

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 519.62/.64

На правах рукописи

ТЕМИРБЕКОВА ЛАУРА НУРЛАНОВНА

Численные методы решения уравнения Гельфанда – Левитана

6D060100-Математика

Диссертация на соискание ученой степени

доктора философии (PhD)

Отечественные научные консультанты
доктор физ.- мат. наук, профессор
М.А. Бектемесов
канд. физ.- мат. наук, доцент
Г. Даирбаева
Зарубежный научный консультант
член-корреспондент РАН,
доктор физ.- мат. наук, профессор
С.И. Кабанихин

Республика Казахстан
Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....	3
ВВЕДЕНИЕ	4
1 ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА (СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ)	13
1.1 Метод Гельфанда-Левитана для спектральной обратной задачи.....	13
1.1.1 Постановка задачи.....	13
1.1.2 Метод Гельфанда - Левитана.....	16
1.1.3 Численное решение обратной задачи Штурма-Лиувилля.....	18
1.1.4 Численные решения для тестовых примеров.....	23
1.2 Коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения.....	25
1.2.1 Постановка прямой и обратной задачи с сосредоточенным источником.....	25
1.2.2 Численное решение прямой задачи с сосредоточенным источником.....	29
1.2.3 Решение прямой задачи с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа с заменой $\delta(x)$ - дельта функции Дирака, функцией удовлетворяющей некоторым ее свойствам.....	31
1.2.4 Построение примера для численного расчета.....	33
1.2.5 Сведение коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана первого рода.....	35
1.2.6 Сведение коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана второго рода.....	43
2 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ.....	46
2.1 Метод квадратного корня.....	46
3 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ.....	48
3.1 Метод регуляризации М.М. Лаврентьева	48
3.2 Метод сопряженных градиентов.....	49
3.3 Сравнительный анализ численных результатов для одномерного уравнения Гельфанда-Левитана.....	51
4 ДВУМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА..	69
4.1 Постановка и решение двумерной коэффициентной обратной задачи.....	69
4.2 Дискретизация двумерного уравнения Гельфанда - Левитана.....	73
4.3 Сравнительный анализ численных результатов для двумерного уравнения Гельфанда-Левитана.....	75
5 ВЫДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЯВЛЕННЫХ В РУДНОАЛТАЙСКОМ И КАЛБИНСКОМ РЕГИОНАХ ...	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	102
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	104

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- N - множество всех натуральных чисел;
 R - множество всех вещественных чисел;
 $R_+ = \{x \in R : x > 0\}$ - множество вещественных положительных чисел;
 E - линейное топологическое пространство;
 $W_k^p(G)$ - пространство Соболева, $k, p \in N$, $H^p(G) = W_2^p(G)$, $H^0(G) = L_2(G)$;
 $\theta(x)$ - тэта - функция Хевисайда;
 $\delta(x)$ - дельта - функция Дирака;
 $A: Q \rightarrow F$ - оператор, действующий из пространства Q в пространство F ;
 A^* - оператор, сопряженный к оператору A ;
 $D(A)$ - область определения оператора A , $D(A) \subseteq Q$;
 $R(A)$ - область значения оператора A , $R(A) \subseteq F$;
 A^{-1} - оператор, обратный к оператору A , т.е. $AA^{-1} = I$.
 I - тождественный оператор, т.е. для всех $q \in Q$, $Iq = q$.

ВВЕДЕНИЕ

Общая характеристика работы. Настоящая диссертационная работа посвящена разработке и анализу эффективных вычислительных алгоритмов для решения интегральных уравнений Гельфанда-Левитана, к которым сводятся обратные задачи для одномерных и двумерных дифференциальных уравнений.

Настоящая диссертационная работа посвящена разработке и анализу эффективных вычислительных алгоритмов для решения интегральных уравнений Гельфанда-Левитана, к которым сводятся обратные задачи для одномерных и двумерных дифференциальных уравнений. Изучен алгоритм восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральным характеристикам (1.1.1). Согласно методу Гельфанда-Левитана ядро оператора преобразования удовлетворяет интегральному уравнению. Оператор Штурма-Лиувилля восстанавливается через спектральные данные. Но для нахождения спектральных данных известны только асимптотические формулы. Поэтому в данной работе рассмотрен разностный оператор Штурма-Лиувилля, для которого можно найти собственные значения и численно решать уравнение Гельфанда-Левитана (1.1.3).

Очень привлекательным является тот факт, что обобщенная задача с начальным условием в виде дельта - функции Дирака эквивалентна задаче Гурса. Построен алгоритм численного решения прямой задачи. Результат решения прямой задачи в методических расчетах используется как дополнительная информация для обратной задачи (1.2.2).

Рассмотрен метод сведения коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана первого и второго рода, основанный на аппарате теорий обобщенных функций, свойства функций типа свертки (1.2.5).

Для численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана, которая является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, применяется метод регуляризации М.М.Лаврентьева (3.1), в сочетании с методами сопряженных градиентов (3.2), Ландвебера и прямым методом квадратного корня (2). Приведены расчетные формулы для этих методов и составлены программы для численных расчетов. Проведен сравнительный анализ предложенных методов, по результатам которого показано эффективность разработанного численного метода сопряженных градиентов (3.3). Как приложение в работе исследованы результаты экспедиционных исследований по геохимии и минералогии рыхлых отложений месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы. В инженерной лаборатории проведены аналитические исследования ICP-MS спектроскопии отобранных проб на 70 элементов. Полученные числовые данные обработаны и проанализированы с помощью программных продуктов.

Разработана математическая модель и метод численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли. Для этих целей была разработана математическая модель обратной задачи на основе обобщенного уравнения Гельфанда-Левитана (5).

Актуальность работы. Работа посвящена коэффициентным обратным задачам для гиперболических уравнений, которые приводят к исследованию численных методов решения уравнения Гельфанда-Левитана. Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений и систем уравнений по некоторой дополнительной информации об их решении представляют собой бурно развивающееся и актуальное научное направление в современной математической физике, в вычислительной и прикладной математике. Значительный интерес к обратным задачам для гиперболического уравнения главным образом обусловлен необходимостью решения актуальных проблем геофизики, медицинской диагностики, компьютерной томографии и т.д.

Важнейшее значение для развития человечества имеет разработка современных методов исследования недр Земли. Математическим вопросам поиска полезных ископаемых посвящена работа А.Н.Тихонова, А.В.Гончарского [1]. Все обратные задачи сейсмологии, электроразведки гравиметрии, магнитотеллурического зондирования относятся к некорректным задачам. Используемые алгоритмы регуляризации позволяют надежно интерпретировать полевые данные различных методов разведочной геофизики. На их основе создаются автоматизированные системы обработки, позволяющие поставить задачу интерпретации результатов геофизических исследований на индустриальную основу и резко повысить эффективность геофизических методов поиска полезных ископаемых.

В современной математике все задачи условно делят на корректно и некорректно поставленные. Впервые обратные и некорректные задачи появились в первой половине двадцатого века. Ж.Адамар, который ввел понятия корректности и некорректности задачи, высказал предположение, что некорректные задачи не имеют физического смысла, то есть если уравнение, описывающее некоторую прикладную задачу, является некорректным, то эта задача является искусственной (нереальной), или она описана математически неадекватно [2]. Например, задача, решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода некорректна. Для того чтобы она стала корректной необходимо накладывать ряд ограничений на ее решение. Поскольку, как выяснилось в последние десятилетия, значительная часть прикладных задач является некорректными, то утверждение Ж.Адамара привело к замедлению развития многих разделов чистой и прикладной математики. С появлением мощных суперкомпьютеров область приложений обратных и некорректных задач охватила практически все научные направления, в которых используются математические методы. Применение обратных и некорректных задач в основном связано с геофизикой (обратные задачи электроразведки, каротажа, сейсмологии, теории потенциала и т.д.), астрономией, медициной и другими областями науки.

В прямых задачах математической физики необходимо найти (в явной форме или приближенно) функции, описывающие различные физические явления, например, распространение звука, тепла, сейсмических колебаний, электромагнитных волн и так далее. При этом свойства исследуемой среды

(коэффициенты уравнений), а также начальное состояние процесса (в нестационарном случае) или его свойства на границе (в случае ограниченной области и/или в стационарном случае) предполагаются известными. Однако в природе именно свойства среды часто являются неизвестными. И тогда возникают обратные задачи, в которых по информации о решении прямой задачи требуется определить коэффициенты уравнений. Все обратные задачи в большинстве случаев приводят к некорректным задачам (они неустойчивы по отношению к изменениям данных).

Теория приближенного решения некорректных задач сформировалась как самостоятельная ветвь вычислительной математики только после того, как А.Н.Тихонов [3] сформулировал понятие регуляризующего алгоритма. Только после работ А.Н.Тихонова стало ясно, что:

- явление неустойчивости решений типично для любых обратных задач;
- без использования специальных (регуляризующих) методов эти задачи практически не решаются;
- построение приближенных решений обратных задач должно строиться на основе учета априорной информации о свойствах искомого решения и ошибках в наблюдаемых данных (помехи) и быть согласованным с этой информацией.

Однако общих суждений о необходимости строить приближенные решения с учетом априорной информации о свойствах искомого решения и помехи явно недостаточно. Нужны конкретные конструктивные методы построения решений, причем в самых различных задачах, линейных и нелинейных. Основной для построения таких методов является общий принцип регуляризации, сформулированный А.Н.Тихоновым.

Первые результаты по обратной задаче Штурма-Лиувилля были получены В.А.Амбарцумяном в 1929 г. и Г.Боргом в 1945 г. Интенсивно теория обратной задачи Штурма-Лиувилля начала развиваться в 50-х годах. Фундаментальную роль в ее изучении сыграли работы И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана [4], М.Г.Крейна [5], В.А.Марченко [6]. В работе [4,с.309-360] рассматривается спектральный вариант постановки, даются методы восстановления дифференциального уравнения второго порядка по его спектральной функции. Решение этой обратной задачи сводится к решению некоторого линейного интегрального уравнения, называемого в современной математике уравнением Гельфанда-Левитана. Большую роль в привлечении внимания математиков к спектральной теории дифференциальных операторов сыграла монография Е.Ч.Титчмарша [7-8], в которой дан новый подход к теории сингулярных операторов второго порядка и поставлен (частично под влиянием задач квантовой механики) и решен целый ряд новых задач. В книге Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна [9] излагаются основные вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и систем двух уравнений первого порядка. Также рассмотрены отдельные важные вопросы, относящиеся к спектральной теории обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка. Цель монографии В.А.Марченко [6, с.1-

329], состоит главным образом в том, чтобы показать, чего можно достичь с помощью операторов преобразования, как в спектральной теории, так и в ее нетрадиционных приложениях. В данной монографии кроме традиционных вопросов, рассмотрены приложения операторов преобразования и задачи, связанные с применением спектральной теории к нелинейным уравнениям. Монография Б.М.Левитана [10] посвящена изложению теории обратных задач спектрального анализа на примере уравнения Штурма-Лиувилля, для которого обратные задачи изучены наиболее полно. В книге Б.И.Левитана, И.С.Саргсяна [11] излагаются основные вопросы спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля и одномерного оператора Дирака, а именно: асимптотика собственных значений и собственных функций, разложения по собственным функциям, исследование спектра, асимптотическое распределение собственных значений, вычисление регуляризованных следов, решение обратных задач.

Основные методы решения обратных спектральных задач являются: метод оператора преобразования, метод спектральных отображений, метод эталонных моделей, метод Борга. Метод оператора преобразования сыграл важную роль в спектральной теории оператора Штурма-Лиувилля. В этом методе обратная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения. Но этот метод оказался неудобным для многих важных классов обратных задач более сложных, чем обратные задачи для оператора Штурма-Лиувилля. Более универсальным инструментом является метод спектральных отображений, связанный с развитием идей метода контурного интеграла. Этот метод позволяет исследовать обратные задачи для широкого класса операторов. В настоящее время метод спектральных отображений представляет наиболее универсальным инструментом в теории обратных задач. Для оператора Штурма - Лиувилля метод спектральных отображений дает те же результаты, что и метод оператора преобразования. Еще одним методом, применяемым в решении обратных спектральных задачах, является так называемый метод эталонных моделей, заключающаяся на построении последовательности модельных операторов, аппроксимирующая искомым неизвестный оператор. В методе Борга, обратная задача Штурма-Лиувилля сводится к решению специального нелинейного интегрального уравнения, что дает возможность строить локальное решение обратной задачи и исследовать устойчивость ее решения.

Математической предпосылкой развития теории коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений послужила работа И.М.Гельфанда и Б.М.Левитана. Статья М.Г.Крейна [12] описывает метод эффективного решения обратной краевой задачи. Так же среди ранее полученных наиболее важных результатов по определению коэффициента одномерной обратной задачи для уравнения гиперболического типа является монография В.Г.Романова [13], в которой изложены обратные задачи для уравнений математической физики, основным объектом исследования, которого является вопросы определения коэффициентов дифференциального уравнения по некоторым функционалам от его решения. В обратных задачах

для гиперболических уравнений получен ряд теоретических результатов и разработаны различные методы их решения. В работе С.И.Кабанихина [14] предложены проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. В монографии С.И.Кабанихина [15] изложены результаты изучения прямой и обратной задачи с распределенными начальными данными, задача с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа. Доказана разрешимость в целом обратной задачи для уравнения гиперболического типа. Решение обратной задачи приводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода, которое является некорректным. Определение решения этого уравнения в виде ряда возможно лишь в случае, когда заданы собственные значения и собственные функции. Это возможно в исключительных случаях, когда ядро интегрального уравнения вещественно и симметрично. Поэтому численное решение задач такого вида является актуальным и применяются следующие семейства методов численного решения:

- дискретизация интегрального уравнения Фредгольма первого рода в сочетании с методом регуляризации А.Н.Тихонова [15,с.52-60] или М.М.Лаврентьева [16-17];

- итеративная регуляризация с применением градиентных методов для некорректных задач;

- сингулярное разложение оператора в сочетании с регуляризацией.

В работах Б.С.Парийского [18-19] предложены экономичные методы численного решения уравнений Фредгольма второго рода с положительно определенным ядром. Выясняется также, какие монотонные функции могут служить спектральными функциями дифференциального уравнения второго порядка. Книга А.Н.Тихонова, В.Я.Арсенина [20] посвящена методам построения устойчивых приближенных решений широкого класса некорректно поставленных математических задач. К этому классу задач относится большой круг так называемых обратных задач, к которым приводят проблемы обработки и интерпретации экспериментальных наблюдений. Освещаются вопросы нахождения обобщенных решений обратных задач, так как в классической постановке эти задачи могут не иметь решений.

С подробной библиографией работ по двумерным коэффициентным обратным задачам для уравнения гиперболического типа можно ознакомиться в монографиях В.Г.Романова [13, с.22-106] и С.И. Кабанихина [15, с.334-341; 21]. Отметим, что из результатов В.Г.Романова [22] для двумерной обратной задачи для гиперболического уравнения следует теорема о локальной однозначной разрешимости и теорема единственности в классе функции, аналитических по одной и непрерывных по другой переменной. А.С.Благовещенский в своей работе [23] дает доказательство фундаментальных результатов М.Г.Крейна по теории краевых обратных задач для уравнения струны. Для многомерной постановки необходимо отметить подход к определению коэффициента для волнового уравнения, изложенный в работе М.И.Белишева [24]. Статья А.С.Благовещенского и М.И.Белишева [25] посвящена некоторым аспектам

теории многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений, описывающих, главным образом, волновые процессы. В выше упомянутой работе излагаются некоторые результаты, связанные с применением многомерных аналогов уравнения Гельфанда-Левитана (интегральных, сокращенно МАУГЛИ) и М.Г.Крейна к обратным начально-краевым задачам теории распространения волн. Методика исследования в существенном использует: 1) идею локальности, основанную на конечности скорости распространения; 2) связь обратных задач с теорией граничного управления. Статья С.И.Кабанихина [21, с.791-795] посвящена линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений. С.И.Кабанихиным и Г.Б.Бакановым [26] был исследован дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения.

Данная диссертационная работа посвящена разработке численных методов решения коэффицентной обратной задачи с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа входящих в вышеприведенные группы. При использовании схем регуляризации М.М.Лаврентьева или А.Н.Тихонова приближенное решение находится из систем уравнений с положительно определенной и хорошо обусловленной матрицей. Разработан и численно реализован итерационный метод с регуляризацией М.М.Лаврентьева [16, с.1-75]. Показано, что наиболее оптимальный из градиентных методов решения операторного уравнения – метод сопряженных градиентов, а экономичный и устойчивый метод квадратного корня.

Следует отметить что, исследование в области обратных и некорректных задач также ведутся учеными Казахстана. Например, работы С.А.Атанбаева [27 - 28], С.И.Темирбулатова [29], М.О.Отелбаева [30], М.О.Отелбаева и Б.Рысбайулы [31], С.Елубаева [32], Е.Ы.Бидайбекова [33], Т.Ш.Кальменова [34 - 35], Г.Б. Баканова [36], К.Т. Искакова [37], М.А.Бектемесова и Д.Б. Нурсеитова [38 - 39], Б.Е.Кангужина [40], А.Т.Нурсеитовой [41] а так же многими другими.

Научная новизна работы. В настоящей работе получены следующие результаты:

- теорема сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной коэффицентной обратной задачи для гиперболического уравнения;
- выбор эффективных параметров в методе регуляризации М.М. Лаврентьева;
- численный алгоритм решения одномерного дискретизированного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода, методом сопряженных градиентов, методом итераций Ландвебера;
- численный алгоритм решения одномерного дискретизированного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода, основанный на методе квадратного корня;
- программные коды для решения одномерного дискретизированного

уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода разработанными методами;

- получены численные результаты решения двумерной коэффициентной обратной задачи методами сопряженных градиентов, Ландвебера и квадратного корня;

- разработана математическая модель и метод численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли обобщенными уравнениями Гельфанда-Левитана.

Цель и объекты исследования. Целью диссертации является разработка эффективных вычислительных алгоритмов на основе сочетания метода регуляризации М.М.Лаврентьева с градиентными методами и прямым методом для решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана. Эффективный выбор параметра регуляризации. Доказательство сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной задачи. Реализация этих численных методов в виде программ современными вычислительными средствами. Проведение сравнительного анализа разработанных численных методов для решения рассматриваемых задач.

