $\mathcal{O}_0^\pm \subset \mathcal{O}_1^\pm \subset \cdots \subset \mathcal{O}_n^\pm \subset \cdots$

В частности, матрицы классов $\mathcal{O}_1^+$ и $\mathcal{O}_1^-$ характеризуются следующими соотношениями, соответственно,

$$a_{i,j}^{(1)} \approx b_{i,k}^{1,0} a_{k,j}^{(0)} + a_{k,j}^{(1)} \qquad \forall i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1,$$

$$a_{i,j}^{(1)} \approx a_{i,k}^{(1)} + a_{i,k}^{(0)} d_{k,j}^{0,1} \qquad \forall i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1.$$

Очевидно, что классы матриц $\mathcal{O}_1^+$ включают в себя матрицы, элементы которых удовлетворяют условиям (1.11) и (1.12). Также следует отметить, что матрицы, удовлетворяющие условиям (1.11) и (2.4) принадлежат классам $\mathcal{O}_1^-$. Откуда вытекает, что классы $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 1$ и $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 1$ намного шире чем классы матриц, которые были исследованы в этом направлений.

Матрицы классов $\mathcal{O}_2^+$ и $\mathcal{O}_2^-$ описываются следующими соотношениями, соответственно,

$$a_{i,j}^{(2)} \approx b_{i,k}^{2,0} a_{k,j}^{(0)} + b_{i,k}^{2,1} a_{k,j}^{(1)} + a_{k,j}^{(2)} \qquad \forall i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1,$$

$$a_{i,j}^{(2)} \approx a_{i,k}^{(2)} + a_{i,k}^{(1)} d_{k,j}^{1,2} + a_{i,k}^{(0)} d_{k,j}^{0,2} \qquad \forall i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1.$$

Непрерывный аналог классов $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ был введен Р. Ойнаровым в [23].

Определение 2.4. *Если существуют неотрицательная последовательность* $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$ *и матрица* $\widetilde{a}_{i,j} \in \mathcal{O}_n^\pm$, $n \geqslant 0$ *такие, что* $a_{i,j} \approx \alpha_i \widetilde{a}_{i,j}$, *то будем говорить, что* $(a_{i,j}) \in \alpha\mathcal{O}_n^\pm$, $n \geqslant 0$.

Определение 2.5. *Если существуют неотрицательная последовательность* $\beta = \{\beta_j\}_{j=1}^{\infty}$ *и матрица* $\widetilde{a}_{i,j} \in \mathcal{O}_n^{\pm}$, $n \geqslant 0$ *такие, что* $a_{i,j} \approx \widetilde{a}_{i,j}\beta_j$, *то будем говорить, что* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^{\pm}\beta$, $n \geqslant 0$.

Эти классы операторов включают в себя хорошо известные операторы, которые играют важную роль в анализе. В качестве примера матриц из классов $\alpha\mathcal{O}_n^{\pm}$ и $\mathcal{O}_n^{\pm}\beta$, $n \geqslant 0$ можно взять матрицы Чезаро, Гельдера и другие. Для более подробной информации смотрите подраздел 2.3.

Рассмотрим свойства классов $\mathcal{O}_n^{+}$ и $\mathcal{O}_n^{-}$, $n \geqslant 0$.

Положим

$$w_{i,k} = \sum_{j=k}^{i} a_{i,j}\sigma_{j,k}.$$

Тогда имеем

Лемма 2.6. *Пусть* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^{+}$, $(\sigma_{j,k}) \in \mathcal{O}_m^{+}$. *Тогда* $(w_{i,k}) \in \mathcal{O}_{m+n+1}^{+}$.

Доказательство Леммы 2.6. По условию леммы $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^{+}$. То существуют матрицы $(a_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^{+}$, $\gamma = 0, 1, \ldots, n-1$, и матрицы $(\delta_{i,l}^{n,\gamma})$ такие, что

$$a_{i,j} \equiv a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} \delta_{i,l}^{n,\gamma} a_{l,j}^{(\gamma)}, \qquad n = 0, 1, \ldots, \quad \delta_{i,l}^{n,n} \equiv 1$$

для всех $i \geqslant l \geqslant j \geqslant 1$.

Так как $(\sigma_{j,k}) \in \mathcal{O}_m^{+}$, существуют матрицы $(\sigma_{j,k}^{(\mu)}) \in \mathcal{O}_\mu^{+}$, $\mu = 0, 1, \ldots, m-1$, и матрицы $(e_{j,l}^{m,\mu})$ такие, что

$$\sigma_{j,k} \equiv \sigma_{j,k}^{(m)} \approx \sum_{\mu=0}^{m} e_{j,l}^{m,\mu} \sigma_{l,k}^{(\mu)}, \qquad m = 0, 1, \ldots, \quad e_{j,l}^{m,m} \equiv 1$$

для всех $j \geqslant l \geqslant k \geqslant 1$.

Положим

$$w_{i,k} \equiv w_{i,k}^{n,m} = \sum_{j=k}^{i} a_{i,j}^{(n)} \sigma_{j,k}^{(m)}.$$

Сначала рассмотрим случай когда $m \geqslant 0$, $n = 0$. В этом случае $a_{i,j}^{(0)} = \alpha_j$, $\forall i \geqslant j \geqslant 1$. Для $\forall i \geqslant l \geqslant k$ имеем

$$\begin{aligned}
w_{i,k}^{o,m} &= \sum_{j=k}^{i} \alpha_j \sigma_{j,k}^{(m)} \approx \sum_{j=k}^{l} \alpha_j \sigma_{j,k}^{(m)} + \sum_{j=l}^{i} \alpha_j \sigma_{j,k}^{(m)} \\
&\approx w_{l,k}^{o,m} + \sum_{\mu=0}^{m} \sigma_{l,k}^{(\mu)} \sum_{j=l}^{i} \alpha_j e_{j,l}^{m,\mu} \\
&= w_{l,k}^{o,m} + \sum_{\mu=0}^{m} \widetilde{e}_{i,l}^{m+1,\mu} \sigma_{l,k}^{(\mu)},
\end{aligned}$$

где $\widetilde{e}_{i,l}^{m+1,\mu} = \sum\limits_{j=l}^{i} \alpha_j e_{j,l}^{m,\mu}$, $\quad \mu = 0, 1, \ldots, m$. Предположим, что $\widetilde{e}_{i,l}^{m+1,m+1} \equiv 1$. Так как $\left(\sigma_{l,k}^{(\mu)}\right) \in \mathcal{O}_{\mu}^{+}$ для $\mu = 0, 1, \ldots, m$, по определению, легко видеть, что $w_{i,k}^{o,m} \in \mathcal{O}_{m+1}^{+}$. По индукции, предположим, что для $n = 0, 1, \ldots, r-1$, $\quad r \geqslant 1$ $\left(w_{i,k}^{n,m}\right)$ принадлежат классам $\mathcal{O}_{n+m+1}^{+}$. Для $i \geqslant l \geqslant k$ имеем

$$\begin{aligned}
w_{i,k}^{r,m} &= \sum_{j=k}^{i} a_{i,j}^{(r)} \sigma_{j,k}^{(m)} \approx \sum_{j=k}^{l} a_{i,j}^{(r)} \sigma_{j,k}^{(m)} + \sum_{j=l}^{i} a_{i,j}^{(r)} \sigma_{j,k}^{(m)} \\
&\approx \sum_{j=k}^{l} \left(\sum_{\gamma=0}^{r} \delta_{i,l}^{r,\gamma} a_{l,j}^{(\gamma)} \right) \sigma_{j,k}^{(m)} + \sum_{j=l}^{i} a_{i,j}^{(r)} \left(\sum_{\mu=0}^{m} e_{j,l}^{m,\mu} \sigma_{l,k}^{(\mu)} \right) \\
&= \sum_{\gamma=0}^{r} \delta_{i,l}^{r,\gamma} \sum_{j=k}^{l} a_{l,j}^{(\gamma)} \sigma_{j,k}^{(m)} + \sum_{\mu=0}^{m} \sigma_{l,k}^{(\mu)} \sum_{j=l}^{i} a_{i,j}^{(r)} e_{j,l}^{m,\mu} \\
&= \sum_{j=k}^{l} a_{l,j}^{(r)} \sigma_{j,k}^{(m)} + \sum_{\gamma=0}^{r-1} \delta_{i,l}^{r,\gamma} \sum_{j=k}^{l} a_{l,j}^{(\gamma)} \sigma_{j,k}^{(m)} + \sum_{\mu=0}^{m} \sigma_{l,k}^{(\mu)} \sum_{j=l}^{i} a_{i,j}^{(r)} e_{j,l}^{m,\mu} \\
&= w_{l,k}^{r,m} + \sum_{\gamma=0}^{r-1} \delta_{i,l}^{r,\gamma} \widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\gamma+m+1)} + \sum_{\mu=0}^{m} \widetilde{e}_{i,l}^{m+1,\mu} \sigma_{l,k}^{(\mu)},
\end{aligned}$$

где $\widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\gamma+m+1)} \equiv \sum\limits_{j=k}^{l} a_{l,j}^{(\gamma)} \sigma_{j,k}^{(m)}$, $\quad \gamma = 0, \ldots, r-1$ и $\widetilde{e}_{i,l}^{m+1,\mu} \equiv \sum\limits_{j=l}^{i} a_{i,j}^{(r)} e_{j,l}^{m,\mu}$ $\quad \mu = 0, \ldots, m$. Обозначим $\gamma + m + 1$ через μ. Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
w_{i,k}^{r,m} &\approx w_{l,k}^{r,m} + \sum_{\mu=m+1}^{r+m} \delta_{i,l}^{r,\mu-m-1} \widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\mu)} + \sum_{\mu=0}^{m} \widetilde{e}_{i,l}^{m+1,\mu} \sigma_{l,k}^{(\mu)} \\
&= w_{l,k}^{r,m} + \sum_{\mu=0}^{r+m} \widetilde{\delta}_{i,l}^{r+m,\mu} \widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\mu)},
\end{aligned}
$$

где

$$
\widetilde{\delta}_{i,l}^{r+m,\mu} = \begin{cases} \widetilde{e}_{i,l}^{m+1,\mu}, \ 0 \leqslant \mu \leqslant m, \\ \delta_{i,l}^{r,\mu-m-1}, \ m+1 \leqslant \mu \leqslant r+m, \end{cases}
$$

и

$$
\widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\mu)} = \begin{cases} \sigma_{l,k}^{(\mu)}, \ 0 \leqslant \mu \leqslant m, \\ \widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\mu)}, \ m+1 \leqslant \mu \leqslant r+m. \end{cases}
$$

Так как $\widetilde{\sigma}_{l,k}^{(\mu)} \in \mathcal{O}_{\mu}^{+}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, r+m$ получаем, что $w_{i,k}^{r,m} \in \mathcal{O}_{r+m+1}^{+}$. Лемма доказана.

Положим

$$
\zeta_{k,j} = \sum_{i=j}^{k} \sigma_{k,i} a_{i,j}.
$$

Тогда имеем следующую лемму.

Лемма 2.7. *Let* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_{n}^{-}$, $(\sigma_{k,i}) \in \mathcal{O}_{m}^{-}$. *Then* $(\zeta_{k,j}) \in \mathcal{O}_{m+n+1}^{-}$.

Лемма 2.7 можно доказать используя метод доказательства Леммы 2.6.

Определим

$$
\varpi_{i,k} = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \sigma_{k,j}, \quad i \geqslant k,
$$

$$
\varphi_{k,i} = \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j} a_{i,j}, \quad k \geqslant i.
$$

Лемма 2.8. *i)* *Если* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_{n}^{+}, \quad n \geqslant 0$ *и* $(\sigma_{k,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\varpi_{i,k})$ *принадлежит классу* $\mathcal{O}_{n}^{+}$.

ii) *Если* $(\sigma_{k,j}) \in \mathcal{O}_{m}^{+}$, $m \geqslant 0$ *и* $(a_{i,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\varphi_{k,i})$ *принадлежит классу* $\mathcal{O}_{m}^{+}$.

iii) Если $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ *и* $(\sigma_{k,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\varpi_{i,k})$ *принадлежит классу* $\mathcal{O}_n^-\beta$, *где* $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\beta_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \sigma_{k,j}$.

iv) Если $(\sigma_{k,j}) \in \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$ *и* $(a_{i,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\varphi_{k,i})$ *принадлежит классу* $\mathcal{O}_m^-\alpha$, *где* $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ *и* $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j}$.

Доказательство Леммы 2.8

i) Так как $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+$, существуют матрицы $(a_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, 1, ..., n-1$, и матрицы $(d_{i,k}^{n,\gamma})$ такие, что

$$a_{i,j} \equiv a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} d_{i,s}^{n,\gamma} a_{s,j}^{(\gamma)}, \qquad d_{i,s}^{n,n} \equiv 1$$

для всех $i \geqslant s \geqslant j \geqslant 1$.

Положим

$$\varpi_{i,k} \equiv \varpi_{i,k}^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}^{(n)} \sigma_{k,j}.$$

Сначала рассмотрим случай когда $n = 0$. В этом случае $\varpi_{i,k}^{(0)} = \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j \sigma_{k,j} \equiv \widetilde{\alpha}_k$, откуда вытекает, что $(\varpi_{i,k}^{(0)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_0^+$. По индукции, предположим, что для $n = 0, 1, ..., r-1$, $r \geqslant 1$ $(\varpi_{i,k}^{(n)})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_n^+$. Для $i \geqslant s \geqslant k$ имеем

$$\varpi_{i,k}^{(r)} \approx \sum_{j=1}^{k} \sum_{\gamma=0}^{r} d_{i,s}^{r,\gamma} a_{s,j}^{(\gamma)} \sigma_{k,j} = \sum_{\gamma=0}^{r} d_{i,s}^{r,\gamma} \sum_{j=1}^{k} a_{s,j}^{(\gamma)} \sigma_{k,j} = \sum_{\gamma=0}^{r} d_{i,s}^{r,\gamma} \varpi_{s,k}^{(\gamma)},$$

что означает, что $(\varpi_{i,k}^{(r)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_r^+$, $r \geqslant 0$.

ii) Так как $(\sigma_{k,j}) \in \mathcal{O}_m^+$, существуют матрицы $(\sigma_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, 1, ..., m-1$, и матрицы $(e_{k,i}^{m,\gamma})$ такие, что

$$\sigma_{k,j} \equiv \sigma_{k,j}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} e_{k,s}^{m,\gamma} \sigma_{s,j}^{(\gamma)}, \qquad e_{k,s}^{m,m} \equiv 1$$

для всех $k \geqslant s \geqslant j \geqslant 1$.

Определим
$$\varphi_{k,i} \equiv \varphi_{k,i}^{(m)} = \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j}^{(m)} a_{i,j}.$$

Сначала рассмотрим случай когда $m = 0$. В этом случае $\varphi_{k,i}^{(0)} = \sum\limits_{j=1}^{i} \beta_j a_{i,j} \equiv \widetilde{\beta}_i$, что означает, что $(\varphi_{k,i}^{(0)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_0^+$. По индукции, предположим, что для $m = 0, 1, ..., r-1,\ r \geqslant 1$ $(\varphi_{k,i}^{(m)})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_m^+$. Для $k \geqslant s \geqslant i$ имеем
$$\varphi_{k,i}^{(r)} \approx \sum_{j=1}^{i} \sum_{\gamma=0}^{r} e_{k,s}^{r,\gamma} \sigma_{s,j}^{(\gamma)} a_{i,j} = \sum_{\gamma=0}^{r} e_{k,s}^{r,\gamma} \sum_{j=1}^{i} \sigma_{s,j}^{(\gamma)} a_{i,j} = \sum_{\gamma=0}^{r} e_{k,s}^{r,\gamma} \varphi_{s,i}^{(\gamma)}.$$
Согласно определению, имеем, что $(\varphi_{k,i}^{(r)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_r^+,\ \ r \geqslant 0$.

iii) Так как $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, существуют матрицы $(a_{i,s}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, ..., n-1$, и матрицы $(d_{s,j}^{\gamma,n})$ такие, что
$$a_{i,j} \equiv a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} a_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,n}, \qquad d_{s,j}^{n,n} \equiv 1$$
для всех $i \geqslant s \geqslant j \geqslant 1$.

Пусть $i \geqslant s \geqslant k$. Тогда имеем
$$\begin{aligned}
\varpi_{i,k} \equiv \varpi_{i,k}^{(n)} &= \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}^{(n)} \sigma_{k,j} \approx \sum_{j=1}^{k} \sum_{\gamma=0}^{n} a_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,n} \sigma_{k,j} \\
&= \sum_{\gamma=0}^{n} a_{i,s}^{(\gamma)} \sum_{j=1}^{k} d_{s,j}^{\gamma,n} \sigma_{k,j} \\
&= a_{i,s}^{(n)} \sum_{j=1}^{k} \sigma_{k,j} + \sum_{\gamma=0}^{n-1} a_{i,s}^{(\gamma)} \sum_{j=1}^{k} d_{s,j}^{\gamma,n} \sigma_{k,j} \\
&= \beta_k \left(a_{i,s}^{(n)} + \sum_{\gamma=0}^{n-1} a_{i,s}^{(\gamma)} D_{s,k}^{\gamma,n} \right) = \beta_k \widetilde{a}_{i,k},
\end{aligned}$$
где $\beta_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \sigma_{k,j}$, $\widetilde{a}_{i,k} = a_{i,s}^{(n)} + \sum\limits_{\gamma=0}^{n-1} a_{i,s}^{(\gamma)} D_{s,k}^{\gamma,n}$ и $D_{s,k}^{\gamma,n} = \frac{1}{\beta_k} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} d_{s,j}^{\gamma,n} \sigma_{k,j} \right)$.

По определению $(\widetilde{a}_{i,k})$ имеем, что $(\widetilde{a}_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-,\ \ n \geqslant 0$. Следовательно $(\varpi_{i,k})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^- \beta,\ \ n \geqslant 0$.

iv) Так как $(\sigma_{k,j}) \in \mathcal{O}_m^-$, существуют матрицы $(\sigma_{k,s}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, ..., m-1$, и матрицы $(e_{s,j}^{\gamma,m})$ такие, что

$$\sigma_{k,j} \equiv \sigma_{k,j}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} \sigma_{k,s}^{(\gamma)} e_{s,j}^{\gamma,m}, \qquad e_{s,j}^{m,m} \equiv 1$$

для всех $k \geqslant s \geqslant j \geqslant 1$.

Пусть $k \geqslant s \geqslant i$. To

$$\begin{aligned}
\varphi_{k,i} \;&\equiv\; \varphi_{k,i}^{(m)} = \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j}^{(m)} a_{i,j} \approx \sum_{j=1}^{i} \sum_{\gamma=0}^{m} \sigma_{k,s}^{(\gamma)} e_{s,j}^{\gamma,m} a_{i,j} \\
&= \; \sigma_{k,s}^{(m)} \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} + \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sigma_{k,s}^{(\gamma)} \sum_{j=1}^{i} e_{s,j}^{\gamma,m} a_{i,j} \\
&= \; \alpha_i \left(\sigma_{k,s}^{(m)} + \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sigma_{k,s}^{(\gamma)} E_{s,i}^{\gamma,m} \right) = \alpha_i \widetilde{\sigma}_{k,i},
\end{aligned}$$

где $\alpha_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j}$, $\widetilde{\sigma}_{k,i} = \sigma_{k,s}^{(m)} + \sum\limits_{\gamma=0}^{m-1} \sigma_{k,s}^{(\gamma)} E_{s,i}^{\gamma,m}$ и $E_{s,i}^{\gamma,m} = \frac{1}{\alpha_i} \left(\sum\limits_{j=1}^{i} e_{s,j}^{\gamma,m} a_{i,j} \right)$.

По определению $(\widetilde{\sigma}_{k,i})$, имеем, что $(\widetilde{\sigma}_{k,i}) \in \mathcal{O}_m^-$, $\;m \geqslant 0$. Так как $\varphi_{k,i} \approx \alpha_i \widetilde{\sigma}_{k,i}$, получаем, что $(\varphi_{k,i})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^- \alpha$, $\;m \geqslant 0$. Таким образом, Лемма 2.8 доказана.

Определим

$$\psi_{k,j} = \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} a_{i,j}, \quad k \geqslant j,$$

$$\rho_{j,k} = \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} \sigma_{i,k}, \quad j \geqslant k.$$

Лемма 2.9. i) *Если* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, $\;n \geqslant 0$ *и* $(\sigma_{k,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\psi_{k,j})$ *принадлежит классу* $\mathcal{O}_n^-$.

ii) *Если* $(\sigma_{i,k}) \in \mathcal{O}_m^-$, $\;m \geqslant 0$ *и* $(a_{i,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\rho_{j,k})$ *принадлежит классу* $\mathcal{O}_m^-$.

iii) *Если* $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+,\ \ n \geqslant 0$ *и* $(\sigma_{k,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\psi_{k,j})$ *принадлежит классу* $\mathcal{B}\mathcal{O}_n^+$*, где* $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и* $\mathcal{B}_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k}$.

iv) *Если* $(\sigma_{k,j}) \in \mathcal{O}_m^+,\ \ m \geqslant 0$ *и* $(a_{i,j})$ *– произвольная неотрицательная нижняя треугольная матрица, то* $(\rho_{j,k})$ *принадлежит классу* $\mathcal{A}\mathcal{O}_m^+$*, где* $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}_j\}_{j=1}^{\infty}$ *и* $\mathcal{A}_j = \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j}$.

Доказательство Леммы 2.9

i) Так как $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, существуют матрицы $(a_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, ..., n-1$, и матрицы $(d_{s,j}^{\gamma,n})$ такие, что

$$a_{i,j} \equiv a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} a_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,n}, \qquad d_{s,j}^{n,n} \equiv 1$$

для всех $i \geqslant s \geqslant j \geqslant 1$.

Положим

$$\psi_{k,j} \equiv \psi_{k,j}^{(n)} = \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} a_{i,j}^{(n)}.$$

Сначала рассмотрим случай когда $n = 0$. В этом случае $\psi_{k,j}^{(0)} = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k}\alpha_i \equiv \widetilde{\alpha}_k$, что означает, что $(\psi_{k,j}^{(0)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_0^-$. По индукции, прдположим, что для $n = 0, 1, ..., r-1,\ r \geqslant 1$ $(\psi_{k,j}^{(n)})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_n^-$. Для $k \geqslant s \geqslant j$ имеем

$$\psi_{k,j}^{(r)} \approx \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} \sum_{\gamma=0}^{r} a_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r} = \sum_{\gamma=0}^{r} d_{s,j}^{\gamma,r} \sum_{j=k}^{\infty} \sigma_{i,k} a_{i,s}^{(\gamma)} = \sum_{\gamma=0}^{r} \psi_{k,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r},$$

откуда вытекает, что $(\psi_{k,j}^{(r)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_r^-,\ \ r \geqslant 0$.

ii) Так как $(\sigma_{i,k}) \in \mathcal{O}_m^-$, существуют матрицы $(\sigma_{i,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, ..., m-1$, и матрицы $(e_{s,k}^{\gamma,m})$ такие, что

$$\sigma_{i,k} \equiv \sigma_{i,k}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} \sigma_{i,s}^{(\gamma)} e_{s,k}^{\gamma,m}, \qquad e_{s,k}^{m,m} \equiv 1$$

для всех $i \geqslant s \geqslant k \geqslant 1$.

Положим

$$\rho_{j,k} \equiv \rho_{j,k}^{(m)} = \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} \sigma_{i,k}^{(m)}.$$

Сначала расммотрим случай когда $m = 0$. В этом случае $\rho_{j,k}^{(0)} = \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j} \beta_i \equiv \widetilde{\beta}_j$, откуда следует, что $(\rho_{j,k}^{(0)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_0^-$. По индукции, предположим, что для $m = 0, 1, ..., r-1,\ r \geqslant 1$ $(\rho_{j,k}^{(0)})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_m^-$. Для $i \geqslant j \geqslant k$ имеем

$$\rho_{j,k}^{(r)} \approx \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} \sum_{\gamma=0}^{r} \sigma_{i,s}^{(\gamma)} e_{s,k}^{\gamma,r} = \sum_{\gamma=0}^{r} e_{s,k}^{\gamma,r} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} \sigma_{i,s}^{(\gamma)} = \sum_{\gamma=0}^{r} \rho_{j,s}^{(\gamma)} e_{s,k}^{\gamma,r},$$

откуда следует, что $(\rho_{j,k}^{(r)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_r^-,\ \ r \geqslant 0$.

iii) Так как $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+$, существуют матрицы $(a_{s,j}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, 1, ..., n-1$, и матрицы $(d_{i,s}^{n,\gamma})$ такие, что

$$a_{i,j} \equiv a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} d_{i,s}^{n,\gamma} a_{s,j}^{(\gamma)}, \qquad d_{i,s}^{n,n} \equiv 1$$

для всех $i \geqslant s \geqslant j \geqslant 1$.

Пусть $k \geqslant s \geqslant j$. То имеем

$$\begin{aligned} \psi_{k,j} \ &\equiv\ \psi_{k,j}^{(n)} = \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} a_{i,j}^{(n)} \approx \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} \sum_{\gamma=0}^{n} d_{i,s}^{n,\gamma} a_{s,j}^{(\gamma)} \\ &=\ a_{s,j}^{(n)} \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} + \sum_{\gamma=0}^{n-1} a_{s,j}^{(\gamma)} \sum_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} d_{i,s}^{n,\gamma} \\ &=\ \mathcal{B}_k \left(a_{s,j}^{(n)} + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \mathcal{D}_{k,s}^{n,\gamma} a_{s,j}^{(\gamma)} \right) = \mathcal{B}_k \widehat{a}_{k,j}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{B}_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k}$, $\widehat{a}_{k,j} = a_{s,j}^{(n)} + \sum\limits_{\gamma=0}^{n-1} \mathcal{D}_{k,s}^{n,\gamma} a_{s,j}^{(\gamma)}$ и $\mathcal{D}_{k,s}^{n,\gamma} = \frac{1}{\mathcal{B}_k} \left(\sum\limits_{i=k}^{\infty} \sigma_{i,k} d_{i,s}^{n,\gamma} \right)$.

По определению $(\widehat{a}_{k,j})$, имеем $(\widehat{a}_{k,j}) \in \mathcal{O}_n^+,\ \ n \geqslant 0$. Следовательно, $(\psi_{k,j})$ принадлежит классу $\mathcal{B}\mathcal{O}_n^+,\ \ n \geqslant 0$.

iv) Так как $(\sigma_{i,k}) \in \mathcal{O}_m^+$, существуют матрицы $(\sigma_{s,k}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, 1, ..., m-1$, и матрицы $(e_{i,s}^{m,\gamma})$ такие, что

$$\sigma_{i,k} \equiv \sigma_{i,k}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} e_{i,s}^{m,\gamma} \sigma_{s,k}^{(\gamma)}, \qquad e_{i,s}^{m,m} \equiv 1$$

для всех $i \geqslant s \geqslant k \geqslant 1$.

