Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 519.62/.64 На правах рукописи

ТЕМИРБЕКОВА ЛАУРА НУРЛАНОВНА

Численные методы решения уравнения Гельфанда – Левитана

6D060100-Математика

Диссертация на соискание ученой степени

доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты
доктор физ.- мат. наук, профессор
М.А. Бектемесов
канд. физ.- мат. наук, доцент
Г. Даирбаева
Зарубежный научный консультант
член-корреспондент РАН,
доктор физ.- мат. наук, профессор
С.И. Кабанихин

Республика Казахстан
Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

N - множество всех натуральных чисел;
R - множество всех вещественных чисел;
$R_+ = \{x \in R : x > 0\}$ - множество вещественных положительных чисел;
E - линейное топологическое пространство;
$W_k^p(\mathrm{G})$ - пространство Соболева, $k, p \in N, H^p(G) = W_2^p(G), H^0(G) = L_2(G)$;
$\theta(x)$ - тэта - функция Хевисайда;
$\delta(x)$ - дельта - функция Дирака;
$A : Q \to F$ - оператор, действующий из пространства Q в пространство F;
A^* - оператор, сопряженный к оператору A;
$D(\mathrm{A})$ - область определения оператора A, $D(A) \subseteq Q$;
$R(\mathrm{A})$ - область значения оператора A, $R(A) \subseteq F$;
A^{-1} - оператор, обратный к оператору A, т.е. $AA^{-1} = I$.
I - тождественный оператор, т.е. для всех $q \in Q$, $Iq = q$.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Настоящая диссертационная работа посвящена разработке и анализу эффективных вычислительных алгоритмов для решения интегральных уравнений Гельфанда-Левитана, к которым сводятся обратные задачи для одномерных и двумерных дифференциальных уравнений.

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке и анализу эффективных вычислительных алгоритмов для решения интегральных уравнений Гельфанда-Левитана, к которым сводятся обратные задачи для одномерных и двумерных дифференциальных уравнений. Изучен алгоритм восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральным характеристикам (1.1.1). Согласно методу Гельфанда-Левитана ядро оператора преобразования удовлетворяет интегральному уравнению. Оператор Штурма-Лиувилля восстанавливается через спектральные данные. Но для нахождения спектральных данных известны только асимптотические формулы. Поэтому в данной работе рассмотрен разностный оператор Штурма-Лиувилля, для которого можно найти собственные значения и численно решать уравнение Гельфанда-Левитана (1.1.3).

Очень привлекательным является тот факт, что обобщенная задача с начальным условием в виде дельта - функции Дирака эквивалентна задаче Гурса. Построен алгоритм численного решения прямой задачи. Результат решения прямой задачи в методических расчетах используется как дополнительная информация для обратной задачи (1.2.2).

Рассмотрен метод сведения коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана первого и второго рода, основанный на аппарате теорий обобщенных функций, свойства функций типа свертки (1.2.5).

Для численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана, которая является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, применяется метод регуляризации М.М.Лаврентьева (3.1), в сочетании с методами сопряженных градиентов (3.2), Ландвебера и прямым методом квадратного корня (2). Приведены расчетные формулы для этих методов и составлены программы для численных расчетов. Проведен сравнительный анализ предложенных методов, по результатам которого показано эффективность разработанного численного метода сопряженных градиентов (3.3). Как приложение в работе исследованы результаты экспедиционных исследований по геохимии и минералогии рыхлых отложений месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы. В инженерной лаборатории проведены аналитические исследования ICP-MS спектроскопии отобранных проб на 70 элементов. Полученные числовые данные обработаны и проанализированы с помощью программных продуктов.

Разработана математическая модель и метод численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли. Для этих целей была разработана математическая модель обратной задачи на основе на обобщенного уравнения Гельфанда-Левитана (5).

Актуальность работы. Работа посвящена коэффициентным обратным задачам для гиперболических уравнений, которые приводят к исследованию численных методов решения уравнения Гельфанда-Левитана. Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений и систем уравнений по некоторой дополнительной информации об их решении представляют собой бурно развивающееся и актуальное научное направление в современной математической физике, в вычислительной и прикладной математике. Значительный интерес к обратным задачам для гиперболического уравнения главным образом обусловлен необходимостью решения актуальных проблем геофизики, медицинской диагностики, компьютерной томографии и т.д.