Разработка численного метода решения двумерного уравнения Гельфанда - Левитана градиентными методами и методом квадратного корня в сочетании с методом регуляризации М.М.Лаврентьева.

Обработка и анализ числовых данных, полученных в инженерной лаборатории при проведении аналитических исследований ICP-MS спектроскопии, отобранных проб на 70 элементов, которые получены в экспедиционных исследованиях по геохимии и минералогии рыхлых отложений месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы, с помощью программных продуктов.

Разработка математической модели на основе обобщенного уравнения Гельфанда-Левитана и метода численного решения задачи о прогнозе химических элементов на уровнях ниже поверхности земли. Использование высокопроизводительных вычислительных комплексов и представление результатов численных расчетов с помощью современных графических редакторов.

Методы исследования. В диссертации используются метод априорных оценок для доказательства сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной задачи, численные методы решения некорректных задач, прямой метод решения систем линейных алгебраических уравнений, итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Теоретические исследования, проводимые по теме диссертации, вносят большой вклад в развитие численного решения обратных и некорректных задач. Практическая значимость работы состоит в том, что алгоритмы регуляризации позволяют надежно интерпретировать полевые данные различных методов разведочной геофизики, позволяют создать

автоматизированные системы обработки, дающие возможность интерпретации результатов геофизических исследований на индустриальную основу и резко повысить эффективность геофизических методов поиска полезных ископаемых.

Апробация работы. Результаты исследований докладывались автором на III международной молодежной научной школе-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач» (г. Новосибирск, Академгородок, 10-15 октября 2011 г.), на VI международной конференции "Inverse Problems: Modeling and Simulation" (с 21 по 26 мая 2012 года в г.Анталия, Турция), на международной научной конференции «Функциональный анализ и его приложения» посвященной 70-летию лауреата государственной премии Республики Казахстан, академика Национальной Академии наук РК М. Отелбаева (г. Астана, 2-5 октября 2012 г.), в форме доклада в институте математики имени С.Л.Соболева СО РАН 15 июня 2013 г., в лаборатории математических задач геофизики ИВМ и МГ СО РАН (зав. лаб. член-корр. РАН С.И. Кабанихин), в объединенном семинаре «Современные научные проблемы математики, механики и информационных технологий» под руководством академика НИА РК, д.ф.-м.н., профессора Н.Т. Данаева, на городском семинаре при кафедре фундаментальной математики «Спектральная теория линейных операторов и ее приложения» под руководством академика НАН РК, д.ф.-м.н. Т.Ш.Кальменова, д.ф.-м.н., проф. Б.Е. Кангужина, чл.-корр. НАН РК М.А.Садыбекова.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0112РК01468.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 12 работ, из них 4 статьи - из списка, рекомендованного Комитетом по контролю в сфере образования и науки МОН РК, 1- статья в научном журнале Вестник ВКГТУ им.Д. Серикбаева, 2 - из списка, в базе данных ТОМСОН РЕЙТЕР с импакт-фактором 0,75, 5 - в трудах международных конференций, в том числе 2 зарубежных.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа написана в виде рукописи на русском языке, состоит из введения и пяти разделов, которые разбиты на подразделы, заключения и списка литературы. Работа изложена на 109-и страницах, содержит 63 рисунка и 8 таблиц. Список использованных источников содержит 95 наименований.

Основное содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность темы, указана цель и научная новизна исследования.

В первом разделе изложен вывод уравнения Гельфанда-Левитана. Первый подраздел раздела один посвящен методу Гельфанда-Левитана для спектральной задачи. Описаны основные результаты, которые были получены для разрешимости обратной задачи Штурма - Лиувилля и конструктивный способ построения оператора, который был предложен И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном [4, с. 309-360] в 1951 году. Рассматривается разностный аналог

операторов Штурма-Лиувилля, который позволяет найти собственные значения этого оператора и тем самым вычислить функцию $F(x,t)$, после чего уравнение Гельфанда-Левитана можно решать эффективными численными методами. Численно, решена тестовая задача на нахождении собственных значений для оператора $l_q = \partial_x^2 - q(x)$.

Второй подраздел раздела один посвящен обратной коэффициентной задаче для гиперболических уравнений. Дана постановка прямой и обратной задачи с сосредоточенным источником. Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения задачи Коши. Показано сведение прямой задачи к классической задаче Гурса, которая численно решена конечно-разностным методом. Проведено сведение коэффициентной обратной задачи к интегральному уравнению Гельфанда-Левитана первого и второго рода.

Во втором разделе описывается прямой метод квадратного корня для численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана.

Третий раздел посвящен регуляризации и градиентным методам. Описаны методы регуляризации М.М.Лаврентьева, метод итерации Ландвебера и метод сопряженных градиентов. Полностью описываются полученные численные результаты методом квадратного корня и градиентными методами. Результаты численных экспериментов показаны в виде графиков и сравнительных таблиц по таким параметрам как количество итерации, норма погрешности и количество машинного времени.

Четвертый раздел посвящен двумерному аналогу уравнения Гельфанда-Левитана. Приведена постановка и решение двумерной коэффициентной обратной задачи. Так же получена дискретизация двумерного уравнения Гельфанда-Левитана. Проведен сравнительный анализ численных результатов.

В приложении приводятся сведения о получении фундаментальных знаний о закономерностях пространственного распределения химических элементов в пределах Рудного Алтая и Калбы на основе высокоточных аналитических исследований, ICP-MS спектроскопии, с параллельным использованием математических методов прогноза с обработкой новейшими программными продуктами.

Автор выражает благодарность зарубежному научному консультанту член-корр. РАН, д.ф.-м.н., профессору Кабанихину С.И. за поставленную задачу и отечественным научным консультантам д.ф.-м.н, профессору Бектемесову М.А. и к.ф.-м.н., доценту Даирбаевой Г. за плодотворную поддержку в работе над проблемой.

1 ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА (СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ)

1.1 Метод Гельфанда-Левитана для спектральной обратной задачи

Вопросы об однозначном восстановлении оператора Штурма-Лиувилля по его спектральным характеристикам на дифференциальном уровне рассматривались многими авторами [4,с.309-360;5,с.21-24; 6,с.11-161;7,с.11-30; 9, с.11-125;10, с.30-63;11,с.9-52]. Разрешимость обратной задачи Штурма-Лиувилля и конструктивный способ построения оператора были предложены И.М.Гельфандом и Б.М.Левитаном [4,с.309-360]. Таким образом, алгоритм восстановления оператора Штурма-Лиувилля по спектральным характеристикам получил название метода Гельфанда-Левитана. Согласно методу ядро оператора преобразования, связанное с коэффициентом оператора Штурма-Лиувилля, удовлетворяет интегральному уравнению. Вспомогательная функция для определения ядра находится через спектральные данные оператора Штурма -Лиувилля. Но формулы нахождения спектральных данных, в общем случае, не известны. Известна только их асимптотика[4, с.309-360;5,с.21-24; 6,с.11-161;7,с.11-30;9,с.11-125;10,с.30-63;11,с.9-52], которая пригодна для приближенного вычисления собственных значений $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ и весовых чисел $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ оператора Штурма-Лиувилля только при достаточно больших n . В работе рассматривается разностная задача на собственные значения для оператора Штурма-Лиувилля. Численно определяются спектральные данные оператора и вспомогательная функция. Для нахождения численных значений ядра оператора Штурма -Лиувилля решается интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

1.1.1 Постановка задачи. Рассматривается задача восстановления в интервале $(0, \pi)$ неизвестного потенциала $q(x)$ оператора Штурма-Лиувилля

$$l_q u(x) = -u''(x) + q(x)u(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (1.1)$$

при однородных граничных условиях

$$u'(0) - lu(0) = 0, \quad u'(\pi) + Lu(\pi) = 0, \quad (1.2)$$

по заданным спектральным данным $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n \geq 0}$.

Потенциал $q(x)$ и коэффициенты l, L находятся с помощью оператора преобразования для собственных функций оператора l_q :

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x G(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \quad (1.3)$$

Для решения обратной задачи (1.1)-(1.2) используется метод Гельфанда-Левитана [3], который сводит задачу к решению уравнения

$$G(x,t) + F(x,t) + \int_0^x G(x,s)F(s,t)ds = 0, \quad 0 < t < x, \quad (1.4)$$

где $G(x,t)$ - вещественная непрерывная функция удовлетворяющая соотношению

$$G(x,x) = h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t)dt. \quad (1.5)$$

Таким образом, решая (1.4), мы затем можем найти $q(x)$ по формуле $q(x) = 2 \frac{d}{dx} G(x,x)$. Для нахождения $G(x,t)$ введем функцию

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda_n} x \cos \sqrt{\lambda_n} t}{\alpha_n} - \frac{\cos nx \cos nt}{\alpha_n^0} \right), \quad (1.6)$$

здесь используя спектральные данные

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n > 0, \\ \pi, & n = 0. \end{cases}$$

Таким образом, рассматриваемая обратная задача сводится к решению уравнения (1.4), которое является уравнением Фредгольма второго рода с параметром x .

Покажем на примерах, что из уравнения (1.4) при известном $G(x,t)$ можно найти $F(x,t)$ и обратно.

Пример 1. Пусть значение $G(x,t)$ имеет следующий вид

$$G(x,t) = \frac{t}{x^2 + 1}. \quad (1.7)$$

Подставляя $G(x,t)$ в интегральное уравнение (1.4) получим следующее уравнение Вольтерра второго рода для определения $F(x,t)$:

$$F(x,t) + \frac{1}{x^2 + 1} \int_0^x sF(s,t)ds = -\frac{t}{x^2 + 1}. \quad (1.8)$$

Дифференцируем интегральное уравнение (1.8) по переменной x .

$$\frac{dF}{dx} + \left(-\frac{2x}{(x^2+1)} \int_0^x sF(s,t)ds + \frac{1}{x^2+1} xF(x,t) \right) = \frac{2tx}{(x^2+1)^2}. \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.8) находим, что

$$\int_0^x sF(s,t)ds = -(x^2+1)F(x,t) - t. \quad (1.10)$$

Подставляем (1.10) в (1.9) и имеем

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx} + \frac{2x}{x^2+1} F(x,t) + \frac{2xt}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1} F(x,t) &= \frac{2xt}{(x^2+1)^2}, \\ \frac{dF}{dx} + \frac{3x}{x^2+1} F(x,t) &= 0, \\ \frac{dF}{F} &= -\frac{3x}{x^2+1} dx, \\ \ln F &= -\frac{3}{2} \ln(x^2+1). \end{aligned}$$

Решением этого ОДУ является

$$F(x,t) = (x^2+1)^{-3/2} C. \quad (1.11)$$

Подставляя (1.11) в (1.9), находим, что

$$C = -t.$$

Окончательно для $F(x,t)$ имеем следующее выражение

$$F(x,t) = -\frac{t}{(x^2+1)^{3/2}}. \quad (1.12)$$

Пример 2. Обратно из уравнения (1.4) можно найти $G(x,t)$ при заданном $F(x,t)$ в виде (1.12). В этом случае получим уравнение Фредгольма второго рода

$$G(x,t) = \frac{t}{(x^2+1)^{3/2}} + \int_0^x \frac{t}{(s^2+1)^{3/2}} G(x,s)ds. \quad (1.13)$$

К уравнению (1.13) можно применить метод последовательных приближений. За начальное приближение возьмем функцию

$$G_0(x,t) = \frac{t}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

Последующие приближения $G_n(x,t)$ ($n=1,2,\dots$) функции $G(x,t)$ определяются по рекуррентной формуле

$$G_n(x,t) = \frac{t}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \int_0^x \frac{s}{(x^2 + 1)^{3/2}} G_{n-1}(x,s) ds.$$

Преобразовав правую часть данного равенства, приведем его к виду

$$G_n(x,t) = G_0(x,t) + G_{n-1}(x,t) \int_0^x \frac{s}{(s^2 + 1)^{3/2}} ds, \quad n=1,2,\dots \quad (1.14)$$

Тогда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в (1.14), имеем

$$G(x,t) \left[1 - \int_0^x \frac{s ds}{(s^2 + 1)^{3/2}} \right] = G_0(x,t). \quad (1.15)$$

Интегрируя, получим функцию

$$G(x,t) = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} G_0(x,t) = \frac{t}{x^2 + 1}. \quad (1.16)$$

из примера 1.

В общем случае функция $F(x,t)$, входящая в уравнение Гельфанда-Левитана (1.4) с неизвестным ядром $G(x,t)$ задается равенством (1.6), применение которого предполагает задание спектральных данных λ_n и α_n при любом $n=0,1,2,\dots$. Но нахождение спектральных данных оператора Штурма-Лиувилля, как известно, является (самостоятельной) отдельной проблемой, что приводит к проблемам в применении уравнения Гельфанда-Левитана в спектральной теории. Актуальным является рассмотрение разностных операторов Штурма-Лиувилля. Этот подход позволяет найти собственные значения дискретного аналога оператора и тем самым вычислить функцию $F(x,t)$ и исследовать методы решения уравнение Гельфанда-Левитана эффективными численными методами.

1.1.2 Метод Гельфанда -Левитана

Пусть $A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$, $B = -\frac{d^2}{dx^2}$ линейные операторы из E в E . Оператор преобразования $X = X_{A,B}$ для пары операторов A, B можно реализовать в виде

$$Xf(x) = f(x) + \int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt. \quad (1.17)$$

Ядро оператора (1.17) является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial x^2} - q(x)G(x,t) = \frac{\partial^2 G(x,t)}{\partial t^2}, \quad (1.18)$$

Сделаем преобразование $A(Xf)$ положим что

$$\begin{aligned} Xf(x) &= f(x) + \int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt. \\ A(Xf) &= -\frac{d^2 f}{dx^2} + q(x)f(x) - \frac{d^2}{dx^2} \left[\int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt \right] + q(x) \int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt, \\ \frac{d}{dx} \left(\int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt \right) &= \int_{-x}^x \frac{dG(x,t)}{dx} f(t) dt + G(x,x)f(x) - G(x,-x)f(-x), \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt \right) &= \int_{-x}^x \frac{d^2 G(x,t)}{dx^2} f(t) dt + \frac{dG(x,x)}{dx} f(x) - \frac{dG(x,-x)}{dx} f(-x) + \\ &+ \frac{dG(x,x)}{dx} f(x) + G(x,x)f'(x) - \frac{dG(x,-x)}{dx} f(-x) - G(x,-x)f'(-x). \end{aligned}$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} A(Xf) &= -f''(x) + q(x)f(x) - \int_{-x}^x \frac{d^2 G(x,t)}{dx^2} f(t) dt + q(x) \int_{-x}^x G(x,t) f(t) dt - \\ &- \frac{dG(x,x)}{dx} f(x) + \frac{dG(x,-x)}{dx} f(-x) - \frac{dG(x,x)}{dx} f(x) - G(x,x)f'(x) + \\ &+ \frac{dG(x,-x)}{dx} f(-x) + G(x,-x)f'(-x), \end{aligned}$$

Сделаем преобразование $X(Bf)$

$$\begin{aligned} X(Bf) &= -\frac{d^2 f}{dx^2} + \int_{-x}^x G(x,t) \left(-\frac{d^2 f(t)}{dt^2} \right) dt = -f''(x) - \int_{-x}^x G(x,t) f''(t) dt = \\ &- f''(x) - \left[G(x,x)f'(x) - G(x,-x)f'(-x) - \int_{-x}^x f'(t) \frac{dG}{dt} dt \right] = -f''(x) - \\ &- G(x,x)f'(x) + G(x,-x)f'(-x) + \left(\frac{dG(x,x)}{dt} f(t) - \frac{dG(x,-x)}{dt} f(-x) - \int_{-x}^x \frac{d^2 G(x,t)}{dt^2} f(t) dt \right), \end{aligned}$$

В итоге получим

$$-2 \frac{dG(x, x)}{dx} f(x) + 2 \frac{dG(x, -x)}{dx} f(-x) + q(x) f(x) = \frac{dG(x, x)}{dt} f(x) - \frac{dG(x, -x)}{dt} f(-x). \quad (1.19)$$

Объединив соответствующие значения $f(x)$ и $f(-x)$ получим следующие условия

$$-2 \frac{dG(x, x)}{dx} + q(x) = \frac{dG(x, x)}{dt}, \quad (1.20)$$

$$2 \frac{dG(x, -x)}{dx} = -\frac{dG(x, -x)}{dt}. \quad (1.21)$$

Из уравнения (1.20), (1.21) получим следующие условия

$$G(x, x) = C + \frac{1}{2} \int_0^x q(s) ds \quad (1.22)$$

$$G(x, -x) = C. \quad (1.23)$$

где $C = G(0, 0)$ - произвольно.

Из работ Б.М.Левитана и И.С.Саргсяна [10, с.30-63; 11, с.9-52] известно, что задача (1.18)-(1.20) является классической задачей Гурса.

1.1.3 Численное решение прямой обратной конечно - разностной задачи Штурма-Лиувилля

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора l_q

$$-u''(x) - (\lambda - q(x))u(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (1.24)$$

$$u'(0) - lu(0) = 0, \quad u'(\pi) + Lu(\pi) = 0. \quad (1.25)$$

Применим метод конечных разностей к задаче (1.24), (1.25). В случае равномерной одномерной сетки с шагом $h = \frac{\pi}{N}$ и узлами $x_n = nh$, $n = \overline{0, N}$ рассматриваемой задаче (1.24), (1.25) отвечают разностные уравнения

$$-y_{n-1} + (2 + h^2 q_n - h^2 \lambda^{(h)}) y_n - y_{n+1} = 0, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (1.26)$$

Запишем разностные аналоги граничных условий (1.25)

$$\frac{y_1 - y_0}{h} - ly_0 = 0, \quad \varkappa_1 y_0 - y_1 = 0 \quad \text{где } \varkappa_1 = (1 + hl), \quad (1.27)$$

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} + Ly_N = 0, \quad \aleph_2 y_N - y_{N-1} = 0 \quad \text{где } \aleph_2 = (1 + hL), \quad (1.28)$$

где

$$q_n = \frac{1}{h} \int_{x_n - \frac{h}{2}}^{x_n + \frac{h}{2}} q(x) dx, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (1.29)$$

При $n=1$ из (1.26) получим

$$-y_0 + (2 + h^2 q_1 - h^2 \lambda) y_1 - y_2 = 0,$$

Сделаем обозначение

$$b_2 = 2 + h^2 q_1 - h^2 \lambda. \quad (1.30)$$

Аналогично при $n = N-1$ получим

$$-y_{N-2} + (2 + h^2 q_{N-1} - h^2 \lambda) y_{N-1} - y_N = 0.$$

Таким образом

$$b_{N-1} = 2 + h^2 q_{N-1} - h^2 \lambda. \quad (1.31)$$

Получим трехдиагональную матрицу A следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} \aleph_1 & -c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & b_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & b_3 & -c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-2} & -c_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -a_{N-1} & b_{N-1} & -c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_N & \aleph_2 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы определены следующим образом

$$\begin{aligned} b_i &= 2 + h^2 q_i - h^2 \lambda^{(h)}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1; \\ a_i &= 1, \quad i = \overline{2, N}; \\ c_i &= 1, \quad i = \overline{1, N-1}. \end{aligned}$$

Перед нахождением численных значений собственных значений и соответствующих им собственных векторов матрицы A целесообразно оценить промежуток их возможного изменения.