Пусть $i \geqslant j \geqslant k$. То имеем

$$\begin{aligned}
\rho_{j,k} &\equiv \rho_{j,k}^{(m)} = \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}\sigma_{i,k}^{(m)} \approx \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} \sum_{\gamma=0}^{m} e_{i,s}^{m,\gamma}\sigma_{s,k}^{(\gamma)} \\
&= \sigma_{s,k}^{(m)} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} + \sum_{\gamma=0}^{m-1} \sigma_{s,k}^{(\gamma)} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} e_{i,s}^{m,\gamma} \\
&= \mathcal{A}_j \left(\sigma_{s,k}^{(m)} + \sum_{\gamma=0}^{m-1} \mathcal{E}_{j,s}^{m,\gamma}\sigma_{s,k}^{(\gamma)} \right) = \mathcal{A}_j \widehat{\sigma}_{j,k},
\end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_j = \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j}$, $\widehat{\sigma}_{j,k} = \sigma_{s,k}^{(m)} + \sum\limits_{\gamma=0}^{m-1} \mathcal{E}_{j,s}^{m,\gamma}\sigma_{s,k}^{(\gamma)}$ и $\mathcal{E}_{j,s}^{m,\gamma} = \frac{1}{\mathcal{A}_i}\left(\sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j} e_{i,s}^{m,\gamma}\right)$.

По определению $(\widehat{\sigma}_{j,k})$, имеем $(\widehat{\sigma}_{j,k}) \in \mathcal{O}_m^+, \quad m \geqslant 0$. Следовательно, $(\rho_{j,k})$ принадлежит классу $\mathcal{A}\mathcal{O}_m^+, \ m \geqslant 0$. Таким образом, Лемма 2.9 доказана.

2.3 Примеры матриц из классов $\alpha\mathcal{O}_n^{\pm}$ и $\mathcal{O}_n^{\pm}\beta$

В этом подразделе приводятся примеры матриц из классов $\alpha\mathcal{O}_n^{\pm}$, $\mathcal{O}_n^{\pm}\beta$, $n \geqslant 0$.

1. Рассмотрим оператор многократнорго суммирования

$$(S_n f)_i = \sum_{k_1=1}^{i} \omega_{1,k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \omega_{2,k_2} \sum_{k_3=1}^{k_2} \omega_{3,k_3} \ldots \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-2}} \omega_{n-1,k_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_{n-1}} f_j. \tag{2.19}$$

Меняя порядок суммирования в (2.19), получим

$$(S_n f)_i = \sum_{j=1}^{i} f_j W_{n-1,1}(i,j), \tag{2.20}$$

где $W_{n-1,1}(i,j) \equiv 1$ для $n = 1$ и

$$W_{n-1,1}(i,j) = \sum_{k_{n-1}=j}^{i} \omega_{n-1,k_{n-1}} \sum_{k_{n-2}=k_{n-1}}^{i} \omega_{n-2,k_{n-2}} \ldots \sum_{k_1=k_2}^{i} \omega_{1,k_1}$$

для $n \geqslant 2$.

Ограниченность и компактность таких операторов был установлен в работе [116].

Предположим, что $W_{l,m}(i,j) \equiv 1$ для $m > l$ и

$$W_{l,m}(i,j) = \sum_{k_l=j}^{i} \omega_{l,k_l} \sum_{k_{l-1}=k_l}^{i} \omega_{l-1,k_{l-1}} \dots \sum_{k_m=k_{m+1}}^{i} \omega_{m,k_m}$$

для $n-1 \geqslant l \geqslant m \geqslant 1$.

По Лемме 1 работы [116] легко следует, что

$$W_{l,m}(i,j) \approx \sum_{r=m}^{l+1} W_{r-1,m}(i,\tau) W_{l,r}(\tau,j) \tag{2.21}$$

для $n-1 \geqslant l \geqslant m \geqslant 1$ и для всех i, τ, j такие, что $1 \leqslant j \leqslant \tau \leqslant i < \infty$.

Для $m = 1$ and $n-1 \geqslant l \geqslant 1$ из (2.21) следует, что

$$W_{l,1}(i,j) \approx \sum_{r=0}^{l} W_{r,1}(i,\tau) W_{l,r+1}(\tau,j) \tag{2.22}$$

для всех $i \geqslant \tau \geqslant j \geqslant 1$.

Определим $a^{(r)}(i,j) \equiv W_{r,1}(i,j)$ for $r = 0, 1, ..., l$. То имеем

$$a^{(l)}(i,j) \approx \sum_{r=0}^{l} a^{(r)}(i,\tau) W_{l,r+1}(\tau,j) \tag{2.23}$$

для $i \geqslant \tau \geqslant j \geqslant 1$. Если мы докажем, что $(a^{(l)}(i,j)) \in \mathcal{O}_l^-$ для $l = 0, 1, ..., n-1$, то получим, что $(a^{(n-1)}(i,j)) \equiv (W_{n-1,1}(i,j)) \in \mathcal{O}_{n-1}^-$.

Действительно, если $l = 0$, то $a^{(0)}(i,j) = W_{0,1}(i,j) \equiv 1$, что означает $(a^{(0)}(i,j)) \in \mathcal{O}_0^-$.

Для $l = 1$, по (2.23) и (2.18) имеем, что

$$a^{(1)}(i,j) \approx a^{(1)}(i,\tau) + a^{(1)}(\tau,j)$$

для $i \geqslant \tau \geqslant j \geqslant 1$. Следовательно, $(a^{(1)}(i,j)) \in \mathcal{O}_1^-$.

Предположим, что $(a^{(r)}(i,j)) \in \mathcal{O}_r^-$ для $r = 0, 1, ..., l-1$, $n-1 \geqslant l > 1$. Тогда принимая во внимание что $W_{l,l+1}(\tau,j) \equiv 1$, из (2.23) и (2.18) получим, что $(a^{(l)}(i,j)) \in \mathcal{O}_l^-$. Следовательно, $(W_{n-1,1}(i,j)) \in \mathcal{O}_{n-1}^-$ для $n \geqslant 1$.

Теперь докажем, что $(W_{n-1,1}(i,j)) \in \mathcal{O}_{n-1}^+$ для $n \geqslant 1$.

Для $m = 1$ и $l = n-1$ соотношение (2.21) подразумевает, что

$$W_{n-1,1}(i,j) \approx \sum_{k=0}^{n-1} W_{n-k-1,1}(i,\tau) W_{n-1,n-k}(\tau,j)$$

для всех $i \geqslant \tau \geqslant j \geqslant 1$.

Определим $a^{(k)}(i,j) \equiv W_{n-1,n-k}(i,j)$ для $k = 0, 1, ..., n-1$. Тогда имеем $W_{n-1,1}(i,j) \equiv a^{(n-1)}(i,j)$ и

$$a^{(n-1)}(i,j) \approx \sum_{k=0}^{n-1} W_{n-k-1,1}(i,\tau) a^{(k)}(\tau,j), \qquad i \geqslant \tau \geqslant j.$$

Так как $W_{0,1}(i,\tau) \equiv 1$, if $(a^{(k)}(i,j)) \in \mathcal{O}_k^+$ for $k = 0, 1, ...n-2$, получаем, что $(a^{(n-1)}(i,j)) \in \mathcal{O}_{n-1}^+$.

Предполагая, что $l = n-1$ and $m = n-k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ in (2.21), имеем

$$\begin{aligned} a^{(k)}(i,j) &\approx \sum_{r=n-k}^{n} W_{r-1,n-k}(i,\tau) W_{n-1,r}(\tau,j) \\ &= \sum_{r=0}^{k} W_{n-r-1,n-k}(i,\tau) a^{(r)}(\tau,j) \end{aligned} \tag{2.24}$$

для всех $i \geqslant \tau \geqslant j \geqslant 1$.

Если $k = 0$, то $a^{(0)}(i,j) \equiv W_{n-1,n}(i,j) \equiv 1$. Следовательно, $(a^{(0)}(i,j)) \in \mathcal{O}_0^+$.

Если $k = 1$ из (2.12) и (2.24) получаем, что

$$\begin{aligned} a^{(1)}(i,j) &\approx W_{n-1,n-1}(i,\tau) a^{(0)}(\tau,j) + W_{n-2,n-1}(i,\tau) a^{(1)}(\tau,j) \\ &= a^{(1)}(i,\tau) + a^{(1)}(\tau,j), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что $(a^{(1)}(i,j)) \in \mathcal{O}_1^+$.

Предположим, что $(a^{(r)}(i,j)) \in \mathcal{O}_r^+$ for $r = 0, 1, ..., k-1$, $k > 1$. Так как $W_{n-k-1,n-k}(i,\tau) \equiv 1$ для $k = 0, 1, ..., n-1$, из (2.24) следует, что $(a^{(k)}(i,j)) \in \mathcal{O}_k^+$ for $k = 0, 1, ..., n-1$. Следовательно, $(W_{n-1,1}(i,j)) \in \mathcal{O}_{n-1}^+$ для $n \geqslant 1$.

Таким образом, доказано, что матрица $(W_{n-1,1}(i,j))$ принадлежит классу $\mathcal{O}_{n-1}^+ \cap \mathcal{O}_{n-1}^-$.

2. По определению, ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j$ называется суммируемым методом Гельдера $(H,\ n)$ с суммой s, если

$$\lim_{i\to\infty} H_i^n = s,$$

где

$$H_i^0 = s_i = \sum_{j=1}^{i} f_j,$$

$$H_i^n = \frac{H_1^{n-1} + ... + H_i^{n-1}}{i}, \quad i = 1, 2, ...$$

Этот метод суммирования был введен О. Гельдером (O. Hölder) [117] (см. также [118]) как обобщение метода суммирования арифметических средних.

Выражение H_i^n можно переписать в следующем виде

$$H_i^n \equiv (H^n f)_i = \frac{1}{i} \sum_{k_1=1}^{i} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} ... \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-2}} \frac{1}{k_{n-1}} \sum_{k_n=1}^{k_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_n} f_j.$$

Если рассмотрим оператор многократного суммирования порядка $(n+1)$, предполагая, что $\omega_{l,k_l} = \frac{1}{k_l}$ для $1 \leqslant l \leqslant n-1$ и $\omega_{n,k_n} = 1$, то имеем

$$(S_{n+1} f)_i = \sum_{k_1=1}^{i} \frac{1}{k_1} \sum_{k_2=1}^{k_1} \frac{1}{k_2} ... \sum_{k_{n-1}=1}^{k_{n-2}} \frac{1}{k_{n-1}} \sum_{k_n=1}^{k_{n-1}} \sum_{j=1}^{k_n} f_j = i(H^n f)_i.$$

Согласно предыдущему примеру, матрица оператора многократного суммирования порядка $(n+1)$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cap \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Следовательно, получаем, матрица Гельдера порядка n принадлежит классу $\varphi\mathcal{O}_n^+ \cap \varphi\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$, где $\varphi = \{\frac{1}{i}\}_{i=1}^{\infty}$.

3. Рассмотрим метод суммирования Чезаро. Это матричный метод суммирования с матрицей $(a_{i,j}^k)$, где

$$a_{i,j}^k = \begin{cases} \frac{T_{i-j}^{k-1}}{T_i^k}, & j \leqslant i, \\ 0, & j > i \end{cases}$$

и $T_i^k = \frac{(k+1)(k+2)...(k+i)}{i!}$.

Если $k = 1$, то $a_{i,j}^1 = \frac{1}{i+1}$. То мы получаем оператор Харди, который хорошо исследован в весовых пространствах последовательностей и на конусе монотонных последовательностей (см. [3]).

Если $k \geqslant 2$ для $j \leqslant i$, имеем

$$a_{i,j}^k = \frac{T_{i-j}^{k-1}}{T_i^k} = \frac{k}{(i+1)(i+2)...(i+k)} (i-j+1)(i-j+2)...(i-j+k-1).$$

Положим

$$a_{i,j}^k = \psi_i^k \widetilde{a}_{i,j}^{(k-1)},$$

где $\widetilde{a}_{i,j}^{(k-1)} = (i-j+1)(i-j+2)...(i-j+k-1)$ и $\psi_i^k = \frac{k}{(i+1)(i+2)...(i+k)}$.

Теперь мы докажем, что матрица Чезаро $(a_{i,j}^k)$ принадлежит классу $\psi^{(k)}\mathcal{O}_{k-1}^+ \cap \psi^{(k)}\mathcal{O}_{k-1}^-$, $k \geqslant 1$, где $\psi^{(k)} = \{\psi_i^k\}_{i=1}^{\infty}$. Для этого нам нужно доказать, что $(\widetilde{a}_{i,j}^{(k-1)}) \in \mathcal{O}_{k-1}^+ \cap \mathcal{O}_{k-1}^-$, $k \geqslant 2$.

Предполагаем, что для $\forall l \geqslant 1$ верно следующее разложение

$$\widetilde{a}_{i,j}^{(l)} = (i-j+1)(i-j+2)...(i-j+l) = \sum_{\gamma=0}^{l} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,l} \quad \forall i \geqslant s \geqslant j, \quad (2.25)$$

где $d_{s,j}^{l,l} \equiv 1$ и $d_{s,j}^{-1,l} \equiv 0$ для $l \geqslant 0$, и $d_{s,j}^{\gamma,l} = d_{s,j}^{\gamma-1,l-1} + d_{s,j}^{\gamma,l-1}(l-\gamma-1+s-j)$ для $\gamma = 0, ..., l-1$, $l \geqslant 1$.

Если $l=1$, то $\widetilde{a}_{i,j}^{(1)} = (i-j+1) = (i-s+1)+(s-j) = \widetilde{a}_{i,s}^{(1)} + d_{s,j}^{0,1}$, где $d_{s,j}^{0,1} = s-j$ and $\widetilde{a}_{i,s}^{(0)} = 1$.

По индукции, предположим, что (2.25) выполняется для $l = 2, ..., r-1$, $r \geqslant 2$ и докажем, что (2.25) выполняется для $l = r$. Предположим, что $d_{s,j}^{\gamma,r-1} = 0$, если $\gamma < 0$. Для $\forall i \geqslant s \geqslant j$ имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_{i,j}^{(r)} &= (i-j+1)(i-j+2)...(i-j+r) = \widetilde{a}_{i,j}^{(r-1)}(i-j+r) \\
&= \sum_{\gamma=0}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1} \left((i-s+\gamma+1)+(r-\gamma-1)+(s-j)\right) \\
&= \sum_{\gamma=0}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1}(i-s+\gamma+1) \\
&\quad + \sum_{\gamma=0}^{r-1} \left(\widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1}(r-\gamma-1) + \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1}(s-j)\right) \\
&= \sum_{\gamma=0}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma+1)} d_{s,j}^{\gamma,r-1} + \sum_{\gamma=0}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1}(r-\gamma-1+s-j) \\
&= \sum_{\gamma=1}^{r} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma-1,r-1} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1}(r-\gamma-1+s-j) \\
&\quad + d_{s,j}^{0,r-1}(r-1+s-j)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \widetilde{a}_{i,s}^{(r)} + \sum_{\gamma=1}^{r-1} \left(\widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma-1,r-1} + \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r-1} (r-\gamma-1+s-j) \right) \\
&\quad + d_{s,j}^{0,r-1}(r-1+s-j) \\
&= \widetilde{a}_{i,s}^{(r)} + \sum_{\gamma=0}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} (d_{s,j}^{\gamma-1,r-1} + d_{s,j}^{\gamma,r-1}(r-\gamma-1+s-j)) \\
&= \widetilde{a}_{i,s}^{(r)} + \sum_{\gamma=0}^{r-1} \widetilde{a}_{i,s}^{(\gamma)} d_{s,j}^{\gamma,r},
\end{aligned}
$$

где $d_{s,j}^{\gamma,r} = d_{s,j}^{\gamma-1,r-1} + d_{s,j}^{\gamma,r-1}(r-\gamma-1+s-j)$.

По определению классов $\mathcal{O}_l^-$, $l \geqslant 1$, очевидно, что матрица $(\widetilde{a}_{i,j}^{(1)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_1^-$. Предположим, что матрицы $(\widetilde{a}_{i,j}^{(l)})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_l^-$ для $l = 2, ...r-1$. Легко заметить, что для матрицы $(\widetilde{a}_{i,j}^{(r)})$ верно разложение (2.25). По предположению, $(\widetilde{a}_{i,j}^{(l)})$ принадлежат классам $\mathcal{O}_l^-$ для $l = 1, 2, ...r-1$. Тогда из равенства (2.25) вытекает, что $(\widetilde{a}_{i,j}^{(r)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_r^-$.

Используя этот же метод, можно доказать, что для $(\widetilde{a}_{i,j}^{(l)})$, $l \geqslant 1$ верно следующее разложение

$$
\widetilde{a}_{i,j}^{(l)} = \sum_{\gamma=0}^{l} e_{i,s}^{l,\gamma} \widetilde{a}_{s,j}^{(\gamma)} \quad \forall i \geqslant s \geqslant j, \tag{2.26}
$$

где $e_{i,s}^{l,l} \equiv 1$ и $e_{i,s}^{-1,l} \equiv 1$ для $l \geqslant 0$, и $e_{i,s}^{l,\gamma} = e_{i,s}^{l-1,\gamma-1} + e_{i,s}^{l-1,\gamma}(i-s+l-\gamma-1)$ для $\gamma = 0, ..., l-1$, $l \geqslant 1$. Более того, как выше, получаем, что $(\widetilde{a}_{i,j}^{(l)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_l^+$, $l \geqslant 1$.

Следовательно, легко видеть, что $(\widetilde{a}_{i,j}^{(k-1)}) \in \mathcal{O}_{k-1}^+ \cap \mathcal{O}_{k-1}^-$, $k \geqslant 1$. Это означает, что матрица Чезаро $(a_{i,j}^k)$ принадлежит классу $\psi^{(k)}\mathcal{O}_{k-1}^+ \cap \psi^{(k)}\mathcal{O}_{k-1}^-$, $k \geqslant 1$.

2.4 Необходимые и достаточные условия ограниченности матричных операторов в весовых пространствах последовательностей, случай $1 < p \leqslant q < \infty$

В этом подразделе устанавливаются необходимые и достаточные условия ограниченности операторов A^+ и A^- из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$, когда соответствующие матрицы принадлежат одному из классов $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$.

Определим

$$\left(\mathcal{B}_{p,q}^+\right)_k = \left(\sum_{j=1}^{k} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\left(\mathcal{B}_{p,q}^-\right)_k = \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\mathcal{A}_{p,q}^+\right)_k = \left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\mathcal{A}_{p,q}^-\right)_k = \left(\sum_{i=k}^{\infty} v_i^{-p'} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}^q u_j^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Положим $\mathcal{B}^+ = \sup\limits_{k\geqslant 1} \left(\mathcal{B}_{p,q}^+\right)_k$, $\mathcal{B}^- = \sup\limits_{k\geqslant 1} \left(\mathcal{B}_{p,q}^-\right)_k$, $\mathcal{A}^+ = \sup\limits_{k\geqslant 1} \left(\mathcal{A}_{p,q}^+\right)_k$ и $\mathcal{A}^- = \sup\limits_{k\geqslant 1} \left(\mathcal{A}_{p,q}^-\right)_k$.

Теорема 2.10. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ в (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$. То оценка (2.3) для оператора (2.1) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $\mathcal{B}^+ < \infty$ и $\mathcal{B}^- < \infty$. При этом для наименьшой постоянной C в (2.3) справедлива оценка $\mathcal{B}^+ \approx \mathcal{B}^- \approx C$.*

Теорема 2.11. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ в (2.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То оценка (2.3) для оператора (2.2) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $\mathcal{A}^+ < \infty$ и $\mathcal{A}^- < \infty$. При этом для наименьшой постоянной C в (2.3) справедлива оценка $\mathcal{A}^+ \approx \mathcal{A}^- \approx C$.*

Здесь мы покажем доказательство Теоремы 2.11, так как Теорема 2.10 доказывается таким же методом.

Для доказательства Теоремы 2.11 нам понадобятся следующее утверждение.

Лемма 2.12. *Пусть матрица в (2.2) принадлежит классу* $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. *То для* $k \geqslant 1$ *имеем следующую оценку*

$$\left(\mathcal{A}_{p,q}^+\right)_k \approx (\mathcal{A}_m)_k \equiv \max_{0\leqslant\gamma\leqslant m} (\mathcal{A}_{\gamma,m})_k \approx \left(\mathcal{A}_{p,q}^-\right)_k, \tag{2.27}$$

где

$$(\mathcal{A}_{\gamma,m})_k = \left(\sum_{j=1}^{k} \left(d_{k,j}^{\gamma,m}\right)^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(a_{i,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Из (2.27) следует, что

$$\mathcal{A}^+ \approx \mathcal{A}_m = \sup_{k\geqslant1} (\mathcal{A}_m)_k \approx \mathcal{A}^-, \quad \forall m \geqslant 0. \tag{2.28}$$

Действительно, эта оценка следует из (2.18).

Доказательство Теоремы 2.11. *Необходимость.* Предположим, что матрица оператора (2.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$ и выполняется неравенство (2.3).

Для $k > 1$ определим $\widetilde{g} = \{\widetilde{g}_i\}_{i=1}^\infty$: $\quad \widetilde{g}_i = \begin{cases} u_i, & 1 \leqslant i \leqslant k \\ 0, & i > k. \end{cases}$

Известно, что неравенство (2.3) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется следующее дуальное неравенство

$$\|A^* g\|_{p',v^{-1}} \leqslant C\|g\|_{q',u^{-1}}, \qquad g \in l_{q',u^{-1}} \tag{2.29}$$

для сопряженного оператора A^*, которая совпадает с оператором (2.1). При этом наименьшие постоянные в (2.3) и (2.29) совпадают (см. [2]).

Следовательно, выбирая $g = \widetilde{g}$ в (2.29) и используя (2.17), имеем

$$\begin{aligned} Ck^{\frac{1}{q'}} &\geqslant \|A^*\widetilde{g}\|_{p',v^{-1}} \geqslant \left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}^{(m)} u_j\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\gg \left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(a_{i,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{j=1}^{k} d_{k,j}^{\gamma,m} u_j\right), \quad \gamma = 0, 1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Следовательно, $\{a_{i,k}^{(\gamma)}\}_{i=1}^\infty \in l_{p',v^{-1}}$.

Для $1 \leqslant r < M < \infty$, определим $\widetilde{f} = \{\widetilde{f}_s\}_{s=1}^\infty$, где

$$\widetilde{f}_s = \begin{cases} (a^{(\gamma)}_{s,r})^{p'-1} v_s^{-p'}, & r \leqslant s \leqslant M \\ 0, & s < r \quad \text{or} \quad s > M. \end{cases}$$

Выбирая $f = \widetilde{f}$ в неравенстве (2.3) и используя (2.17), получим, что

$$C \left(\sum_{s=r}^{M} \left(a^{(\gamma)}_{s,r} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \|A^- \widetilde{f}\|_{q,u} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{s=j}^{\infty} a^{(m)}_{s,j} \widetilde{f}_s \right)^q u_j^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gg \left(\sum_{j=1}^{r} (d^{\gamma,m}_{r,j})^q u_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{s=r}^{M} \left(a^{(\gamma)}_{s,r} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right),$$

откуда следует, что

$$C \gg \left(\sum_{j=1}^{r} (d^{\gamma,m}_{r,j})^q u_j^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{s=r}^{M} \left(a^{(\gamma)}_{s,r} \right)^{p'} v_s^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.30}$$

Так как неравенство (2.30) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, m$ и $r \geqslant 1$ произвольное число, переходя к пределу при $M \to \infty$ имеем

$$\sup_{k \geqslant 1} (\mathcal{A}_m)_k \ll C. \tag{2.31}$$

Тогда по Лемме 2.12, имеем

$$\mathcal{A}^+ \approx \mathcal{A}^- \ll C. \tag{2.32}$$

Таким образом, доказательство необходимости завершена.

Достаточность. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора (2.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Пусть $0 \leqslant f \in l_{p,v}$ и выполняется одно из условий $\mathcal{A}^+ < \infty$ и $\mathcal{A}^- < \infty$. Предположим, что $m = 0$. По определению классов $\mathcal{O}_0^-$, матрица оператора (2.2) имеет вид $a^{(0)}_{i,j} = \beta_i \ \forall i \geqslant j \geqslant 1$. То оценка (2.3) совпадает с оценкой (2.6) и оператор (2.2) является матричным оператором A_0^-. Следовательно, из Теоремы B следует, что

$$\|A_0^- f\|_{q,u} \ll \mathcal{A}_0 \|f\|_{p,v} \qquad \forall f \in l_{p,v}.$$

На основе Леммы 2.12 следует, что неравенство (2.3) выполняется для $m = 0$ и для наименьшей постоянной в (2.3) выполняется следующая оценка

$$C \ll \mathcal{A}^+ \approx \mathcal{A}^-. \tag{2.33}$$

Предположим, что неравенство (2.3) выполняется для $m = 0, 1, \dots, n-1$, $n \geqslant 1$ и для наименьшой постоянной в (2.3) выполняется оценка (2.33). Рассмотрим неравенство

$$\|A_m^- f\|_{q,u} \ll \mathcal{A}_m \|f\|_{p,v} \qquad \forall f \in l_{p,v}, \tag{2.34}$$

где A_m^- определяется формулой (2.2) с матрицей $(a_{i,j}^{(m)}) \in \mathcal{O}_m^-$.

Наша цель показать, что неравенство (2.34) выполняется для $m = n$ с оценкой (2.33).

Пусть $h \equiv h_n$, где h_n – постоянная в (2.14) при $m = n$. Для $j \geqslant 1$ определим следующее множество:

$$T_j = \{k \in \mathbb{Z} : (h+1)^{-k} \leqslant \left(A_n^- f\right)_j\},$$

где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Предположим, что $k_j = \inf T_j$, если $T_j \neq \emptyset$ и $k_j = \infty$, если $T_j = \emptyset$. Во избежание тривиального случая, предположим, что $(A_n^- f)_1 \neq 0$. Так как $a_{i,j}^{(n)}$ не возрастает по j, то имеем $k_j \leqslant k_{j+1}$. Если $k_j < \infty$, то

$$(h+1)^{-k_j} \leqslant \left(A_n^- f\right)_j < (h+1)^{-(k_j-1)}, \qquad j \geqslant 1. \tag{2.35}$$

Пусть $m_1 = 0$, $k_1 = k_{m_1+1}$ и $M_1 = \{j \in \mathbb{N} : k_j = k_1 = k_{m_1+1}\}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Предположим, что m_2 такая, что $\sup M_1 = m_2$. Очевидно, что $m_2 > m_1$ и если множество M_1 ограничена сверху, то $m_2 < \infty$ и $m_2 = \max M_1$. Теперь определим числа $0 = m_1 < m_2 < \dots < m_s < \infty$, $s \geqslant 1$ по индукции. Для определения m_{s+1} предположим, что $m_{s+1} = \sup M_s$, где $M_s = \{j \in \mathbb{N} : k_j = k_{m_s+1}\}$.

Пусть $N_0 = \{s \in \mathbb{N} : m_s < \infty\}$. Далее предположим, что $k_{m_{s+1}} = n_{s+1}$, $s \in N_0$. Из определения m_s и (2.35) следует, что для $s \in N_0$

$$(h+1)^{-n_{s+1}} \leqslant \left(A_n^- f\right)_j < (h+1)^{-n_{s+1}+1}, \quad m_s + 1 \leqslant j \leqslant m_{s+1} \tag{2.36}$$

и

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s \in N_0} [m_s + 1, m_{s+1}], \quad \text{where } [m_s + 1, m_{s+1}] \cap [m_l + 1, m_{l+1}] = \emptyset, \ s \neq l.$$

Следовательно, для $0 \leqslant f \in l_{p,v}$ левая часть неравенства (2.3) имеет следующий вид

$$\|A_n^- f\|_{q,u}^q = \sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q. \tag{2.37}$$

Предположим, что $\sum\limits_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} = 0$, если $m_s = \infty$.