Важнейшее значение для развития человечества имеет разработка современных методов исследования недр Земли. Математическим вопросам поиска полезных ископаемых посвящена работа А.Н.Тихонова, А.В.Гончарского [1]. Все обратные задачи сейсмики, электроразведки гравиметрии, магнитотеллурического зондирования относятся к некорректным задачам. Используемые алгоритмы регуляризации позволяют надежно интерпретировать полевые данные различных методов разведочной геофизики. На их основе создаются автоматизированные системы обработки, позволяющие поставить задачу интерпретации результатов геофизических исследований на индустриальную основу и резко повысить эффективность геофизических методов поиска полезных ископаемых.

В современной математике все задачи условно делят на корректно и некорректно поставленные. Впервые обратные и некорректные задачи появились в первой половине двадцатого века. Ж.Адамар, который ввел понятия корректности и некорректности задачи, высказал предположение, что некорректные задачи не имеют физического смысла, то есть если уравнение, описывающее некоторую прикладную задачу, является некорректным, то эта задача является искусственной (нереальной), или она описана математически неадекватно [2]. Например, задача, решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода некорректна. Для того чтобы она стала корректной необходимо накладывать ряд ограничений на ее решение. Поскольку, как выяснилось в последние десятилетия, значительная часть прикладных задач является некорректными, то утверждение Ж.Адамара привело к замедлению развития многих разделов чистой и прикладной математики. С появлением мощных суперкомпьютеров область приложений обратных и некорректных задач охватила практически все научные направления, в которых используются математические методы. Применение обратных и некорректных задач в основном связаны с геофизикой (обратные задачи электроразведки, каротажа, сейсмики, теории потенциала и т.д.), астрономией, медициной и другими областями науки.

В прямых задачах математической физики необходимо найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления, например, распространение звука, тепла, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и так далее. При этом свойства исследуемой среды (коэффициенты уравнений), а также начальное состояние процесса (в нестационарном случае) или его свойства на границе (в случае ограниченной области и/или в стационарном случае) предполагаются известными. Однако в природе именно свойства среды часто являются неизвестными. И тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. Все обратные задачи в большинстве случаев приводят к некорректным задачам (они неустойчивы по отношению к изменениям данных).

Теория приближенного решения некорректных задач сформировалась как самостоятельная ветвь вычислительной математики только после того, как А.Н.Тихонов [3] сформулировал понятие регуляризующего алгоритма. Только после работ А.Н.Тихонова стало ясно, что:

- явление неустойчивости решений типично для любых обратных задач;
- без использования специальных (регуляризующих) методов эти задачи практически не решаются;
- построение приближенных решений обратных задач должно строиться на основе учета априорной информации о свойствах искомого решения и ошибках в наблюденных данных (помехи) и быть согласованным с этой информацией.

Однако общих суждений о необходимости строить приближенные решения с учетом априорной информации о свойствах искомого решения и помехи явно недостаточно. Нужны конкретные конструктивные методы построения решений, причем в самых различных задачах, линейных и нелинейных. Основной для построения таких методов является общий принцип регуляризации, сформулированный А.Н.Тихоновым.

Первые результаты по обратной задаче Штурма-Лиувилля были получены В.А.Амбарцумяном в 1929 г. и Г.Боргом в 1945 г. Интенсивно теория обратной задачи Штурма-Лиувилля начала развиваться в 50-х годах. Фундаментальную роль в ее изучении сыграли работы И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана [4], М.Г.Крейна [5], В.А.Марченко [6]. В работе [4,с.309-360] рассматривается спектральный вариант постановки, даются методы восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции. Решение этой обратной задачи сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения, называемого в современной математике уравнением Гельфанда-Левитана. Большую роль в привлечении внимания математиков к спектральной теории дифференциальных операторов сыграла монография Е.Ч.Титчмарша [7-8], в которой дан новый подход к теории сингулярных операторов второго порядка и поставлен (частично под влиянием задач квантовой механики) и решен целый ряд новых задач. В книге Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна [9] излагаются основные вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и систем двух уравнений первого порядка. Также рассмотрены отдельные важные вопросы, относящиеся к спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Цель монографии В.А.Марченко [6, с.1-

329], состоит главным образом в том, чтобы показать, чего можно достичь с помощью операторов преобразования, как в спектральной теории, так и в ее нетрадиционных приложениях. В данной монографии кроме традиционных вопросов, рассмотрены приложения операторов преобразования и задачи, связанные с применением спектральной теории к нелинейным уравнениям. Монография Б.М.Левитана [10] посвящена изложению теории обратных задач спектрального анализа на примере уравнения Штурма-Лиувилля, для которого обратные задачи изучены наиболее полно. В книге Б.И.Левитана, И.С.Саргсяна [11] излагаются основные вопросы спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля и одномерного оператора Дирака, а именно: асимптотика собственных значений и собственных функций, разложения по собственным функциям, исследование спектра, асимптотическое распределение собственных значений, вычисление регуляризированных следов, решение обратных задач.