Согласно теореме С.А.Гершгорина [42] собственные значения трехдиагональной матрицы A удовлетворяют неравенствам

$$|\lambda - b_n| \leq |a_n| + |c_n|, \quad n = \overline{1, N-1}, \quad (1.32)$$

$$-|a_n| + b_n - |c_n| \leq \lambda \leq |a_n| + b_n + |c_n|,$$

$$\lambda_{\max} \leq \max_{n=\overline{1, N-1}} (|a_n| + b_n + |c_n|), \quad (1.33)$$

$$\lambda_{\min} \geq \min_{n=\overline{1, N}} (-|a_n| + b_n - |c_n|).$$

Если $b_n > 0$, $n = \overline{1, N-1}$ то из (1.32), (1.33) имеем $\lambda \geq b_n - |a_n| - |c_n| \geq 0$, т.е. все собственные значения неотрицательны.

Если к тому же A является матрицей с диагональным преобладанием, то $\det A \neq 0$, т.е. она не имеет нулевого собственного значения и все ее собственные значения положительны, причем с учетом соотношений $|b_n| = b_n \geq |a_n| + |c_n|$, $n = \overline{1, N}$, из неравенства (1.32), (1.33) следует более грубая, но и более простая оценка

$$\lambda_{\max} \leq 2 \max_{i=\overline{1, N}} b_n \quad (1.34)$$

наибольшего собственного значения матрицы A по ее наибольшему диагональному элементу.

Приближенные значения $\lambda^{(h)}$ при $N \gg 1$ находим итерационным методом связанным с многократным вычислением значения характеристического многочлена $\det(A - \lambda E)$ матрицы A при пробных значениях λ . Используем существующий устойчивый и экономичный способ, требующий для вычисления $\det(A - \lambda E)$ всего $5N$ арифметических операций (сложений и умножений). Он основан на рекуррентной формуле

$$M_n = b_n M_{n-1} - a_n c_{n-1} M_{n-2}, \quad n = \overline{1, N}, \quad (1.35)$$

где M_n - угловой минор порядка n трехдиагональной матрицы $A - \lambda E$. Такие миноры называются главными диагональными.

Для начала вычислений при $n=1$ следует положить, $M_0 = 1$ и $M_{-1} = 0$. Тогда получим для $n=1$:

$$M_1 = b_1 M_0 - a_1 c_0 M_{-1} = b_1,$$

для $n=2$:

$$M_2 = b_2 M_1 - a_2 c_1 M_0 = b_2 b_1 - a_2 c_1,$$

для $n = 3$:

$$M_3 = b_3 M_2 - a_3 c_2 M_1 = b_3 b_2 b_1 - b_3 a_2 c_1 - a_3 c_2 b_1 \text{ и т.д.}$$

Теперь определим отрезки, в которых лежат корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$. Для этого используем следующий алгоритм. Задаем $j = 0$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Далее положим $j = j + 1$. Если $j > n - 1$, то процесс отделения корней заканчивается. Иначе вычисляем

$$f(l_{m_1}) = \det(A - l_{m_1} E), \quad (1.36)$$

$$f(l_{m_2}) = \det(A - l_{m_2} E),$$

по вышеприведенной формуле (1.35).

Если

$$f(m_1)f(m_2) \leq 0 \quad (1.37)$$

то найдем отрезок $[l_{m_1}^j, l_{m_2}^j]$ содержащий собственное значение λ_j . В противном случае положим $m_2 = m_2 + 1$ и процесс поиска отрезка продолжим, до тех пор пока не выполнится условие (1.37). После нахождения j -го собственного значения, положив $m_1 = m_2$, $m_2 = m_1 + 1$ повторим этот процесс для $(j + 1)$ -го и т.д. количество отрезков равно размерности матрицы A .

Для уточнения собственных значений лежащих на отрезках $[l_{m_1}^j, l_{m_2}^j]$, $j = \overline{1, N - 1}$ используем итерационные методы, например метод Ньютона, или метод дихотомии. Далее нам необходимо вычислить собственные вектора с помощью полученных собственных значений.

Для вычисления собственных векторов используем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u'(x) = -v(x), \\ v'(x) - (\lambda - q(x))u(x) = 0. \end{cases} \quad (1.38)$$

Разностный аналог системы (1.38) имеет вид

$$\frac{y_j^i - y_{j-1}^i}{h} = -v_{j-\frac{1}{2}}^i, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (1.39)$$

$$\frac{v_{j+\frac{1}{2}}^i - v_{j-\frac{1}{2}}^i}{h} - (\lambda^{(i)} - q_j)y_j^i = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (1.40)$$

Приняв $y_0 = 1$, из (1.27) получим $y_1 = \aleph_1$, тогда из (1.39) имеем, что

$$v_{\frac{1}{2}} = -\frac{\aleph_1 - 1}{h}.$$

Задавая вычисленные значения $\lambda^{(i)}$, последовательно при каждом $j = \overline{1, N-1}$ находим сначала из (1.40) $v_{j+\frac{1}{2}}^i$, а затем из (1.39) y_{j+1}^i по следующим формулам

$$v_{j+\frac{1}{2}}^i = v_{j-\frac{1}{2}}^i + h(\lambda^{(i)} - q_j)y_j^i = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_{j+1}^i = y_j^i - h v_{j+\frac{1}{2}}^j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

После нахождения собственных векторов находим весовые числа

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx$$

по следующей формуле приближенного вычисления интеграла

$$\alpha_n \approx \sum_{i=1}^N (y_i^n)^2 h,$$

где y_i^n - значения собственного вектора соответствующий собственному значению λ_n . Далее по формуле (1.5) определим табличную функцию $F(x_i, t_j)$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, $j = 0, 1, 2, \dots, i$. Затем решаем численно уравнение Гельфанда-Левитана (1.6), находим $G(x, t)$ и восстанавливаем функцию $q(x)$.

Уравнение (1.6) аппроксимируется уравнением

$$G(x_i, t_j) + \sum_{k=0}^N G(x_i, s_k) F(s_k, t_j) h = -F(x_i, t_j), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, i. \quad (1.41)$$

Запишем систему линейных алгебраических уравнений (1.41) в матричном виде $AG = F$. Где

$$A = \begin{pmatrix} 1 + F(s_0, t_0)h & F(s_1, t_0)h & F(s_2, t_0)h & \dots & F(s_N, t_0)h \\ F(s_0, t_1)h & 1 + F(s_1, t_1)h & F(s_2, t_1)h & \dots & F(s_N, t_1)h \\ F(s_0, t_2)h & F(s_1, t_2)h & 1 + F(s_2, t_2)h & \dots & F(s_N, t_2)h \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F(s_0, t_N)h & F(s_1, t_N)h & F(s_2, t_N)h & \dots & 1 + F(s_N, t_N)h \end{pmatrix},$$

-матрица системы,

$$\vec{G} = (G(x, t_0), G(x, t_1), G(x, t_2), \dots, G(x, t_N))^T,$$

-искомая функция

$$\vec{F} = (F(x, t_0), F(x, t_1), F(x, t_2), \dots, F(x, t_N))^T.$$

-правая часть уравнения.

Решение уравнения (1.41) различными численными методами изложено в работах автора.

1.1.4 Численные решения тестовых примеров

Численно, решена тестовая задача на нахождении собственных значений для оператора l_q

$$-u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad (1.42)$$

$$u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0. \quad (1.43)$$

Разностный аналог задачи (1.42), (1.43) имеет вид

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + \lambda^{(h)} y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (1.44)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0.$$

Система уравнений (1.44) представляет с собой задачу на собственные значения

$$Ay = \lambda^{(h)} y.$$

Существует $N-1$ вещественных собственных значений $\lambda_k^{(h)}$, $k = 1, 2, \dots, N-1$, матрицы A . Известно, что собственные значения матрицы A имеют вид

$$\lambda_k^{(h)} = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2N}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1. \quad (1.45)$$

Собственные функции y_i задачи (1.44), отвечающие собственным значениям (1.45) записываются в следующем виде:

$$y_i^{(k)} = \sin \frac{\pi k i}{N}, \quad k, i = 1, 2, \dots, N-1.$$

Таблица 1- Сравнение решения собственных значений при $N = 19$

Приближенные собственные значения $\lambda^{(h)}$	Собственные значения, определенные по формуле (1.39)	$ \lambda^{(h)} - \lambda_k^{(h)} $
0.9979 25	0.997946	0.000021
3.967210	3.967210	0.000000
8.8346 47	8.834679	0.000031
15.480522	15.480499	0.000023
23.741062	23.741032	0.000031
33.412880	33.412872	0.000008
44.257851	44.257866	0.000015
56.009026	56.008976	0.000050
68.376816	68.376854	0.000038
81.056915	81.056953	0.000038
93.737106	93.737053	0.000053
106.104919	106.104927	0.000008
117.856033	117.856041	0.000008
128.701065	128.701035	0.000031
138.372925	138.372879	0.000046
146.633423	146.633408	0.000015
153.279251	153.279236	0.000015
158.146698	158.146698	0.000000
161.115967	161.115967	0.000000

Интересно сопоставить решения дифференциальной и разностной задач на собственные значения. Спектр дифференциальной задачи не ограничен, т.е. $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, в то время как спектр разностной задачи ограничен сверху при каждом фиксированном шаге h числом $\frac{4}{h^2}$, но растет при $h \rightarrow 0$.

Рассмотрим тестовую задачу на собственные значения для оператора l_q (1.24), (1.25), в которой функция $q(x)$ имеет следующий вид

$$q(x) = 1 + \frac{(k+2)(k+1)}{(x-c)^2},$$

где k - любое положительное действительное число, c - постоянная и $c \in (-\infty; 0) \cup (0; \pi) \cup (\pi; +\infty)$. Известно, что число $\lambda_1 = 1$ является собственным значением, а функция $u_1 = (x-c)^{k+2}$ собственной функцией, соответствующей этому собственному значению.

Из граничных условий (1.25) получим

$$l = -\frac{k+2}{c}, \quad L = -\frac{k+2}{\pi-c}.$$

Вследствие численной реализации данного тестового примера были получены собственные значения и соответствующие им сеточные собственные вектора, например при $\lambda_3^{(h)} = 184.24$ получаются следующие сеточные собственные вектора y_i : 1.0000, 3.1249, 5.1256, 6.7846, 7.8100 и т.д.

Численное решение тестовых задач проводилось в вычислительной среде со следующими параметрами: компьютер-однопроцессорный Intel(R) Pentium(R) 4CPU 3.20 GHz с общей памятью 1.0 GB, операционная система – Microsoft Windows XP Professional версия 2008 Service Pack 3, язык программирования Compaq Visual Fortran Professional Edition 6.6.0. Для данного компьютера собственные значения высчитываются максимально до $n=35$, при больших значениях это затруднительно, так как не хватает машинных ресурсов. Для получения более точных результатов при больших значениях n необходимо использовать суперкомпьютер.

1.2 Коэффициентная обратная задача для гиперболического уравнения

1.2.1 Постановка прямой и обратной задачи с сосредоточенным источником

Прямая задача с сосредоточенным источником состоит в нахождении обобщенного решения $u(x,t)$ задачи Коши [13,с.22-64;15,с.269-304]

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in R, \quad t > 0, \quad (1.46)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \delta(x) \quad (1.47)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (1.46), (1.47)

$$u(0,t) = r(t), \quad u_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.48)$$

Решение прямой задачи [13,с.22-64;15,с.269-304]. Из основного свойства дельта - функции Дирака

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \delta(x) dx = \psi(0),$$

верного для любой непрерывной финитной функции $\psi(x)$, и из формулы Даламбера следует, что обобщенное решение задачи (1.46), (1.47) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in R \times R_+. \quad (1.49)$$

Здесь $\theta(\cdot)$ - тэта – функция Хэвисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Как известно решение задачи Коши

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad (1.50)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in R, \quad t > 0. \quad (1.51)$$

дается следующей формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi. \quad (1.52)$$

Построим решение неоднородного уравнения следующего вида

$$u_{xx} - u_{tt} = g(x, t), \quad (1.53)$$

удовлетворяющее начальным условиям (1.51).

Легко можно убедиться в том, что функция

$$v(x, t, \tau) = \frac{1}{2} \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau) d\tau_1$$

является решением уравнений колебаний струны (1.50), удовлетворяющие начальным условиям

$$v(x, \tau, \tau) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} v(x, t, \tau) \Big|_{t=\tau} = g(x, \tau),$$

а функция

$$u(x,t) = \int_0^t v(x,t,\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau) d\tau_1$$

представляет собой решение неоднородного уравнения

$$u_{xx} - u_{tt} = -g(x,t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x,t) \Big|_{t=0} = 0.$$

Исходная задача естественным образом распадается на два: одна из них показана выше, а вторая решается с помощью формулы Даламбера.

В итоге получим

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \varphi(x+t) + \frac{1}{2} \varphi(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} g(\tau_1, \tau) d\tau_1 \quad (1.54)$$

С помощью формулы (1.54) выводится, что решение задач Коши

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad (x,t) \in R \times R_+, \quad (1.55)$$

$$u \Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t \Big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R. \quad (1.56)$$

Запишется следующим образом

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+t) + \varphi(x-t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} [-q(\xi)u(\xi, \tau)] d\xi d\tau. \quad (1.57)$$

Отсюда следует, что решение задачи (1.55), (1.56) удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(x,t) = u_0(x,t) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.58)$$

где

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-t) + \varphi(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\xi) d\xi. \quad (1.59)$$

В случае когда начальные условия имеют вид

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad u_t \Big|_{t=0} = \delta(x),$$

т.е. когда в (1.56) $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = \delta(x)$ уравнение (1.58) получит вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\theta(t-|x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

так как в этом случае из (1.59) следует

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[0+0] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \delta(\xi)d\xi = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \delta(\xi)d\xi.$$

Из теории обобщенных функции известно, что первообразная δ - функции есть $\theta(x) + C$, где $\theta(\cdot)$ - тэта функция Хэвисайда:

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

а C - произвольная постоянная.

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \delta(\xi)d\xi = \frac{1}{2}\theta(t-|x|) = \begin{cases} 1, & t > |x|, \\ 0, & t < |x|. \end{cases}$$

Из (1.54) следует, что

$$u(x,t) \equiv 0, \quad t < |x|, \quad (x,t) \in R \times R_+. \quad (1.60)$$

Тогда для точек $(x,t) \in \Delta(x_1,t_1)$ из формулы (1.54) следует, что

$$u(x,t) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,t)} q(\xi)u(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \Delta(x_1,t_1). \quad (1.61)$$

Обозначим

$$Q = \max_{x_1-t_1 \leq x \leq x_1+t_1} |q(x)|,$$

$$U(t) = \max_{x_1-(t_1-t) \leq x \leq x_1+(t_1-t)} |u(x,t)|.$$

Тогда из (1.61) получаем неравенство

$$U(t) \leq Q t_1 \int_0^t U(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

Лемма Гронуолла [15,с.269-304]. Пусть функция $U(x)$ неотрицательна и непрерывна в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ и удовлетворяет там неравенству

$$U(x) \leq A + B \int_{x_0}^x U(t)dt, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0$$

тогда

$$U(x) \leq Ae^{B(x-x_0)}, \quad x \in [x_0, x_0 + h].$$

Из леммы Гронуолла следует, что $U(t) \equiv 0$, $t \in [0, t_1]$ и, таким образом, $u(x, t) \equiv 0$ в области $\Delta(x_1, t_1)$. Учитывая произвольность выбора точки (x_1, t_1) , мы убеждаемся в справедливости (1.60).

Из равенства (1.60) следует, что носитель функции $u(x, t)$ содержится целиком в области $\{(x, t) : t \geq |x|\}$. Пусть $D = \{(x, t) : t > |x|\}$. В дальнейшем мы будем рассматривать функцию $u(x, t)$ только в области D . Из формулы (1.54), (1.60) следует, что

$$u(x, t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \iint_{\square(x, t)} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in D. \quad (1.62)$$

Лемма 1. Если для какой-либо точки $(x_1, t_1) \in D$ функция $q(x)$ непрерывна на интервале $\left[\frac{x_1 - t_1}{2}, \frac{x_1 + t_1}{2}\right]$, то решение уравнения (1.62) существует и принадлежит классу $C^2(\square(x_1, t_1))$ [15, с.279].

Из формулы (1.62), в частности, следует, что на границе области D функция $u(x, t)$ постоянная и равна $1/2$:

$$u(x, |x|) = 1/2.$$

1.2.2 Численное решение прямой задачи с сосредоточенным источником

Задача (1.46), (1.47) с начальным условием в виде дельта-функции поставлена для нахождения обобщенного решения. Согласно изложенным в работах [13, с.22-64; 15, с.269-304] результатам прямая задача (1.46)-(1.47) эквивалентна следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \\ u|_{t=|x|} = \frac{1}{2}, \quad |x| < t < 2a - |x|, \end{cases} \quad (1.63)$$

где $q(x)$ -заданная функция.