Рассмотрим два возможных случая: $N_0 = \mathbb{N}$ и $N_0 \neq \mathbb{N}$.

1. Если $N_0 = \mathbb{N}$, тогда оценим (2.37) следующим образом.

Очевидно, что из неравенств $n_{s+1} < n_{s+2} < n_{s+3}$ вытекает, что $-n_{s+3} + 1 \leqslant -n_{s+1} - 1$ для $s \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (2.36), (2.18) следует, что

$$\begin{aligned}
(h+1)^{-n_{s+1}-1} &= (h+1)^{-n_{s+1}} - h(h+1)^{-n_{s+1}-1} \\
&\leqslant (h+1)^{-n_{s+1}} - h(h+1)^{-n_{s+3}+1} \\
&< \left(A_n^- f\right)_{m_{s+1}} - h\left(A_n^- f\right)_{m_{s+3}} \\
&= \sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}}^{(n)} f_i - h \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a_{i,m_{s+3}}^{(n)} f_i \\
&\leqslant \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{(n)} f_i + \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} [a_{i,m_{s+1}}^{(n)} - h a_{i,m_{s+3}}^{(n)}] f_i \\
&\leqslant \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{(n)} f_i + \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} [h \sum_{\gamma=0}^{n} a_{i,m_{s+3}}^{(\gamma)} d_{m_{s+3},m_{s+1}}^{\gamma,n} - h a_{i,m_{s+3}}^{(n)}] f_i \\
&= \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{(n)} f_i + h \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \sum_{\gamma=0}^{n-1} a_{i,m_{s+3}}^{(\gamma)} d_{m_{s+3},m_{s+1}}^{\gamma,n} f_i.
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Теперь, используя (2.36) и (2.38), можно оценить (2.37) следующим образом.

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\in N} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q < \sum_{s\in N} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (h+1)^{(-n_{s+1}+1)q} u_j^q \\
&= (h+1)^{2q} \sum_{s\in N} (h+1)^{(-n_{s+1}-1)q} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \\
&\ll \sum_{s\in N} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{(n)} f_i + h \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a_{i,m_{s+3}}^{(\gamma)} d_{m_{s+3},m_{s+1}}^{\gamma,n} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\ll \sum_{s\in N}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a^{(n)}_{i,m_{s+1}} f_i\right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{n-1}\sum_{s\in N}\left(d^{\gamma,n}_{m_{s+3},m_{s+1}}\right)^q\left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a^{(\gamma)}_{i,m_{s+3}} f_i\right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q := I_n+\sum_{\gamma=0}^{n-1} I_\gamma,$$

где

$$I_n=\sum_{s\in N}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a^{(n)}_{i,m_{s+1}} f_i\right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$

и

$$I_\gamma=\sum_{s\in N}\left(d^{\gamma,n}_{m_{s+3},m_{s+1}}\right)^q\left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a^{(\gamma)}_{i,m_{s+3}} f_i\right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q, \quad 0\leqslant\gamma\leqslant n-1.$$

Для оценки I_n используем неравенства Гельдера и Йенсена:

$$\begin{aligned} I_n &\leqslant \sum_{s\in N}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} (a^{(n)}_{i,m_{s+1}})^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |f_i v_i|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leqslant \left[\sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=k}^{\infty}(a^{(n)}_{i,k})^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^q \sum_{s\in N}\left(\sum_{j=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |f_i v_i|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\leqslant \left[\sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{j=1}^{k} \left(d^{n,n}_{k,j}\right)^q u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=k}^{\infty}(a^{(n)}_{i,k})^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^q \left(\sum_{s\in N}\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |f_i v_i|^p\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\ll \mathcal{A}_n^q \|f\|_{p,v}^q. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Определим последовательность $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$: $\Delta_j = \left(d^{\gamma,n}_{m_{s+3},m_{s+1}}\right)^q \sum\limits_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$, $j=m_{s+3}$ и $\Delta_j=0$, $j\neq m_{s+3}$, $s\in N$. Следовательно, можно переписать I_γ, $\gamma=0,\ldots,n-1$ в следующем виде

$$\begin{aligned} I_\gamma &= \sum_{s\in N}\left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a^{(\gamma)}_{i,m_{s+3}} f_i\right)^q \left(d^{\gamma,n}_{m_{s+3},m_{s+1}}\right)^q \sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} u_i^q \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty} a^{(\gamma)}_{i,j} f_i\right)^q \Delta_j. \end{aligned} \tag{2.41}$$

По предположению для $a_{i,j}^{(\gamma)}$, $\gamma = 0, \ldots, n-1$, $i \geqslant j \geqslant 1$, выполняется неравенство (2.34). Следовательно,

$$I_\gamma \ll \widetilde{\mathcal{A}}_\gamma^q \|f\|_p^q, \quad \gamma = 0, \ldots, n-1, \tag{2.42}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{A}}_\gamma = \max_{0 \leqslant l \leqslant \gamma} \sup_{k \geqslant 1} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(d_{k,j}^{l,\gamma} \right)^q \Delta_j \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(a_{i,k}^{(l)} \right)^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.43}$$

Используя (2.16) и принимая во внимание, что $d_{i,j}^{l,n}$ не убывает по i и не возрастает по j, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \left(d_{k,j}^{l,\gamma} \right)^q \Delta_j \ &= \sum_{m_{s+3} \leqslant k} \left(d_{k,m_{s+3}}^{l,\gamma} \right)^q \left(d_{m_{s+3},m_{s+1}}^{\gamma,n} \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \\ &\ll \sum_{m_{s+3} \leqslant k} \sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(d_{k,i}^{l,n} \right)^q u_i^q \leqslant \sum_{i=1}^{k} \left(d_{k,i}^{l,n} \right)^q u_i^q. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Используя (2.42), (2.43) и (2.44), имеем

$$I_\gamma \ll \mathcal{A}_n^q \|f\|_{p,v}^q. \tag{2.45}$$

Таким образом, из (2.39), (2.40) и (2.45) следует, что

$$\|A_n^- f\|_{q,u} \ll \mathcal{A}_n \|f\|_{p,v}, \qquad f \geqslant 0, \tag{2.46}$$

которое означает, что выполняется неравенство (2.3). Следовательно, по Лемме 2.12, получаем, что

$$C \ll \mathcal{A}_n \approx \mathcal{A}^+ \approx \mathcal{A}^-. \tag{2.47}$$

2. Если $N_0 \neq N$, то $\max N_0 < \infty$ и $N_0 = \{1, 2, \ldots, s_0\}$, $s_0 \geqslant 1$. Следовательно, $m_{s_0} < \infty$ и $m_{s_0+1} = \infty$. Предположим, что $\sum\limits_{s=k}^{n} = 0$, если $k > n$ и $\sum\limits_{s=k}^{n} = \sum\limits_{s=1}^{n}$, если $k \leqslant 0$. Имеем два возможных случая: $n_{s_0+1} < \infty$ и $n_{s_0+1} = \infty$. Рассмотрим эти случая по отдельности.

1) Если $n_{s_0+1} < \infty$, то из (2.37) следует, что

$$\begin{aligned} \|A_n^- f\|_{q,u}^q &= \sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q \\ &= \sum_{s=1}^{s_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q \\ &= \sum_{s=1}^{s_0-3} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q + \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q \\ &\quad + \sum_{j=m_{s_0}+1}^{\infty} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q \\ &= J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Если $J_1 \neq 0$, то для $s_0 > 3$ оценим J_1 используя (2.38) и вышеиспользованный метод доказательства для случая $N_0 = \mathbb{N}$ как в оценке I_γ. Следовательно, получим

$$J_1 \ll \mathcal{A}_n^q \|f\|_{p,v}^q. \tag{2.49}$$

Если $J_2 \neq 0$, то используя (2.36) и применяя неравенства Гельдера и Йенсена, имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q \\ &< \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (h+1)^{(-n_{s+1}+1)q} u_j^q \\ &= (h+1)^q \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} (h+1)^{-n_{s+1}q} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \\ &\ll \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} \left(A_n^- f\right)_{m_{s+1}}^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \\ &= \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}}^{(n)} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \end{aligned} \tag{2.50}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1}\left[\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty}(a_{i,m_{s+1}}^{(n)})^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q\left(\sum_{j=m_{s+1}}^{\infty}|v_if_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leqslant \left[\sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i=k}^{\infty}(a_{i,k}^{(n)})^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=1}^{k}u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q\left(\sum_{s=s_0-2}^{s_0-1}\sum_{j=m_{s+1}}^{\infty}|v_if_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}\\
&\leqslant 2\mathcal{A}_n^q\|f\|_{p,v}^q \ll \mathcal{A}_n^q\|f\|_{p,v}^q.
\end{aligned}
$$

используя (2.36) и применяя неравенство Гелдера оценим J_3 следующим образом:

$$
\begin{aligned}
J_3 &= \sum_{j=m_{s_0}+1}^{\infty}\left(A_n^-f\right)_j^q u_j^q \qquad (2.51)\\
&\leqslant \sup_{t\geqslant m_{s_0+1}}\sum_{j=m_{s_0}+1}^{t}\left(A_n^-f\right)_j^q u_j^q\\
&\leqslant (h+1)^q\sup_{t\geqslant m_{s_0+1}}(h+1)^{-n_{s_0+1}q}\sum_{j=m_{s_0}+1}^{t}u_j^q\\
&\ll \sup_{t\geqslant m_{s_0+1}}\left(A_n^-f\right)_t^q\sum_{j=m_{s_0}+1}^{t}u_j^q\\
&= \sup_{t\geqslant m_{s_0+1}}\left(\sum_{i=t}^{\infty}a_{i,t}^{(n)}f_i\right)^q\sum_{j=m_{s_0}+1}^{t}u_j^q\\
&\leqslant \sup_{t\geqslant m_{s_0+1}}\left[\left(\sum_{i=t}^{\infty}(a_{i,t}^{(n)})^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{j=m_{s_0}+1}^{t}u_j^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]^q\|f\|_{p,v}^q\\
&\leqslant \mathcal{A}_n^q\|f\|_{p,v}^q.
\end{aligned}
$$

Из (2.48), (2.49), (2.50) и (2.51) получаем (2.46), и следовательно, (2.47).

2) Если $n_{s_0+1}=\infty$, то есть $k_{m_{s_0+1}}=\infty$, то по определению m_{s_0+1} имеем, что $k_j=\infty$ и $T_j=\emptyset$ при $j\geqslant m_{s_0}+1$, что означает $\left(A_n^-f\right)_j=0$ при $j\geqslant m_{s_0}+1$. По предположению, что $(A_n^-f)_1\neq 0$ следует, что $s_0>1$. Следовательно, $m_2<\infty$ и $s_0\geqslant 2$. Таким образом, из (2.37) имеем

$$\begin{aligned}
\|A_n^- f\|_{q,u}^q &= \sum_{s\in N_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q \qquad (2.52)\\
&= \sum_{s=1}^{s_0-3} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q + \sum_{s=s_0-2}^{s_0-1} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A_n^- f\right)_j^q u_j^q\\
&= J_1' + J_2'.
\end{aligned}$$

Оценивая J_1' и J_2' как J_1 и J_2, соответственно, из (2.52) получим (2.46), и следовательно, (2.47). Таким образом, получаем, что неравенство (2.34) выполняется для $m = n$ и выполняется оценка (2.33). Это означает, что неравенство (2.34) выполняется для $m \geqslant 0$ с оценкой (2.33), что вместе с оценкой (2.32) дает $C \approx \mathcal{A}_n$. Таким образом, теорема доказана.

2.5 Критерий компактности матричных операторов в весовых Лебеговых пространствах

Этот подраздел посвящен изучению вопроса компактности матричных операторов A^+ и A^- из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространтсво $l_{q,u}$, когда соответствующие матрицы принадлежат одному из классов $\mathcal{O}_n^+$ и $\mathcal{O}_n^-$ $n \geqslant 0$.

Теорема 2.13. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$. Тогда оператор (2.1) компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathcal{B}_{p,q}^+\right)_k = 0, \qquad (2.53)$$

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathcal{B}_{p,q}^-\right)_k = 0. \qquad (2.54)$$

Теорема 2.14. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора (2.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Тогда оператор (2.2) компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\mathcal{A}_{p,q}^+\right)_k = 0, \qquad (2.55)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{A}^{-}_{p,q}\right)_k = 0. \tag{2.56}$$

Покажем доказательство компактности для класса $\mathcal{O}^{+}_{n}$, $n \geqslant 0$.

Доказательство Теоремы 2.13. Для доказательства Теоремы 2.13, нам понадобится следующая эквивалентность

$$\left(\mathcal{B}^{+}_{p,q}\right)_k \approx \left(\mathcal{B}_n\right)_k \equiv \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n}\left(\mathcal{B}_{\gamma,n}\right)_k \approx \left(\mathcal{B}^{-}_{p,q}\right)_k, \tag{2.57}$$

где

$$\left(\mathcal{B}_{\gamma,n}\right)_k = \left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(b^{n,\gamma}_{i,k}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(a^{(\gamma)}_{k,j}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Эта эквивалентность вытекает из (2.12).

Необходимость. Предположим, что матрица оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}^{+}_{n}$, $n \geqslant 0$. Пусть оператор (2.1) компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$.

Для $r \geqslant 1$ определим следующию последовательность:

$$\varphi_r = \{\varphi_{r,j}\}_{j=1}^{\infty}: \qquad \varphi_{r,j} = \frac{f_{r,j}}{\|f_r\|_{p,v}},$$

где $f_r = \{f_{r,j}\}_{j=1}^{\infty}$: $\quad f_{r,j} = \begin{cases} \left(a^{(\gamma)}_{r,j}\right)^{p'-1} v_j^{-p'}, & 1 \leqslant j \leqslant r, \\ 0, & j > r. \end{cases}$

Очевидно, что $\|\varphi_r\|_{p,v} = 1$. Так как оператор (2.1) компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$, множество $\{uA^{+}\varphi, \|\varphi\|_{p,v} = 1\}$ предкомпактно в l_q. Следовательно, по критерию предкомпактности множеств в l_p (смотрите Теорему C), получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\|\varphi\|_{p,v}=1}\left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q\left(A^{+}\varphi\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{2.58}$$

Более того, используя (2.11), имеем

$$\sup_{\|\varphi\|_{p,v}=1}\left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q\left(A^{+}\varphi\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q\left(A^{+}\varphi_r\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.59}$$
$$= \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q\left(\sum_{j=1}^{i} a^{(n)}_{i,j}\frac{f_{r,j}}{\|f_r\|_{p,v}}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}^{(n)} \frac{f_{r,j}}{\|f_r\|_{p,v}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{r} a_{i,j}^{(n)} \left(a_{r,j}^{(\gamma)}\right)^{p'-1} v_j^{-p'} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{r} \left(a_{r,j}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right)^{-\frac{1}{p}}$$

$$\geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(b_{i,r}^{n,\gamma}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{r} \left(a_{r,j}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\mathcal{B}_{\gamma,n}\right)_r .$$

Так как неравенство (2.59) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, n$ и из выполнения (2.58), имеем

$$\lim_{r\to\infty} \left(\mathcal{B}_n\right)_r = 0$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть матрица оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$. Предположим, что выполняется хотя бы одно из условий (2.53) и (2.54). То по Теореме 2.10, оператор (2.1) ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$. Следовательно, множество $\{uA^+f,\ \|f\|_{p,v} \leqslant 1\}$ ограничено в l_q. Покажем, что это множество предкомпактно в l_q. По критерию предкомпактности множеств в l_q (смотрите Теорему C), ограниченное множество $\{uA^+f,\ \|f\|_{p,v} \leqslant 1\}$ предкомпактно в l_q, если

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\|f\|_{p,v}\leqslant 1} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left| \left(A^+f\right)_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0. \qquad (2.60)$$

Для $r > 1$ положим $\widetilde{u} = \{\widetilde{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$: $\quad \widetilde{u}_i = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant i \leqslant r-1 \\ u_i, & r \leqslant i. \end{cases}$

То по Теореме 2.10, имеем

$$\sup_{\|f\|_{p,v}\leqslant 1} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left| \left(A^+f\right)_i \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{\|f\|_{p,v}\leqslant 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{u}_i^q |(A^+f)_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll \widetilde{B}_n(r), \quad (2.61)$$

где

$$\widetilde{B}_n(r) = \sup_{k\geqslant 1} \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(b_{i,k}^{n,\gamma}\right)^q \widetilde{u}_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(a_{k,j}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Так как $\widetilde{u}_i = 0$ при $1 \leqslant i \leqslant r-1$, получим

$$\widetilde{B}_n(r) = \sup_{k\geqslant r} \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(b_{i,k}^{n,\gamma}\right)^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{k} \left(a_{k,j}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{k\geqslant r} \left(B_n\right)_k, \tag{2.62}$$

Из (2.53), (2.54), (2.57), и (2.62, имеем

$$\lim_{r\to\infty} \widetilde{B}_n(r) = \lim_{r\to\infty} \sup_{k\geqslant r} \left(B_n\right)_k = \lim_{r\to\infty} \left(B_n\right)_r = 0.$$

Следовательно, используя (2.61), получаем (2.60). Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 2.14 может быть продемонстрировано вышеиспользованным методом.

2.6 Ограниченность и компактность класса матричных операторов, случай $1 < p \leqslant q < \infty$. Доказательство основных результатов

В этом подразделе устанавливаются критерий ограниченности и компактности матричных операторов A^+ и A^- из весового пространтсва $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$, когда соответствующие матрицы принадлежат классам $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$.

Теорема 2.15. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ в (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Пусть A^+ оператор, определенный в (2.1). Тогда выполняются следующие утверждения:*

(i) *A^+ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $\mathcal{B}^+ < \infty$ и $\mathcal{B}^- < \infty$. При этом для наименьшой постоянной C в (2.3) справедлива оценка $\mathcal{B}^+ \approx \mathcal{B}^- \approx C$.*

(ii) *A^+ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\mathcal{B}_{p,q}^+\right)_k = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\mathcal{B}_{p,q}^-\right)_k = 0$.*

Теорема 2.16. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ in (2.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Пусть A^- оператор, определенный в (2.2). Тогда выполняются следующие утверждения:*

(j) *A^- ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $\mathcal{A}^+ < \infty$ и $\mathcal{A}^- < \infty$. При этом для наименьшой постоянной C в (2.3) справедлива оценка $\mathcal{A}^+ \approx \mathcal{A}^- \approx C$.*

(jj) *A^- компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\mathcal{A}^+_{p,q}\right)_k = 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\mathcal{A}^-_{p,q}\right)_k = 0$.*

Используя результаты подразделов 2.4 и 2.5, докажем Теорему 2.15. Теорема 2.16 может быть доказана используя метод доказательства Теоремы 2.15. Следовательно, покажем только доказательство Теоремы 2.15.

Доказательство Теоремы 2.15.

(i) Если матрица оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}^+_m$, $m \geqslant 0$, то утверждение *(i)* Теоремы 2.15 вытекает из Теоремы 2.10. Предположим, что матрица $(a_{i,j}) = (a^{(m)}_{i,j})$ оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}^-_m$, $m \geqslant 0$. Известно, что ограниченность оператора (2.1) из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ эквивалентно ограниченности сопряженного оператора из $l_{q',u^{-1}}$ в $l_{p',v^{-1}}$, которая совпадает с оператором (2.2). Из того, что $1 < p \leqslant q < \infty$ следует, что $1 < q' \leqslant p' < \infty$. То по Теореме 2.11 и из равенств $\left(\mathcal{A}^+_{q',p'}\right)_k = \left(\mathcal{B}^+_{p,q}\right)_k$ и $\left(\mathcal{A}^-_{q',p'}\right)_k = \left(\mathcal{B}^-_{p,q}\right)_k$, ограниченность оператора (2.2) из $l_{q',u^{-1}}$ в $l_{p',v^{-1}}$ эквивалентно условиям утверждения *(i)* Теоремы 2.15. Следовательно, утверждение *(i)* Теоремы 2.15 также выполняется в случае когда матрица оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}^-_m$, $m \geqslant 0$. Таким образом, утверждение *(i)* Теоремы 2.15 доказано.

(ii) Пусть матрица оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}^+_m$, $m \geqslant 0$. Тогда утверждение *(ii)* Теоремы 2.15 вытекает из Теоремы 2.13. Если матрица $(a_{i,j}) = (a^{(m)}_{i,j})$ оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}^-_m$, $m \geqslant 0$, то используя Теорему 2.14 как выше, получаем утверждение *(ii)* Теоремы 2.15. Таким образом, Теорема 2.15 доказана.

2.7 Критерий ограниченности класса матричных операторов, случай $q < p$

В этом подразделе получены необходимые и достаточные условия ограниченности матричных операторов A^+ и A^- из весового пространства $l_{p,v}$ в весовое пространство $l_{q,u}$ при $1 < q < p < \infty$.

В этом подразделе рассматривается неравентсво (2.3), когда элементы матрицы удовлетворяют Предположению А (смотрите условие (2.4)).

Замтетим, что из (2.4) легко следует, что

$$da_{i,j} \geqslant a_{i,k}, \tag{2.63}$$

$$da_{i,j} \geqslant b_{k,j}\omega_i, \tag{2.64}$$

для $i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$.

Теорема 2.17. *Пусть $1 < q < p < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют Предположению А. Тогда оценка (2.3) для оператора (2.2) выполняется тогда и только тогда, когда $F = \max\{F_1,\ F_2\} < \infty$, где*

$$F_1 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} b_{i,j}^q u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{k=i}^{\infty} \omega_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

и

$$F_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} u_j^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{k=i}^{\infty} a_{k,i}^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_i^q \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

При этом, для наименьшей постоянной C в (2.3) справедлива оценка $F \approx C$.

Доказательство Теоремы 2.17. *Необходимость.* Предположим, что неравенство (2.3) выполняется с конечной постоянной C. Пусть $m \geqslant 1$. Берем пробную последовательность $\widetilde{f_m} = \{\widetilde{f}_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\widetilde{f}_{m,k} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} b_{k,j}^q u_j^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \left(\sum\limits_{i=k}^{m} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \omega_k^{p'-1} v_k^{-p'}, & \text{if} \ \ 1 \leqslant k \leqslant m, \\ 0, \ \ \text{if} \ \ k > m. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|\widetilde{f}_m\|_{p,v} &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{f}_{m,k}^p v_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.65) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{k,j}^q u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=k}^{m} \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \omega_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Подставляя $\widetilde{f}_m$ в левую часть неравенства (2.3) и используя (2.8) и (2.64), получаем

$$\begin{aligned}
\|A^- \widetilde{f}_m\|_{q,u}^q &\gg \sum_{k=1}^m \sum_{j=k}^m a_{j,k} \widetilde{f}_{m,j} \left(\sum_{i=j}^m a_{i,k} \widetilde{f}_{m,i} \right)^{q-1} u_k^q \\
&= \sum_{j=1}^m \widetilde{f}_{m,j} \sum_{k=1}^j u_k^q a_{j,k} \left(\sum_{i=j}^m a_{i,k} \widetilde{f}_{m,i} \right)^{q-1} \\
&\gg \sum_{j=1}^m \widetilde{f}_{m,j} \omega_j \sum_{k=1}^j u_k^q b_{j,k}^q \left(\sum_{i=j}^m \omega_i \widetilde{f}_{m,i} \right)^{q-1} \\
&= \sum_{j=1}^m \widetilde{f}_{m,j} \omega_j \sum_{k=1}^j u_k^q b_{j,k}^q \left(\sum_{i=j}^m \omega_i \left(\sum_{s=1}^i b_{i,s}^q u_s^q \right)^{\frac{1}{p-q}} \right. \\
&\qquad \times \left. \left(\sum_{k=i}^m \omega_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \omega_i^{p'-1} v_i^{-p'} \right)^{q-1} \\
&\gg \sum_{j=1}^m \widetilde{f}_{m,j} \omega_j \sum_{k=1}^j u_k^q b_{j,k}^q \left(\sum_{s=1}^j b_{j,s}^q u_s^q \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \\
&\qquad \times \left(\sum_{i=j}^m \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \left(\sum_{k=i}^m \omega_k^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{q-1}{p-q}} \right)^{q-1} \\
&\gg \sum_{j=1}^m \widetilde{f}_{m,j} \omega_j \left(\sum_{s=1}^j b_{j,s}^q u_s^q \right)^{\frac{p-1}{p-q}} \left(\sum_{i=j}^m \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{(p-1)(q-1)}{p-q}} \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{s=1}^j b_{j,s}^q u_s^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=j}^m \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \omega_j^{p'} v_j^{-p'},
\end{aligned}$$

откуда вытекает

$$\|A^- \widetilde{f}_m\|_{q,u} \gg \left(\sum_{j=1}^m \left(\sum_{s=1}^j b_{j,s}^q u_s^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=j}^m \omega_i^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \omega_j^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.66)$$

Из (2.3), (2.65) и (2.66) следует, что

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{j} b_{j,s}^{q} u_s^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{i=j}^{m}\omega_i^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \ll C$$

для $m \geqslant 1$. Так как $m \geqslant 1$ произвольное число, имеем

$$F_1 \ll C. \tag{2.67}$$

Известно, что неравентсво (2.3) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется следующее дуальное неравенство

$$\|A^* g\|_{p',v^{-1}} \leqslant C\|g\|_{q',u^{-1}}, \qquad g \in l_{q',u^{-1}} \tag{2.68}$$

для сопряженного оператора A^*, которая определяется через (2.1). При этом, наименьшие постоянные в (2.3) и (2.68) совпадают.

Пусть $m \geqslant 1$. Выберая пробную последовательность $\widetilde{g}_m = \{\widetilde{g}_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что

$$\widetilde{g}_{m,k} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{j=1}^{k} u_j^q\right)^{\frac{q-1}{p-q}}\left(\sum\limits_{i=k}^{m} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{(q-1)(p-1)}{p-q}} u_k^q \qquad \text{for} \quad 1 \leqslant k \leqslant m, \\ 0 \quad \text{for} \ \ k > m. \end{cases}$$

получаем

$$\|\widetilde{g}_m\|_{q',u^{-1}} = \left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k} u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=k}^{m} a_{i,k}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{2.69}$$

Используя (2.7) и (2.63), имеем

$$\begin{aligned} \|A^*\widetilde{g}_m\|_{p',v^{-1}}^{p'} &\geqslant \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\widetilde{g}_{m,j}\right)^{p'} v_i^{-p'} \\ &\gg \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\widetilde{g}_{m,j}\left(\sum_{k=1}^{j} a_{i,k}\widetilde{g}_{m,k}\right)^{p'-1} v_i^{-p'} \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{m}\widetilde{g}_{m,j}\sum_{i=j}^{m} a_{i,j}\left(\sum_{k=1}^{j} a_{i,k}\widetilde{g}_{m,k}\right)^{p'-1} v_i^{-p'} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\gg \sum_{j=1}^{m}\widetilde{g}_{m,j}\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\left(\sum_{k=1}^{j}\widetilde{g}_{m,k}\right)^{p'-1}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\widetilde{g}_{m,j}\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\left(\sum_{k=1}^{j}\left(\sum_{s=1}^{k}u_s^q\right)^{\frac{q-1}{p-q}}\left(\sum_{i=k}^{m}a_{i,k}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{(q-1)(p-1)}{p-q}}u_k^q\right)^{p'-1}\\
&\gg \sum_{j=1}^{m}\widetilde{g}_{m,j}\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\left(\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q-1}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{j}u_k^q\left(\sum_{s=1}^{k}u_s^q\right)^{\frac{q-1}{p-q}}\right)^{p'-1}\\
&\gg \sum_{j=1}^{m}\widetilde{g}_{m,j}\left(\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-1}{p-q}}\left(\sum_{k=1}^{j}u_k^q\right)^{\frac{1}{p-q}}\\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{j}u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}u_j^q,
\end{aligned}
$$

откуда вытекает

$$
\|A^*\widetilde{g}_m\|_{p',v^{-1}} \gg \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{j}u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=j}^{m}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}u_j^q\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.70}
$$

Так как $m \geqslant 1$ произвольное число, то из (2.68), (2.69), (2.70) следует, что $F_2 \ll C$. Следовательно, из (2.67) вытекает, что

$$
F \ll C. \tag{2.71}
$$

Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $F < \infty$ и $0 \leqslant f \in l_{p,v}$.