Основные методы решения обратных спектральных задач являются: метод оператора преобразования, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга. Метод оператора преобразования сыграл важную роль в спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля. В этом методе обратная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения. Но этот метод оказался неудобным для многих важных классов обратных задач более сложных, чем обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Более универсальным инструментом является метод спектральных отображений, связанный с развитием идей метода контурного интеграла. Этот метод позволяет исследовать обратные задачи для широкого класса операторов. В настоящее время метод спектральных отображений представляет наиболее универсальным инструментом в теории обратных задач. Для оператора Штурма - Лиувилля метод спектральных отображений дает те же результаты, что и метод оператора преобразования. Еще одним методом, применяемым в решении обратных спектральных задачах, является так называемый метод эталонных моделей, заключающаяся на построении последовательности модельных операторов, аппроксимирующая искомый неизвестный оператор. В методе Борга, обратная задача Штурма-Лиувилля сводится к решению специального нелинейного интегрального уравнения, что дает возможность строить локальное решение обратной задачи и исследовать устойчивость ее решения.

Математической предпосылкой развития теории коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений послужила работа И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана. Статья М.Г.Крейна [12] описывает метод эффективного решения обратной краевой задачи. Так же среди ранее полученных наиболее важных результатов по определению коэффициента одномерной обратной задачи для уравнения гиперболического типа является монография В.Г.Романова [13], в которой изложены обратные задачи для уравнений математической физики, основным объектом исследования, которого является вопросы определения коэффициентов дифференциального уравнения по некоторым функционалам от его решения. В обратных задачах для гиперболических уравнений получен ряд теоретических результатов и разработаны различные методы их решения. В работе С.И.Кабанихина [14] предложены проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. В монографии С.И.Кабанихина [15] изложены результаты изучения прямой и обратной задачи с распределенными начальными данными, задача с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа. Доказана разрешимость в целом обратной задачи для уравнения гиперболического типа. Решение обратной задачи приводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, которое является некорректным. Определение решения этого уравнения в виде ряда возможно лишь в случае, когда заданы собственные значения и собственные функции. Это возможно в исключительных случаях, когда ядро интегрального уравнения вещественно и симметрично. Поэтому численное решение задач такого вида является актуальным и применяются следующие семейства методов численного решения:

- дискретизация интегрального уравнения Фредгольма первого рода в сочетании с методом регуляризации А.Н.Тихонова [15,с.52-60] или М.М.Лаврентьева [16-17];
- итеративная регуляризация с применением градиентных методов для некорректных задач;
- сингулярное разложение оператора в сочетании с регуляризацией.

В работах Б.С.Парийского [18-19] предложены экономичные методы численного решения уравнений Фредгольма второго рода с положительно определенным ядром. Выясняется также, какие монотонные функции могут служить спектральными функциями дифференциального уравнения второго порядка. Книга А.Н.Тихонова, В.Я.Арсенина [20] посвящена методам построения устойчивых приближенных решений широкого класса некорректно поставленных математических задач. К этому классу задач относится большой круг так называемых обратных задач, к которым приводят проблемы обработки и интерпретации экспериментальных наблюдений. Освещаются вопросы нахождения обобщенных решений обратных задач, так как в классической постановке эти задачи могут не иметь решений.