Рассмотрим область $D = \{-a < x < a, 0 < t < 2a\}$. Задача Гурса численно решается в области $D_1 = \{-a < x < a, |x| < t < 2a - |x|\}$, $D_1 \subset D$. Строим равномерную сетку $D_{h\tau}$ приведенной на рисунке 1.

$$D_{h\tau} = \{(x_l, t_n) : x_l = -a + l \cdot h, l = 0, 1, \dots, N, h \cdot N = 2a; t_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, K, K \cdot \tau = 2a\}.$$

Номер узла сетки при $x = 0$ обозначим через $m = \left[\frac{N}{2} + 1\right]$, искомую сеточную функцию определим как

$$r^n = u_m^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, K.$$

Гиперболическое уравнение (1.63) численно решается в области $D_{h\tau}$ с помощью разностной схемы:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} - 0,5(q_{i+1} + q_{i-1}) \frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2}, \quad (1.64)$$

при $\tau = h$ получается схему квадрат:

$$u_i^{n+1} = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - u_i^{n-1} - h^2 \frac{q_{i+1} + q_{i-1}}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n + u_{i-1}^n}{2} \right), \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots, K. \quad (1.65)$$

где $i = i_l = m, m-1, m-2, \dots, 1$ для вычисления значений решения в узлах

расположенных слева от линии $x = 0$;

$i = i_p = m+1, m+2, \dots, N$ для вычисления значений решения в узлах расположенных справа от линии $x = 0$.

Граничные условия для сеточной задачи

$$\begin{aligned} u_i^n &= 0,5; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad n = m, m-1, \dots, 1; \\ u_i^n &= 0,5; \quad i = m+1, m+2, \dots, N; \quad n = 1, 2, \dots, m; \end{aligned} \quad (1.66)$$

Так как по формуле (1.65) значения решения по направлению t находится в узлах кратным двум, другие значения находятся линейной интерполяцией по значениям решения в четырех соседних узлах.

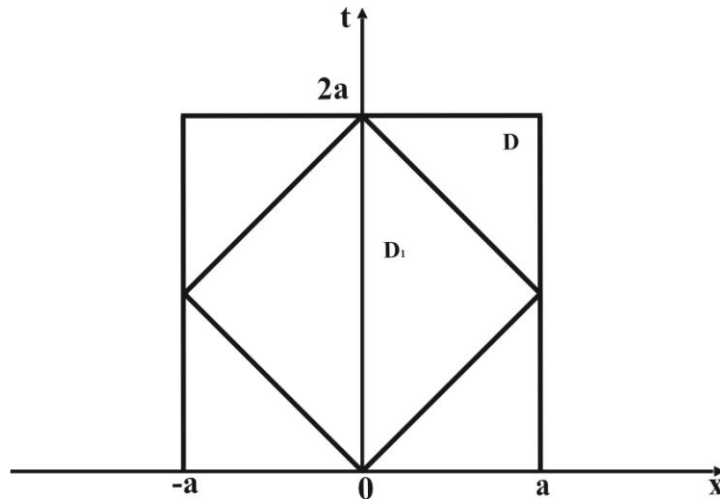


Рисунок 1 - Область решения прямой задачи

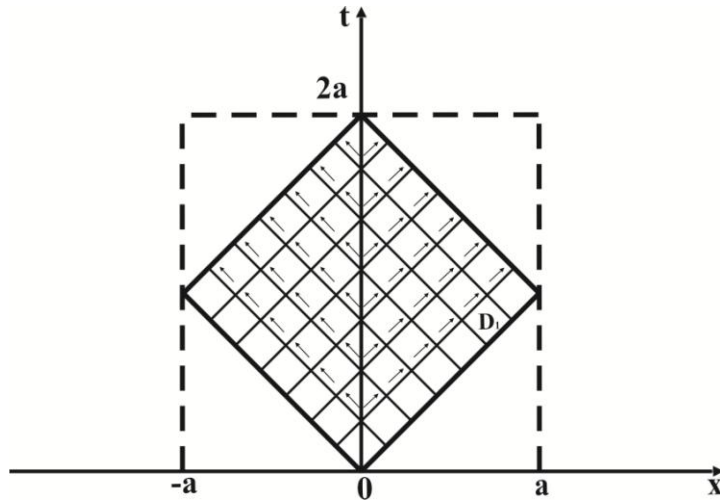


Рисунок 2 - Схема решения прямой задачи

1.2.3 Решение прямой задачи с сосредоточенным источником для гиперболического уравнения с заменой $\delta(x)$ - дельта функции Дирака, функцией удовлетворяющей некоторым ее свойствам

Прямая задача (1.46),(1.47) является корректной, т.е. ее решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Задаем множество точек сетки. На отрезке $[-x_l, x_l]$ построим разностную сетку с шагом h , т.е. множество точек

$$\omega_h = \{x_j = -x_l + (j-1)h, j = 1, 2, \dots, 2n+1, hn = x_l\},$$

и сетку по направлению переменной t с шагом Δt , которую обозначим

$$\omega_{\Delta t} = \{t_k = (k-1)\Delta t, k = 1, 2, \dots, 2n+1, 2n\Delta t = T\}.$$

Для задачи (1.46), (1.47) в сеточной области $\omega_h \times \omega_{\Delta t}$ построим следующую трехслойную разностную схему

$$\frac{y_j^{k+1} - 2y_j^k + y_j^{k-1}}{\Delta t^2} = \frac{y_{j+1}^k - 2y_j^k + y_{j-1}^k}{h^2} - q_j y_j^k. \quad (1.67)$$

Разностное уравнение (1.67) имеет второй порядок погрешности аппроксимации по Δt и по h . Решение y_j^{k+1} выражается явным образом через значения на предыдущих слоях

$$y_j^{k+1} = \left(2 - 2\frac{\Delta t^2}{h^2} - \Delta t^2 q_j\right) y_j^k - y_j^{k-1} + \frac{\Delta t^2}{h^2} y_{j+1}^k + \frac{\Delta t^2}{h^2} y_{j-1}^k. \quad (1.68)$$

Необходимые для начала счета по формуле (1.68) значения $y_j^0, y_j^1, j = 1, 2, \dots, 2n+1$ берутся из начальных условий (1.47):

$$y_j^0 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1, \quad (1.69)$$

$$y_j^1 = y_j^0 + \Delta t \delta_j, \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1. \quad (1.70)$$

Алгоритм расчета заключается в вычислении $y_j^{k+1}, k = 2, 3, \dots, n+1, j = k, k+1, \dots, n+1$ согласно формуле (1.68).

Простейшая замена второго из начальных условий (1.47) уравнением

$$\frac{y_j^1 - y_j^0}{\Delta t} = \delta(x_j)$$

имеет лишь первый порядок аппроксимации по Δt .

Разностное уравнение

$$\frac{y_j^1 - y_j^0}{\Delta t} = \delta(x_j) + \frac{\Delta t}{2} (u_{\bar{x}\bar{x}}(x_j, 0) - q(x_j)u(x_j, 0)), \quad j = 1, 2, \dots, 2n+1$$

аппроксимирует второе из условия (1.47) со вторым порядком по Δt и по h . Для исследования устойчивости разностной схемы (1.67) решение представим в виде

$$y_j^k = \eta^k e^{ijh\varphi}.$$

Подставляя это выражение в (1.67) и сокращая на $\eta^k e^{ijh\varphi}$ получим для η квадратное уравнение

$$\eta^2 - 2 \left(1 - 2\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} - \frac{1}{2} \Delta t^2 q_j \right) \eta + 1 = 0, \quad \xi = \frac{\Delta t^2}{h^2}. \quad (1.71)$$

Будем считать разностное уравнение (1.67) устойчивым, если оба корня уравнения (1.71) не превосходят по модулю единицы. Разностное уравнение устойчиво, если при всех действительных φ выполняется неравенство

$$\left(1 - 2\xi \sin^2 \frac{h\varphi}{2} - \frac{1}{2} \Delta t^2 q_j \right)^2 \leq 1,$$

$$\text{т.е. } 0 \leq 2\xi \sin^2 \frac{h\varphi}{2} + \frac{1}{2} \Delta t^2 q_j \leq 2.$$

Последнее неравенство выполняется при всех φ , если

$$4\xi + \Delta t^2 |q_j| \leq 4.$$

Для проведения численных расчетов используем функции

$$q(x) = \frac{2(3x^2 - \varepsilon^2)}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}, \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}.$$

где ε - малый параметр, $\delta_\varepsilon(x) \rightarrow \delta(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В таком случае точное решение задачи (1.46), (1.47) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\varepsilon t}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}, \quad r(t) = \frac{t}{\pi\varepsilon}.$$

Погрешность решения задачи разностной схемой (1.68)-(1.70) составляет

$$\max_k |r(t^k) - y_0^k| = \varepsilon_T.$$

$$\varepsilon_T = 0.000026 \text{ при } n = 100, \quad \varepsilon = 0,01, \Delta t = 0,00005, \quad h = 0,0005, \quad \delta(0) = 31.83.$$

Таблица 2 - Точное и приближенное решение задачи (1.46), (1.47) при $n = 10, \quad \varepsilon = 0,01, \Delta t = 0,0005, \quad h = 0,005, \quad \delta(0) = 31.8319$

t^k	Приближенное решение y_0^k	Точное решение $u(0, t^k)$
0.0000	0.00000000	0.00000000
0.0010	0.01591596	0.01591596
0.0015	0.03184784	0.03183192
0.0020	0.04781120	0.04774789
0.0025	0.06382090	0.06366385
0.0030	0.07989080	0.07957982
0.0035	0.09603342	0.09549578
0.0040	0.11225972	0.11141174
0.0045	0.12857890	0.12732770
0.0050	0.14499818	0.14324366
0.0055	0.16152275	0.15915963
0.0000	0.17815568	0.17507559

1.2.4 Построение примера для численного расчета

Рассмотрим следующую обратную задачу с сосредоточенным источником

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{2(3x^2 - \varepsilon^2)}{(x^2 + \varepsilon^2)^2} u, \quad (x, t) \in R_x R_t, \quad (1.72)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)} \rightarrow \delta(x), \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.73)$$

$$u(0, t) = \frac{t}{\pi\varepsilon}, \quad u_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.74)$$

Если сопоставить с формулами (1.46) - (1.48), то имеем

$$q(x) = \frac{2(3x^2 - \varepsilon^2)}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}, \quad r(t) = \frac{t}{\pi\varepsilon}, \quad \delta_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}. \quad (1.75)$$

Задача (1.72) - (1.74) имеет следующее точное решение

$$u(x, t) = \frac{\varepsilon t}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}. \quad (1.76)$$

Для приближенного решения некорректной задачи (1.72)-(1.74) используем метод Гельфанда-Левитана. Согласно исследованиям, проведенным в [13, с.22-64; 15, с.269-304] для нахождения коэффициента $q(x)$ получается следующее интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\frac{1}{2}[f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{\omega}(x, \tau) d\tau = 0. \quad (1.77)$$

Между функциями $\tilde{\omega}(x, \tau)$ и $q(x)$ выполняется соотношение

$$\tilde{\omega}(x, x-0) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi, \quad x > 0. \quad (1.78)$$

Используя формулу (1.78) находим $\tilde{\omega}(x, x)$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(x, x) &= \frac{1}{4} \int_0^x \frac{2(3t^2 - \varepsilon^2)}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{3t^2 - \varepsilon^2}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} dt = \frac{3}{2} \int_0^x \frac{t^2 dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = \\ &= \frac{3}{2} \int_0^x \frac{t^2 + \varepsilon^2}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} dt - \frac{3\varepsilon^2}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = \frac{3}{2} \int_0^x \frac{dt}{t^2 + \varepsilon^2} - 2\varepsilon^2 \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = \\ &= \frac{3}{2\varepsilon} \operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon} - 2\varepsilon^2 \int_0^x \frac{dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2}. \end{aligned}$$

Отдельно вычислим интеграл

$$\int_0^x \frac{dt}{(t^2 + \varepsilon^2)^2} = \left| \begin{array}{l} t = \varepsilon \operatorname{tgy} \\ dt = \frac{\varepsilon dy}{\cos^2 y} \end{array} \right| = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}} \frac{\varepsilon dy}{\varepsilon^4 (\operatorname{tg}^2 y + 1)^2} = \frac{1}{\varepsilon^3} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}} \cos^2 y dy = \frac{1}{2\varepsilon^3} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{x}{\varepsilon}} (1 + \cos 2y) dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\varepsilon^3} \left(y + \frac{\sin 2y}{2} \right) \Big|_0^{\arctg \frac{x}{\varepsilon}} = \frac{1}{2\varepsilon^3} \left(\arctg \frac{x}{\varepsilon} + \frac{\sin \left(2 \arctg \frac{x}{\varepsilon} \right)}{2} \right) = \frac{1}{2\varepsilon^3} \left(\arctg \frac{x}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \frac{2 \frac{x}{\varepsilon}}{1 + \frac{x^2}{\varepsilon^2}} \right) = \\
&= \frac{1}{2\varepsilon^3} \left(\arctg \frac{x}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon x}{x^2 + \varepsilon^2} \right).
\end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\tilde{\omega}(x, x) = \frac{1}{2\varepsilon} \arctg \frac{x}{\varepsilon} - \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}. \quad (1.79)$$

Все результаты численных расчетов сравнивались с точным решением (1.79).

1.2.5 Сведение коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана первого рода

Необходимые и достаточные условия разрешимости в целом задачи (1.46)-(1.48) были предложены в работах Б.С.Парийского [19,с.1-75] и А.С.Благовещенского [23,с.28-38]. После данных работ появилось большое количество литературы [12,с.767-770;13,с.22-64;17,с.31-33;18, с.139-169;19,с.3-49;20,с.37-183], посвященной использованию их результатов в различных уравнениях и системах уравнений. В данном подразделе для приближенного решения некорректной задачи (1.46)-(1.48) используется метод Гельфанда-Левитана [4,с.309-360]. Согласно результатам вышеприведенных исследований обратной задачи (1.46)-(1.48) коэффициент $q(x)$ находится как решение интегрального уравнения Фредгольма.

Продолжим решение $u(x, t)$ задачи (1.46)-(1.48) с помощью нечетного продолжения на отрицательные t :

$$u(x, t) = -u(x, -t), \quad t < 0.$$

Функция $r(t)$ продолжается также нечетным образом:

$$r(t) = -r(-t), \quad t < 0.$$

Согласно (1.63) функция $r(t)$ будет иметь в нуле разрыв первого рода:

$$r(+0) = \frac{1}{2}, \quad r(-0) = -\frac{1}{2}.$$

Продолженная таким образом функция $u(x, t)$ удовлетворяет для всех $(x, t) \in R^2$ уравнению

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad (1.80)$$

и условию

$$u(x, t) \equiv 0, \quad t < |x|. \quad (1.81)$$

Предположим, что решение обратной задачи (1.46)-(1.48) существует. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет дополнительным условиям

$$u(0, t) = r(t), \quad u_x(0, t) = 0, \quad (1.82)$$

причем $r(t)$ при $t \neq 0$ дважды непрерывно дифференцируема.

Рассматривается вспомогательную задачу Коши:

$$\omega_{tt} = \omega_{xx} - q(x)\omega, \quad x > 0, t \in R, \quad (1.83)$$

$$\omega|_{x=0} = \delta(t), \quad \omega_x|_{x=0} = 0. \quad (1.84)$$

Решение этой задачи удовлетворяет интегральному уравнению

$$\omega(x, t) = \frac{1}{2}[\delta(t-x) + \delta(t+x)] + \frac{1}{2} \iint_{\Delta_1(x, t)} q(\xi)\omega(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.85)$$

где $\Delta_1(x, t) = \{(\xi, \tau) : 0 < \xi \leq x, t-x+\xi < \tau < t+x-\xi\}$ - треугольник, образованный характеристиками, проходящими через точку (x, t) и осью t .

В работе [13, с.22-64] показано, что

$$\omega(x, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (1.86)$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (1.85) для точек $(x, t) \in D_1 = \{(x, t) : x \geq |t|\}$ будет прямоугольник $\square_1(x, t) = \{(\xi, \tau) : |\tau| \leq \xi \leq x - |t - \tau|\}$, образованный характеристиками, выходящими из точек $(0, 0)$, (x, t) .

Обозначим

$$\tilde{\omega}(x, t) = \omega(x, t) - \frac{1}{2}[\delta(t-x) + \delta(t+x)]. \quad (1.87)$$

Кусочно-непрерывная функция $\tilde{\omega}(x, t)$ есть решение уравнения

$$\tilde{\omega}(x, t) = \frac{1}{4}\theta(x-|t|) \left[\int_0^{(x+t)/2} q(\xi)d\xi + \int_0^{(x-t)/2} q(\xi)d\xi \right] + \frac{1}{2} \iint_{\square_1(x, t)} q(\xi)\tilde{\omega}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0, \quad (1.88)$$

вытекающего из (1.85). Из уравнения (1.88) следует, что $\tilde{\omega}(x,t) \equiv 0$ для всех $x < |t|$, $\tilde{\omega}$ четна по переменной t , имеет непрерывные первые производные внутри области D_1 и

$$\tilde{\omega}(x, x-0) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi, \quad x > 0. \quad (1.89)$$

Выражение $\tilde{\omega}(x,t) \equiv 0$ для $x < |t|$, следует из того, что $\theta(x-|t|) \equiv 0$ при $x < |t|$, чтобы вычислить $\tilde{\omega}(x, x-0)$ в (1.89) надо положить $t=x$, тогда $\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi) d\xi = 0$ и

$\iint_{\square_1(x,t)} q(\xi) \tilde{\omega}(\xi, \tau) d\xi d\tau$, т.к. $\square_1(x,t)$ превратится при $x=t$ в отрезок.

Решение задачи (1.80), (1.82) может быть представлено в виде [13, с.22-64]

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \omega(x, t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau) \omega(x, \tau) d\tau.$$

В работе [14] приведена следующая лемма.

Лемма.2 Если ω решение вспомогательной задачи Коши (1.83), (1.84), то равенство

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) \omega(x, t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} r(t-\tau) \omega(x, \tau) d\tau \quad (1.90)$$

будет решением задачи (1.80), (1.82).