Для $j \geqslant 1$ определим множество:

$$
T_j = \{k \in \mathbb{Z} : (d+1)^{-k} \leqslant \big(A^- f\big)_j\},
$$

где d – постоянная из (2.4) и $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел. Предположим, что $\inf T_j = \infty$, если $T_j = \emptyset$ и $k_j = \inf T_j$ при $T_j \neq \emptyset$. Очевидно, что можно предположить, что $(A^- f)_1 \neq 0$. Без ограничения общности, можно предположить, что $a_{i,j}$ не возрастает по j, иначе, можно взять $a_{i,j} \approx \widetilde{a}_{i,j} = \sup\limits_{j\leqslant k\leqslant i} a_{i,k}$. Следовательно, $k_j < k_{j+1}$. Если $k_j < \infty$, то

$$
(d+1)^{-k_j} \leqslant \big(A^- f\big)_j < (d+1)^{-(k_j-1)}, \qquad j \geqslant 1. \tag{2.72}
$$

Пусть $m_1 = 0$, $k_1 = k_{m_1+1}$ и $M_1 = \{j \in \mathbb{N} : k_j = k_1 = k_{m_1+1}\}$, где $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Предположим, что m_2 такая, что $\sup M_1 = m_2$. Очевидно, что $m_2 > m_1$ и если множество M_1 ограничено сверху, то $m_2 < \infty$ и $m_2 = \max M_1$. Методом индукции определим числа $0 = m_1 < m_2 < \ldots < m_s < \infty$, $s \geqslant 1$. Положим $m_{s+1} = \sup M_s$, где $M_s = \{j \in N : k_j = k_{m_s+1}\}$.

Пусть $N_0 = \{s \in \mathbb{N} : m_s < \infty\}$. Далее, предположим, что $k_{m_{s+1}} = n_{s+1}$, $s \in N_0$. Из определения m_s и из (2.72) следует, что

$$(d+1)^{-n_{s+1}} \leqslant \left(A^- f\right)_j < (d+1)^{-n_{s+1}+1}, \quad m_s + 1 \leqslant j \leqslant m_{s+1} \tag{2.73}$$

для всех $s \in N_0$. Тогда

$$\mathbb{N} = \bigcup_{s \in N_0} [m_s + 1, m_{s+1}], \quad \text{where } [m_s + 1, m_{s+1}] \cap [m_l + 1, m_{l+1}] = \emptyset,\ s \neq l.$$

Следовательно

$$\|A^- f\|_{q,u}^q = \sum_{s \in N_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)_j^q u_j^q. \tag{2.74}$$

Предположим, что $\sum\limits_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} = 0$, если $m_s = \infty$.

Возможно два случая: $N_0 = \mathbb{N}$ и $N_0 \neq \mathbb{N}$.

1. Если $N_0 = \mathbb{N}$, то оценим левую часть неравенства (2.3) следующим образом.

Очевидно, что из неравенств $n_{s+1} < n_{s+2} < n_{s+3}$ следует, что $-n_{s+3} + 1 \leqslant -n_{s+1} - 1$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Следовательно, из (2.73), (2.4) получаем

$$\begin{aligned} (d+1)^{-n_{s+1}-1} &= (d+1)^{-n_{s+1}} - d(d+1)^{-n_{s+1}-1} \\ &\leqslant (d+1)^{-n_{s+1}} - d(d+1)^{-n_{s+3}+1} \\ &< \left(A^- f\right)_{m_{s+1}} - d\left(A^- f\right)_{m_{s+3}} \\ &= \sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}} f_i - d \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} a_{i,m_{s+3}} f_i \\ &\leqslant \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} [a_{i,m_{s+1}} - d a_{i,m_{s+3}}] f_i \end{aligned} \tag{2.75}$$

$$\leqslant \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} [d(a_{i,m_{s+3}} + b_{m_{s+3},m_{s+1}}\omega_i) - da_{i,m_{s+3}}] f_i$$
$$= \sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + db_{m_{s+3},m_{s+1}} \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i.$$

Теперь используя (2.73) и (2.75), можно оценить сумму в левой части неравенства (2.3) следующим образом:

$$\sum_{s\in\mathbb{N}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)_j^q u_j^q < \sum_{s\in\mathbb{N}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (d+1)^{(-n_{s+1}+1)q} u_j^q \tag{2.76}$$
$$= (d+1)^{2q} \sum_{s\in\mathbb{N}} (d+1)^{(-n_{s+1}-1)q} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$
$$\ll \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i + db_{m_{s+3},m_{s+1}} \sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$
$$\ll \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q$$
$$+ \sum_{s\in\mathbb{N}} b_{m_{s+3},m_{s+1}}^q \left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q := S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q,$$

и

$$S_2 = \sum_{s\in\mathbb{N}} b_{m_{s+3},m_{s+1}}^q \left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q.$$

Для оценки S_1, применяем неравенство Гельдера к внутренней сумме с показателями p, p' и к внешней сумме с показателями $\frac{p}{p-q}$, $\frac{p}{q}$:

$$S_1 \leqslant \sum_{s\in\mathbb{N}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \tag{2.77}$$

$$\leqslant \left(\sum_{s\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{p}} \left(\sum_{s\in\mathbb{N}}\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} |v_i f_i|^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\ll (\widetilde{F_2})^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,v}^q.$$

Используя (2.8) и (2.63) можно оценить $\widetilde{F_2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F_2} &= \sum_{s\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}} \\
&\ll \sum_{s\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=m_{s+1}}^{m_{s+3}} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(\sum_{k=j}^{m_{s+1}} u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}} u_j^q \\
&\ll \sum_{s\in\mathbb{N}}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(\sum_{k=1}^{m_{s+1}} u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{j} u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q = F_2^{\frac{pq}{p-q}}.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Из (2.77) и (2.78) заключаем, что

$$S_1 \ll F_2^q \|f\|_{p,v}^q. \tag{2.79}$$

Определим последовательность $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ такую, что $\Delta_j = b_{m_{s+3},m_{s+1}}^q \sum\limits_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} u_i^q$, $j = m_{s+3}$ и $\Delta_j = 0$, $j \neq m_{s+3}$, $s \in \mathbb{N}$. Следовательно, можно переписать S_2 в следующем виде:

$$S_2 = \sum_{s\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=m_{s+3}}^{\infty} \omega_i f_i\right)^q b_{m_{s+3},m_{s+1}}^q \sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} u_i^q = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=j}^{\infty}\omega_i f_i\right)^q \Delta_j. \tag{2.80}$$

Таким образом, по Теореме B, получим

$$S_2 \ll \widetilde{H}^q \|f\|_{p,v}^q, \tag{2.81}$$

где

$$\widetilde{H} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\Delta_i\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=k}^{\infty}\omega_j^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \omega_k^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}}. \tag{2.82}$$

Согласно Предположению A, $b_{i,j}$ не убывает по i и не возрастает по j, и следовательно,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\Delta_i &= \sum_{m_{s+3}\leqslant k} b^q_{m_{s+3},m_{s+1}}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \qquad (2.83)\\ &\ll \sum_{m_{s+3}\leqslant k}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} b^q_{k,j}u^q_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b^q_{k,j}u^q_j.\end{aligned}$$

Объединяя (2.81), (2.82) и (2.83), имеем

$$S_2 \ll F_1^q\|f\|^q_{p,v}. \qquad (2.84)$$

Таким образом, из (2.74), (2.76), (2.79) и (2.84) следует, что

$$\|A^- f\|_{q,u} \ll F\|f\|_{p,v} \qquad f \geqslant 0. \qquad (2.85)$$

Это означает, что неравенство (2.3) выполняется и справедлива оценка $C \ll F$ для наименьшей постоянной C в (2.3).

2. Пусть $N_0 \neq \mathbb{N}$, то есть $\max N_0 < \infty$ и $N_0 = \{1, 2, ..., s_0\}$, $s_0 \geqslant 1$. Следовательно $m_{s_0} < \infty$ и $m_{s_0+1} = \infty$. Предположим, что $\sum\limits_{s=k}^{n} = 0$ при $k > n$ и $\sum\limits_{s=k}^{n} = \sum\limits_{s=1}^{n}$ при $k \leqslant 0$. Имеем два возможных случая: $n_{s_0+1} < \infty$ и $n_{s_0+1} = \infty$. Рассмотрим эти случая по отдельности:

1) Пусть $n_{s_0+1} < \infty$, то из (2.74) следует, что

$$\begin{aligned}\|A^- f\|^q_{q,u} &= \sum_{s\in N_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)^q_j u^q_j = \sum_{s=1}^{s_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)^q_j u^q_j \qquad (2.86)\\ &= \sum_{s=1}^{s_0-3}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)^q_j u^q_j + \sum_{s=s_0-2}^{s_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)^q_j u^q_j = I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Если $I_1 \neq 0$, то оценим I_1 используя (2.75) и метод доказательства, примененной в случае, когда $N_0 = N$. Следовательно, получим

$$I_1 \ll F^q\|f\|^q_{p,v}. \qquad (2.87)$$

Используя (2.73) и применяя неравенство Гельдера с показателями p, p' и с показателями $\frac{p}{p-q}$, $\frac{p}{q}$, получим следующее неравенство

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(A^- f\right)_j^q u_j^q \\
&< \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} (d+1)^{(-n_{s+1}+1)q} u_j^q \\
&= (d+1)^q \sum_{s=s_0-2}^{s_0} (d+1)^{-n_{s+1}q} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \\
&\ll \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \left(A^- f\right)_{m_{s+1}}^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \\
&= \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}} f_i \right)^q \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q
\end{aligned} \tag{2.88}
$$

$$
\leqslant \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q
$$

$$
\leqslant \left(\sum_{s=s_0-2}^{s_0} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \right)^{\frac{p-q}{p}}
$$

$$
\times \left(\sum_{s=s_0-2}^{s_0} \sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} |v_i f_i|^p \right)^{\frac{q}{p}} \ll \left(\widehat{F_2}\right)^{\frac{p-q}{p}} \|f\|_{p,v}^q.
$$

Используя (2.8) и (2.63) оценим $\widehat{F_2}$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{F_2} &= \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} u_j^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \\
&\ll \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,m_{s+1}}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(\sum_{k=j}^{m_{s+1}} u_k^q \right)^{\frac{q}{p-q}} u_j^q \\
&\ll \sum_{s=s_0-2}^{s_0} \sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}} \left(\sum_{k=1}^{m_{s+1}} u_k^q \right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=m_{s+1}}^{\infty} a_{i,j}^{p'} v_i^{-p'} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_j^q
\end{aligned} \tag{2.89}
$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{j}u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{p'}v_i^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}u_j^q = F_2^{\frac{pq}{p-q}}.$$

Из (2.88) и (2.89) получаем

$$I_2 \ll F_2^q\|f\|_{p,v}^q. \tag{2.90}$$

Из (2.86), (2.87) и (2.90) заключаем, что (2.85).

2) Пусть $n_{s_0+1} = \infty$, что означает $k_{m_{s_0}+1} = \infty$. Тогда имеем $k_j = \infty$ и $T_j = \emptyset$ при $j \geqslant m_{s_0}+1$, то есть, $(A^-f)_j = 0$, при $j \geqslant m_{s_0+1}$ и $(A^-f)_j = \sum\limits_{i=j}^{m_{s_0}} a_{i,j}f_i$, $1 \leqslant j \leqslant m_{s_0}$. Следовательно, $m_2 < \infty$ и $s_0 \geqslant 2$. То из (2.74) получим

$$\|A^-f\|_{q,u}^q = \sum_{s\in N_0}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}\left(A^-f\right)_j^q u_j^q = \sum_{s=1}^{s_0-1}\sum_{j=m_s+1}^{m_{s+1}}\left(A^-f\right)_j^q u_j^q \tag{2.91}$$

Аналогичным путем можно использовать (2.91) для доказательства (2.85). Тогда из (2.85) вместе с (2.71) следует, что $C \approx F$. Теорема доказана.

Известно, что неравенство (2.3) для оператора (2.2) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется дуальное неравенство (2.68) для сопряженного оператора A^*, которая совпадает с оператором (2.1). При этом, наименьшие постоянные неравенств (2.3) и (2.68) совпадают.

Следовательно, используя Теорему 2.17 с p', q', v^{-1} и u^{-1} вместо q, p, u и v, соответственно, получим следующее утверждение.

Теорема 2.18. *Пусть $1 < q < p < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют Предположению А. То оценка (2.3) для оператора (2.1) выполняется тогда и только тогда, когда $F^* = \max\{F_1^*,\ F_2^*\} < \infty$, где*

$$F_1^* = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}b_{i,j}^{p'}v_j^{-p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{k=i}^{\infty}\omega_k^q u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$F_2^* = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}v_j^{-p'}\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\left(\sum_{k=i}^{\infty}a_{k,i}^q u_k^q\right)^{\frac{p}{p-q}}v_i^{-p'}\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

При этом, для наименьшой постоянной C в (2.3) справедлива оценка $F^* \approx C$.

3 ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА ХАРДИ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

3.1 Весовые оценки для класса матричных операторов на конусе монотонных последовательностей при $1 < p \leqslant q < \infty$

Рассмотрим неравенстсво следующего вида

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p f_i{}^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.1}$$

на конусе невозрастающих и неотрицательных последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ из $l_{p,v}$, где C – положительная постоянная, не зависищая от f и $(a_{i,j})$ треугольная числовая матрица такая, что $a_{i,j} \geqslant 0$ при $i \geqslant j \geqslant 1$ и $a_{i,j} = 0$ при $i < j$.

В этом подразделе рассмотрим неравенство (3.1) на конусе монотонных последовательностей, когда соответствующая матрица принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

В [45] Р. Ойнаров и С.Х. Шалгынбаева доказали утверждение, которое позволяет свести неравенство (3.1) на конусе монотонных последовательностей к некоторому неравенству уже на конусе неотрицательных последовательностей из $l_{p,v}$. Приведем это утверждение в более удобной для нас форме (см. Теорему 1.11).

Теорема Е. [45] *Пусть* $1 < p,\ q < \infty$. *Пусть* $V_k = \sum\limits_{i=1}^{k} v_i^p$, $\forall k \geqslant 1$. *Тогда неравенство (3.1) на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей* $f \in l_{p,v}$ *эквивалентно неравенству*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i\right)^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \quad \leqslant \quad \widetilde{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{3.2}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, *если* $V_\infty = \lim\limits_{k\to\infty} V_k = \infty$, *и неравентсву*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k^p\right)^{-\frac{1}{p}}\leqslant\overline{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\qquad(3.3)$$

для всех неотрицательных последовательностей $g=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, *если* $V_\infty<\infty$.

При этом, $\widetilde{C}\approx C$ *если* $V_\infty=\infty$, *и* $\overline{C}\approx C$ *if* $V_\infty<\infty$, *где* C, $\widetilde{C}$ *и* $\overline{C}$ *– наименьшие постоянные в (3.1), (3.2), (3.3), соответственно.*

Положим

$$V_k=\sum_{i=1}^{k}v_i^p,\quad A_{ik}=\sum_{j=1}^{k}a_{i,j},\quad E_1=\sup_{s\geqslant1}V_s^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{s}A_{ii}^qu_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$E_2=\sup_{s\geqslant1}\left(\sum_{k=1}^{s}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=s}^{\infty}A_{ik}^qu_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$E_3=\sup_{s\geqslant1}\left(\sum_{k=s}^{\infty}u_k^q\left(\sum_{i=1}^{s}A_{ki}^{p'}\left(V_i^{-\frac{p'}{p}}-V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Теорема 3.1. *Пусть* $1<p\leqslant q<\infty$. *Пусть матрица* $(a_{i,j})$ *in (3.1) принадлежит классу* $\mathcal{O}_m^+\cup\mathcal{O}_m^-$, $m\geqslant0$. *То неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных невозрастающих последовательностей* $f\in l_{p,v}$ *тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий* $E_{12}=\max\{E_1,\ E_2\}<\infty$ *и* $E_{13}=\max\{E_1,\ E_3\}<\infty$. *При этом, для наименьшей постоянной* C *в (3.1) справедлива оценка* $E_{12}\approx E_{13}\approx C$.

Доказательство Теоремы 3.1. Пусть матрица $(a_{i,j})$ в (3.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+\cup\mathcal{O}_m^-$, $m\geqslant0$. Рассмотрим случаи когда $V_\infty=\infty$ и $V_\infty<\infty$ по отдельности.

1. Сначала рассмотрим случай когда $V_\infty=\infty$. Тогда по Теореме E неравенство (3.1) на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравентство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{(m)}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \widetilde{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{1-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{3.4}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. При этом, $\widetilde{C} \approx C$, где C – наименьшая постоянная, для которой выполняется неравенство (3.1).

a) Пусть матрица $(a_{i,j}) = (a_{i,j}^{(m)})$ в (3.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+$, $m \geqslant 0$. Так как $a_{i,j}^{(m)}$, g_i неотрицательная последовательность, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{(m)}g_i &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}a_{i,j}^{(m)}g_i+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{\infty}a_{i,j}^{(m)}g_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i+\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}^{(m)}g_i.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{(m)}g_i\right)^{p'} \approx \left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i\right)^{p'}+\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}^{(m)}g_i\right)^{p'}.$$

Подставляя последнее неравенство в левую часть неравенства (3.4), получим следующее

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i\right)^{p'}+\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}^{(m)}g_i\right)^{p'}\right]\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \\ \leqslant C_0\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\end{aligned} \tag{3.6}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, которое эквивалентно неравенству (3.4). Более того, $\widetilde{C} \approx C_0$.

Неравенство (3.6) выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant C_1\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.7}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}^{(m)}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant C_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{3.8}$$

для неотрицательных последовательностей $g=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. При этом,

$$\widetilde{C}\approx\max\{C_1,\ C_2\}. \tag{3.9}$$

Неравенство (3.7) является неравенством Харди. Следовательно, по Теореме A неравенство (3.7) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие

$$\sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{k=s}^{\infty}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(A_{ii}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=\sup_{s\geqslant 1}V_s^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(A_{ii}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=E_1<\infty. \tag{3.10}$$

При этом

$$E_1\approx C_1. \tag{3.11}$$

В неравенстве (3.8) переходя к дуальному неравенству, имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ki}^{(m)}\varphi_i\right)^{q}u_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant C_2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^p\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{-\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.12}$$

для всех неотрицательных последовательностей $\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Предположим, что $A_{ki}^{(m)}=0$ для $i>k$. Так как $(a_{k,i}^{(m)})\in\mathcal{O}_m^+$, то получаем $(A_{ki}^{(m)})\in\mathcal{O}_m^+$, $m\geqslant 0$. Действительно, для $k\geqslant s\geqslant i$

$$A_{ki}^{(m)}=\sum_{j=1}^{i}a_{k,j}^{(m)}\approx\sum_{j=1}^{i}\sum_{\gamma=0}^{m}b_{k,s}^{m,\gamma}a_{s,j}^{(\gamma)}=\sum_{\gamma=0}^{m}b_{k,s}^{m,\gamma}\sum_{j=1}^{i}a_{s,j}^{(\gamma)}=\sum_{\gamma=0}^{m}b_{k,s}^{m,\gamma}A_{si}^{(\gamma)}. \tag{3.13}$$

Если $m=0$, то очевидно, что $(A_{ki}^{(0)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_0^+$. Предполагая, что $(A_{ki}^{(m)})\in\mathcal{O}_m^+$ для $m=1,...,r-1$. То по индукции при $m=r$, из (3.13) следует, что $(A_{ki}^{(r)})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_r^+$.

То по Теореме 2.15 неравенство (3.12) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий

$$\sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}}-V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(A_{ij}^{(m)}\right)^{q}u_i^{q}\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}=E_2<\infty, \tag{3.14}$$

$$\sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i=k}^{\infty}u_i^{q}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(A_{ij}^{(m)}\right)^{p'}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}}-V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}}=E_3<\infty. \tag{3.15}$$

При этом

$$C_2\approx E_2\approx E_3. \tag{3.16}$$

Из (3.11) и (3.16) заключаем, что неравенства (3.7), (3.8) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из условий $E_{12}=\max\{E_1,\ E_2\}<\infty$ и $E_{13}=\max\{E_1,\ E_3\}<\infty$. При этом, $E_{12}\approx E_{13}\approx\max\{C_1,\ C_2\}$, откуда вытекает, что $E_{12}\approx E_{13}\approx C_0$. Так как $C_0\approx\widetilde{C}$, $\widetilde{C}\approx C$, получаем $E_{12}\approx E_{13}\approx C$. Последняя оценка дает утверждение Теоремы 3.1, когда $(a_{i,j})\in\mathcal{O}_m^+$ в случае, когда $V_\infty=\infty$.

$b)$ Пусть матрица $(a_{i,j})=(a_{i,j}^{(m)})$ в (3.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$, $m\geqslant 0$. Так как $a_{i,j}^{(m)}$, g_i неотрицательная, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}^{(m)}g_i &= \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}a_{i,j}^{(m)}g_i+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{\infty}a_{i,j}^{(m)}g_i\\ &\approx \sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i+\sum_{i=k}^{\infty}g_i\sum_{j=1}^{k}a_{i,j}^{(m)}\\ &\approx \sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i+\sum_{i=k}^{\infty}g_i\sum_{j=1}^{k}\sum_{\gamma=0}^{m}a_{i,k}^{(\gamma)}d_{k,j}^{\gamma,m}\\ &= \sum_{i=1}^{k}A_{ii}^{(m)}g_i+\sum_{\gamma=0}^{m}D_{kk}^{\gamma,m}\sum_{i=k}^{\infty}a_{i,k}^{(\gamma)}g_i,\end{aligned} \tag{3.17}$$

где $D_{kk}^{\gamma,m} = \sum\limits_{j=1}^{k} d_{k,j}^{\gamma,m}$. Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^{(m)} g_i\right)^{p'} \approx \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^{(m)} g_i\right)^{p'} + \sum_{\gamma=0}^{m}\left(D_{kk}^{\gamma,m}\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{(\gamma)} g_i\right)^{p'}.$$

Подставляя последнее неравенство в левую часть неравенства (3.4), получаем следующее неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^{(m)} g_i\right)^{p'} + \sum_{\gamma=0}^{m}\left(D_{kk}^{\gamma,m}\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{(\gamma)} g_i\right)^{p'}\right]\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\leqslant C_0\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad (3.18)$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, которое эквивалентно неравенству (3.4). При этом $\widetilde{C} \approx C_0$.

Неравенство (3.18) выполняется тогда и только тогда, когда следующие неравенства выполняются одновременно

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^{(m)} g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\leqslant C_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad \forall g \geqslant 0, \quad (3.19)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{(\gamma)} g_i\right)^{p'} (D_{kk}^{\gamma,m})^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\leqslant \widetilde{C}_\gamma\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad \forall g \geqslant 0 \quad (3.20)$$

для $\gamma = 0, 1, ..., m$. При этом

$$\widetilde{C} \approx C_0 \approx \max\{C_1,\ \widetilde{C}_0,\ \widetilde{C}_1, ...,\ \widetilde{C}_m\}. \quad (3.21)$$

(3.19) является неравенством типа Харди. Следовательно, используя Теорему A как в (3.10), получаем, что неравенство (3.19) выполняется тогда и только тогда, когдавыполняется следующее условие

$$E_1 = \sup_{s \geqslant 1} V_s^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(A_{ii}^{(m)} \right)^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{3.22}$$

При этом

$$E_1 \approx C_1. \tag{3.23}$$

Переходя к дуальному неравенству в неравенстве (3.20), имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}^{(\gamma)} \varphi_i \right)^q u_k^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{C}_\gamma \left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^p \ (D_{ii}^{\gamma,m})^{-p} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}} \right)^{-\frac{p}{p'}} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.24}$$

для всех неотрицательных последовательностей $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и для всех $\gamma = 0, 1, ..., m$.

Так как $(a_{k,i}^{(\gamma)}) \in \mathcal{O}_\gamma^-$, $\gamma = 0, 1, ..., m$, по Теореме 2.15 неравенство (3.24) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий

$$\widetilde{B}_\gamma^+ = \sup_{k \geqslant 1} \left(\widetilde{B}_\gamma^+ \right)_k = \sup_{k \geqslant 1} \left(\sum_{j=1}^{k} (D_{jj}^{\gamma,m})^{p'} \left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \left(\sum_{i=k}^{\infty} \left(a_{i,j}^{(\gamma)} \right)^q u_i^q \right)^{\frac{p'}{q}} \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{3.25}$$

$$\widetilde{B}_\gamma^- = \sup_{k \geqslant 1} \left(\widetilde{B}_\gamma^- \right)_k = \sup_{k \geqslant 1} \left(\sum_{i=k}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{k} \left(a_{i,j}^{(\gamma)} \right)^{p'} (D_{jj}^{\gamma,m})^{p'} \left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \tag{3.26}$$

и

$$\widetilde{C}_\gamma \approx \widetilde{B}_\gamma^+ \approx \widetilde{B}_\gamma^-. \tag{3.27}$$

Выражение $\left(\widetilde{B}_\gamma^+\right)_k$ можно переписать в следующем виде

$$\left(\widetilde{B}_\gamma^+\right)_k = \left(\sum_{j=1}^{k}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j} a_{i,j}^{(\gamma)} d_{j,s}^{\gamma,m}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

То имеем

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma=0}^{m}\left(\widetilde{B}_\gamma^+\right)_k &= \sum_{\gamma=0}^{m}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j} a_{i,j}^{(\gamma)} d_{j,s}^{\gamma,m}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\approx \left(\sum_{j=1}^{k}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j}\sum_{\gamma=0}^{m} a_{i,j}^{(\gamma)} d_{j,s}^{\gamma,m}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\approx \left(\sum_{j=1}^{k}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{j} a_{i,s}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{k}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=k}^{\infty}\left(A_{i,j}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Следовательно, получаем $\sup\limits_{k\geqslant 1}\sum\limits_{\gamma=0}^{m}\left(\widetilde{B}_\gamma^+\right)_k \approx E_2$. Так как $\sup\limits_{k\geqslant 1}\sum\limits_{\gamma=0}^{m}\left(\widetilde{B}_\gamma^+\right)_k \approx \sum\limits_{\gamma=0}^{m}\widetilde{B}_\gamma^+$, имеем $\max\limits_{0\leqslant\gamma\leqslant m}\widetilde{B}_\gamma^+ \approx \sum\limits_{\gamma=0}^{m}\widetilde{B}_\gamma^+ \approx E_2$. Этим же способом, заключаем, что $\max\limits_{0\leqslant\gamma\leqslant m}\widetilde{B}_\gamma^- \approx \sum\limits_{\gamma=0}^{m}\widetilde{B}_\gamma^- \approx E_3$.