С подробной библиографией работ по двумерным коэффициентным обратным задачам для уравнения гиперболического типа можно ознакомиться в монографиях В.Г.Романова [13, с.22-106] и С.И. Кабанихина [15, с.334-341; 21]. Отметим, что из результатов В.Г.Романова [22] для двумерной обратной задачи для гиперболического уравнения следует теорема о локальной однозначной разрешимости и теорема единственности в классе функции, аналитических по одной и непрерывных по другой переменной. А.С.Благовещенский в своей работе [23] дает доказательство фундаментальных результатов М.Г.Крейна по теории краевых обратных задач для уравнения струны. Для многомерной постановки необходимо отметить подход к определению коэффициента для волнового уравнения, изложенный в работе М.И.Белишева [24]. Статья А.С.Благовещенского и М.И.Белишева [25] посвящена некоторым аспектам теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, описывающих, главным образом, волновые процессы. В выше упомянутой работе излагаются некоторые результаты, связанные с применением многомерных аналогов уравнения Гельфанда-Левитана (интегральных, сокращенно МАУГЛИ) и М.Г.Крейна к обратным начально-краевым задачам теории распространения волн. Методика исследования в существенном использует: 1) идею локальности, основанную на конечности скорости распространения; 2) связь обратных задач с теорией граничного управления. Статья С.И.Кабанихина [21, с.791-795] посвящена линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. С.И.Кабанихиным и Г.Б.Бакановым [26] был исследован дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения.

Данная диссертационная работа посвящена разработке численных методов решения коэффициентной обратной задачи с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа входящих в вышеприведенные группы. При использовании схем регуляризации М.М.Лаврентьева или А.Н.Тихонова приближенное решение находится из систем уравнении с положительно определенной и хорошо обусловленной матрицей. Разработан и численно реализован итерационный метод с регуляризацией М.М.Лаврентьева [16, с.1-75]. Показано, что наиболее оптимальный из градиентных методов решения операторного уравнения – метод сопряженных градиентов, а экономичный и устойчивый метод квадратного корня.

Следует отметить что, исследование в области обратных и некорректных задач также ведутся учеными Казахстана. Например, работы С.А.Атанбаева [27 - 28], С.И.Темирбулатова [29], М.О.Отелбаева [30], М.О.Отелбаева и Б.Рысбайулы [31], С.Елубаева [32], Е.Ы.Бидайбекова [33], Т.Ш.Кальменова [34 - 35], Г.Б. Баканова [36], К.Т. Искакова [37], М.А.Бектемесова и Д.Б. Нурсеитова [38 - 39], Б.Е.Кангужина [40], А.Т.Нурсеитовой [41] а так же многими другими.

Научная новизна работы. В настоящей работе получены следующие результаты:

- теорема сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения;
- выбор эффективных параметров в методе регуляризации М.М. Лаврентьева;
- численный алгоритм решения одномерного дискретизированного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода, методом сопряжённых градиентов, методом итераций Ландвебера;
- численный алгоритм решения одномерного дискретизированного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода, основанный на методе квадратного корня;
- программные коды для решения одномерного дискретизированного

уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода разработанными методами;

- получены численные результаты решения двумерной коэффициентной обратной задачи методами сопряженных градиентов, Ландвебера и квадратного корня;

- разработана математическая модель и метод численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли обобщенными уравнениями Гельфанда-Левитана.

Цель и объекты исследования. Целью диссертации является разработка эффективных вычислительных алгоритмов на основе сочетания метода регуляризации М.М.Лаврентьева с градиентными методами и прямым методом для решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана. Эффективный выбор параметра регуляризации. Доказательство сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной задачи. Реализация этих численных методов в виде программ современными вычислительными средствами. Проведение сравнительного анализа разработанных численных методов для решения рассматриваемых задач.

Разработка численного метода решения двумерного уравнения Гельфанда - Левитана градиентными методами и методом квадратного корня в сочетании с методом регуляризации М.М.Лаврентьева.

Обработка и анализ числовых данных, полученных в инженерной лаборатории при проведении аналитических исследований ICP-MS спектроскопии, отобранных проб на 70 элементов, которые получены в экспедиционных исследованиях по геохимии и минералогии рыхлых отложений месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы, с помощью программных продуктов.

Разработка математической модели на основе обобщенного уравнения Гельфанда-Левитана и метода численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли. Использование высокопроизводительных вычислительных комплексов и представление результатов численных расчетов с помощью современных графических редакторов.