Для полноты приведем доказательство леммы. Из основного свойство дельта - функции Дирака

$$\int_R \varphi(x) \delta(x) dx = \varphi(0),$$

следует, что

$$u(0,t) = \int_R r(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = \int_R r(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = r(t).$$

Дифференцируя равенство (1.90), получим

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= \int_R r(\tau) \omega_x(x, t-\tau) d\tau, \\ u_{tt}(x,t) &= \int_R r(\tau) \omega_{tt}(x, t-\tau) d\tau = \int_R r(\tau) [\omega_{xx} - q(x)\omega] d\tau = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_R r(\tau) \omega(x, t-\tau) d\tau - \\ &- q(x) \int_R r(\tau) \omega(x, t-\tau) d\tau = u_{xx} - q(x)u. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u.$$

Учитывая (1.86) и (1.87), преобразуем формулу (1.90):

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [r(t-x) + r(t+x)] + \int_{-x}^x r(t-\tau) \tilde{\omega}(x, \tau) d\tau.$$

Из (1.81) следует, что

$$\frac{1}{2} [r(t-x) + r(t+x)] + \int_{-x}^x r(t-\tau) \tilde{\omega}(x, \tau) d\tau = 0, \quad x > |t|. \quad (1.91)$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (1.91) является интегральным уравнением первого рода относительно функции $\tilde{\omega}(x, t)$, $t \in (-x, x)$. Уравнение (1.91) называется интегральным уравнением Гельфанда-Левитана.

Перепишем уравнение (1.91) в операторной форме

$$A\tilde{\omega} = f \quad (1.92)$$

где $f(t) = -\frac{1}{2} [r(t-x) + r(t+x)]$, $A\tilde{\omega} = \int_{-x}^x r(t-\tau) \tilde{\omega}(x, \tau) d\tau$.

Для рассмотрения более общего случая уравнения вида (1.92) рассмотрим следующее интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$A\tilde{\omega}(x, t) = \int_{-x}^x r(t-\beta) \tilde{\omega}(x, \beta) d\beta = f(t), \quad |t| < x \quad (1.93)$$

где $\tilde{\omega}, f \in L_2(-x, x)$, а $r(t) \in L_2(0, 2x)$.

Оператор A^* , сопряженный к оператору A , определяется формулой

$$A^* p(t) = \int_{-x}^x r(\xi-t) p(\xi) d\xi, \quad p(t) \in L_2(0, 2x).$$

Применим к уравнению (1.93) оператор A^* :

$$A^* A\tilde{\omega} = A^* f.$$

Оператор $A^* A$ является симметричным интегральным оператором с ядром

$$A^* A\tilde{\omega}(x, t) = \int_{-x}^x r(\xi-t) \int_{-x}^x r(\xi-\beta) \tilde{\omega}(x, \beta) d\beta d\xi.$$

Ядро оператора A^*A

$$\tilde{K}(\beta, t) = \int_{-x}^x r(\xi - t)r(\xi - \beta)d\xi$$

симметрично и имеет полную ортонормированную в $L_2(0, 2x)$ последовательность собственных функции $\{\varphi_n(t)\}$, ($n \in N$) и соответствующую к ней последовательность вещественных собственных значений $\{\lambda_n\}$ такую, что $\lambda_n > \lambda_{n+1}$ и

$$A^*A\varphi_n = \lambda_n\varphi_n, \quad n \in N.$$

Наряду с уравнением (1.92) рассматривается регуляризованное уравнение

$$\alpha\tilde{\omega}(x, t) + A^*A\tilde{\omega}(x, t) = A^*f_\gamma(t), \quad (1.94)$$

где α - параметр регуляризации, $\gamma > 0$, $f_\gamma \in L_2(0, 2x)$. Нас интересует вопрос о расхождении в смысле нормы $L_2(0, 2x)$ решений уравнений (1.93) и (1.94).

В работе М.М.Лаврентьева [16,с.1-75;17,с.31-33;15,с.121-129] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть все собственные значения оператора A^*A положительны. Предположим, что для некоторого $f \in L_2(0, 2x)$ существует решение $\tilde{\omega}_T \in L_2(0, 2x)$ уравнения (1.93). Тогда найдутся $\alpha_*, \gamma_* > 0$ такие, что при всех $\alpha \in (0, \alpha_*)$, $\gamma \in (0, \gamma_*)$ и при любых $f_\gamma \in L_2(0, 2x)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f - f_\gamma\| \leq \gamma$$

существует решение $\tilde{\omega}_{\alpha\gamma}$ уравнения (1.94) удовлетворяющее неравенству

$$\|\tilde{\omega}_{\alpha\gamma} - \tilde{\omega}_T\| \leq \|\tilde{K}\| \frac{\gamma}{\alpha} + g(\alpha). \quad (1.95)$$

где $g(\alpha)$ функция, стремящаяся к нулю при $\alpha \rightarrow 0$.

Здесь и далее через $\|u\|$ обозначается норма функции u в $L_2(0, 2x)$, если u функция от одной переменной и в $L_2(0, 2x)^2$, если u зависит от двух переменных.

Доказательство. Решение $\tilde{\omega}_{\alpha\gamma}(x, t)$ уравнения (1.94) запишем в виде разложения в ряд Фурье по собственным функциям $\{\varphi_n(t)\}$, $n \in N$, оператора A^*A :

$$\tilde{\omega}_{\alpha\gamma}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \tilde{\omega}_{\alpha\gamma n}(x) \varphi_n(t) \quad (1.96)$$

Введем обозначения:

$$A^* f(t) = p(t), \quad A^* f_\gamma(t) = p_\gamma(t) \quad \text{и} \quad \tilde{p}(t) = p_\gamma(t) - p(t).$$

В силу полноты системы $\{\varphi_n(t)\}$ имеет место разложение

$$p_\gamma(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_{\gamma k}(t) \varphi_k(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\tilde{p}_k + p_k) \varphi_k(t), \quad (1.97)$$

где $p_{\gamma k} = \langle p_\gamma, \varphi_k \rangle = \int_{-x}^x p_\gamma(t) \varphi_k(t) dx$, $\tilde{p}_k(x) = \langle \tilde{p}, \varphi_k \rangle$, $p_k = \langle p, \varphi_k \rangle$.

Умножая обе части уравнения (1.94) на $\varphi_n(t)$ и затем интегрируя от $-x$ до x , с учетом представления ядра

$$\tilde{K}(\beta, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k \varphi_k(\beta) \varphi_k(t),$$

ортонормированности системы $\{\varphi_n(t)\}$ и равенств (1.96), (1.97) получим

$$\alpha \tilde{\omega}_{\alpha\gamma n} + \lambda_n \tilde{\omega}_{\alpha\gamma n} = \tilde{p}_n + p_n = p_{\gamma n} \quad \text{или} \quad \tilde{\omega}_{\alpha\gamma n} = \frac{p_{\gamma n}}{\alpha + \lambda_n} = \frac{\tilde{p}_n + p_n}{\alpha + \lambda_n}.$$

Следовательно, в силу (1.95), регуляризованное решение $\tilde{\omega}_{\alpha\gamma}(x, t)$ имеет следующий вид

$$\tilde{\omega}_{\alpha\gamma}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p_{\gamma n}}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(t).$$

Запишем разложение погрешности по системе $\{\varphi_n(t)\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(x, t) &= \tilde{\omega}_T(x, t) - \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tilde{\omega}_n(x, t) - \frac{\tilde{p}_n + p_n}{\alpha + \lambda_n} \right) \varphi_n(t) = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{p_n}{\alpha + \lambda_n} + \frac{\alpha \tilde{\omega}_n}{\alpha + \lambda_n} + \frac{\lambda_n \tilde{\omega}_n - p_n}{\alpha + \lambda_n} \right) \varphi_n(t), \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega}_n = \langle \tilde{\omega}_T, \varphi_n \rangle$.

Так как решение $\tilde{\omega}_T$ уравнения (1.93) является решением и уравнения $A^* A \tilde{\omega} = A^* f$, то есть уравнение $A^* A \tilde{\omega} = p$, то $\lambda_n \tilde{\omega}_n - p_n = 0$. Тогда разложение $\tilde{q}(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\widehat{\omega}(x,t) &= \widetilde{\omega}_T(x,t) - \widetilde{\omega}_{\alpha\gamma}(x,t) = \\
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}_n}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \widetilde{\omega}_n}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(x) = \widetilde{\beta}_\alpha(x) + \beta_\alpha(x),
\end{aligned} \tag{1.98}$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_\alpha(t) &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}_n}{\alpha + \lambda_n} \varphi_n(t), \\
\beta_\alpha(x,t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha \widetilde{\omega}_n}{\alpha + \lambda_n} \widetilde{\omega}_n(x,t).
\end{aligned}$$

Оценим сначала $\|\widetilde{\beta}_\alpha\|$. Учитывая, что $\alpha > 0$, $\lambda_n \geq 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
\|\widetilde{\beta}_\alpha\|^2 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{P}_n^2 = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{n=1}^{+\infty} (p_m - p_n)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \|A^* f_\gamma - A^* f\|^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{\alpha^2} \|A^*\|^2 \|f_\gamma - f\|^2 = \frac{\|A^*\|^2}{\alpha^2} \gamma^2.
\end{aligned} \tag{1.99}$$

Оценим теперь $\|\beta_\alpha\|$. Так как $\widetilde{\omega}_T \in L_2(0, 2x)$, то норма $\|\widetilde{\omega}_T\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{\omega}_n^2\right)^{1/2}$ конечна, то есть ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \widetilde{\omega}_n^2$ сходится. Тогда в силу неравенства $\frac{\alpha^2 \widetilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} < \widetilde{\omega}_n^2$ сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \widetilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} = \|\beta_\alpha\|^2 = g(\alpha). \tag{1.100}$$

Следовательно, можно подобрать номер n_ε так, что

$$\sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \widetilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.101}$$

С другой стороны, с учетом $\alpha > 0$, $\lambda_n > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \frac{\alpha^2 \widetilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} &\leq \alpha^2 \sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \frac{\widetilde{\omega}_n^2}{\lambda_n^2} \leq \alpha^2 \max_{n=1, n_\varepsilon-1} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \right\} \sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \widetilde{\omega}_n^2 \leq \\
&\leq \alpha^2 \mu_\varepsilon^2 \sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \widetilde{\omega}_n^2 = \alpha^2 \mu_\varepsilon^2 \|\widetilde{\omega}_T\|^2,
\end{aligned}$$

где $\mu_\varepsilon^2 = \max_{n=1, n_\varepsilon-1} \left\{ \frac{1}{\lambda_n} \right\}$.

Пологая $\alpha = \alpha_\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\mu_\varepsilon \|\widetilde{\omega}_T\|}$ имеем:

$$\sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \frac{\alpha^2 \widetilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.102}$$

Тогда при всех $\alpha \in (0, \alpha_\varepsilon)$, в силу (1.100), (1.101), (1.102) получим

$$g^2(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \tilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} = \sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty} \frac{\alpha^2 \tilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} + \sum_{n=1}^{n_\varepsilon-1} \frac{\alpha^2 \tilde{\omega}_n^2}{(\alpha + \lambda_n)^2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (1.103)$$

Значит $g(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Из (1.98), (1.99) и (1.103) получаем

$$\|\tilde{\omega}_\Gamma - \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}\| < \frac{\|A^*\| \gamma}{\alpha} + g(\alpha). \quad (1.104)$$

Оценим $\|A^*\|$ через норму ядра $K(t, \beta)$ интегрального уравнения (1.93)

$$\|A^* f\|^2 = \int_a^b \left(\int_a^b K(\beta, t) f(\beta) d\beta \right)^2 dx.$$

Используя неравенство Гельдера имеем

$$\begin{aligned} \|A^* f\|^2 &= \int_{-x}^x \left(\int_{-x}^x K(\beta, x) f(\beta) d\beta \right)^2 dx \leq \int_{-x}^x \left[\left(\int_{-x}^x |K(\beta, x)|^2 d\beta \right)^{1/2} \left(\int_{-x}^x |f(\beta)|^2 d\beta \right)^{1/2} \right]^2 dx = \\ &= \|f\|^2 \int_{-x}^x \int_{-x}^x |K(\beta, \beta)|^2 d\beta dx \end{aligned}$$

или

$$\frac{\|A^* f\|}{\|f\|} \leq \|K\|.$$

Отсюда следует, оценка $\|A^*\| \leq \|K\|$. В силу этой оценки и неравенство (1.104) получим

$$\|\tilde{\omega}_\Gamma - \tilde{\omega}_{\alpha\gamma}\| \leq \|K\| \frac{\gamma}{\alpha} + g(\alpha).$$

Что и требовалось доказать.

Уравнение (1.92) можно решать прямыми и итерационными численными методами. Для этого строится следующее регуляризованное методом М.М. Лаврентьева уравнение

$$\alpha \tilde{\omega}(x, t) + A^* A \tilde{\omega}(x, t) = A^* f_\gamma(t) \quad (1.105)$$

где $f_\gamma(t) = f(t) + \alpha \tilde{\omega}^0(x, t)$, α - положительный параметр, $\tilde{\omega}^0(x, t)$ - пробное решение, т.е. некоторое приближение к искомому решению (если информации о решении нет, то можно положить $\tilde{\omega}^0(x, t) = 0$).

Регуляризованное уравнение (1.105) решается градиентными методами Ландвебера, сопряженных градиентов и прямым методом квадратного корня.

1.2.6 Сведение коэффициентной обратной задачи к уравнению Гельфанда-Левитана второго рода

Дифференцируя уравнение (1.91) по t , получим уравнение второго рода типа Фредгольма [13,с.22-64;15,с.269-304]

$$\tilde{\omega}(x,t) + \int_{-x}^x r'(t-\tau)\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau = -\frac{1}{2}[r'(t-x)+r'(t+x)], \quad x > 0, t \in (-x, x) \quad (1.106)$$

Ядро $r'(t-\tau)$ уравнения (1.106) является непрерывным и в силу четности $r'(t)$ симметричным. Формула (1.106) получена из следующей формулы дифференцирования функции с разрывом первого рода из теории обобщенных функций.

Пусть функция $r(x)$ такова, что $r \in C^1(x \leq x_0)$ и $r \in C^1(x \geq x_0)$ тогда

$$r' = \{r'(x)\} + [r(x_0+0) - r(x_0-0)]\delta(x-x_0)$$

В частности $\theta'(x) = \delta(x)$.

Поскольку решение $\tilde{\omega}(x,t)$ уравнения (1.106) четно по переменной t , это уравнение можно переписать в виде

$$\tilde{\omega}(x,t) + \int_0^x [r'(t-\tau) + r'(t+\tau)]\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau = -\frac{1}{2}[r'(t-x) + r'(t+x)], \quad x > 0, t \in [0, x]. \quad (1.107)$$

Уравнение (1.107) эквивалентно уравнению (1.91) при дополнительном условии, что решение $\tilde{\omega}(x,t)$ уравнения (1.107) является четной функцией по аргументу t . В самом деле, любое четное по t решение уравнения (1.91) является решением уравнения (1.107). С другой стороны, любое решение уравнения (1.107), продолженное четным образом по t для значений $t \in (-x, 0)$, удовлетворяет уравнению (1.106), которое получено из уравнения (1.91) дифференцированием по t , и также удовлетворяет условию

$$\int_{-x}^x f(-\tau)\tilde{\omega}(x,\tau)d\tau = 0,$$

совпадающему с равенством (1.91) при $t=0$. Отсюда следует, что любое решение уравнения (1.107) при четном продолжении по t является решением уравнения (1.87). Тем самым установлена эквивалентность уравнений (1.91) и (1.107).

Допустим, что уравнение (1.107) для каждого $x > 0$ однозначно разрешимо в классе непрерывных функций. Тогда его решение определяет непрерывную в области D_1 функцию $\tilde{\omega}(x,t)$ (с учетом ее четного продолжения в ту часть области D_1 , где $t < 0$).

Так как правая часть (1.91) непрерывно дифференцируема в D_1 , а ядро $r'(t-s)$ кусочно-непрерывно дифференцируемо, то решение уравнения (1.91) будет непрерывно дифференцируемым в D_1 . Из уравнения (1.107), в частности, следует, что $\tilde{\omega}(x, +0) = 0$. Поэтому четное продолжение в области $t < 0$ происходит с сохранением непрерывности частных производных.

Искомая функция $q(x)$ связана с решением интегрального уравнения (1.107) соотношением

$$q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{\omega}(x, x-0), \quad x > 0 \quad (1.108)$$

Для того чтобы построить решение обратной задачи в точке $x > 0$, достаточно решить уравнение (1.106) и найти $q(x)$ по формуле (1.108). Из теории уравнений Фредгольма известно, что для малых значений x уравнение (1.106) однозначно разрешимо.

Для приближенного решения интегрального уравнения (1.106) заменим интеграл в этом уравнении на сумму и при фиксированном $x > 0$ и при каждом t^k получим систему линейных уравнений:

$$\tilde{\omega}(x, t_k) + \sum_{i=-n}^n r'(t_k - \tau_i) \tilde{\omega}(x, \tau_i) h = -\frac{1}{2} [r'(t_k - x) + r'(t_k + x)], \quad (1.109)$$

$$-x \leq t_k \leq x, \quad -n \leq k \leq n, \quad h = x/n.$$

Отсюда, в развернутом виде получим

при $k = -n$:

$$\tilde{\omega}(x, t_{-n}) + \sum_{i=-n}^n r'(t_{-n} - \tau_i) \tilde{\omega}(x, \tau_i) h = -\frac{1}{2} (r'(t_{-n} - x) + r'(t_{-n} + x))$$

при $k = -n+1$:

$$\tilde{\omega}(x, t_{-n+1}) + \sum_{i=0}^n r'(t_{-n+1} - \tau_i) \tilde{\omega}(x, \tau_i) h = -\frac{1}{2} (r'(t_{-n+1} - x) + r'(t_{-n+1} + x)) \quad \text{и т.д.}$$

Таким образом, получим систему

$$A\tilde{\omega} = f \quad (1.110)$$

где матрица A имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 1+h \cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n}) & h \cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n+1}) & h \cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n+2}) & \dots & h \cdot r'(t_{-n} - \tau_{-n-1}) & h \cdot r'(t_{-n} - \tau_n) \\ h \cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n}) & 1+h \cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n+1}) & h \cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n+2}) & \dots & h \cdot r'(t_{-n+1} - \tau_{-n-1}) & h \cdot r'(t_{-n+1} - \tau_n) \\ h \cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n}) & h \cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n+1}) & h \cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n+2}) & \dots & h \cdot r'(t_{-n+2} - \tau_{-n-1}) & h \cdot r'(t_{-n+2} - \tau_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h \cdot r'(t_n - \tau_{-n}) & h \cdot r'(t_n - \tau_{-n+1}) & h \cdot r'(t_n - \tau_{-n+2}) & \dots & h \cdot r'(t_n - \tau_{-n-1}) & 1+h \cdot r'(t_n - \tau_n) \end{pmatrix} \quad (1.111)$$

Вектор неизвестных и правая часть записываются следующим образом

$$\tilde{\omega} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega}(x, \tau_{-n}) \\ \tilde{\omega}(x, \tau_{-n+1}) \\ \tilde{\omega}(x, \tau_{-n+2}) \\ \dots \\ \tilde{\omega}(x, \tau_n) \end{pmatrix}, \quad f = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} r'(t^{-n} - x) + r'(t^{-n} + x) \\ r'(t^{-n+1} - x) + r'(t^{-n+1} + x) \\ r'(t^{-n+2} - x) + r'(t^{-n+2} + x) \\ \dots \\ r'(t^n - x) + r'(t^n + x) \end{pmatrix}. \quad (1.112)$$

Таким образом, получается уравнение (1.110) с симметричной матрицей A , т.к. функция $r'(t)$ является четной. Из (1.111) видно, что недиагональные элементы матрицы A определяется следующим образом

$$a_{ij} = r'(t_{-n+i-1} - \tau_{-n+j-1})h,$$

где $i = 1, 2, \dots, 2n+1$; $j = 1, 2, \dots, 2n+1$.