Из (3.22), (3.25) и (3.26) получаем, что неравенства (3.19), (3.20) выполняются тгда и только тогда, когда выполняется одно из условий $E_{12} = \max\{E_1,\ E_2\} < \infty$ and $E_{13} = \max\{E_1,\ E_3\} < \infty$. При этом, имеем $E_{12} \approx E_{13} \approx \max\{C_1,\ \widetilde{C}_0,\ \widetilde{C}_1, ...,\ \widetilde{C}_m\}$, откуда вытекает, что $E_{12} \approx E_{13} \approx \widetilde{C}$. Так как $\widetilde{C} \approx C$, имеем $E_{12} \approx E_{13} \approx C$. Последняя оценка дает утверждение Теоремы 3.1, когда $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$ в случае, когда $V_\infty = \infty$.

2. Теперь рассмотри случай, когда $V_\infty < \infty$. По Теореме E неравенство (3.1) на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in$

$l_{p,v}$ выполняется тогда и только тогда, когда неравенство (3.4) выполняется наряду с неравенством

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^{(m)} g_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p\right)^{-\frac{1}{p}} \leqslant \widehat{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{3.28}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. Здесь $\widehat{C}$ – наименьшая постоянная, для которой выполняется неравенство (3.28). При этом, $C \approx \max\{\widetilde{C}, \widehat{C}\}$.

Таким образом, в случае, когда $V_\infty < \infty$, неравенство (3.4) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $\max\{E_1', \ E_2\} < \infty$ и $\max\{E_1', \ E_3\} < \infty$, где

$$E_1' = \sup_{s\geqslant 1}\left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(A_{ii}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Действительно, если $V_\infty < \infty$, из (3.10) вытекает, что неравенство (3.7) (следовательно, (3.19)) выполняется тогда и только тогда, когда $E_1' < \infty$. При этом, $E_1' \approx C_1$.

Так как $a_{i,j}^{(m)}$, g_i неотрицательные, меняя порядок суммирования в левой части неравенства (3.28), получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_{ii}^{(m)} g_i\right) \leqslant \widehat{C} V_\infty^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad \forall g \geqslant 0.$$

По обратной задаче Гельдера имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_{ii}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \widehat{C} V_\infty^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, неравенство (3.28) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\widehat{C} = V_\infty^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(A_{ii}^{(m)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Оченвидно, что $\frac{1}{2}\left(E_1' + \widehat{C}\right) < E_1$. В то же время, для $s \geqslant 1$ имеем

$$V_s^{-\frac{1}{p}} = \left(V_s^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}} + V_\infty^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \left(V_s^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{1}{p'}} + V_\infty^{-\frac{1}{p}},$$

откуда следует, что $E_1 \leqslant \left(E_1' + \widehat{C}\right)$. Следовательно, получаем $\frac{1}{2}\left(E_1' + \widehat{C}\right) < E_1 \leqslant \left(E_1' + \widehat{C}\right)$. Таким образом, неравенства (3.7) (следовательно (3.19)) и (3.28) выполняются тогда и только тогда, когда $E_1 < \infty$. При этом, $E_1 \approx \max\{C_1,\ \widehat{C}\}$.

Следовательно, получаем, что $\max\{E_1,\ E_2\} \approx \max\{E_1,\ E_3\} \approx \max\{C_1,\ \widehat{C},\ \widetilde{C}\} \approx C$ независимо от того, конечна V_∞ или нет. Теорема доказана.

3.2 Двусторонняя оценка для матричных операторов на конусе монотонных последовательностей при $q < p$

В этом подразделе рассматривается неравенство (3.1) на конусе монотонных последовательностей при $1 < q < p < \infty$.

Положим

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i^p, \quad W_k = \sum_{i=1}^{k} \omega_i, \quad A_{ik} = \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}, \quad B_{ik} = \sum_{j=1}^{k} b_{i,j},$$

$$\mathbb{F}_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathbb{F}_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} W_i^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \times \right.$$
$$\left. \times W_k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathbb{F}_3 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ki}^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathfrak{F}_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} w_i^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{k} B_{jj}^{p'} \left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \times \right.$$

$$\left. \times B_{kk}^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathfrak{F}_3 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} j^{p'} b_{k,j}^{p'} \left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=k}^{\infty} w_i^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} w_k^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$\mathfrak{F}_4 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q u_i^q \right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{j=1}^{k} j^{p'} \left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}} \times \right.$$

$$\left. \times k^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Теорема 3.2. *Пусть $1 < q < p < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.12). Тогда неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_0 = \max\{\mathbb{F}_1,\ \mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_3\} < \infty$. При этом, для наименьшей постоянной C в (3.1) справедлива оценка $\mathbb{F}_0 \approx C$.*

Теорема 3.3. *Пусть $1 < q < p < \infty$. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют Предположению А. Тогда неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_0 = \max\{\mathbb{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_3,\ \mathfrak{F}_4\} < \infty$. При этом, для наименьшей постоянной C в (3.1) справедлива оценка $\mathfrak{F}_0 \approx C$.*

Доказательство Теоремы 3.2. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют условию (1.12). Рассмотрим следующие случаи по отдельности: $V_\infty = \infty$ и $V_\infty < \infty$.

1. Пусть $V_\infty = \infty$. Тогда по Теореме Е неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$

тогда и только тогда, когда следующее неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant \widetilde{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \qquad (3.29)$$

выполняется для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. При этом, для наименьшей постоянной C в (3.1) справедлива оценка $\widetilde{C} \approx C$.

Так как $a_{i,j}$, g_i неотрицательные, то имеем

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i=\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{k}a_{i,j}g_i+\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=k+1}^{\infty}a_{i,j}g_i\approx\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i+\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i. \quad (3.30)$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{\infty}a_{i,j}g_i\right)^{p'}\approx\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i\right)^{p'}+\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i\right)^{p'}.$$

Подставляя последнее неравенство в левую часть неравенства (3.29) имеем следующее неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i\right)^{p'}+\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i\right)^{p'}\right]\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\leqslant \widetilde{C}_0\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \qquad (3.31)$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, которое эквивалентно неравенству (3.29). При этом, $\widetilde{C} \approx \widetilde{C}_0$.

Неравенство (3.31) выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant \widetilde{C}_1\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \quad (3.32)$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}A_{ik}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant \widetilde{C}_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \qquad (3.33)$$

для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. При этом,

$$\widetilde{C} \approx \max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2\}. \tag{3.34}$$

Неравенство (3.32) – неравенство типа Харди. Следовательно, по Теореме А неравенство (3.32) выполнятеся тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \mathbb{F}_1 < \infty. \tag{3.35}$$

При этом,

$$\mathbb{F}_1 \approx \widetilde{C}_1. \tag{3.36}$$

Переходя к дуальному неравенству в неравенстве (3.33), получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} A_{ki}\varphi_i\right)^q u_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{C}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^p \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{-\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.37}$$

для всех неотрицательных последовательностей $\varphi = \{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Элементы матрицы (A_{ki}) для $k \geqslant s \geqslant i$ удовлетворяют следующему условию

$$A_{ki} = \sum_{j=1}^{i} a_{k,j} \approx \sum_{j=1}^{i} (b_{k,s}\omega_j + a_{s,j}) = b_{k,s}W_i + \sum_{j=1}^{i} a_{s,j} = b_{k,s}W_i + A_{si}, \tag{3.38}$$

откуда вытекает, что элементы матрицы (A_{ki}) удовлетворяют условию (1.12). Следовательно, по Теореме 1.9 для выполнения неравенства (3.37) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty} b_{j,k}^q u_j^q\right)^{\frac{p}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} W_i^{p'}\left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\right.$$

$$\left.\times W_k^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \mathbb{F}_2 < \infty, \tag{3.39}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}u_j^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ki}^{p'}\left(V_i^{-\frac{p'}{p}}-V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$=\mathbb{F}_3<\infty, \quad (3.40)$$

и

$$\widetilde{C}_2\approx\max\{\mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_3\}. \quad (3.41)$$

Из (3.35) и (3.39), (3.40) получаем, что неравенства (3.32) и (3.37) выполняются тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_0=\max\{\mathbb{F}_1,\ \mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_3\}<\infty$. При этом, $\mathbb{F}_0\approx\max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2\}$, откуда вытекает, что $\mathbb{F}_0\approx\widetilde{C}$. Так как $\widetilde{C}\approx C$, имеем, что $\mathbb{F}_0\approx C$. Последняя оценка дает утверждение Теоремы 3.2 в случае, когда $V_\infty=\infty$.

2. Пусть $V_\infty<\infty$. По Теореме Е неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f\in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда наряду с неравенством (3.29) выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty}a_{i,k}g_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}v_i^p\right)^{-\frac{1}{p}}\leqslant\widehat{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \quad (3.42)$$

для всех неотрицательных последвательностей $g=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, где $\widehat{C}$ – наименьшая постоянная в неравенстве (3.42). При этом, $C\approx\max\{\widetilde{C},\widehat{C}\}$.

Так как $a_{i,j}$, g_i неотрицательные, меняя порядок суммирования в левой части неравенства (3.42), получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_iA_{ii}\right)\leqslant\widehat{C}V_\infty^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}\quad\forall g\geqslant 0.$$

По обратной задаче Гельдера имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ii}^qu_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=\widehat{C}V_\infty^{\frac{1}{p}},$$

и следовательно,

$$V_\infty^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ii}^qu_i^q\right)^{\frac{1}{q}}=\widehat{C}. \quad (3.43)$$

Таким образом, неравенство (3.42) выполняется тогда и только тогда, когда $\widehat{C} < \infty$.

Как было доказано выше, неравенство (3.29) выполнятеся тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства (3.32) и (3.33).

Также как и в случае, когда $V_\infty = \infty$ докажем, что неравенство (3.33) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_2 < \infty$, $\mathbb{F}_3 < \infty$.

По Теореме А неравенство (3.32) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие

$$\mathbb{F}_1' = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=k}^{\infty}(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}})\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty.$$

Таким образом, в случае, когда $V_\infty < \infty$, неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\max\left\{\mathbb{F}_1',\ \mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_3,\ \widehat{C}\right\} < \infty$. Если мы докажем, что $\mathbb{F}_1 \approx \max\left\{\mathbb{F}_1',\ \widehat{C}\right\}$, то получим, что неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_0 < \infty$ и $\mathbb{F}_0 \approx C$.

Очевидно, что $\mathbb{F}_1' \leqslant \mathbb{F}_1$. Теперь покажем, что $\widehat{C} \ll \mathbb{F}_1$.

Заметим, что

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left[\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]^{\frac{p-q}{pq}}$$
$$= \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}} - \left(\sum_{i=1}^{k-1}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right]\right)\right]^{\frac{p-q}{pq}}$$
$$\ll \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^q u_i^q - \sum_{i=1}^{k-1}A_{ii}^q u_i^q\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\ll \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

откуда вытекает, что

$$\widehat{C} = V_\infty^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \ll V_\infty^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} V_k^{\frac{q}{q-p}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}} = \mathbb{F}_1.$$

Следовательно, получим, что $\max\{\mathbb{F}_1', \widehat{C}\} \ll \mathbb{F}_1$. Обратную оценку получаем используя неравенство Минковского следующим образом:

$$\mathbb{F}_1 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}} + V_\infty^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$+ V_\infty^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}}$$

$$\ll \mathbb{F}_1' + \widehat{C} \leqslant 2\max\{\mathbb{F}_1', \widehat{C}\}.$$

Hence, we obtain that $\mathbb{F}_1 \approx \max\left\{\mathbb{F}_1',\ \widehat{C}\right\}$.

Таким образом, получаем, что (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{F}_0 < \infty$ и $C \approx \mathbb{F}_0 = \max\{\mathbb{F}_1,\ \mathbb{F}_2,\ \mathbb{F}_3\}$ независимо от того, конечна V_∞ или нет. Теорема доказана.

Теперь докажем Теорему 3.3.

Доказательство Теоремы 3.3. Пусть элементы матрицы $(a_{i,j})$ удовлетворяют Предположению A. Рассмотрим следующие случаи: $V_\infty = \infty$ и $V_\infty < \infty$.

1. Пусть $V_\infty = \infty$. То по Теореме E неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда неравенство (3.29) выполняется для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^\infty$. При этом, $\widetilde{C} \approx C$, где C и $\widetilde{C}$ – наименьшие постоянные в неравенствах (3.1) и (3.29), соответственно.

Так как $a_{i,j}$, g_i неотрицательные, согласно Предположению A имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{k} a_{i,j} g_i + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=k+1}^{\infty} a_{i,j} g_i \\ &\approx \sum_{i=1}^{k} A_{ii} g_i + \sum_{i=k}^{\infty} g_i \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} \\ &\approx \sum_{i=1}^{k} A_{ii} g_i + k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} g_i + B_{kk} \sum_{i=k}^{\infty} \omega_i g_i. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} g_i \right)^{p'} \approx \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii} g_i \right)^{p'} + \left(k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} g_i \right)^{p'} + \left(B_{kk} \sum_{i=k}^{\infty} \omega_i g_i \right)^{p'}.$$

Подставляя последнее неравенство в левую часть неравенства (3.29), получим следующее

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii} g_i \right)^{p'} + \left(k \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k} g_i \right)^{p'} + \left(B_{kk} \sum_{i=k}^{\infty} \omega_i g_i \right)^{p'} \right] \right. \\ &\qquad \left. \times \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \widetilde{C}_0 \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \end{aligned} \tag{3.45}$$

для всех неотрицательных $g = \{g_i\}_{i=1}^\infty$, которое эквивалентно неравенству (3.29). При этом, $\widetilde{C} \approx \widetilde{C}_0$.

Неравенство (3.45) выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие неравенства

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii} g_i \right)^{p'} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant \widetilde{C}_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} g_i^{q'} u_i^{-q'} \right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.46}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(k\sum_{i=k}^{\infty}a_{i,k}g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant \widetilde{C}_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}}, \tag{3.47}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(B_{kk}\sum_{i=k}^{\infty}\omega_i g_i\right)^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\leqslant \widetilde{C}_3\left(\sum_{i=1}^{\infty}g_i^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{3.48}$$

для всех неотрицательных последовательностей $g=\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. При этом,

$$\widetilde{C}\approx\max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2,\ \widetilde{C}_3\}. \tag{3.49}$$

Переходя к дуальному неравенству в неравенствах(3.47) и (3.48), получим

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{k,i}\varphi_i\right)^{q}u_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant \widetilde{C}_2\left(\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i^p\ i^{-p}\left(V_i^{-\frac{p'}{p}}-V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{-\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.50}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k}\varphi_i\right)^{q}\omega_k^q u_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant \widetilde{C}_3\left(\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k^p B_{kk}^{-p}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)^{-\frac{p}{p'}}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.51}$$

для всех неотрицательных последовательностей $\varphi=\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Неравенства (3.46) и (3.51) – неравенства типа Харди. Следовательно, по Теореме А неравенства (3.46), (3.51) выполняются следующие условия, соответственно.

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}V_k^{\frac{q}{q-p}}\left(\sum_{i=1}^{k}A_{ii}^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}}A_{kk}^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}=\mathbb{F}_1<\infty, \tag{3.52}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty}w_i^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{k}B_{jj}^{p'}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}}-V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\right.$$
$$\left.\times B_{kk}^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}}-V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}}=\mathfrak{F}_2<\infty. \tag{3.53}$$

При этом,

$$\mathbb{F}_1 \approx \widetilde{C}_1, \quad \mathfrak{F}_2 \approx \widetilde{C}_3. \tag{3.54}$$

Элементы матрицы $(a_{k,i})$ удовлетворяют Предположению A. Следовательно, по Теореме 2.18 неравентсво (3.50) выполняется тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k} j^{p'} b_{k,j}^{p'}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{i=k}^{\infty} w_i^q u_i^q\right)^{\frac{q}{p-q}} w_k^q u_k^q\right)^{\frac{p-q}{pq}}$$
$$= \mathfrak{F}_3 < \infty, \tag{3.55}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,k}^q u_i^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\left(\sum_{j=1}^{k} j^{p'}\left(V_j^{-\frac{p'}{p}} - V_{j+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p(q-1)}{p-q}}\right.$$
$$\left.\times k^{p'}\left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{p-q}{pq}} = \mathfrak{F}_4 < \infty \tag{3.56}$$

и

$$\widetilde{C}_2 \approx \max\{\mathfrak{F}_3,\ \mathfrak{F}_4\}. \tag{3.57}$$

Из (3.52), (3.53) и (3.55), (3.56) вытекает, что неравентсва (3.46), (3.50) и (3.51) выполняются тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_0 = \max\{\mathbb{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_3,\ \mathfrak{F}_4\} < \infty$. При этом, $\mathfrak{F}_0 \approx \max\{\widetilde{C}_1,\ \widetilde{C}_2,\ \widetilde{C}_3\}$, откуда вытекает, что $\mathfrak{F}_0 \approx \widetilde{C}$. Так как $\widetilde{C} \approx C$, имеем $\mathfrak{F}_0 \approx C$. Последняя оценка дает утверждение Теоремы 3.3 в случае, когда $V_\infty = \infty$.

2. Пусть $V_\infty < \infty$. По Теореме E неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ когда наряду с неравенством (3.29) выполняется неравенство (3.42) для всех неотрицательных последовательностей $g = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$. При этом, $C \approx \max\{\widetilde{C}, \widehat{C}\}$.

Как в доказательстве Теоремы 3.2 в случае, когда $V_\infty < \infty$, получим, что неравенство (3.42) выполняется тогда и только тогда, когда $\widehat{C} < \infty$.

Как было доказано выше, неравенство (3.29) выполнятеся тогда и только тогда, когда одновременно выполняются неравенства (3.46), (3.47) и (3.48).

Также как и в случае, когда $V_\infty = \infty$, докажем, что неравенство (3.47) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_3 < \infty$, $\mathfrak{F}_4 < \infty$ и неравенство (3.48) выполняется тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_2 < \infty$.

На основе Теоремы A следует, что неравенство (3.46) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\mathbb{F}_1' = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_\infty^{-\frac{p'}{p}} \right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}} \left(\sum_{i=1}^{k} A_{ii}^q u_i^q \right)^{\frac{q}{p-q}} A_{kk}^q u_k^q \right)^{\frac{p-q}{pq}} < \infty$$

Таким образом, в случае, когда $V_\infty < \infty$, неравентсво (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\max\left\{\mathbb{F}_1',\ \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_3,\ \mathfrak{F}_4,\ \widehat{C}\right\} < \infty$.

Однако, в доказательстве Теоремы 3.2, уже было доказано, что $\mathbb{F}_1 \approx \max\left\{\mathbb{F}_1',\ \widehat{C}\right\}$. Следовательно, неравенство (3.1) выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_0 = \max\{\mathbb{F}_1,\ \mathfrak{F}_2,\ \mathfrak{F}_3,\ \mathfrak{F}_4\} < \infty$ и $C \approx \max\{\widetilde{C}, \widehat{C}\} \approx \mathfrak{F}_0$ независимо от того, конечна V_∞ или нет. Таким образом, теорема доказана.

4 ПРИЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1 Ограниченность и компактность суперпозиций матричных операторов

В этом подразделе рассмотрим вопрос ограниченности и компактности суперпозиций матричных операторов в весовых пространствах последовательностей, когда соответствующие матрицы принадлежат классам $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ при $1 < p \leqslant q < \infty$.

Определим

$$\left(\Sigma^+ f\right)_i := \sum_{j=1}^{i} \sigma_{i,j} f_j, \qquad i \geqslant 1, \tag{4.1}$$

$$\left(\Sigma^- g\right)_j := \sum_{i=j}^{\infty} \sigma_{i,j} g_i, \qquad j \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. *Если рассмотреть операторы (2.1) и (4.1), то для неотрицательных $a_{i,j}$, $\sigma_{j,k}$ и g_k имеем*

$$\begin{aligned}\left(A^+ \circ \Sigma^+\right)(g)_i \equiv \left(A^+\left(\Sigma^+ g\right)\right)_i &= \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=1}^{j} \sigma_{j,k} g_k \\ &= \sum_{k=1}^{i} \left(\sum_{j=k}^{i} a_{i,j}\sigma_{j,k}\right) g_k = \sum_{k=1}^{i} w_{i,k} g_k.\end{aligned}$$

Следовательно, если $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+$, $(\sigma_{j,k}) \in \mathcal{O}_m^+$, то по Лемме 2.6 матрица $(w_{i,k})$ оператора $A^+ \circ \Sigma^+$ принадлежит классу $\mathcal{O}_{m+n+1}^+$.

Таким же способом, используя Лемму 2.7 можно доказать, что если $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, $(\sigma_{j,k}) \in \mathcal{O}_m^-$, то матрица оператора $A^+ \circ \Sigma^+$ принадлежит классу $\mathcal{O}_{m+n+1}^-$.

В общем случае, если матрицы $(a_{i,j}^k)$ операторов $\left(A_k^+ f\right)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j}^k f_j$ принадлежат классам $\mathcal{O}_{m_k}^\pm$, $k = 1, \ldots, n$, то матрица оператора $\mathbb{A}_n^+ \equiv A_1^+ \circ A_2^+ \circ \cdots \circ A_n^+$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^\pm$, где $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k + n - 1$. Таким образом, *используя Теорему 2.15, можно получить критерий ограниченности и компактности матричных операторов* $\mathbb{A}_n^+$ *из весового пространства* $l_{p,v}$ *в весовое пространство* $l_{q,u}$ *при* $1 < p \leqslant q < \infty$.

Таким же образом, если матрицы $(a_{i,j}^k)$ *операторов* $\left(A_k^- g\right)_j = \sum\limits_{i=j}^{\infty} a_{i,j}^k g_i$ *принадлежат классам* $\mathcal{O}_{m_k}^{\pm}$, $k = 1, \ldots, n$, *используя Леммы 2.6 и 2.7, и Теорему 2.16, можно получить необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности оператора* $\mathbb{A}_n^- = A_1^- \circ A_2^- \circ \cdots \circ A_n^-$ *из* $l_{p,v}$ *в* $l_{q,u}$ *при* $1 < p \leqslant q < \infty$.

Определим

$$(D_1)_s = \left(\sum_{k=1}^{s} v_k^{-p'} \left(\sum_{i=s}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(D_2)_s = \left(\sum_{i=s}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(D_3)_s = \left(\sum_{i=1}^{s} u_i^q \left(\sum_{k=s}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(D_4)_s = \left(\sum_{k=s}^{\infty} v_k^{-p'} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(G_1)_s = \left(\sum_{j=1}^{s} v_j^{-p'} \left(\sum_{k=s}^{\infty} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}\sigma_{i,k}\right)^q u_k^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$(G_2)_s = \left(\sum_{k=s}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j}\sigma_{i,k}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(G_3)_s = \left(\sum_{k=1}^{s} u_k^q \left(\sum_{j=s}^{\infty} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}\sigma_{i,k}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$(G_4)_s = \left(\sum_{j=s}^{\infty} v_j^{-p'} \left(\sum_{k=1}^{s} \left(\sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j}\sigma_{i,k} \right)^q u_k^q \right)^{\frac{p'}{q}} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Положим

$$D_1 = \sup_{s\geqslant 1}(D_1)_s,\quad D_2 = \sup_{s\geqslant 1}(D_2)_s,\quad D_3 = \sup_{s\geqslant 1}(D_3)_s,\quad D_4 = \sup_{s\geqslant 1}(D_4)_s,$$

$$G_1 = \sup_{s\geqslant 1}(G_1)_s,\quad G_2 = \sup_{s\geqslant 1}(G_2)_s,\quad G_3 = \sup_{s\geqslant 1}(G_3)_s,\quad G_4 = \sup_{s\geqslant 1}(G_4)_s$$

и

$$D_{13} = \max\{D_1,\ D_3\},\quad D_{14} = \max\{D_1,\ D_4\},$$

$$D_{23} = \max\{D_2,\ D_3\},\quad D_{24} = \max\{D_2,\ D_4\},$$

$$G_{13} = \max\{G_1,\ G_3\},\quad G_{14} = \max\{G_1,\ G_4\},$$

$$G_{23} = \max\{G_2,\ G_3\},\quad G_{24} = \max\{G_2,\ G_4\}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Пусть матрица $(\sigma_{i,j})$ оператора (4.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То выполняются следующие утверждения:*

(i) *Оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда конечна одна из величин D_{13}, D_{14}, D_{23} и D_{24}. При этом, $\|A^+ \circ \Sigma^-\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}} \approx D_{13} \approx D_{14} \approx D_{23} \approx D_{24}$.*

(ii) *Оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

1) $\lim\limits_{s\to\infty}(D_1)_s = 0,\ \lim\limits_{s\to\infty}(D_3)_s = 0;$ *2)* $\lim\limits_{s\to\infty}(D_2)_s = 0,\ \lim\limits_{s\to\infty}(D_4)_s = 0;$

3) $\lim\limits_{s\to\infty}(D_1)_s = 0,\ \lim\limits_{s\to\infty}(D_4)_s = 0;$ *4)* $\lim\limits_{s\to\infty}(D_2)_s = 0,\ \lim\limits_{s\to\infty}(D_3)_s = 0.$

Теорема 4.3. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Пусть матрица $(\sigma_{i,j})$ оператора (4.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То выполняются следующие утверждения:*

(j) *Оператор $\Sigma^- \circ A^+$ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда конечна одна и величин G_{13}, G_{14}, G_{23} и G_{24}. При этом, $\|\Sigma^- \circ A^+\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}} \approx G_{13} \approx G_{14} \approx G_{23} \approx G_{24}$.*

(jj) *Оператор $\Sigma^- \circ A^+$ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*
1) $\lim\limits_{s\to\infty}(G_1)_s = 0$, $\lim\limits_{s\to\infty}(G_3)_s = 0$; *2)* $\lim\limits_{s\to\infty}(G_2)_s = 0$, $\lim\limits_{s\to\infty}(G_4)_s = 0$;
3) $\lim\limits_{s\to\infty}(G_1)_s = 0$, $\lim\limits_{s\to\infty}(G_4)_s = 0$; *4)* $\lim\limits_{s\to\infty}(G_2)_s = 0$, $\lim\limits_{s\to\infty}(G_3)_s = 0$.

Определим

$$(W^+f)_i = \sum_{k=1}^{i} f_k \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}, \quad i \geqslant 1, \tag{4.3}$$

$$(\Phi^-f)_i = \sum_{k=i}^{\infty} f_k \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j}a_{i,j}, \quad i \geqslant 1. \tag{4.4}$$

Используя результаты подразделов 2.2 и 2.6 получим

Теорема 4.4. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора W^+ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Пусть матрица $(\sigma_{i,j})$ оператора W^+ неотрицательная. То выполняются следующие утверждения:*

(i) *Оператор W^+ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $D_1 < \infty$ и $D_2 < \infty$. При этом, $\|W^+\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}} \approx D_1 \approx D_2$.*

(ii) *Оператор W^+ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $\lim\limits_{s\to\infty}(D_1)_s = 0$ и $\lim\limits_{s\to\infty}(D_2)_s = 0$.*

Теорема 4.5. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. Пусть матрица $(\sigma_{i,j})$ оператора Φ^- принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора Φ^- неотрицательная. То выполняются следующие утверждения:*

(i) *Оператор Φ^- ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $D_3 < \infty$ и $D_4 < \infty$. При этом, $\|\Phi^-\|_{l_{p,v}\to l_{q,u}} \approx D_3 \approx D_4$.*

(ii) *Оператор Φ^- компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $\lim\limits_{s\to\infty}(D_3)_s = 0$ и $\lim\limits_{s\to\infty}(D_4)_s = 0$.*

Доказательство Теоремы 4.4.