Методы исследования. В диссертации используются метод априорных оценок для доказательства сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной задачи, численные методы решения некорректных задач, прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений, итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Теоретические исследования, проводимые по теме диссертации, вносят большой вклад в развитие численного решения обратных и некорректных задач. Практическая значимость работы состоит в том, что алгоритмы регуляризации позволяют надежно интерпретировать полевые данные различных методов разведочной геофизики, позволяют создать автоматизированные системы обработки, дающие воможность интерпретации результатов геофизических исследований на индустриальную основу и резко повысить эффективность геофизических методов поиска полезных ископаемых.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались автором на III международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, Академгородок, 10-15 октября 2011 г.), на VI международной конференции "Inverse Problems: Modeling and Simulation" (с 21 по 26 мая 2012 года в г.Анталия, Турция), на международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения» посвященной 70-летию лауреата государственной премии Республики Казахстан, академика Национальной Академии наук РК М. Отелбаева (г. Астана, 2-5 октября 2012 г.), в форме доклада в институте математики имени С.Л.Соболева СО РАН 15 июня 2013 г., в лаборатории математических задач геофизики ИВМ и МГ СО РАН (зав. лаб. член-корр. РАН С.И. Кабанихин), в объединенном семинаре «Современные научные проблемы математики, механики и информационных технологий» под руководством академика НИА РК, д.ф.-м.н., профессора Н.Т. Данаева, на городском семинаре при кафедре фундаментальной математики «Спектральная теория линейных операторов и ее приложения» под руководством академика НАН РК, д.ф.-м.н. Т.Ш.Кальменова, д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Кангужина, чл.-корр. НАН РК М.А.Садыбекова.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0112РК01468.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 12 работ, из них 4 статьи - из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 1- статья в научном журнале Вестник ВКГТУ им.Д. Серикбаева, 2 - из списка, в базе данных ТОМСОН РЕЙТЕР с импакт-фактором 0,75, 5 - в трудах международных конференций, в том числе 2 зарубежных.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа написана в виде рукописи на русском языке, состоит из введения и пяти разделов, которые разбиты на подразделы, заключения и списка литературы. Работа изложена на 109-и страницах, содержит 63 рисунка и 8 таблиц. Список использованных источников содержит 95 наименований.

Основное содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы, указана цель и научная новизна исследования.

В первом разделе изложен вывод уравнения Гельфанда-Левитана. Первый подраздел раздела один посвящен методу Гельфанда-Левитана для спектральной задачи. Описаны основные результаты, которые были получены для разрешимости обратной задачи Штурма - Лиувилля и конструктивный способ построения оператора, который был предложен И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном [4, с. 309-360] в 1951 году. Рассматривается разностный аналог операторов Штурма-Лиувилля, который позволяет найти собственные значения этого оператора и тем самым вычислить функцию $F(x,t)$, после чего уравнение Гельфанда-Левитана можно решать эффективными численными методами. Численно, решена тестовая задача на нахождении собственных значений для оператора $l_q = \partial_x^2 - q(x)$.

Второй подраздел раздела один посвящен обратной коэффициентной задаче для гиперболических уравнений. Дана постановка прямой и обратной задачи с сосредоточенным источником. Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения задачи Коши. Показано сведение прямой задачи к классической задаче Гурса, которая численно решена конечно-разностным методом. Проведено сведение коэффициентной обратной задачи к интегральному уравнению Гельфанда-Левитана первого и второго рода.

Во втором разделе описывается прямой метод квадратного корня для численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана.

Третий раздел посвящен регуляризации и градиентным методам. Описаны методы регуляризации М.М.Лаврентьева, метод итерации Ландвебера и метод сопряженных градиентов. Полностью описываются полученные численные результаты методом квадратного корня и градиентными методами. Результаты численных экспериментов показаны в виде графиков и сравнительных таблиц по таким параметрам как количество итерации, норма погрешности и количество машинного времени.

Четвертый раздел посвящен двумерному аналогу уравнения Гельфанда-Левитана. Приведена постановка и решение двумерной коэффициентной обратной задачи. Так же получена дискретизация двумерного уравнения Гельфанда-Левитана. Проведен сравнительный анализ численных результатов.

В приложении приводятся сведения о получении фундаментальных знаний о закономерностях пространственного распределения химических элементов в пределах Рудного Алтая и Калбы на основе высокоточных аналитических исследований, ICP-MS спектроскопии, с параллельным использованием математических методов прогноза с обработкой новейшими программными продуктами.

Автор выражает благодарность зарубежному научному консультанту член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессору Кабанихину С.И. за поставленную задачу и отечественным научным консультантам д.ф.-м.н, профессору Бектемесову М.А. и к.ф.-м.н., доценту Даирбаевой Г. за плодотворную поддержку в работе над проблемой.