Величины, входящие в аргумент функции $r'(t)$ определяются по формулам

$$t_k = -x + (k-1)h, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1,$$

$$\tau_k = -x + (k-1)h, \quad k = 1, 2, \dots, 2n+1.$$

Из вышеуказанного легко можно увидеть что, матрица A симметричная.

2 ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

2.1 Метод квадратного корня

При использовании схем регуляризации М.М.Лаврентьева или А.Н.Тихонова приближенное решение находится из системы (1.105) с симметричной положительно определенной, а при разумном выборе α , и хорошо обусловленной $n \times n$ матрицей. Для их решения, наряду с итерационными процессами, можно использовать традиционные прямые методы типа Гаусса, Жордана и др.[43-47]. В данной работе используется метод квадратного корня [15,с.112-113;43,с.69-74], который специально приспособлен для уравнений с симметричными матрицами и отличается экономичностью и устойчивостью.

Метод предназначен для решения систем уравнений с симметричной матрицей [15,с.112-113;43,с.69-74]. Он основан на разложении Холецкого симметричной матрицы $\alpha E + A_h^* A_h$ в произведение

$$\alpha E + A_h^* A_h = S^* D S \quad (2.1)$$

где S - верхняя треугольная матрица с положительными элементами на главной диагонали, S^* - матрица, транспонированная к ней, D - диагональная матрица (по диагонали ± 1). Для удобства элементы матрицы $\alpha E + A_h^* A_h$ обозначим через a_{ij} , $i=1,2,\dots,m$, $j=1,2,\dots,m$ компоненты вектора $A_h^* f$ через f_i , $i=1,2,\dots,m$. Если разложение (2.1) получено, то решение системы (1.105) сводится к последовательному решению двух систем уравнений с треугольными матрицами

$$S^* y = f, \quad (2.2)$$

$$D S \tilde{\omega} = y. \quad (2.3)$$

По следующим формулам находятся рекуррентно все ненулевые элементы матриц D и S . Диагональные элементы матриц S и D , s_{11} и d_{11} определяются по формулам [15, с.112-113; 43,с.69-74]

$$d_{11} = \text{sign} a_{11}, \quad s_{11} = \sqrt{|a_{11}|},$$

$$d_{ii} = \text{sign} \left(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} \right),$$

$$s_{1j} = \frac{a_{1j}}{s_{11} d_{11}}, \quad j = 2, 3, \dots, m.$$

В частности, при $i = j$ используем следующие формулы

$$s_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |s_{li}|^2 d_{ll} \right)^{1/2}, \quad i = 2, 3, \dots, m-1,$$

Далее, при $i < j$ имеем

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} \bar{s}_{li} s_{lj} d_{ll}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad j = i+1, \dots, m.$$

Последний диагональный элемент определяется по формуле

$$s_{mm} = \sqrt{a_{mm} - \sum_{l=1}^{m-1} s_{lm}^2 d_{ll}}.$$

Решения систем уравнений (2.2), (2.3) находятся по следующим рекуррентным формулам

$$y_1 = \frac{f_1}{s_{11}},$$

$$y_i = \frac{f_i - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ji} y_j}{s_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

Вычисляем значения $\tilde{\omega}_i$:

$$\tilde{\omega}_i = \frac{y_i - \sum_{j=i+1}^m s_{ij} \tilde{\omega}_j d_{jj}}{s_{ii} d_{ii}}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1, \quad \tilde{\omega}_m = \frac{y_m}{s_{mm} d_{mm}}.$$

Особенно удобен метод квадратного корня для ленточных матриц [15, с. 112-113; 19, с. 1-75], так как схема метода позволяет учитывать структуру матрицы и исключить операции с нулями.

Простая модификация метода квадратного корня ($s_{ij} = 0$ для любого значения i при котором $s_{ii} = 0$) сохраняет вычислительную процедуру только для случая положительно полуопределенной матрицы. Кроме того, клеточные аналоги метода квадратного корня [15, с. 112-113; 18, с. 1-75; 43, с. 69-74] позволяют эффективно решать системы высокого порядка, привлекая память ЭВМ второго уровня.

3 ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

3.1 Метод регуляризации М.М. Лаврентьева

Методы регуляризации и принципы выбора параметра регуляризации изложены в работах А.Н.Тихонова [3, с.390-459], М.М. Лаврентьева [16,с.1-75], С.И.Кабанихина [15,с.97-98], в учебном пособии К.П.Ловецкого, Л.А.Севастьянова, Е.Б. Ланеева [2, с.44-62] и многих других авторов. Помимо метода регуляризации М.М.Лаврентьева для устойчивого решения уравнения первого рода (интегральных, дифференциальных, алгебраических и т.д.) существуют множество других известных методов. Это методы регуляризации Тихонова, Денисова, Бакушинского, максимальной энтропии Берга, итеративной регуляризации Фридмана, Морозова, локальной регуляризации Арсенина, генератор РА (регуляризирующих алгоритмов) Бакушинского, квазирешение Иванова, метод поиска решения на компакте, дискриптивной регуляризации Морозова и др. Эти методы называются методами детерминистской регуляризации.

Так же существуют методы статистической регуляризации, использующие статистический (вероятностный) подход. Они основаны в порядке повышения точности решения и количества дополнительной информации о решении.

Существует ряд различных принципов выбора параметра регуляризации α для известных методов регуляризации. Это принципы невязки, обобщенной невязки, подбора, асимптотический принцип, принцип квазиоптимального (квазинаилучшего) α , отношения, независимых реализаций, перекрестной значимости, моделирования и т.д.

В используемом методе регуляризации М.М.Лаврентьева уравнение $A\tilde{\omega} = f$ заменяется близким к нему корректным уравнением

$$\mu\tilde{\omega} + A\tilde{\omega} = f_{\gamma} \quad (3.1)$$

где $f_{\gamma} = f + \mu\tilde{\omega}^0$, μ - положительный параметр, $\tilde{\omega}^0$ - пробное решение, т.е. некоторое приближение к искомому решению (если информации о решении нет, то можно положить $\tilde{\omega}^0 = 0$).

Пусть имеется информация о решении $\tilde{\omega}^0$ и выполняется соотношение

$$\mu\tilde{\omega}^0 + A\tilde{\omega}^0 \approx f_{\gamma} \quad (3.2)$$

Тогда из (3.1), (3.2) имеем

$$\mu\tilde{\omega} + A\tilde{\omega} = f_{\gamma} + l(\mu\tilde{\omega}^0 + A\tilde{\omega}^0 - f_{\gamma}) \quad (3.3)$$

где l коэффициент. Сделаем следующее обозначение $\sigma = (\mu\tilde{\omega}^0 + A\tilde{\omega}^0 - f)$. Тогда получим

$$\mu\tilde{\omega} + A\tilde{\omega} = f_{\gamma} + l\sigma \quad (3.4)$$

Полученное уравнение (3.4) решаем итерационным методом.
Итерационный процесс с регуляризацией М.М. Лаврентьева примет вид

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A)\tilde{\omega}_n = f_\gamma. \quad (3.5)$$

Алгоритм расчета состоит в следующем [43, с.82-127]:

1. Начальное приближение решения задается равной правой части f_γ ;
2. Задается точность вычисления ε , для условия окончания итерационного процесса $|\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n| < \varepsilon$;
3. Вычисления проводятся по следующему итерационному процессу $\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A)\tilde{\omega}_n = f_\gamma$;

3.2 Метод сопряженных градиентов для некорректных задач

Для решения задачи (1.92) применяется метод сопряженных градиентов для некорректных задач [15,с.60-66;47,с.294-300]. Градиентные методы в каноническом виде записываются формулой

$$\tilde{\omega}^{n+1}(x,t) = \tilde{\omega}^n(x,t) - \alpha_n J' \tilde{\omega}^n(x,t), \quad \alpha_n > 0,$$

для которых параметр спуска α_n либо фиксирован, либо выбирается из условия минимума некоторого функционала качества $J(\tilde{\omega}(x,t)) = \|A\tilde{\omega}(x,t) - f\|^2$.

Где градиент функционала $J(\tilde{\omega})$ имеет вид

$$J' \tilde{\omega}^n(x,t) = 2A^* (A\tilde{\omega}^n(x,t) - f)$$

Запишем градиент функционала в интегральной форме

$$J' \tilde{\omega}^n(x,t) = 2 \int_{-x}^x r(\xi - t) \int_{-x}^x r(\xi - \beta) \tilde{\omega}^n(x, \beta) d\beta d\xi - 2 \int_{-x}^x r(\xi - t) f(\xi) d\xi. \quad (3.6)$$

Для численного решения уравнения (3.6) заменяем интеграл квадратурной формулой прямоугольников

$$\begin{aligned} A^* A \tilde{\omega} &= \int_{-x}^x r(\xi - t) \left(\int_{-x}^x r(\xi - \beta) \tilde{\omega}(x, \beta) d\beta \right) d\xi \approx \\ &\approx \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t) \cdot \sum_{j=-n}^n r(\xi_i - \beta_j) \tilde{\omega}(x, \beta_j) h^2 = h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t) \cdot (r(\xi_i - \beta_{-n}) \tilde{\omega}(x, \beta_{-n}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + r(\xi_i - \beta_{-n+1})\tilde{\omega}(x, \beta_{-n+1}) + r(\xi_i - \beta_{-n+2})\tilde{\omega}(x, \beta_{-n+2}) + \dots + r(\xi_i - \beta_n)\tilde{\omega}(x, \beta_n) = \\
& = h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t) \cdot r(\xi_i - \beta_{-n})\tilde{\omega}(x, \beta_{-n}) + h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^i) \cdot r(\xi_i - \beta_{-n+1})\tilde{\omega}(x, \beta_{-n+1}) + \dots \\
& \dots + h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^i) \cdot r(\xi_i - \beta_n)\tilde{\omega}(x, \beta_n).
\end{aligned}$$

Теперь полагая $t^{(j)} = j\Delta t$, $\Delta t = \frac{x}{n}$, $t = t^{(j)}$, $j = -n, -n+1, \dots, n$ получим матрицу $A_h^* A_h$ линейного оператора $A^* A$

$$A_h^* A_h = \begin{pmatrix} h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_n) \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})r(\xi_i - \beta_n) \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+2)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+2)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+2)})r(\xi_i - \beta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n-1)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n-1)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n-1)})r(\xi_i - \beta_n) \\ h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_{-n}) & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_{-n+1}) & \dots & h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_n) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Правая часть $A^* f(t) = \int_{-x}^x r(\xi - t)f(\xi)d\xi$ в дискретном виде

$$\overline{A_h^* f(t)} = \left(h \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})f(\xi_i), h \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n+1)})f(\xi_i), \dots, h \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})f(\xi_i) \right)^T \quad (3.8)$$

Искомая функция $\vec{\omega}(x, t)$

$$\vec{\omega}(x, t) = \left(\tilde{\omega}(x, t^{(-n)}), \tilde{\omega}(x, t^{(-n+1)}), \dots, \tilde{\omega}(x, t^{(0)}), \tilde{\omega}(x, t^{(1)}), \dots, \tilde{\omega}(x, t^{(n)}) \right)^T. \quad (3.9)$$

Размерность матрицы $A_h^* A_h$ равна $(2n \times 2n)$. Симметричность полученной матрицы $A_h^* A_h$ видно из сравнения нескольких элементов, элемент $(1, 2n)$ равен $h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(-n)})r(\xi_i - \beta_n)$ и элемент с номером $(2n, 1)$ равен $h^2 \sum_{i=-n}^n r(\xi_i - t^{(n)})r(\xi_i - \beta_{-n})$ т.к. $t^{(-n)} = \beta_{-n}$, $\beta_n = t^{(n)}$ данные элементы равны.

Алгоритм реализации метода сопряженных градиентов [15, с.60-66; 43, с.120 -121; 47, с.294-300]:

- 1) Задается начальное приближение $\tilde{\omega}_h^0(x, t)$;
- 2) Одношаговым итерационным методом вычисляется первое приближение $\tilde{\omega}_h^1(x, t) = \tilde{\omega}_h^0(x, t) - \alpha J' \tilde{\omega}_h^0(x, t)$;
- 3) Вычисляется $p_0 = J' \tilde{\omega}_h^0(x, t)$;
- 4) Вычисляется $p_n = J' \tilde{\omega}_h^n(x, t) + \frac{\|J' \tilde{\omega}_h^n(x, t)\|^2}{\|J' \tilde{\omega}_h^{n-1}(x, t)\|^2} p_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, s$;

- 5) Вычисляется итерационный параметр $\alpha_n = \frac{\|J' \tilde{\omega}_h^{n-1}(x, t)\|^2}{(A_h^* A_h P_n, P_n)} = \frac{\|J' \tilde{\omega}_h^{n-1}(x, t)\|^2}{\|A_h P_n\|^2}$;
- 6) Находится следующее приближение $\tilde{\omega}_h^{n+1}(x, t) = \tilde{\omega}_h^n(x, t) - \alpha_n P_n$.

3.3 Сравнительный анализ численных результатов одномерного уравнения Гельфанда-Левитана

На основе предложенных методов решения коэффициентной обратной задачи по восстановлению источника были разработаны эффективные алгоритмы численной реализации и написаны программные коды. Вычислительные эксперименты проводились для различных функции $q(x)$ в широком диапазоне параметра x . В дальнейшем будут приведены результаты расчетов для функции $q(x) = 2 + \cos 27x$, $q(x) = 2x + \sin 18x$ в отрезке $[-x_L, x_L]$, где $x_L = 1$, количество слоев $n = 40, 100, 300, 500, 1000$. Численные эксперименты были проведены на суперкомпьютере URSA на базе 128 четырехядерных процессоров Intel® Xeon® серии E5335 2.00GHz при КазНУ им. аль-Фараби. Начальное приближение во всех случаях было выбрано равным правой части системы линейных уравнений (1.94), (3.8). Проведены многочисленные расчеты нахождения искомой функции $\tilde{\omega}(x, t)$, $t \in (-x_L, x_L)$ и по нему восстановления коэффициента $q(x)$. Далее задавалось возмущение данных

$$r_\sigma(t) = r(t) + \sigma \cos(30t)$$

где $r(t)$ - след решения прямой задачи. Величина σ изменяется от 0,2 до 0,8. Результаты численных расчетов показывают непрерывную зависимость решения уравнения от изменения входных данных. В работе [15, с.278-289] приведено доказательство теоремы существования и единственности решения задачи (1.46)-(1.48) в классе непрерывных функции $q(x)$.

Прямая задача (1.46)-(1.47) заменяется эквивалентной задачей Гурса (1.63). Для получения полной и дополнительной информации о решении прямой задачи вида (1.48), необходимо использовать более мелкую сетку разбиения расчетной области D_1 при численном решении задачи (1.63) разностной схемой (1.63). Сеточную функцию соответствующую $r(t) = u(0, t)$ обозначим следующим образом $r^n = u_m^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, K$. На рисунках 3, 4 показаны графики численного решения прямой задачи $r(t)$. Данная сеточная функция является дополнительным условием для решения обратной задачи методам Гельфанда-Левитана.

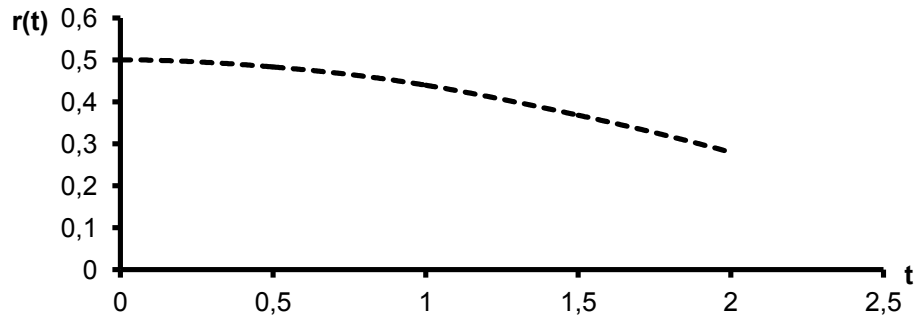


Рисунок 3 - График численного решения прямой задачи $r(t)$ для функций $q(x) = 2 + \cos 27x$ при $n = 40$

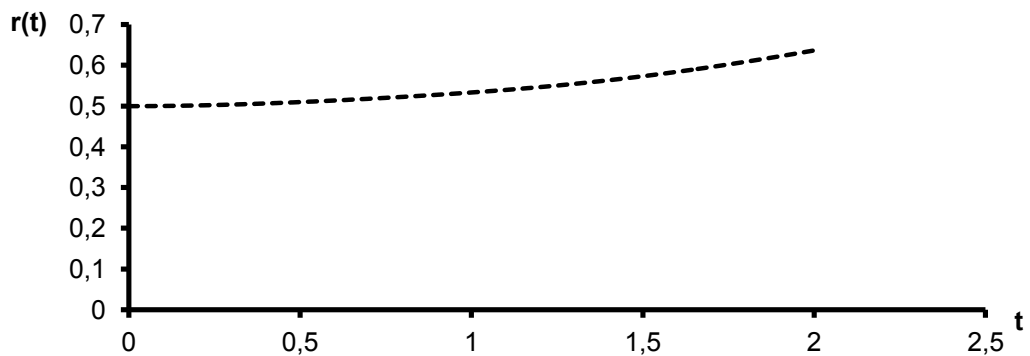


Рисунок 4 - График численного решения прямой задачи $r(t)$ для функций $q(x) = 2x + \sin 18x$ при $n = 40$

Заметим что, уравнение Гельфанда-Левитана (1.85) в силу сложившихся традиций мы называем интегральным уравнением, хотя это семейство интегральных уравнений относительно $\tilde{\omega}(x,t)$, зависящие от параметра x . Семейство интегральных уравнений Гельфанда-Левитана численно реализуется при $x > |t|$ в области

$$D_{\Delta} = \{-x_L < t < x_L, 0 < x < x_L\},$$

Данная область покрывается следующей сеточной областью

$$D_{\Delta}^h = \{(x_i, t_k) : x_i = i \cdot h, i = 0, 1, 2, \dots, n, h \cdot n = x_L; t_k = -x_L + k \cdot \tau, k = 0, 1, 2, \dots, m, m \cdot \tau = 2x_L\}.$$

Решение $r(t_k)$ прямой задачи продолжим нечетным образом на отрицательные t_k по следующим формулам

$$\tilde{r}(t_k) = \begin{cases} -r(t_{n_g-k+1}), & k = \overline{1, n_g - 1}, \\ r(t_{n_g}) = r(t_1), & \\ r(t_{k-n_g+1}), & k = \overline{1, n_g - 1}. \end{cases} \quad (3.10)$$

где n_g - количество узлов сетки по направлению t , в которых вычислены дополнительная информация, как решение задачи Гурса (1.63). На каждом слое $x = x_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$; $t_k = -x_i + k \cdot \tau$, $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $m \cdot \tau = 2x_i$ численно решается интегральное уравнение Гельфанда-Левитана и находятся приближенные значения функции $\tilde{\omega}_h(x, t_k)$.