Ограниченность оператора W^+ эквивалентно выполнению следующего неравенства

$$\|W^+f\|_{q,u} \leqslant C\|f\|_{p,v} \tag{4.5}$$

для всех $f \in l_{p,v}$, где C – наименьшая постоянная, не зависящая от f.

Положим $\varpi_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}$, $i \geqslant k$. То имеем

$$(W^+f)_i = \sum_{k=1}^{i} f_k \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} \varpi_{i,k} f_k, \quad i \geqslant 1.$$

1. Пусть $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$. Пусть $(\sigma_{i,j})$ – произвольная неотрицательная матрица. То по Лемме 2.8 следует, что $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$. Следовательно, по Теореме 2.15, неравенство (4.5) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий

$$\sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{s} v_k^{-p'}\left(\sum_{i=s}^{\infty} \varpi_{i,k}^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} = \sup_{s\geqslant 1}(D_1)_s = D_1 < \infty, \tag{4.6}$$

$$\sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{i=s}^{\infty} u_i^q\left(\sum_{k=1}^{s} \varpi_{i,k}^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{s\geqslant 1}(D_2)_s = D_2 < \infty. \tag{4.7}$$

При этом,

$$D_1 \approx D_2 \approx C. \tag{4.8}$$

Кроме того, по Теореме 2.15 оператор W^+ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $\lim\limits_{s\to\infty}(D_1)_s = 0$ и $\lim\limits_{s\to\infty}(D_2)_s = 0$.

2. Пусть $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Пусть $(\sigma_{i,j})$ – произвольная неотрицательная матрица. То из Леммы 2.8 следует, что $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-\beta$, $n \geqslant 0$, где $\beta = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\beta_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \sigma_{k,j}$.

$(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-\beta$, $n \geqslant 0$ означает, что $\varpi_{i,k} \approx \beta_k \widetilde{\varpi}_{i,k}$, где $(\widetilde{\varpi}_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Подставляя эту эквивалентность в левую часть неравентсва (4.5), получаем неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left|\sum_{k=1}^{i} \beta_k \widetilde{\varpi}_{i,k} f_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p |f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (4.9)$$

для всех $f \in l_{p,v}$, которое эквивалентно неравенству (4.5). При этом, $\widetilde{C} \approx C$.

Используя замену $g_k = \beta_k f_k$, заключаем, что выполнение неравенства (4.9) эквивалентно выполнению следующего неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left|\sum_{k=1}^{i} \widetilde{\varpi}_{i,k} g_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i^{-p} v_i^p |g_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.10)$$

Из неравенства (4.10) следует, что ограниченность оператора W^+ из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ эквивалентно ограниченности оператора $\widetilde{W}^+$ из $l_{p,v\beta^{-1}}$ в $l_{q,u}$, где $\widetilde{W}^+ = \sum\limits_{k=1}^{i} \widetilde{\varpi}_{i,k} g_k$.

Так как $(\widetilde{\varpi}_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$, из Теоремы 2.15 вытекает, что оператор $\widetilde{W}^+$ ограничен из $l_{p,v\beta^{-1}}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий

$$\sup_{s\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{s} v_k^{-p'} \beta_k^{p'} \left(\sum_{i=s}^{\infty} \widetilde{\varpi}_{i,k}^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\approx \sup_{s\geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{s} v_k^{-p'} \left(\sum_{i=s}^{\infty} \varpi_{i,k}^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} = D_1 < \infty,$$

$$\sup_{s\geqslant 1} \left(\sum_{i=s}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{s} \widetilde{\varpi}_{i,k}^{p'} \beta_k^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \sup_{s\geqslant 1} \left(\sum_{i=s}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{s} \varpi_{i,k}^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}} = D_2 < \infty.$$

Следовательно, оператор W^+ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий $D_1 < \infty$ и $D_2 < \infty$. При этом,

$$D_1 \approx D_2 \approx \widetilde{C} \approx C. \tag{4.11}$$

Кроме того, по Теореме 2.15 оператор $\widetilde{W}^+$ компактен из $l_{p,v\beta^{-1}}$ в $l_{q,u}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий $\lim\limits_{s\to\infty}(D_1)_s = 0$ и $\lim\limits_{s\to\infty}(D_2)_s = 0$. Следовательно, выполнение одного из этих условий необходимо и достаточно для компактности оператора W^+ из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$. Таким образом, Теорема 4.4 доказана.

Доказательство Теоремы 4.5 вытекает из Теоремы 2.16 используя Лемму 2.8.

Доказательство Теоремы 4.2.

(i) *Доказательство ограниченности.Необходимость.* Пусть $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ и $(\sigma_{i,j}) \in \mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Пусть оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$. То выполняется следующее неравенство

$$\|(A^+ \circ \Sigma^-)f\|_{q,u} \leqslant C\|f\|_{p,v} \quad \forall f \in l_{p,v}, \tag{4.12}$$

где C – наименьшая постоянная, не зависящая от f.

Так как $a_{i,j}$ и $\sigma_{k,j}$ неотрицательные, для всех неотрицательных последовательностей $f \in l_{p,v}$ имеем

$$\begin{aligned}(A^+ \circ \Sigma^-)(f)_i &= (A^+(\Sigma^- f))_i = \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=j}^{\infty} \sigma_{k,j} f_k \\ &\approx \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=j}^{i} \sigma_{k,j} f_k + \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=i}^{\infty} \sigma_{k,j} f_k \\ &= \sum_{k=1}^{i} f_k \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j} + \sum_{k=i}^{\infty} f_k \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j} a_{i,j} \\ &= \left(W^+ f\right)_i + \left(\Phi^- f\right)_i ,\end{aligned} \tag{4.13}$$

где W^+ и Φ^- – операторы, определеные в (4.3) и (4.4), соответственно.

Следовательно, для всех $f \geqslant 0$ имеем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left[\left(A^+ \circ \Sigma^-\right) f\right]_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\gg \max\left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(W^+ f\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}}, \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\Phi^- f\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\}. \quad (4.14)$$

Рассмотрим следующие четыре случая по отдельности.

1. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То по Лемме 2.8, получаем, что $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$, где $\varpi_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}$, $i \geqslant k$. $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$ существуют матрицы $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, ..., n-1$ и матрицы $(d_{i,k}^{n,\gamma})$ такие, что

$$\varpi_{i,k} \equiv \varpi_{i,k}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} d_{i,j}^{n,\gamma} \varpi_{j,k}^{(\gamma)} \quad (4.15)$$

для всех $i \geqslant j \geqslant k \geqslant 1$, где $d_{i,j}^{n,n} \equiv 1$.

Для $r \geqslant 1$ определим последовательность:

$$f_r = \{f_{r,k}\}_{k=1}^{\infty}: \quad f_{r,k} = \begin{cases} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'-1} v_k^{-p'}, & 1 \leqslant k \leqslant r, \\ 0, & k > r. \end{cases} \quad (4.16)$$

Применяя f_r в правую часть неравенства (4.12), получаем

$$\|f_r\|_{p,v} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{r,k}|^p v_k^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (4.17)$$

Так как f_r неотрицательная последовательность, из (4.14) следует

$$\begin{aligned} \|(A^+ \circ \Sigma^-) f_r\|_{q,u} \gg \|W^+ f_r\|_{q,u} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{i} \varpi_{i,k}^{(n)} f_{r,k}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\gg \left(\sum_{i=r}^{\infty} \left(d_{i,r}^{n,\gamma}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_k^{-p'}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Из (4.12), (4.17) и (4.18) заключаем, что

$$C \gg \left(\sum_{i=r}^{\infty} \left(d_{i,r}^{n,\gamma}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \equiv \left(\mathcal{D}_{\gamma,n}\right)_r. \quad (4.19)$$

Так как неравенство (4.19) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \dots, n$, получаем

$$C \gg \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} (\mathcal{D}_{\gamma,n})_r \equiv (\mathcal{D}_n)_r \,.$$

При этом,

$$(\mathcal{D}_n)_r = \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} (\mathcal{D}_{\gamma,n})_r \approx \sum_{\gamma=0}^{n} (\mathcal{D}_{\gamma,n})_r \approx (D_1)_r \approx (D_2)_r. \tag{4.20}$$

Так как $r \geqslant 1$ произвольное число, получаем

$$C \gg \sup_{r\geqslant 1} (\mathcal{D}_n)_r \approx \sup_{r\geqslant 1}(D_1)_r \approx \sup_{r\geqslant 1}(D_2)_r,$$

и следовательно, имеем $C \gg D_1 \approx D_2$.

2. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То по Лемме 2.8 имеем $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-\beta$, $n \geqslant 0$. $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+\beta$, $n \geqslant 0$ означает, что существует неотрицательная последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ и матрицы $(\widetilde{\varpi}_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-$ такие, что

$$\varpi_{i,k} \equiv \varpi_{i,k}^{(n)} \approx \widetilde{\varpi}_{i,k}^{(n)}\beta_k \;\text{ and }\; \widetilde{\varpi}_{i,k}^{(n)} \approx \sum_{\gamma=0}^{n} \widetilde{\varpi}_{i,j}^{(\gamma)} \widetilde{d}_{j,k}^{\gamma,n} \tag{4.21}$$

для всех $i \geqslant j \geqslant k \geqslant 1$, где $\widetilde{d}_{j,k}^{n,n} \equiv 1$.

Для $r \geqslant 1$ определим последовательность:

$$\widetilde{f}_r = \{\widetilde{f}_{r,k}\}_{k=1}^\infty : \quad \widetilde{f}_{r,k} = \begin{cases} \left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'-1} v_k^{-p'}, & 1 \leqslant k \leqslant r, \\ 0, & k > r. \end{cases} \tag{4.22}$$

Учитывая неравенство (4.14), подставляем $\widetilde{f}_r$ в неравенство (4.12).

$$\begin{aligned} C\|\widetilde{f}_r\|_{p,v} &= C\left(\sum_{k=1}^{r}\left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \|(A^+\circ\Sigma^-)\widetilde{f}_r\|_{q,u} \\ &\gg \|W^+\widetilde{f}_r\|_{q,u} = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{i}\varpi_{i,k}^{(n)}\widetilde{f}_{r,k}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\gg \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q\left(\widetilde{\varpi}_{i,r}^{(\gamma)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{r}\left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'} v_k^{-p'}\right), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$C \gg \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\widetilde{\varpi}_{i,r}^{(\gamma)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \equiv \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma,n}\right)_r. \qquad (4.23)$$

Так как неравенство (4.23) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, n$, имеем

$$C \gg \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma,n}\right)_r \equiv \left(\widetilde{\mathcal{D}}_n\right)_r.$$

Так как

$$(\widetilde{\mathcal{D}}_n)_r = \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma,n}\right)_r \approx \sum_{\gamma=0}^{n} \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma,n}\right)_r \approx (D_1)_r \approx (D_2)_r, \qquad (4.24)$$

и $r \geqslant 1$ – произвольное число, получаем

$$C \gg \sup_{r\geqslant1} \left(\widetilde{\mathcal{D}}_n\right)_r \approx \sup_{r\geqslant1}(D_1)_r \approx \sup_{r\geqslant1}(D_2)_r.$$

Следовательно, имеем $C \gg D_1 \approx D_2$.

Известно, что неравенство (4.12) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется следующее дуальное неравенство

$$\|(A^+ \circ \Sigma^-)^* f\|_{p',v^{-1}} \leqslant C\|f\|_{q',u^{-1}}, \qquad f \in l_{q',u^{-1}}, \qquad (4.25)$$

для сопряженного оператора $(A^+ \circ \Sigma^-)^*$, который определяется следующей формулой

$$\left[\left(A^+ \circ \Sigma^-\right)^* f\right]_k = \sum_{j=1}^{k} \sigma_{k,j} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i. \qquad (4.26)$$

При этом, наименьшие постоянные в неравенствах (4.12) и (4.25) совпадают.

Так как $a_{i,j}$, $\sigma_{k,j}$ неотрицательные, для всех неотрицательных $f \in l_{q',u^{-1}}$ имеем

$$\begin{aligned}(A^+ \circ \Sigma^-)^*(f)_k &= \sum_{j=1}^{k} \sigma_{k,j} \sum_{i=j}^{\infty} a_{i,j} f_i \\ &\approx \sum_{j=1}^{k} \sigma_{k,j} \sum_{i=j}^{k} a_{i,j} f_i + \sum_{j=1}^{k} \sigma_{k,j} \sum_{i=k}^{\infty} a_{i,j} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{k} f_i \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\sigma_{k,j} + \sum_{i=k}^{\infty} f_i \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j} \\ &\equiv \left(\Phi^+ f\right)_k + \left(W^- f\right)_k,\end{aligned} \qquad (4.27)$$

где операторы Φ^+ и W^- – сопряженные операторы к оператором Φ^- и W^+, соответственно.

$$\left(\Phi^+ f\right)_k = \sum_{i=1}^{k} f_i \sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\sigma_{k,j}, \quad k \geqslant 1, \tag{4.28}$$

$$\left(W^- f\right)_k = \sum_{i=k}^{\infty} f_i \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}, \quad k \geqslant 1. \tag{4.29}$$

Из (4.27) для всех $f \geqslant 0$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{-p'} \left[\left(A^+ \circ \Sigma^-\right)^* f\right]_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\gg \max\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{-p'} \left(\Phi^+ f\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}, \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{-p'} \left(W^- f\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}. \tag{4.30}$$

3. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+$. То по Лемме 2.8, имеем $(\varphi_{k,i}) \in \mathcal{O}_m^+$, $m \geqslant 0$, где $\varphi_{k,i} = \sum\limits_{j=1}^{i} \sigma_{k,j} a_{i,j}$, $k \geqslant i$. $(\varphi_{k,i}) \in \mathcal{O}_m^+$, $m \geqslant 0$ означает, что существуют матрицы $(\varphi_{k,i}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, ..., m-1$ и матрицы $e_{k,j}^{m,\gamma}$ такие, что

$$\varphi_{k,i} \equiv \varphi_{k,i}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} e_{k,j}^{m,\gamma} \varphi_{j,i}^{(\gamma)} \tag{4.31}$$

для всех $k \geqslant j \geqslant i \geqslant 1$, где $e_{k,j}^{m,m} \equiv 1$.

Для $r \geqslant 1$ определим последовательность:

$$\widehat{f}_r = \{\widehat{f}_{r,i}\}_{i=1}^{\infty}: \quad \widehat{f}_{r,i} = \begin{cases} \left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)}\right)^{q-1} u_i^q, & 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0, & i > r. \end{cases} \tag{4.32}$$

Подставляя $\widehat{f}_r$ в правую часть неравенства (4.25), имеем

$$\|\widehat{f}_r\|_{q',u^{-1}} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\widehat{f}_{r,i}|^{q'} u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\sum_{i=1}^{r} \left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q'}}. \tag{4.33}$$

Так как $\widehat{f}_r$ неотрицательная последовательность, используя (4.30), имеем

$$\begin{aligned} \|(A^+ \circ \Sigma^-)^* \widehat{f}_r\|_{p',v^{-1}} &\gg \|\Phi^+ \widehat{f}_r\|_{p',v^{-1}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k^{-p'} \left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_{k,i}^{(m)} \widehat{f}_{r,i} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\gg \left(\sum_{k=r}^{\infty} v_k^{-p'} \left(e_{k,r}^{m,\gamma} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{r} \left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)} \right)^{q} u_i^q \right). \end{aligned} \tag{4.34}$$

Следовательно, из (4.25), (4.33) и (4.34) вытекает, что

$$C \gg \left(\sum_{k=r}^{\infty} v_k^{-p'} \left(e_{k,r}^{m,\gamma} \right)^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=1}^{r} \left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)} \right)^{q} u_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \equiv \left(\mathbb{D}_{\gamma,m}\right)_r. \tag{4.35}$$

Так как неравенство (4.35) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, m$, имеем

$$C \gg \max_{0 \leqslant \gamma \leqslant m} \left(\mathbb{D}_{\gamma,m}\right)_r \equiv \left(\mathbb{D}_m\right)_r.$$

При этом,

$$(\mathbb{D}_m)_r = \max_{0 \leqslant \gamma \leqslant n} \left(\mathbb{D}_{\gamma,m}\right)_r \approx \sum_{\gamma=0}^{m} \left(\mathbb{D}_{\gamma,m}\right)_r \approx (D_3)_r \approx (D_4)_r. \tag{4.36}$$

Так как $r \geqslant 1$ произвольное число, получаем

$$C \gg \sup_{r \geqslant 1} \left(\mathbb{D}_m\right)_r \approx \sup_{r \geqslant 1} (D_3)_r \approx \sup_{r \geqslant 1} (D_4)_r,$$

и следовательно, имеем $C \gg D_3 \approx D_4$.

4. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$. По Лемме 2.8, имеем $(\varphi_{k,i}) \in \mathcal{O}_m^-\alpha$, $m \geqslant 0$. $(\varphi_{k,i}) \in \mathcal{O}_m^-\alpha$, $m \geqslant 0$ означает, что существуют неотрицательная последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ и матрицы $(\widetilde{\varphi}_{k,i}) \in \mathcal{O}_m^-$ такие, что

$$\varphi_{k,i} \equiv \varphi_{k,i}^{(m)} \approx \widetilde{\varphi}_{k,i}^{(m)} \alpha_i \quad \text{and} \quad \widetilde{\varphi}_{k,i}^{(m)} \approx \sum_{\gamma=0}^{m} \widetilde{\varphi}_{k,j}^{(\gamma)} \widetilde{e}_{j,i}^{\gamma,m} \tag{4.37}$$

для всех $k \geqslant j \geqslant i \geqslant 1$, где $\widetilde{e}_{j,i}^{m,m} \equiv 1$.

Для $r \geqslant 1$ определим последовательность

$$\overline{f}_r = \{\overline{f}_{r,i}\}_{i=1}^{\infty}: \quad \overline{f}_{r,i} = \begin{cases} \left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m} \alpha_i\right)^{q-1} u_i^q, & 1 \leqslant i \leqslant r, \\ 0, & i > r. \end{cases} \tag{4.38}$$

Учитывая неравенство (4.30), подставим $\overline{f}_r$ в неравенство (4.25):

$$\begin{aligned} C\|\overline{f}_r\|_{q',u^{-1}} &= C\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\overline{f}_{r,i}|^{q'}u_i^{-q'}\right)^{\frac{1}{q'}} = C\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m}\alpha_i\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q'}} \\ &\geqslant \|(A^+\circ\Sigma^-)^*\overline{f}_r\|_{p',v^{-1}} \gg \|\Phi^+\overline{f}_r\|_{p',v^{-1}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{k}\varphi_{k,i}^{(m)}\overline{f}_{r,i}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\gg \left(\sum_{k=r}^{\infty}\left(\varphi_{k,r}^{(\gamma)}\right)^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m}\alpha_i\right)^q u_i^q\right), \end{aligned}$$

откуда вытекает

$$C \gg \left(\sum_{k=r}^{\infty}\left(\varphi_{k,r}^{(\gamma)}\right)^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m}\alpha_i\right)^q u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \equiv \left(\widetilde{\mathbb{D}}_{\gamma,m}\right)_r. \tag{4.39}$$

Так как неравенство (4.39) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, m$ имеем

$$C \gg \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n}\left(\widetilde{\mathbb{D}}_{\gamma,m}\right)_r \equiv \left(\widetilde{\mathbb{D}}_m\right)_r.$$

Так как

$$\left(\widetilde{\mathbb{D}}_m\right)_r = \max_{0\leqslant\gamma\leqslant m}\left(\widetilde{\mathbb{D}}_{\gamma,m}\right)_r \approx \sum_{\gamma=0}^{m}\left(\widetilde{\mathbb{D}}_{\gamma,m}\right)_r \approx (D_3)_r \approx (D_4)_r, \tag{4.40}$$

и $r \geqslant 1$ – произвольное число, заключаем

$$C \gg \sup_{r\geqslant1}\left(\widetilde{\mathbb{D}}_m\right)_r \approx \sup_{r\geqslant1}(D_3)_r \approx \sup_{r\geqslant1}(D_4)_r.$$

Следовательно, имеем $C \gg D_3 \approx D_4$.

Таким образом, получаем $C \gg D_1 \approx D_2$ и $C \gg D_3 \approx D_4$, откуда вытекает

$$\begin{aligned} &C \gg \max\{D_1,\ D_3\},\ C \gg \max\{D_2,\ D_3\}, \\ &C \gg \max\{D_1,\ D_4\},\ C \gg \max\{D_2,\ D_4\}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

Доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Пусть матрица $(a_{i,j})$ оператора (2.1) принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. Пусть матрица $(\sigma_{i,j})$ оператора (4.2) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Пусть одна из величин D_{13}, D_{14}, D_{23} и D_{24} конечна. Докажем, что оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$. Это означает, что нужно доказать выполнения неравенства (4.12) для всех $f \in l_{p,v}$.

Так как $a_{i,j}$, $\sigma_{i,j}$ неотрицательные, имеем

$$\begin{aligned} \|(A^+ \circ \Sigma^-)f\|_{q,u} &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left| \sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=j}^{\infty} \sigma_{k,j} f_k \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=j}^{\infty} \sigma_{k,j} |f_k| \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Следовательно, если мы докажем выполнение неравенства (4.12) для всех неотрицательных $f \in l_{p,v}$, из (4.42) вытекает, что неравенство (4.12) выполняется для всех $f \in l_{p,v}$. На самом деле, нам нужно доказать выполнение следующего неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=j}^{\infty} \sigma_{k,j} f_k \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{C} \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p f_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad 0 \leqslant f \in l_{p,v}. \tag{4.43}$$

При этом, имеем

$$C \leqslant \widetilde{C}, \tag{4.44}$$

где C и $\widetilde{C}$ – наименьшие постоянные в (4.12) и (4.43), соответственно.

Используя (4.13) для всех неотрицательных f, имеем

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} \sum_{k=j}^{\infty} \sigma_{k,j} f_k \right)^q \\ &\qquad \approx \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{i} f_k \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j} + \sum_{k=i}^{\infty} f_k \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j} a_{i,j} \right)^q \\ &\qquad \approx \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{i} f_k \sum_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j} \right)^q + \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=i}^{\infty} f_k \sum_{j=1}^{i} \sigma_{k,j} a_{i,j} \right)^q \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(W^+ f\right)_i^q + \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\Phi^- f\right)_i^q. \end{aligned}$$

Подставляя последнее неравенство в левую часть неравенства (4.43), получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(W^+f\right)_i^q + \sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\Phi^- f\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_0 \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p f_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad 0 \leqslant f \in l_{p,v}, \tag{4.45}$$

которое эквивалентно неравенству (4.43). При этом, $\widetilde{C} \approx C_0$.

Неравенство (4.45) выполняется тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(W^+f\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_1 \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p f_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leqslant f \in l_{p,v}, \tag{4.46}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \left(\Phi^- f\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p f_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 \leqslant f \in l_{p,v}. \tag{4.47}$$

При этом,

$$C_0 \approx \max\{C_1,\ C_2\}. \tag{4.48}$$

Согласно утверждению Теоремы 4.2 $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+ \cup \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$. То по Теореме 4.4 неравенство (4.46) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий $D_1 < \infty$ и $D_2 < \infty$. При этом,

$$D_1 \approx D_2 \approx C_1. \tag{4.49}$$

Кроме того, так как $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$, по Теореме 4.5 получаем, что неравенство (4.47) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $D_3 < \infty$ и $D_4 < \infty$. При этом,

$$D_3 \approx D_4 \approx C_2. \tag{4.50}$$

Из (4.49), (4.50) и (4.48) вытекает, что неравенства (4.46) и (4.47), следовательно неравенство (4.43) выполняются для всех неотрицательных $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий

$$D_{13} = \max\{D_1,\ D_3\} < \infty, \quad D_{14} = \max\{D_1,\ D_4\} < \infty, \tag{4.51}$$

$$D_{23} = \max\{D_2,\ D_3\} < \infty, \quad D_{24} = \max\{D_2,\ D_4\} < \infty.$$

При этом,

$$D_{13} \approx D_{14} \approx D_{23} \approx D_{24} \approx \max\{C_1,\ C_2\} \approx C_0 \approx \widetilde{C}. \tag{4.52}$$

Так как $C \leqslant \widetilde{C}$, получаем, что $C \ll D_{13} \approx D_{14} \approx D_{23} \approx D_{24}$, которое вместе с (4.41) дает $C \approx D_{13} \approx D_{14} \approx D_{23} \approx D_{24}$.

Таким образом, доказательство ограниченности завершена.

(ii) *Доказательство компактности. Необходимость.* Пусть оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$. Определим следующее множество:

$$M = \left\{ g = \{g_k\}_{k=1}^{\infty} : \ g_k = \frac{f_k}{\|f\|_{p,v}}, \quad 0 \leqslant f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{p,v} \right\}.$$

Оченвидно, что $\|g\|_{p,v} = 1$ для всех $g \in M$. Так как оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$, множество $\{u(A^+ \circ \Sigma^-)g, \quad g \in M\}$ предкомпактно в l_q. Следовательно, по Теореме C получаем

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{g\in M} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left[\left(A^+ \circ \Sigma^- \right) g \right]_i^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{4.53}$$

Так как $g = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательная последовательность, из (4.13) вытекает, что

$$\left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left[\left(A^+ \circ \Sigma^- \right) g \right]_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \gg \max \left\{ \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+ g \right)_i \right)^{\frac{1}{q}}, \ \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\Phi^- g \right)_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}$$

для всех $g \in M$. Следовательно,

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{g\in M} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+ g \right)_i^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0 \tag{4.54}$$

и

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{g\in M} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\Phi^- g \right)_i^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{4.55}$$

1. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То по Лемме 2.8, имеем $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+$,

$n \geqslant 0$, где $\varpi_{i,k} = \sum\limits_{j=1}^{k} a_{i,j}\sigma_{k,j}$, $i \geqslant k$. Так как $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+$, $n \geqslant 0$, существуют матрицы $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma = 0, ..., n-1$ и матрицы $(d_{i,k}^{n,\gamma})$ такие, что (4.15) выполняется для всех $i \geqslant j \geqslant k \geqslant 1$, где $d_{i,j}^{n,n} \equiv 1$.

Пусть $f_r = \{f_{r,k}\}_{k=1}^{\infty}$, $r \geqslant 1$ последовательность, определенная в (4.16).

Пусть $M_1 = \left\{ g_r = \{g_{r,k}\}_{k=1}^{\infty} : \ g_{r,k} = \dfrac{f_{r,k}}{\|f_r\|_{p,v}}, \ r \geqslant 1 \right\}$. Так как $M_1 \subset M$, имеем

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{g_r \in M_1} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+ g_r \right)_i^q \right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{4.56}$$

Более того, как и в (2.59), получаем

$$\begin{aligned}
\sup_{g_r \in M_1} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+ g_r \right)_i^q \right)^{\frac{1}{q}} &\geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+ g_r \right)_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.57)\\
&= \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{i} \varpi_{i,k}^{(n)} \frac{f_{r,k}}{\|f_r\|_{p,v}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}\\
&\geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{r} \varpi_{i,k}^{(n)} \frac{f_{r,k}}{\|f_r\|_{p,v}} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{r} \varpi_{i,k}^{(n)} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'-1} v_k^{-p'} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_k^{-p'} \right)^{-\frac{1}{p}}\\
&\gg \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(d_{i,r}^{n,\gamma} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\varpi_{r,k}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_k^{-p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \equiv \left(\mathcal{D}_{\gamma,n}\right)_r.
\end{aligned}$$

Так как неравенство (4.57) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, n$, из (4.56) следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \left(\mathcal{D}_n\right)_r \equiv \lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} \left(\mathcal{D}_{\gamma,n}\right)_r = 0.$$

Следовательно, из (4.20) вытекает, что

$$\lim_{r\to\infty} (D_1)_r = 0 \ \text{ and } \ \lim_{r\to\infty} (D_2)_r = 0. \tag{4.58}$$

2. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+ \cup \mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. То по Лемме 2.8, имеем $(\varpi_{i,k}) \in$

$\mathcal{O}_n^-\beta$, $n \geqslant 0$. Следовательно, для матрицы $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^+\beta$, $n \geqslant 0$ существуют неотрицательная последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty$ и матрицы $(\widetilde{\varpi}_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-$ такие, что (4.21) выполняется для всех $i \geqslant j \geqslant k \geqslant 1$, где $\widetilde{d}_{j,k}^{n,n} \equiv 1$.

Пусть $\widetilde{f}_r = \{\widetilde{f}_{r,k}\}_{k=1}^\infty$, $r \geqslant 1$ последовательность, определенная в (4.22).

Пусть $M_2 = \left\{\widetilde{g}_r = \{\widetilde{g}_{r,k}\}_{k=1}^\infty : \ \widetilde{g}_{r,k} = \dfrac{\widetilde{f}_{r,k}}{\|\widetilde{f}_r\|_{p,v}},\ r \geqslant 1\right\}$. Очевидно, что $M_2 \subset M$. Следовательно, имеем

$$\lim_{r\to\infty} \sup_{\widetilde{g}_r \in M_2} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+\widetilde{g}_r\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{4.59}$$

Более того, учитывая $(\varpi_{i,k}) \in \mathcal{O}_n^-\beta$, $n \geqslant 0$, получаем

$$\sup_{\widetilde{g}_r \in M_2} \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+\widetilde{g}_r\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(W^+\widetilde{g}_r\right)_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.60}$$
$$\geqslant \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\sum_{k=1}^{r} \varpi_{i,k}^{(n)} \left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'-1} v_k^{-p'}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{-\frac{1}{p}}$$
$$\gg \left(\sum_{i=r}^{\infty} u_i^q \left(\widetilde{\varpi}_{i,r}^{(\gamma)}\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{r} \left(\widetilde{d}_{r,k}^{\gamma,n}\beta_k\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \equiv \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma,n}\right)_r.$$

Так как неравенство (4.60) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, n$ и используя (4.59), имеем

$$\lim_{r\to\infty} \left(\widetilde{\mathcal{D}}_n\right)_r \equiv \lim_{r\to\infty} \max_{0\leqslant\gamma\leqslant n} \left(\widetilde{\mathcal{D}}_{\gamma,n}\right)_r = 0.$$

Более того, используя (4.24), получаем (4.58).

Теперь рассмотрим сопряженный оператор к оператору $A^+ \circ \Sigma^-$, который определяется формулой (4.26). Так как оператор $A^+ \circ \Sigma^-$ компактен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$, сопряженный оператор $(A^+ \circ \Sigma^-)^*$ компактен из $l_{q',u^{-1}}$ в $l_{p',v^{-1}}$.

Определим следующее множество:

$$\mathcal{M} = \left\{g = \{g_k\}_{k=1}^\infty : \ g_k = \frac{f_k}{\|f\|_{q',u^{-1}}}, \quad 0 \leqslant f = \{f_k\}_{k=1}^\infty \in l_{q',u^{-1}}\right\}.$$

Очевидно, что $\|g\|_{q',u^{-1}} = 1$ for all $g \in \mathcal{M}$. Так как оператор $(A^+ \circ \Sigma^-)^*$ компактен из $l_{q',u^{-1}}$ в $l_{p',v^{-1}}$, множество $\{v^{-1}(A^+ \circ \Sigma^-)^* g, \quad g \in \mathcal{M}\}$

предкомпактно в $l_{p'}$. Следовательно, по Теореме С получаем

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{g\in\mathcal{M}}\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left[\left(A^+\circ\Sigma^-\right)^*g\right]_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=0. \tag{4.61}$$

Так как $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ неотрицательная последовательность, используя (4.27), имеем

$$\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left[\left(A^+\circ\Sigma^-\right)^*g\right]_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$
$$\gg\max\left\{\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\Phi^+g\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}},\ \left(\sum_{i=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(W^-g\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right\}$$

для всех $g\in\mathcal{M}$, где Φ^+ и W^- – операторы, определенные в (4.28) и (4.29), соответственно. Следовательно, из (4.61) следует

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{g\in\mathcal{M}}\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\Phi^+g\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=0 \tag{4.62}$$

и

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{g\in\mathcal{M}}\left(\sum_{i=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(W^-g\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=0. \tag{4.63}$$

3. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+\cup\mathcal{O}_n^-$, $n\geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^+$. То из Леммы 2.8 следует, что $(\varphi_{k,i})\in\mathcal{O}_m^+$, $m\geqslant 0$, где $\varphi_{k,i}=\sum\limits_{j=1}^{i}\sigma_{k,j}a_{i,j}$, $k\geqslant i$. Так как $(\varphi_{k,i})\in\mathcal{O}_m^+$, $m\geqslant 0$, существуют матрицы $(\varphi_{k,i})\in\mathcal{O}_\gamma^+$, $\gamma=0,...,m-1$ и матрицы $e_{k,j}^{m,\gamma}$ такие, что (4.31) выполняется для всех $k\geqslant j\geqslant i\geqslant 1$, где $e_{k,j}^{m,m}\equiv 1$.

Пусть $\widehat{f}_r=\{\widehat{f}_{r,i}\}_{i=1}^{\infty}$, $r\geqslant 1$ последовательность, определенный в (4.32).

Пусть $\mathcal{M}_1=\left\{\widehat{g}_r=\{\widehat{g}_{r,i}\}_{i=1}^{\infty}:\ \widehat{g}_{r,i}=\dfrac{\widehat{f}_{r,i}}{\|\widehat{f}_r\|_{q',u^{-1}}},\ r\geqslant 1\right\}$. Так как $\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}$, имеем

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\widehat{g}_r\in\mathcal{M}_1}\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\Phi^+\widehat{g}_r\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}=0. \tag{4.64}$$

Более того,

$$\sup_{g_r\in\mathcal{M}_1}\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\Phi^+\widehat{g}_r\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \geqslant \left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\Phi^+\widehat{g}_r\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{4.65}$$

$$\geqslant \left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{r}\varphi_{k,i}^{(m)}\frac{\widehat{f}_{r,i}}{\|\widehat{f}_r\|_{q',u^{-1}}}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{r}\varphi_{k,i}^{(m)}\left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)}\right)^{q-1}u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)}\right)^{q}u_i^q\right)^{-\frac{1}{q'}}$$

$$\gg \left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(e_{k,r}^{m,\gamma}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\varphi_{r,i}^{(\gamma)}\right)^{q}u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \equiv \left(\mathbb{D}_{\gamma,m}\right)_r.$$

Так как неравенство (4.65) выполняется для всех $\gamma = 0, 1, \ldots, m$, из (4.62) следует, что

$$\lim_{r\to\infty}\left(\mathbb{D}_m\right)_r \equiv \lim_{r\to\infty}\max_{0\leqslant\gamma\leqslant m}\left(\mathbb{D}_{\gamma,m}\right)_r = 0.$$

Следовательно, используя (4.36) получаем

$$\lim_{r\to\infty}(D_3)_r = 0 \;\text{ and }\; \lim_{r\to\infty}(D_4)_r = 0. \tag{4.66}$$

4. Пусть матрица $(a_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_n^+\cup\mathcal{O}_n^-$, $n\geqslant 0$ и матрица $(\sigma_{i,j})$ принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$. То по Лемме 2.8, имеем $(\varphi_{k,i})\in\mathcal{O}_m^-\alpha$, $m\geqslant 0$. Следовательно, для матрицы $(\varphi_{k,i})\in\mathcal{O}_m^-\alpha$, $m\geqslant 0$ существуют неотрицательная последовательность $\{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$ и матрицы $(\widetilde{\varphi}_{k,i})\in\mathcal{O}_m^-$ такие, что (4.37) выполняется для всех $k\geqslant j\geqslant i\geqslant 1$, где $\widetilde{e}_{j,i}^{m,m}\equiv 1$.

Пусть $\overline{f}_r = \{\overline{f}_{r,i}\}_{i=1}^{\infty}$, $r\geqslant 1$ последовательность, определенная в (4.38).

Пусть $\mathcal{M}_2 = \left\{\overline{g}_r = \{\overline{g}_{r,i}\}_{i=1}^{\infty} :\; \overline{g}_{r,i} = \dfrac{\overline{f}_{r,i}}{\|\overline{f}_r\|_{q',u^{-1}}},\; r\geqslant 1\right\}$. Так как $\mathcal{M}_2\subset\mathcal{M}$, имеем

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\overline{g}_r\in\mathcal{M}_2}\left(\sum_{k=r}^{\infty}v_k^{-p'}\left(\Phi^+\overline{g}_r\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = 0. \tag{4.67}$$

Более того,

$$\sup_{\overline{g}_r\in\mathcal{M}_2}\left(\sum_{k=r}^{\infty} v_k^{-p'}\left(\Phi^+\overline{g}_r\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \geqslant \left(\sum_{k=r}^{\infty} v_k^{-p'}\left(\Phi^+\overline{g}_r\right)_k^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{4.68}$$

$$\geqslant \left(\sum_{k=r}^{\infty} v_k^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{r}\varphi_{k,i}^{(m)}\frac{\overline{f}_{r,i}}{\|\overline{f}_r\|_{q',u^{-1}}}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(\sum_{k=r}^{\infty} v_k^{-p'}\left(\sum_{i=1}^{r}\varphi_{k,i}^{(m)}\left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m}\alpha_i\right)^{q-1}u_i^q\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m}\alpha_i\right)^{q}u_i^q\right)^{-\frac{1}{q'}}$$

$$\gg \left(\sum_{k=r}^{\infty}\left(\varphi_{k,r}^{(\gamma)}\right)^{p'} v_k^{-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\sum_{i=1}^{r}\left(\widetilde{e}_{r,i}^{\gamma,m}\alpha_i\right)^{q}u_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \equiv \left(\widetilde{\mathbb{D}}_{\gamma,m}\right)_r.$$

Так как неравенство (4.68) выполняется для всех $\gamma = 0,1,\ldots,m$, используя (4.67) имеем

$$\lim_{r\to\infty}\left(\widetilde{\mathbb{D}}_m\right)_r \equiv \lim_{r\to\infty}\max_{0\leqslant\gamma\leqslant m}\left(\widetilde{\mathbb{D}}_{\gamma,m}\right)_r = 0.$$

Следовательно, используя (4.40), получаем (4.66).

Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+\cup\mathcal{O}_n^-$, $n\geqslant 0$ и $(\sigma_{i,j})\in\mathcal{O}_m^+\cup\mathcal{O}_m^-$, $m\geqslant 0$. Предположим, что выполняется первое условие утверждения (ii) Теоремы 4.2. ТО согласно утверждению (i) Теоремы 4.2, оператор $A^+\circ\Sigma^-$ ограничен из $l_{p,v}$ в $l_{q,u}$. Следовательно, множество $\{u(A^+\circ\Sigma^-)f,\ \ \|f\|_{p,v}\leqslant 1\}$ ограничен в l_q. Покажем, что это множество предкомпактно в l_q. По Теореме C ограниченное множестсво $\{u(A^+\circ\Sigma^-)f,\ \ \|f\|_{p,v}\leqslant 1\}$ компактно в l_q, если

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{\|f\|_{p,v}\leqslant 1}\left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q|\left[(A^+\circ\Sigma^-)f\right]_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} = 0. \tag{4.69}$$

Для $r>1$ определим $\widetilde{u}=\{\widetilde{u}_i\}_{i=1}^{\infty}$: $\quad \widetilde{u}_i = \begin{cases} 0, & 1\leqslant i\leqslant r-1\\ u_i, & r\leqslant i.\end{cases}$

То из утверждения (i) Теоремы 4.2 вытекает, что

$$\sup_{\|f\|_{p,v}\leqslant 1}\left(\sum_{i=r}^{\infty}u_i^q|\left[(A^+\circ\Sigma^-)f\right]_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\sup_{\|f\|_{p,v}\leqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\widetilde{u}_i^q|\left[(A^+\circ\Sigma^-)f\right]_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\ll\widetilde{D}_{13}(r), \quad (4.70)$$

где

$$\widetilde{D}_{13}(r)=\max\{\widetilde{D}_1(r),\ \widetilde{D}_3(r)\}$$

и

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_1(r) &= \sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{k=1}^{s}v_k^{-p'}\left(\sum_{i=s}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^q\widetilde{u}_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (4.71)\\
&= \sup_{s\geqslant r}\left(\sum_{k=1}^{s}v_k^{-p'}\left(\sum_{i=s}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{k}a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}\\
&= \sup_{s\geqslant r}(D_1)_s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_3(r) &= \sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{s}\widetilde{u}_i^q\left(\sum_{k=s}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.72)\\
&= \sup_{s\geqslant r}\left(\sum_{i=r}^{s}u_i^q\left(\sum_{k=s}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}a_{i,j}\sigma_{k,j}\right)^{p'}v_k^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&\leqslant \sup_{s\geqslant r}(D_3)_s,
\end{aligned}$$

Согласно первому условию утверждения (ii) Теоремы 4.2 и условиям (4.71), (4.72), получаем

$$\lim_{r\to\infty}\widetilde{D}_1(r)=\lim_{r\to\infty}\sup_{s\geqslant r}(D_1)_s=\lim_{r\to\infty}(D_1)_r=0,$$

$$\lim_{r\to\infty}\widetilde{D}_3(r)\leqslant\lim_{r\to\infty}\sup_{s\geqslant r}(D_3)_s=\lim_{r\to\infty}(D_3)_r=0.$$

Следовательно, используя неравенство (4.70), получаем (4.69).

Остальные случаи утверждения (ii) следуют из эквивалентности $(D_1)_s \approx (D_2)_s$ и $(D_3)_s \approx (D_4)_s$ для $s \geqslant 1$.

Таким образом, Теорема 4.2 доказана.

Теорему 4.3 можно доказать используя Лемму 2.9 и метод доказательства Теоремы 4.2.

4.2 Трехвесовое неравенство типа Харди

Основные результаты предыдущих разделов могут быть использованы для доказательства выполнения других неравенств. Рассмотрим аддитивную оценку следующего вида

$$\|A^+ f\|_{q,u} \leqslant C\left(\|f\|_{p,v} + \|A_0^+ f\|_{p,\rho}\right) \tag{4.73}$$

для всех неотрицательных последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, где A^+ – матричный оператор, определенный в (2.1) и оператор Харди A_0^+ определяется формулой $\left(A_0^+ f\right)_i := \sum\limits_{j=1}^{i} f_j, \quad i \geqslant 1.$

Предположим, что весовые последовательности v и ρ удовлетворяют следующим условиям

$$v_k > 0, k \geqslant 1, \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty.$$

Положим $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ и для $n \geqslant 1$ определим

$$\varphi_n = \left\{ \min_{1 \leqslant k \leqslant n} \left[\left(\sum_{i=k}^{n} v_i^{-p'} \right)^{-\frac{1}{p'}} + \left(\sum_{i=k}^{\infty} \rho_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}^{-1}, \ \varphi_0 = 0.$$

Приведем результат Р. Ойнарова [119] об эквивалентности неравенств (4.73) и (2.3).

Теорема F. *Пусть $1 < p, q < \infty$ и элементы матрицы $(a_{k,i})$ оператора A^+ неотрицательные и невозрастающие по i, что означает $a_{k,i+1} \leqslant a_{k,i}$ для $k \geqslant 1$, $i \geqslant 1$. Тогда неравенство (4.73) выполняется для всех неотрицательных последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда неравенство*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i} f_i \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{C} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p \left(\varphi_k^{p'} - \varphi_{k-1}^{p'} \right)^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.74}$$

выполняется для всех неотрицательных последовательностей $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$. *При этом,* $C \approx \widetilde{C}$, *где* C *и* $\widetilde{C}$ *– наименьшие постоянные в (4.73) и (4.74), соответственно.*

Используя Теорему F, получим следующее утверждение:

Теорема 4.6. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Пусть матрица* $(a_{i,j})$ *в (4.73) принадлежит классу* $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. *То неравенство (4.73) выполняется для всех неотрицательных последовательностей* $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий* $\mathcal{D}^+ < \infty$ *и* $\mathcal{D}^- < \infty$, *где*

$$\mathcal{D}^+ = \sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{j=1}^{k}\Delta\varphi_j^{p'}\left(\sum_{i=k}^{\infty}a_{i,k}^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

и

$$\mathcal{D}^- = \sup_{k\geqslant 1}\left(\sum_{i=k}^{\infty}u_i^q\left(\sum_{j=1}^{k}a_{i,j}^{p'}\Delta\varphi_j^{p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

При этом, $\mathcal{D}^+ \approx \mathcal{D}^- \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (4.73).*

Теорема 4.7. *Пусть* $1 < q < p < \infty$. *Пусть элементы матрицы* $(a_{i,j})$ *удовлетворяют Предположению A. То неравенство (4.73) выполняется для всех неотрицательных последовательностей* $f = \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ *тогда и только тогда, когда* $E = \max\{E^+,\ E^-\} < \infty$, *где*

$$E^+ = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{i}b_{i,j}^{p'}\Delta\varphi_j^{p'}\right)^{\frac{q(p-1)}{p-q}}\left(\sum_{k=i}^{\infty}\omega_k^q u_k^q\right)^{\frac{q}{p-q}}\omega_i^q u_i^q\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

$$E^- = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\Delta\varphi_i^{\frac{pq}{p-q}}\left(\sum_{k=i}^{\infty}a_{k,i}^q u_k^q\right)^{\frac{p}{p-q}}\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

Приэтом, $E \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (4.73).*

Доказательство Теоремы 4.6. Пусть матрица $(a_{i,j})$ в (4.73) принадлежит классу $\mathcal{O}_m^-$, $m \geqslant 0$. Следовательно, $(a_{i,j})$ – неотрицательная матрица, невозрастающая по второму индексу для всех $i \geqslant j \geqslant 1$. То по Теореме F неравенство (4.73) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=1}^{k} a_{k,i}^{(m)} f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p \left(\Delta\varphi_k^{p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \geqslant 0. \tag{4.75}$$

При этом, $C_1 \approx C$, где C и C_1 – наименьшие постоянные в (4.73) и (4.75), соответственно.

Неравенство (4.75) эквивалентно неравенству (4.73). То по Теореме 2.15 неравенство (4.75), и соответственно, неравенство (4.73) выполняются тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $\mathcal{D}^+ < \infty$ и $\mathcal{D}^- < \infty$. Теорема доказана.

Доказательство Теоремы 4.7. Обозначим $\sup\limits_{j\leqslant k\leqslant i} a_{i,k} = \widetilde{a}_{i,j}$. Очевидно, что

$$a_{i,j} \leqslant \widetilde{a}_{i,j}. \tag{4.76}$$

Согласно Предположению A, имеем

$$da_{i,j} \geqslant \sup_{j\leqslant k\leqslant i} a_{i,k} = \widetilde{a}_{i,j}. \tag{4.77}$$

Из (4.76) и (4.77) следует, что $a_{i,j} \approx \widetilde{a}_{i,j}$. Тогда матричный оператор $\left(\widetilde{A}^+ f\right)_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \widetilde{a}_{i,j} f_j,\ i \geqslant 1$ эквивалентен оператору A^+, а именно, $(A^+f)_i \leqslant \left(\widetilde{A}^+ f\right)_i \leqslant d\,(A^+f)_i$ или $(A^+f)_i \approx \left(\widetilde{A}^+ f\right)_i$ для всех $f \geqslant 0$, $i \geqslant 1$. Тогда неравенство (4.73) эквивалентно неравенству

$$\|\widetilde{A}^+ f\|_{q,u} \leqslant C_1 \left(\|f\|_{p,v} + \|A_0^+ f\|_{p,\rho}\right) \qquad \forall f \geqslant 0. \tag{4.78}$$

При этом, $C \approx C_1$, где C и C_1 – наименьшие постоянные в (4.73) и (4.78), соответственно. Легко видеть, что элементы матрицы $(\widetilde{a}_{i,j})$ удовлетворяют следующему условию $\widetilde{a}_{i,j} \geqslant \widetilde{a}_{i,k},\ i \geqslant k \geqslant j \geqslant 1$. То по Теореме F неравенство (4.78) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k^q \left(\sum_{i=1}^{k} \widetilde{a}_{k,i} f_i\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k^p \left(\Delta\varphi_k^{p'}\right)^{1-p}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \geqslant 0. \tag{4.79}$$

При этом, $C_1 \approx C_2$, где C_2 – наименьшая постоянная в (4.79).

Так как (4.78) эквивалентно неравенству (4.73), неравенство (4.79) эквивалентно неравенству (4.73). То по Теореме 2.18 неравенство (4.79) (и следовательно, (4.78) и (4.73)) выполняется тогда и только тогда, когда $E = \max\{E^+,\ E^-\} < \infty$.

Таким образом, теорема доказана.

4.3 Приложения основных результатов к суммируемым матрицам

В теории рядов важное значение имеют оценки нормы суммируемых матриц. Заметим, что нижняя треугольная матрица $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{i,j})$ называется суммируемой матрицей, если $\widetilde{a}_{i,j} \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{i} \widetilde{a}_{i,j} = 1$. Если $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^+$ или $(a_{i,j}) \in \mathcal{O}_n^-$, $n \geqslant 0$ то матрица $(\widetilde{a}_{i,j}) = \left(\frac{a_{i,j}}{A_{ii}}\right)$ удовлетворяет всем условиям суммируемой матрицы, где $A_{ii} = \sum\limits_{j=1}^{i} a_{i,j}$. Если рассмотрим неравенство (2.3) для матрицы $(\overline{a}_{i,j}) = (\beta_i a_{i,j})$, то получим следующее неравенство типа (2.3):

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i^q \beta_i^q \left|\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} f_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=1}^{\infty} v_i^p |f_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, используя результаты разделов 2 и 3, получим двусторонюю оценку для матрицы $(\overline{a}_{i,j}) = (\beta_i a_{i,j})$ в $l_{p,v}$ и на конусе монотонных последовательностей. Таким образом, можно оценить суммируемые матрицы, в частности матрицы Гельдера и Чезаро.

Определим

$$J_0^+ = \sup_{s\geqslant 1} \left(\sum_{j=1}^{s} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=s}^{\infty} \left(\frac{i!(i-j+k-1)!}{(i-j)!(k+i)!}\right)^q u_i^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$J_0^- = \sup_{s\geqslant 1} \left(\sum_{i=s}^{\infty} u_i^q \left(\frac{i!}{(k+i)!}\right)^q \left(\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{(i-j+k-1)!}{(i-j)!}\right)^{p'} v_j^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$J_1^+ = \sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{j=1}^{s} u_j^q \left(\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{i!(i-j+k-1)!}{(i-j)!(k+i)!}\right)^{p'} v_i^{-p'}\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$J_1^- = \sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{i=s}^{\infty} v_i^{-p'}\left(\frac{i!}{(k+i)!}\right)^{p'}\left(\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{(i-j+k-1)!}{(i-j)!}\right)^{q} u_j^q\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Используя результаты раздела 2 получим следующие утверждения для матрицы Чезаро.

Теорема 4.8. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Пусть матрица* $(a_{i,j})$ *оператора (2.1) является матрицей Чезаро порядка* k, $k \geqslant 1$. *Тогда неравенство (2.3) выполняется для оператора (2.1) тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий* $J_0^+ < \infty$ *и* $J_0^- < \infty$. *При этом,* $J_0^+ \approx J_0^- \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (2.3).*

Теорема 4.9. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Пусть матрица* $(a_{i,j})$ *оператора (2.2) является матрицей Чезаро порядка* k, $k \geqslant 1$. *Тогда неравенство (2.3) выполняется для оператора (2.2) тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий* $J_1^+ < \infty$ *и* $J_1^- < \infty$. *При этом,* $J_1^+ \approx J_1^- \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (2.3).*

Определим

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i^p, \quad \mathbb{E}_1 = \sup_{s\geqslant 1} V_s^{-\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{i!\cdot u_i}{(k+i)!}\right)^{q}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{(i-j+k-1)!}{(i-j)!}\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathbb{E}_2 = \sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{l=1}^{s}\left(V_l^{-\frac{p'}{p}} - V_{l+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\left(\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{i!\cdot u_i}{(k+i)!}\right)^{q}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{(i-j+k-1)!}{(i-j)!}\right)^{q}\right)^{\frac{p'}{q}}\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathbb{E}_3 = \sup_{s\geqslant 1}\left(\sum_{i=s}^{\infty}\left(\frac{i!\cdot u_i}{(k+i)!}\right)^{q}\left(\sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{l}\frac{(i-j+k-1)!}{(i-j)!}\right)^{p'}\left(V_l^{-\frac{p'}{p}} - V_{l+1}^{-\frac{p'}{p}}\right)\right)^{\frac{q}{p'}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя результаты раздела 3, получим следующее утверждение для матрицы Чезаро.

Теорема 4.10. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. То неравенство (3.1) для матрицы Чезаро порядка k, $k \geqslant 1$ выполняется на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей $f \in l_{p,v}$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий $\mathbb{E}_{12} = \max\{\mathbb{E}_1, \ \mathbb{E}_2\} < \infty$ и $\mathbb{E}_{13} = \max\{\mathbb{E}_1, \ \mathbb{E}_3\} < \infty$. При этом, $\mathbb{E}_{12} \approx \mathbb{E}_{13} \approx C$, где C – наименьшая постоянная в (3.1).*

Положим

$$\nu_{i,j}^{(n)} \equiv \sum_{k_n=j}^{i} \sum_{k_{n-1}=k_n}^{i} \frac{1}{k_{n-1}} \sum_{k_{n-2}=k_{n-1}}^{i} \frac{1}{k_{n-2}} ... \sum_{k_1=k_2}^{i} \frac{1}{k_1}, \quad n \geqslant 1,$$

$$J_2^+ = \sup_{s \geqslant 1} \left(\sum_{j=1}^{s} v_j^{-p'} \left(\sum_{i=s}^{\infty} \left(\nu_{i,j}^{(n)}\right)^q \left(\frac{u_i}{i}\right)^q \right)^{\frac{p'}{q}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$J_2^- = \sup_{s \geqslant 1} \left(\sum_{i=s}^{\infty} \left(\frac{u_i}{i}\right)^q \left(\sum_{j=1}^{s} \left(\nu_{i,j}^{(n)}\right)^{p'} v_j^{-p'} \right)^{\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

Используя основные результаты раздела 2, получим следующее утверждение для оператора Гельдера.