Для решения интегральных уравнений используются методы, изложенные в разделах 3.1, 3.2. Для вычисления элементов матриц A_h , $A_h^* A_h$ по формулам (3.7), правой части (3.8) используем значения сеточной функций $\tilde{r}(t_k)$, которая определена по формулам (3.10).

Метод регуляризации (3.1) является дальнейшим развитием метода наименьших квадратов Гаусса (дающего псевдорешение) и метода псевдообратной матрицы Мура-Пенроуза (дающего нормальное решение). Матрица оператора A в (3.1) является теплицевой. Параметр регуляризации α метода М.М. Лаврентьева выбирается способом подбора [15, с. 97-98; 16, с. 24-41; 17, с.31-33]. Согласно нему, численное решение интегрального уравнения находится на основе дополнительной информации о решении.

На рисунках 5,6,7,8,9,10 приведены результаты численного решения семейств интегральных уравнений Гельфанда-Левитана и их сравнение с точным решением искомой функции $\tilde{\omega}_h(x, x)$.

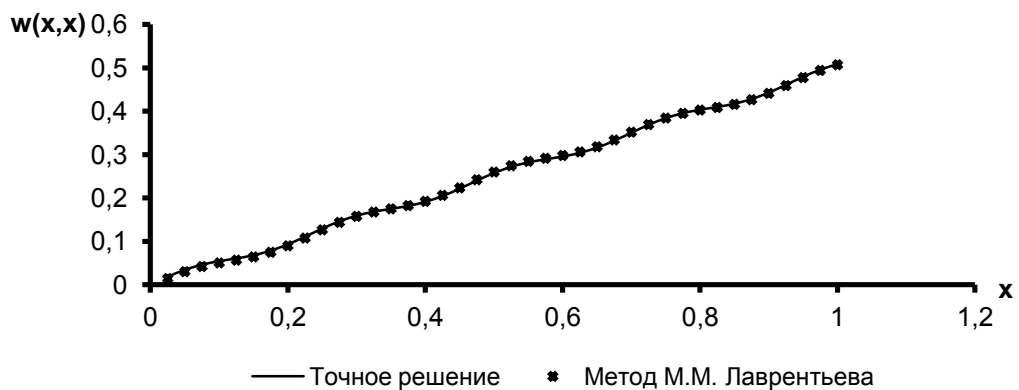


Рисунок 5 - График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определенным методом М.М. Лаврентьева для функций $q(x) = 2 + \cos 27x$ при $n = 40$

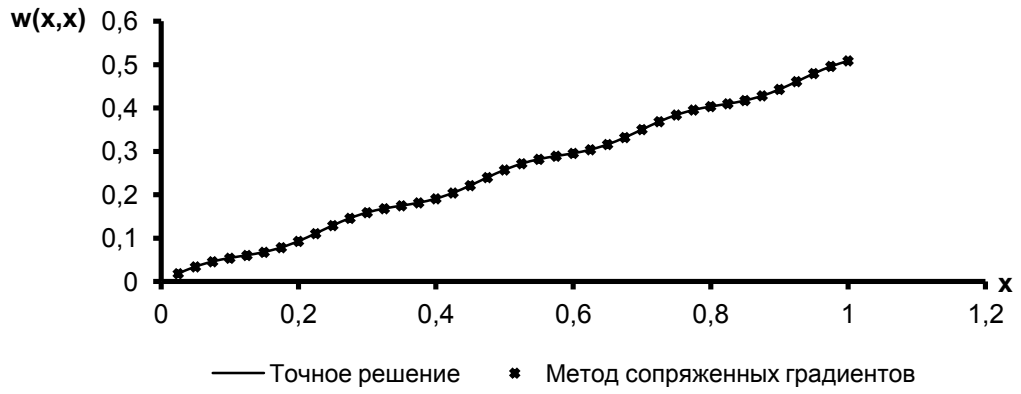


Рисунок 6 - График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определеннй методом сопряженных градиентов для функций $q(x) = 2 + \cos 27x$ при $n = 40$

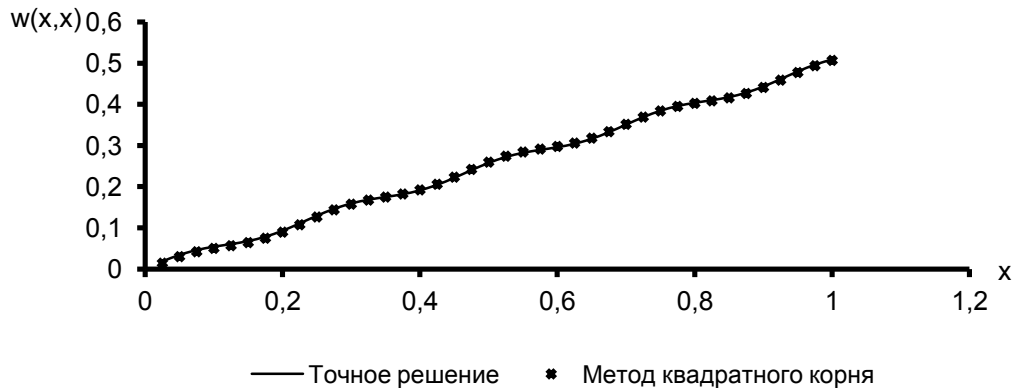


Рисунок 7 - График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определеннй методом квадратного корня для функций $q(x) = 2 + \cos 27x$ при $n = 40$

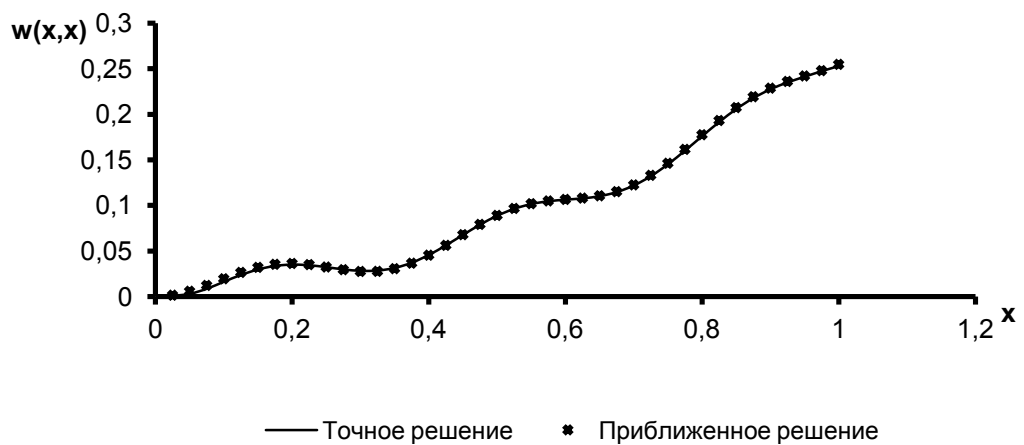


Рисунок 8- График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определеннй методом М.М. Лаврентьева для функций $q(x) = 2x + \sin 18x$ при $n = 40$

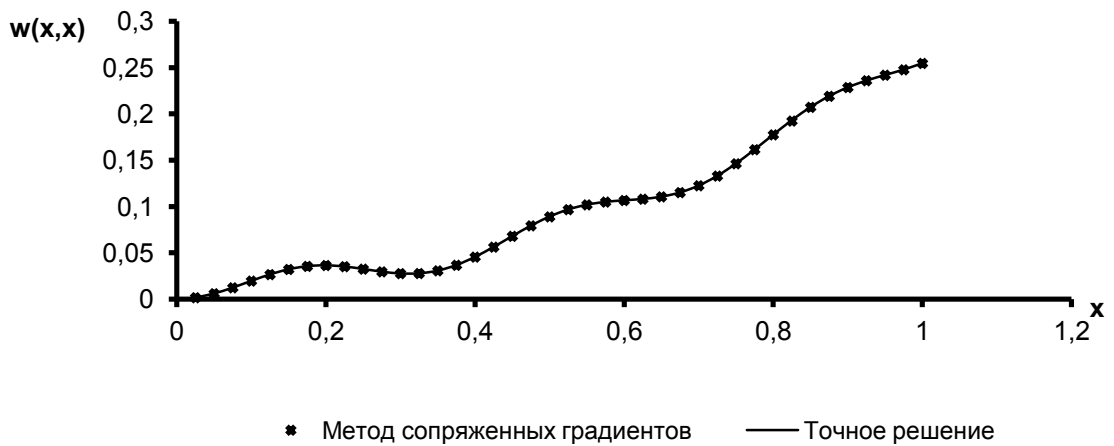


Рисунок 9 - График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определеннй методом сопряженных градиентов для функций $q(x) = 2x + \sin 18x$ при $n = 40$

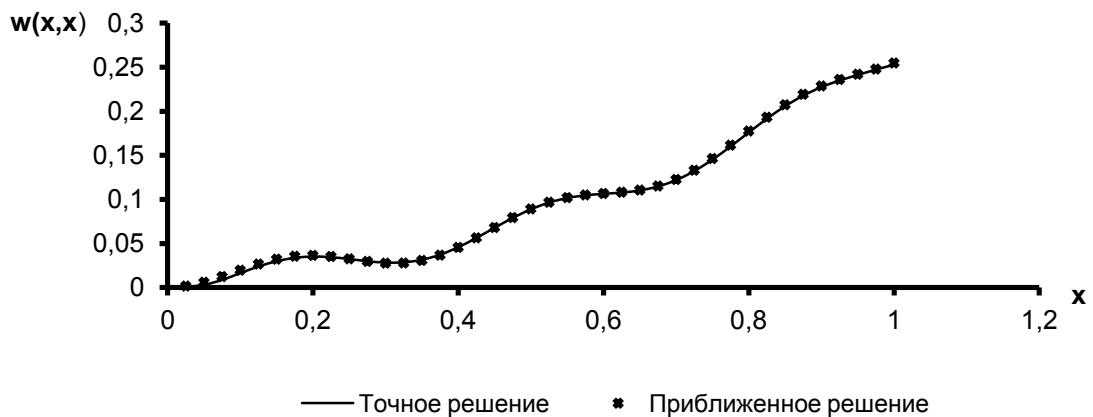


Рисунок 10 - График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определеннй методом квадратного корня для функций $q(x) = 2x + \sin 18x$ при $n = 40$

Из формулы (1.108) дифференцируя, находится $q(x)$

$$q(x) = 4 \frac{d\tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx}, \quad x > 0. \quad (3.11)$$

Для нахождения сеточных значений функции $q(x)$ по найденным значениям функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ в формуле (3.11) производную от непрерывной функций заменим левой разностной производной [46, с.18-29]

$$\tilde{q}(x_i) \approx \frac{4(\tilde{\omega}_h(x_i, x_i) - \tilde{\omega}_h(x_{i-1}, x_{i-1}))}{h} + O(h), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad h = x_L/n, \quad (3.12)$$

которая имеет первый порядок аппроксимации.

Методом неопределенных коэффициентов можно построить формулы численного дифференцирования, которые имеют третий порядок

аппроксимации. Записываются следующие разностные уравнения каждые, из которых умножаются на соответствующие коэффициенты k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 .

$$\begin{aligned}
k_1 \tilde{\omega}(x_{i-2}) &= k_1 \tilde{\omega}_h(x_i, x_i) - 2k_1 h \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx} \right)_{x=x_i} + k_1 \frac{(2h)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \\
&- k_1 \frac{(2h)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^3} \right)_{x=x_i} + O(h^4), \\
k_2 \tilde{\omega}(x_{i-1}) &= k_2 \tilde{\omega}_h(x_i, x_i) - k_2 h \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx} \right)_{x=x_i} + k_2 \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^2} \right)_{x=x_i} - \\
&- k_2 \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^3} \right)_{x=x_i} + O(h^4), \\
k_3 \tilde{\omega}(x_i) &= k_3 \tilde{\omega}_h(x_i, x_i), \\
k_4 \tilde{\omega}(x_{i+1}) &= k_4 \tilde{\omega}_h(x_i, x_i) + k_4 h \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx} \right)_{x=x_i} + k_4 \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \\
&+ k_4 \frac{h^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^3} \right)_{x=x_i} + O(h^4), \\
k_5 \tilde{\omega}(x_{i+2}) &= k_5 \tilde{\omega}_h(x_i, x_i) + 2k_5 h \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx} \right)_{x=x_i} + k_5 \frac{(2h)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^2} \right)_{x=x_i} + \\
&+ k_5 \frac{(2h)^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \tilde{\omega}_h(x, x-0)}{dx^3} \right)_{x=x_i} + O(h^4).
\end{aligned}$$

Приравнивая к нулю сумму коэффициентов при степенях второго и третьего порядка, получаем систему для их определения

$$\begin{cases}
2k_1 + \frac{k_2}{2} + \frac{k_4}{2} + 2k_5 = 0, \\
-\frac{4}{3}k_1 - \frac{k_2}{6} + \frac{k_4}{6} + \frac{4}{3}k_5 = 0.
\end{cases}$$

Пусть $k_1 = 1, k_3 = 1, k_5 = 2$, тогда получим следующую формулу для численного дифференцирования

$$\tilde{q}(x_i) \approx 4 \frac{\tilde{\omega}_h(x_{i-2}, x_{i-2}) - 2\tilde{\omega}_h(x_{i-1}, x_{i-1}) + 9\tilde{\omega}_h(x_i, x_i) - 10\tilde{\omega}_h(x_{i+1}, x_{i+1}) + 2\tilde{\omega}_h(x_{i+2}, x_{i+2})}{-6h} + O(h^3). \quad (3.13)$$

На рисунках 11, 12, 13, 14 приведены восстановленные функций $q(x)$. Результат показывает, что отклонение решения обратной задачи от заданного $q(x)$ составляет $\|q - \tilde{q}\|_{C_h} = 0,33226$.