Теорема 4.11. *Пусть $1 < p \leqslant q < \infty$. То неравенство (2.3) выполняется для оператора Гельдера порядка n, $n \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $J_2^+ < \infty$ и $J_2^- < \infty$. При этом, $J_2^+ \approx J_2^- \approx C$, где C – наименьшая постоянная в (2.3).*

Опредим

$$V_k = \sum_{i=1}^{k} v_i^p, \quad \mathcal{V}_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{k} \nu_{i,j}^{(n)}, \quad \mathcal{E}_1 = \sup_{s \geqslant 1} V_s^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\mathcal{V}_{ii}^{(n)}\right)^q \left(\frac{u_i}{i}\right)^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\mathcal{E}_2 = \sup_{s \geqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{s} \left(V_k^{-\frac{p'}{p}} - V_{k+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \left(\sum_{i=s}^{\infty} \left(\mathcal{V}_{ik}^{(n)}\right)^q \left(\frac{u_i}{i}\right)^q \right)^{\frac{p'}{q}} \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\mathcal{E}_3 = \sup_{s \geqslant 1} \left(\sum_{k=s}^{\infty} \left(\frac{u_k}{k}\right)^q \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\mathcal{V}_{ki}^{(n)}\right)^{p'} \left(V_i^{-\frac{p'}{p}} - V_{i+1}^{-\frac{p'}{p}} \right) \right)^{\frac{q}{p'}} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя основные результаты Раздела 3 получим двустороннюю оценку для матрицы Гельдера на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей.

Теорема 4.12. *Пусть* $1 < p \leqslant q < \infty$. *Тогда неравенство (3.1) выполняется для оператора Гельдера порядка* n, $n \geqslant 1$ *на конусе неотрицательных и невозрастающих последовательностей* $f \in l_{p,v}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий* $\mathcal{E}_{12} = \max\{\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2\} < \infty$ *и* $\mathcal{E}_{13} = \max\{\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_3\} < \infty$. *При этом,* $\mathcal{E}_{12} \approx \mathcal{E}_{13} \approx C$, *где* C *– наименьшая постоянная в (3.1).*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В теории функции, в гармоническом анализе, в теории разностных уравнений, в теории вложения пространств с разностными операторами, в спектральной теории разностных операторов и других областях анализа важную роль играют различные свойства матричных операторов. В теории матричных операторов особое место занимают вопросы ограниченности, компактности в различных пространствах последовательностей и оценка норм оператора. Однако, в некоторых пространствах, имеющих теоретическое и прикладное значения, эти вопросы еще являются открытыми. Поэтому возникает вопрос о выделении классов матричных операторов, охватывающие матричные операторы, встречающиеся в различных задачах анализа, и установления их свойств.

В диссертационной работе был введен широкий класс матричных оператор, который включает в себя ранее исследованные матричные операторы, а также широко известные классические операторы анализа, такие как, оператор многократного суммирования, операторы Чезаро, Гельдера и другие. И для операторов из этих классов в терминах элементов матрицы установлены необходимые и достаточные условия ограниченности и компактности в пространствах последовательностей с разными степенями суммируемости и разными весами. Получена оценка весовой нормы матричного оператора через весовую норму последовательностей на конусе монотонных последовательностей, которая охватывает и широко расширяет результаты предыдущих исследований.

Также рассмотрено приложение основных результатов к ограниченности и компактности суперпозиций матричных операторов, к трехвесовому неравенству типа Харди и к операторам суммирования Гельдера и Чезаро, имеющие важные значения в теорий функции. Во всех указанных задачах получены необходимые и достаточные условия.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Stieglitz M., Tietz H. Matrixtransformationen von Folgenr$\ddot{a}$umen Eine Ergebnis$\ddot{u}$bersicht //Math.Z. -1977. - № 154. -P. 1-16.

2. Kufner L., Persson L-E. Weighted Inequalities of Hardy type. - NJ: World Scientific Publishing Co.; Inc. River Edge. 2003. - 357 p.

3. Kufner A. Maligranda L., Persson L-E. The Hardy Inequality. About its History and Some Related Results. - Plzeȓ: Vydavatelský Servis. 2007. - 162 p.

4. Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus //LX. An inequality between integrals. Messenger of Math. -1925. - № 54. - P. 150-156.

5. Talenti G. Osservazioni sopra una classe di disuguaglianze //Rend. Mat. Fis. Milano.- 1969. - № 39. -P. 171-185.

6. Tomaselli G.A. class of inequalities //Boll. Un. Mat. Ital. -1969. - № 2 -P. 622-631.

7. Muckenhoupt B. Hardy's inequality with weights //Studia Math. -1972. - № 44 -P.31-38.

8. Bradley J.S. Hardy inequalities with mixed norms //Canada Math. Bull. -1978. - № 4. -P 405-408.

9. Кокилашвили В.М. О неравенствах Харди в весовых пространствах //Сообщ. АН ГССР. -1979. - Т. 96, № 1. - С. 37-40.

10. Maz'ja V.G. Sobolev Spaces. Berlin;Heidelberg: Springer-Verlag- 1985. - 455 p.

11. Отелбаев М., Апышев О.Д. О спектре одного класса дифференциальных операторов некоторые теоремы вложения //Известия АН СССР, сер. физ.-мат. -1979. - № 43. - С. 739-764.

12. Отелбаев М., Мынбаев К.Т. Весовые функциональные пространства и спектр дифференциальных операторов. - М: Наука, 1988.

13. Отелбаев М. Оценки спектра оператора Штурма-Лиувилля. - Алма-Ата: Гылым, 1990.

14. Martin-Reyes F.J. and E. Sawyer. Weighted inequalities for Riemann-Liouville fractional integrals of order one and greater //Proc. Amer. Math. Soc. - 1989. - Vol. 106, № 3.-P. 727-733.

15. Степанов В.Д. О весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков и их приложения //ДАН СССР. -1988. - Т. 302, № 5. -С. 1059-1062.

16. Степанов В.Д. Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля. Препринт. ВЦ ДВНЦ АН СССР. - Владивосток, 1988. -33 с.

17. Степанов В.Д. Двухвесовые оценки интегралов Римана-Лиувилля. Препринт. ВЦ ДВНЦ АН СССР. - Владивосток, 1988. -27 с.

18. Степанов В.Д. Об одном весовом неравенстве типа Харди для производных высших порядков // Тр. МИАН СССР. - 1989. - Т 187, - С. 178-190.

19. Степанов В.Д. Двухвесовые оценки для одного класса сверточных операторов. Препринт. Институт прикладной математики ДВО АН СССР. - Владивосток, 1989. -28 с.

20. Ойнаров Р. Двусторонние оценки нормы для некоторых классов интегральных операторов. - 21 с. - Деп. в КазНИИНТИ. - 27.033.91,№3354-Ка91.

21. Bloom S., Kerman R. Weighted norm inequalities for operators of Hardy type //Proc. Amer. Math. Soc. -1991. № 1. - P. 135-141.

22. Pankaj Jain, Pawan K. Jain and Babita Gupta, Higher dimensional compactness of Hardy operators involving Oinarov-type kernels// Math. Inequal. Appl. -2006. -№ 4. - P. 739-748.

23. Ойнаров Р. Ограниченность и компактность интегральных операторов Вольтерровского типа // Сибирский Математический Журнал. -2007. - Т. 48, № 5. - С. 1100-1115.

24. Andersen K.F., Heinig H.P. Weighted norm inequalities for certain integral operators //SIAM J. Math. -1983. - № 14. - P. 834-844.

25. Heinig H.P. Weighted norm inequalities for certain integral operators. II //Proc. Amer. Math. Soc. - 1985. - № 95. - P. 387-395.

26. Bennett G. Some elementary inequalities //Quart. J. Math. Oxford Ser. - 1987. - № 152. - P. 401-425.

27. Bennett G. Some elementary inequalities II //Quart. J. Math. Oxford Ser. - 1988. - №. 156. -P. 385-400.

28. Bennett G. Some elementary inequalities III// Quart. J. Math. Oxford Ser. - 1991. - № 166. - P. 149-174.

29. Braverman M. Sh., Stepanov V.D. On the discrete Hardy inequality //Bull. London Math. Soc. - 1994. - № 3. - P. 283-287.

30. Смаилов Е.С. Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом и их приложения //ДАН СССР. - 1983. -Т. 270, № 1. - С. 52-55.

31. Смаилов Е.С. Разностные теоремы вложения для пространств Соболева с весом //Некоторые приложения фун. ан. к задачам мат. физики. Труды семинара С.Л. Соболева. - Новосибирск, 1984. - С. 122-143.

32. Смаилов Е.С. Мультипликаторы Фурье, теоремы вложения и смежные с ним вопросы: дисс... докт. физ.-мат. наук. - Караганда, 1997. - 250 с.

33. Стихарный А.П. Разностные теоремы вложения и некоторые свойства разностного оператора второго порядка: дисс... канд. физ.-мат. наук. - Алма-Ата, 1991. - 96 с.

34. Ойнаров Р., Стихарный А.П. Критерий ограниченности и компактности одного разностного вложения //Мат. заметки. - 1991. - Т. 50, № 5. - С. 54-60.

35. Гольдман М.Л. Точные оценки норм оператора типа Харди на конусах квазимонотонных функций // Тр. МИ им. В.А. Стеклова. - 2001. - Т. 232, № 1. - С. 109-137.

36. Kokilashvili V., Meskhi A., Persson L.-E. Weighted norm inequalities for integral transforms with product kernels. New York: Mathematics Research Development Series, 2010.

37. Ойнаров Р., Шалгынбаева С.Х. Весовая аддитивная оценка одного класса матричных операторов //Известия НАН РК. Серия физ.-мат. - 2004. - № 1. - С. 39-49.

38. Oinarov R., Okpoti C.A., Persson L-E. Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q < p$ //Math. Inequal. Appl. - 2007. - № 4. - P. 843-861.

39. Oinarov R., Persson L-E., Temirkhanova A.M. Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $p \leqslant q$ //Math. Inequal. Appl. - 2009. - T. 12, № 4. -P. 891-903.

40. Temirkhanova A.M. Weighted inequalities for a class of matrix operators: the case $1 < q < p < \infty$ //Eurasian Math. J. - 2008. - № 2. -P. 117-127.

41. Темирханова А.М. Ограниченность и компактность матричных операторов в весовых пространствах последовательностей: дисс... PhD доктора. - Астана, 2009. - 68 с.

42. Okpoti C.A. Weight Characterizations of Hardy and Carleman Type Inequalities: PhD thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, 36, 2006. - 129 p.

43. Popova O. Weighted Hardy-type inequalities on the cones of monotone and quasi-concave functions: PhD thesis, Luleå University of Technology, SE-971 87 Luleå, Sweden and Peoples' Friendship University of Russia, Moscow 117198, Russia, 2012. - 138 p.

44. Sawyer E. Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces //Studia Math. - 1990. - Vol. 96, № 2. - P. 145-158.

45. Ойнаров Р., Шалгынбаева С.Х. Весовые неравенства Харди на конусе монотонных последовательностей //Известия НАН РК. Серия физ.-мат. - 1998. - № 1. - С. 33-42.

46. Шалгынбаева С.Х. Весовые неравенства для монотонных последовательностей: дисс№ канд. физ.-мат. наук. -Астана, 1991. - 91 с.

47. Bennett G., Grosse-Erdmann K.-G. Weighted Hardy inequalities for decreasing sequences and functions //Math. Ann. - 2006. - Vol. 334, № 3. -P. 489-531.

48. Шалгынбаева С.Х. Весовые оценки для класса матриц на конусе монотонных последовательностей //Известия НАН РК. Серия физ.-мат. - 1998. - № 5. - С. 76-80.

49. Hardy G.H., Littlewood J.E., Pólya G. Inequalities. Cambridge Univ. Press 1934 (second es.1952).

50. Opic B., Kufner A. Hardy-type inequalities. Longman, Harlow, 1990.

51. Hardy G.H. Notes on some points in the integral calculus //Messenger of Mathematics. - 1928. - № 57. -P. 12-16.

52. Hardy G.H., Littlewood J.E. On certain inequalities connected with the calculus of variations //J. London Math. Soc., Notes on the theory of series, XII. - 1980. - № 5. - P. 34-39.

53. Bliss G.A. An integral inequality //J. London Math. Soc. - 1930. - № 5. - P. 40-46.

54. Beesack P.R. Hardy's inequality and its extensions //Pacific J. Math. - 1961. - № 11. - P. 39-61.

55. Beesack P.R. Integral inequalities involving a function and its derivatives //Amer. Math. Monthly. - 1971. - № 78. - P. 705-741.

56. Kadlec J., Kufner A. Characterization of functions with zero traces by integrals with weight functions II // Čaropis Pěst. Mat. - 1967. - № 92. - P. 16-28.

57. Портнов В.Р. Две теоремы вложения для пространств $L^1_{p,b}(\Omega \times R_+)$ и их приложения //ДАН СССР. - 1964. - № 155. - P. 761-764.

58. Седов В.Н. Весовые пространства. Теорема вложения //Диф. уравнения. - 1972. - № 8. - P. 1452-1462.

59. Andersen K.F., Muckenhoupt B. Weighted weak type Hardy's inequalities with applications to Hilbert transforms and maximal functions //Studia Math. - 1982. - № 72. -P. 6-26.

60. Persson L.-E., Stepanov V.D. Weighted integral inequalities with the geometric mean operator //J. Inequal. Appl. - 2002. - Vol. 7, № 5. - P. 727-746.

61. Juberg R.K. Measure of non-compactness and interpolation of compactness for a class of integral transformations //Duke Math. J. - 1974. - № 41. -P. 511- 525.

62. Степанов В.Д. Весовое неравенство Харди //Сибирский Математический Журнал. - 1987.- № 28. -P. 515-517.

63. Manakov V.M. On the best constant in weighted inequalities of the Rieman-Liouville integral //Bull. London Math. Soc. - 1992. - № 24. -P. 442-448.

64. Sinnamon G. Operators on Lebesgue spaces with general measures: PhD thesis, McMaster University, Hamilton, 1987.

65. Sinnamon G. Weighted Hardy and Opial-type inequalities //J. Math. Anal. Appl. -1991. - № 160. - P. 329-335.

66. Sinnamon G., Stepanov V. D. The weighted Hardy's inequality: new proofs and the case $p = 1$ //J. London Math. Soc. (2). - 1996. - Vol. 54, № 1. - P. 89-101.

67. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators, pure and applied mathematics, 129. Boston: Academic Press, 1988.

68. Mitrinovic D.S., Pečaric J., Fink A.M. Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives, Kluwer Academic Publishers. xvi, 1991.

69. Nassyrova M. Weighted Inequalities Involving Hardy-type and Limiting Geometric Mean Operators: PhD thesis, Department of Mathemtics, Luleå University of Technology, Sweden, 3. - 2002. - 124 p.

70. Prokhorov D.V. Weighted Inequalities involving Riemann-Liouville and Hardy-type Operators: PhD thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, Sweden, 38. - 2003. - 111 p.

71. Wedestig A. Weighted Inequalities of Hardy-type and their Limiting Inequalities: PhD thesis, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, 17. - 2003. - 106 p.

72. Okpoti C.A., Persson L-E., Wedestig A. Scales of weight characterizations for the discrete Hardy and Carleman type inequalities //Proc. Conf. "Function spaces, Differential operators and Nonlinear Analysis", FSDONA 2004 (Milovy, May 28-Jun 2, 2004), Math. Inst. Acad. Sci. Chech Republic. - Prague, 2005. -P. 236-258.

73. Okpoti C.A., Persson L-E., Wedestig A. Weighted characterizations for the discrete Hardy inequality with kernel //J. Inequal. Appl. - 2006, Art. ID 18030. - 14 p.

74. Lorentz G.G. On the theory of spaces Λ //Pacific J. Math. - 1951. -№ 1. -P. 411-429.

75. Asekritova I.U., Krugljak N.Ya., Maligranda L., Persson L.-E. Distribution and rearrangement estimates of the maximal function and interpolation //Studia Math. - 1997. - Vol. 124, № 2. - P. 107-132.

76. Bennett C., Rudnick K. On Lorentz-Zygmund spaces: Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 175. - 1980. - 67 p.

77. Ariño M., Muckenhoupt B. Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for non-increasing functions //Trans. Amer. Math. Soc. - 1990. -Vol. 320, № 2. - P. 727-735.

78. Boyd D.W. The Hilbert transform on rearrangement-invariant spaces //Canad. J. Math. - 1967. - № 19. -P. 599-616.

79. Крейн С.Г., Петунин Ю.И. Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. - М: Наука, 1978. - 400 с.

80. Stepanov V.D. The weighted Hardy's inequality for non-increasing functions //Trans. Amer. Math. Soc. - 1993. -Vol. 338, № 1. -P. 173-186.

81. Carro M.J., Soria J. Boundedness of some integral operators //Canad. J. Math. - 1993. - Vol. 45, № 6. -P. 1155-1166.

82. Heinig H.P., Maligranda L. Interpolation with weights in Orlicz spaces //Boll. Un. Mat. Ital. B (7) - 1994. - Vol. 8, № 1. -P. 37-55.

83. Edmunds D.E., Kerman R., Pick L. Optimal Sobolev imbeddings involving rearrangement-invariant quasinorms //J. Funct. Anal. -2000. - № 170. -P. 307-355.

84. Kamińska A., Mastylo M., Duality and classical operators in function spaces. Technical Report, Adam Mickiewicz University. - 2001. - Vol. 112. - P. 1-30.

85. Stepanov V.D. Integral operators on the cone of monotone functions //J. London Math. Soc. -1994. № 26. -P. 283-287.

86. Stepanov V.D. On integral operators on the cone of monotone functions, and on embeddings of Lorentz spaces //Soviet. Math. Dokl. - 1991. - № 43. -P. 620-623.

87. Carro M.J., Soria J. Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator //J. Funct. Anal. - 1993. - Vol. 112, № 2. - P. 480-494.

88. Carro M.J., Soria J. The Hardy - Littlewood maximal function and weighted Lorentz spaces //J. London Math. Soc. - 1997. - № 55. -P. 581-587.

89. Goldman M.L. On integral inequalities on a cone of functions with monotonicity properties // Soviet. Math. Dokl. - 1992. - № 44. -P. 581-587.

90. Goldman M.L. On integral inequalities on a set of functions with some properties of monotonicity // Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis, Teubner. Leipzig. - 1993. -P. 274-279.

91. Goldman M.L., Heinig H.P., Stepanov V.D. On the principle of duality in Lorentz spaces //Canad. J. Math. - 1996. -Vol. 48, № 5. -P. 959-979.

92. Neugebauer C.J. Weighted norm inequalities for averaging operators of monotone functions //Publ. Mat. - 1991. - Vol. 35, № 2. -P. 429-447.

93. Tong Y.L. Relationship between stochastic inequalities and some classical mathematical inequalities //J. Inequal. Appl. - 1996. - № 1. -P. 85-98.

94. Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta. Sci. Math. - 1970. - № 31. -P. 279-285.

95. Nemeth J. Generalizations of the Hardy-Littlewood inequality. II // Acta Sci. Math. (Szeged). - 1994. - № 35. -P. 127-134.

96. Cass F.P., Kratz W. Nörlund and weighted mean matrices as bounded operators on l_p //Rocky Mountain J. Math. - 1990. - № 20. -P. 59-74.

97. Johnson P.D., Mohapatra R.N., David Ross. Bounds for the operator norms of some Nörlund matrices //Proc. Amer. Math. Soc. - 1996. - Vol. 124, № 2. -P. 543-547.

98. Goldman M.L. Hardy type inequalities on the cone of quasimonotone functions: Res. Rep. 98/31. Khabarovsk: Russ. Acad. Sci. Far-East Branch Comput. Center, 1998.

99. Goldman M.L. Order-sharp estimates for Hardy-type operators on cones of quasimonotone functions //Eurasian Math. J. - 2011. -Vol. 2, № 3. -P. 143-146.

100. Bennett G., Grosse-Erdmann K.-G. On series of positive terms // Houston J. Math. - 2005. - Vol. 31, № 2. -P. 541-585.

101. Bergh J., Burenkov V., Persson L.-E. Best constants in reversed Hardy's inequalities for quasimonotone functions //Acta Sci. Math. (Szeged) - 1994. -Vol. 59, № 1-2. -P. 221-239.

102. Bergh J., Burenkov V., Persson L.-E. On some sharp reversed Hölder and Hardy type inequalities //Math. Nachr. - 1994. - № 169. -P. 19-29.

103. Carro M.J., Pick L., Soria J., Stepanov V.D. On embeddings between classical Lorentz spaces //Math. Inequal. Appl. - 2001. - Vol. 4, № 3. -P. 397-428.

104. Heinig H.P., Maligranda L. Weighted inequalities for monotone and concave functions //Studia Math. - 1995. - Vol. 116, No. 2. -P. 133-165.

105. Johansson M., StepanovV.D.,. Ushakova E.P. Hardy inequality with three measures on monotone functions //Math. Inequal. Appl. - 2008. - Vol. 11, № 3. -P. 393-413.

106. Myasnikov E.A., Persson L.-E., Stepanov V.D. On the best constants in certain integral inequalities for monotone functions //Acta Sci. Math. (Szeged) - 1994. - Vol. 59, № 3-4. -P. 613-624.

107. Persson L.-E., Stepanov V.D., Ushakova E.P. Equivalence of Hardy type inequalities with general measures on the cones of non-negative respective non-increasing functions //Proc. Amer. Math. Soc. - 2006. - Vol. 134, № 8. -P. 2363-2372.

108. Sinnamon G. Transferring monotonicity in weighted norm inequalities //Collect. Math. - 2003. - Vol. 54, № 2. - P. 181-216.

109. Sinnamon G. Hardy's inequality and monotonocity //Function Spaces and Nonlinear Analysis (Eds.: P. Drábec and J. Rákosnik), Mathematical Institute of the Academy of Sciences of the Czech Republic. - Prague, 2005. - P. 292-310.

110. Sinnamon G. Spaces defined by the level function and their duals //Studia Math. - 1994. - Vol. 111, № 1. -P. 19-52.

111. Sinnamon G. The level function in rearrangement invariant spaces //Publ. Mat. - 2001. - Vol. 45, № 1. -P. 175-198.

112. Stepanov V.D. On the boundedness of linear integral operators on a class of monotone functions //Siberian Math. J. - 1991. - Vol. 32, № 3. - P. 540-542.

113. Stepanov V.D. Integral operators on the cone of monotone functions //J. London Math. Soc. (2) - 1993. - Vol. 48, № 3. -P. 465-487.

114. Gogatishvili A., Stepanov V.D. Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions. Preprint CRM-1067. - Barcelona, 2011.

115. Функциональный анализ, СМБ.Изд. - М: Наука, 1972. - 544 с.

116. Oinarov R., Temirkhanova A. Boundedness and compactness of a class of matrix operators in weighted sequence spaces //J. Math. Ineq. - 2008. - Vol. 2, № 4. -P. 555-570.

117. Hölder O. Grenzwerthe von Reihen an der Konvergenzgrenze //Math. Ann. -1882. - № 20. -P. 535-549.

118. Hardy G.H. Divergent series. Oxford Univ. Press 1949.

119. Ойнаров Р. Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора //Сборник тезисов. - Алматы. - 2000. -С. 111-115.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Ж.А. Таспаганбетова, А.М. Темирханова, Весовая оценка одного класса матричных операторов в Лебеговых пространствах последовательностей, Труды VI международной научной конференции молодых ученых. -Астана, 2009. -С.68-70.

2. Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova, Weighted estimates of one class of matrix operators in Lebesque spaces of sequences, Abstracts of the third congress of the world mathematical society of turkic countries. -Almaty, 2009. -P. 137.

3. Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova, Weighted estimates of one class of matrix operators in Lebesque spaces of sequences, Фундаментальная математика и её приложения в естествознании: тезисы докладов международной школы-конференции для студентов, аспирантов и молодых ученых. -Уфа, 2009. - С. 11.

4. Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova, Some new boundedness results for discrete Hardy type operators with kernel, Problems of differential equations, analysis and algebra: proceedings of the V international scientific conference. -Aktobe, 2009. - P. 310-312.

5. Boundedness criteria of a certain class of matrix operators, Ломоносов-2010: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. -Астана, 2010.-С.67-68.

6. Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova, Weighted additive estimate for a certain class of matrix operators, Ломоносов-2010: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. -Астана, 2010.-С.68-70.

7. Ж.А. Таспаганбетова, А.М. Темирханова, Ограниченность одного класса матричных операторов в Лебеговых пространствах последовательностей, Спектральная теория операторов и ее приложения: материалы международной конференции. -Уфа, 2011. -С. 80-82.

8. Zh. Taspaganbetova, Критерий ограниченности одного класса матричных операторов, Ломоносов-2011: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. -Астана,

2011.-С.86-88.

9. Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova, Criteria on Boundedness of matrix operators in weighted spaces of sequences and their applications, Annals of Functional Analysis, 2 (2011), no 1, -P. 114-127. 10. Zh. Taspaganbetova, A. Temirkhanova, Boundedness and compactness criteria of a certain class of matrix operators, Mathematical Journal,V 11, 2011, No. 2 (40), -P. 73-85.

11. Zh. Taspaganbetova, Boundedness and compactness of matrix operators in weighted spaces of sequences, Seminario Dottorato 2011/12, Universita di Padova - Dipartimento di Matematica, Scuole di Dottorato in Matematica Pura e Matematica Computa-zionale. -P. 36-45.

12. Zh. Taspaganbetova, Weighted estimate for a class of matrices on the cone of monotone sequences, Проблемы дифференциальных уравнений и математической физики: сборник научного семинара. -Актобе, 2012. -С. 286-287.

13. R. Oinarov, Zh. Taspaganbetova, Criteria of boundedness and compactness of a class of matrix operators, Journal of Inequalities and Applications 2012:53 (2012), 1-18. **Impact factor 0.82.**

14. Ж.А. Таспаганбетова, Весовые неравенства Харди на конусе монотонных последовательностей, Ломоносов-2012: тезисы докладов международной научной конференции студентов, магистрантов и молодых ученых. -Астана, 2012.-С.95-97.

15. Ж.А. Таспаганбетова, Ограниченность суперпозиции матричных операторов, Функциональный анализ и его приложения: сборник международной научной конференции. -Астана, 2012. -С. 250.

16. Zh. Taspaganbetova, Two-sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences, Problems of differential equations, analysis and algebra: proceedings of the VI international scientific conference. -Aktobe, 2012. -P. 288-290.

17. Zh. Taspaganbetova, Weighted Hardy type inequalities on the cone of monotone sequences, Mathematical Journal,V 12, 2012, No. 4 (46), 115-125.

18. Zh. Taspaganbetova, Weighted estimate for a class of matrices on the cone of monotone sequences, Eurasian mathematical journal, V 3, 2012, No. 4,

137-146.

19. Zh. Taspaganbetova, Hardy type inequalities on the cone of monotone sequences, Seminario Dottorato 2012/13, Universita di Padova - Dipartimento di Matematica, Scuole di Dottorato in Matematica Pura e Matematica Computazionale. 52-57.

20. Zh. Taspaganbetova, Two-sided estimates for matrix operators on the cone of monotone sequences, J. Math. Anal. Appl. V 410 (2014) 82-93. **Impact factor 1.050.**