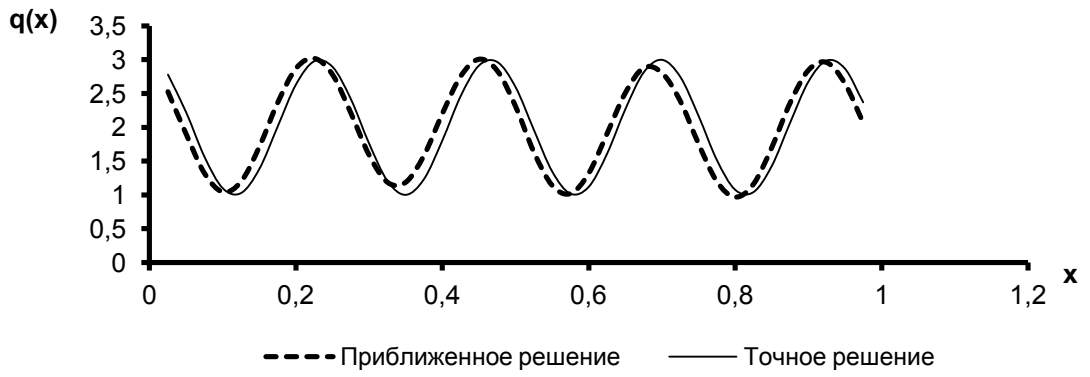


Рисунок 11 - График функций $q(x) = 2 + \cos 27x$, восстановленный методом Ландвебера при $n = 40$

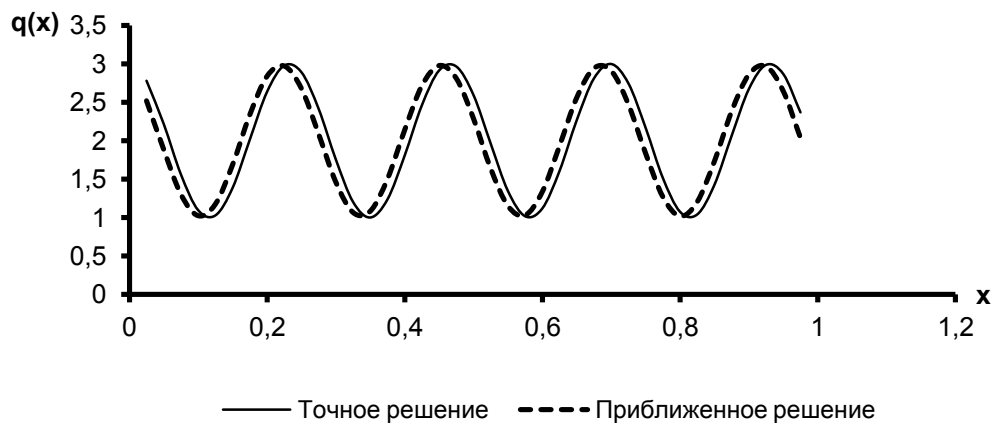


Рисунок 12 - График функций $q(x) = 2 + \cos 27x$, восстановленный методом сопряженных градиентов при $n = 40$

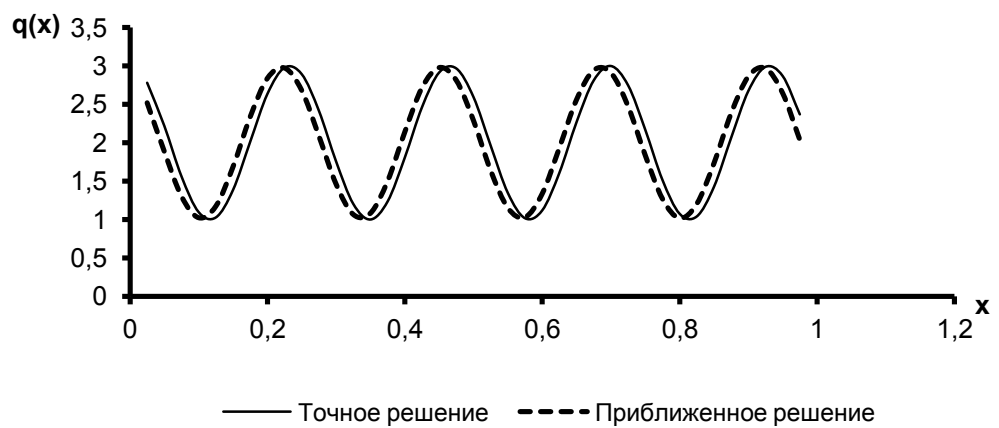


Рисунок 13 - График функций $q(x) = 2 + \cos 27x$, восстановленный методом квадратного корня при $n = 40$

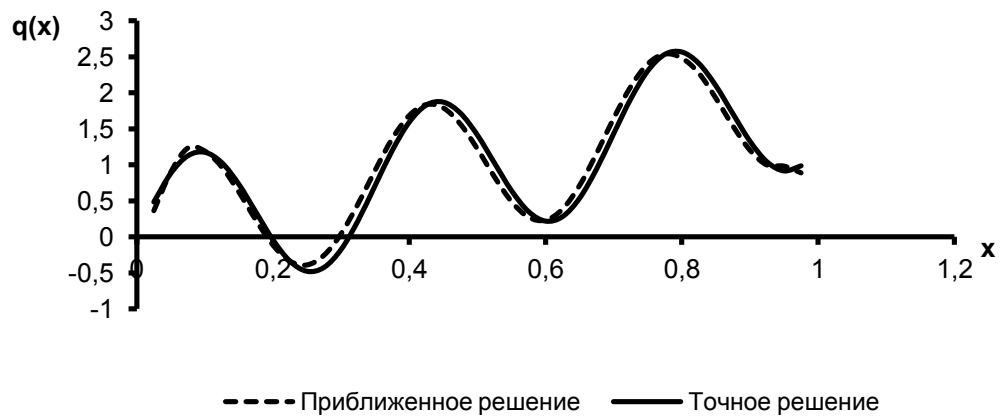


Рисунок 14 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом Ландвебера при $n = 40$

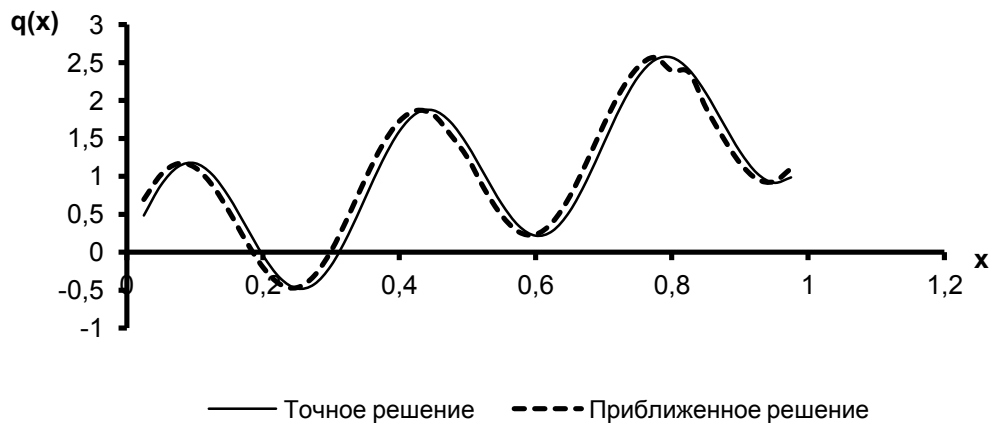


Рисунок 15 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом сопряженных градиентов при $n = 40$

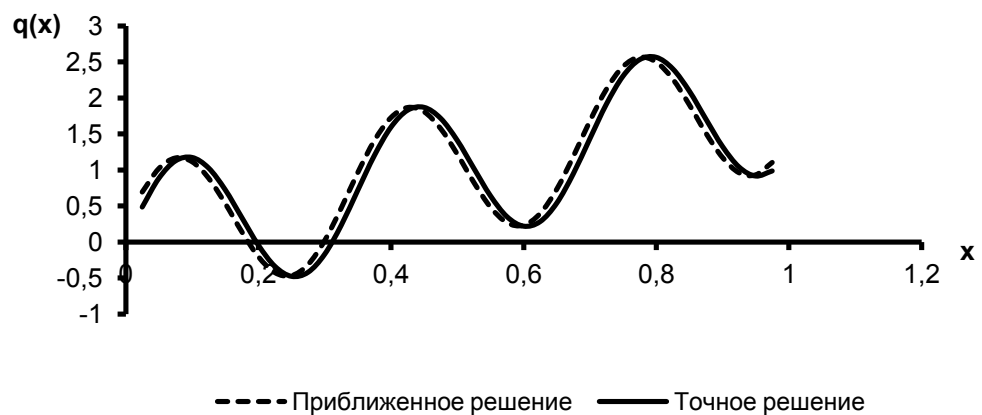


Рисунок 16 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом квадратного корня при $n = 40$

Результаты расчетов разными методами сведены в таблицах 3,4. Приведены результаты сравнения трех численных методов по таким параметрам как количество итерации, норма погрешности и затраченное машинное время.

Таблица 3 - Сравнительный анализ численного решения уравнения Гельфанда-Левитана различными методами при количестве узлов сетки $n = 40$, $\mu = 0.0001$ для $q(x) = 2 + \cos 27x$

Методы	Количество итерации	Норма погрешности $\ \tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\ $	Количество машинного времени	Сходимость
Метод Ландвебера	1852	3.9784750E-03	2.64 сек	сходится
Метод сопряженных градиентов	38	1.8328428E-05	1 мин 11 сек	сходится
Метод квадратного корня	-	1.4752150E-05	1 мин 15 сек	сходится

Таблица 4 - Сравнительный анализ численного решения уравнения Гельфанда-Левитана различными методами при количестве узлов сетки $n = 40$, $\mu = 0.0001$, точность решения $\varepsilon = 10^{-10}$ для $q(x) = 2x + \sin 18x$

Методы	Количество итерации	Норма погрешности $\ \tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\ $	Количество машинного времени	Сходимость
Метод Ландвебера	1443	3.5740752E-03	1 мин 58,29 сек	сходится
Метод сопряженных градиентов	36	6.8296492E-04	2 мин 33,25 сек	сходится
Метод квадратного корня	-	1.5601516E-05	1 мин 18,06 сек	сходится

Более интересным является вычислительный эксперимент для функций $q(x)$ построенный следующим образом:

- интервал $[0, a]$ разбивается на $N = 10 \div 15$ подинтервалов $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, 3, \dots, N$ равной длины;
- в каждом таком интервале $q(x) = q_j$, $j = 1, 2, 3, \dots, N$ (где q_j константы от 1 до 10);
- для непрерывности функции $q(x)$ на отрезке $[x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$ значения q_{j-1} и q_j соединяются следующей синус функцией

$$q(x) = \frac{q_{j-1} + q_j}{2} + \frac{q_j - q_{j-1}}{2} \sin \frac{\pi}{2\varepsilon} (x - x_j),$$

где $x \in [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$, $j = 1, 2, 3, \dots, N$.

Проведены численные эксперименты для различных функции $q(x)$. На рисунке 17 приведен график функции $\{q\}_{j=1}^N = \{1, 3, 2, 5, 2, 7, 5, 4, 10, 7\}$. В отрезок $x \in [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$ при $a = 2$, $\varepsilon = 0,01$, $n = 800$ приходится ровно 7 точек. На рисунке 18 приведен график функции $\tilde{\omega}_h(x, x)$, как результат численного решения семейств интегральных уравнений Гельфанда-Левитана.

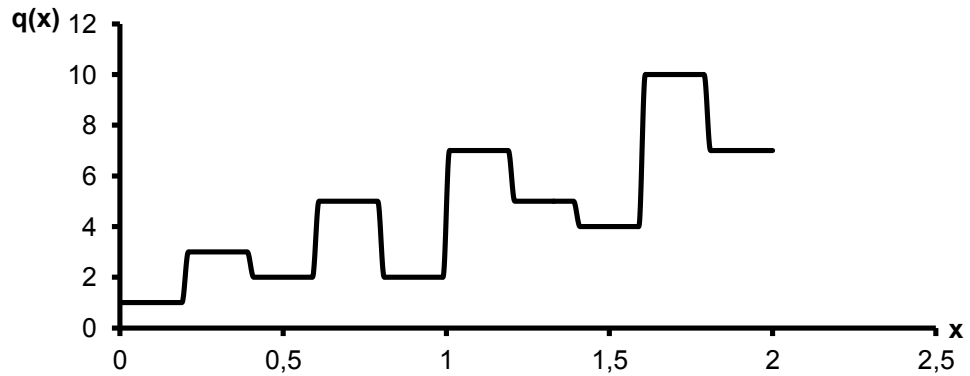


Рисунок 17 - График функции $q(x)$

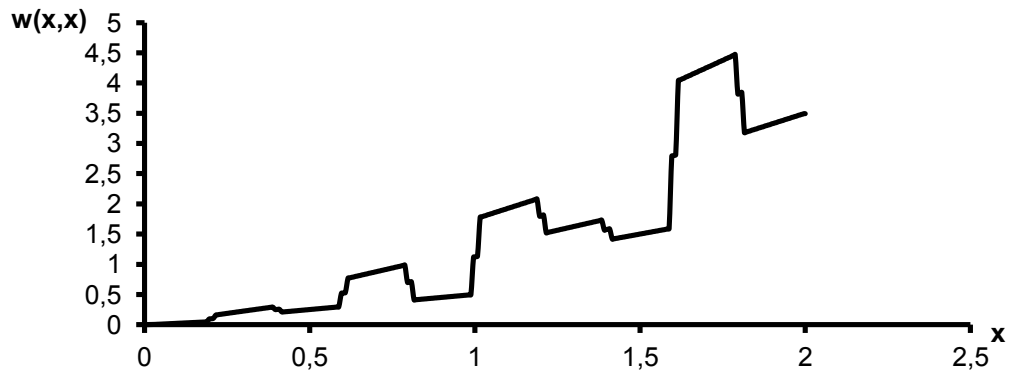


Рисунок 18 – График приближенного решения функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ при $n = 800$

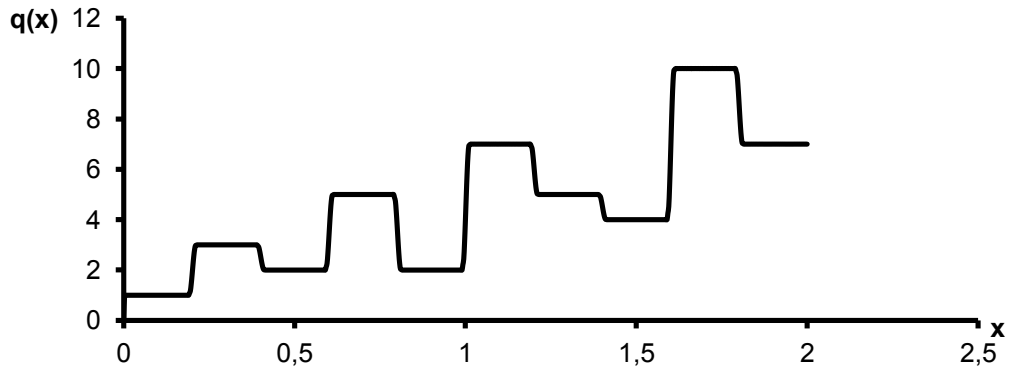


Рисунок 19 - График приближенного решения функций $\tilde{q}_h(x)$ при $n = 800$

На рисунке 20 приведен график функции $\{q\}_{j=1}^N = \{10, 3, 1, 5, 2, 7, 3, 9, 10, 8\}$. В отрезок $x \in [x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon]$ при $a = 2, \varepsilon = 0,02, n = 400$ приходится 15 точек. Рисунок 21 график функции $\tilde{\omega}_h(x, x)$. Количество итерации 3025.

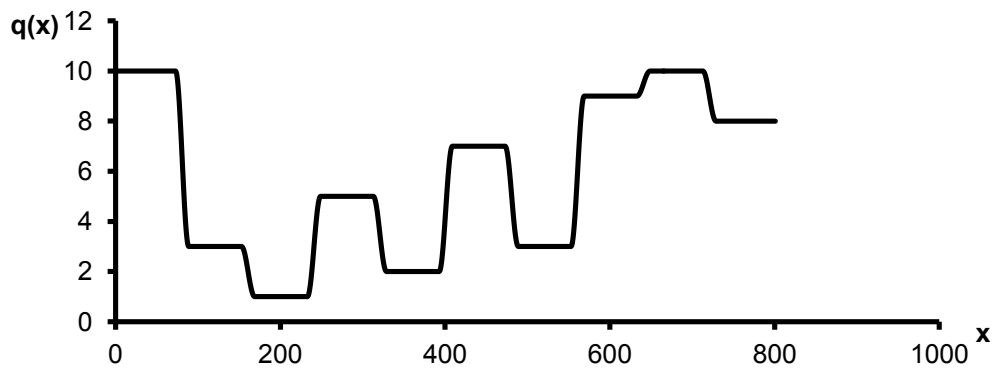


Рисунок 20 - График функции $q(x)$

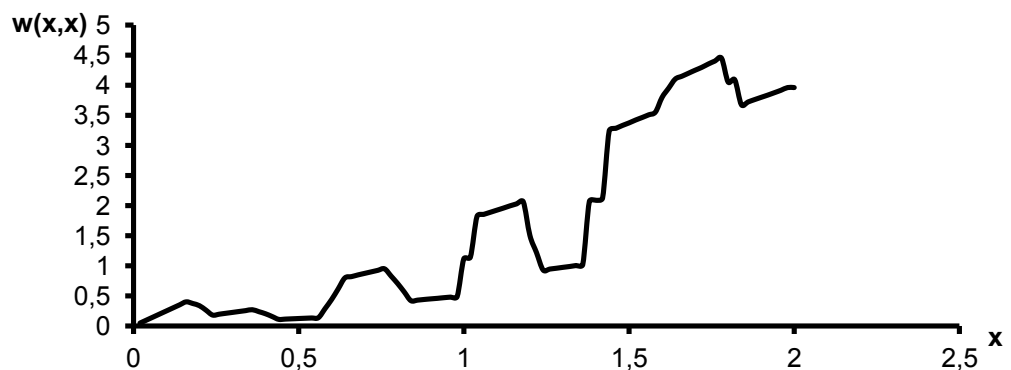


Рисунок 21 – График приближенного решения функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ при $n = 400$

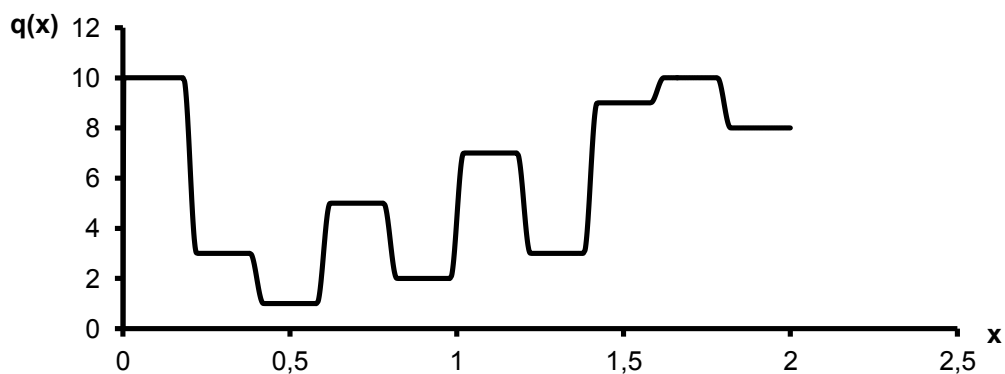


Рисунок 22 - График приближенного решения функций $\tilde{q}_h(x)$ при $n = 400$

Как видно из графиков рисунков 20, 21 в точках $x_j - \varepsilon, x_j + \varepsilon, j = 1, 2, 3, \dots, N$ функция $\tilde{\omega}_h(x, x)$ имеет особенности, поэтому численно дифференцировать с помощью разностного отношения (3.13) не удастся. Значения сеточной функций $\tilde{q}_h(x)$ в этих узлах сетки находится по формуле

$$\tilde{q}_h(x_i) = 0.5(\tilde{q}_h(x_{i-1}) + \tilde{q}_h(x_{i+1})). \quad (3.14)$$

Результат численного эксперимента показывает, что отклонение решения обратной задачи от заданного $q(x)$ составляет $\|q - \tilde{q}_h\|_{C_h} = 0,58171558$.

Проведены численные расчеты с заданным возмущением данных

$$r_\sigma(t) = r(t) + lp \cdot \sigma(t)$$

где $\sigma(t) = \cos(30t)$. Величина lp изменяется от 0,0009 до 0,00551. Рисунки 23, 24, 25, 26 показывают результаты численных экспериментов с заданным возмущением данных. В таблице 5 показан сравнительный анализ численного решения уравнения Гельфанда-Левитана первого рода с добавлением шума $\sigma(t)$, при различных величинах lp методам итерации Ландвебера.

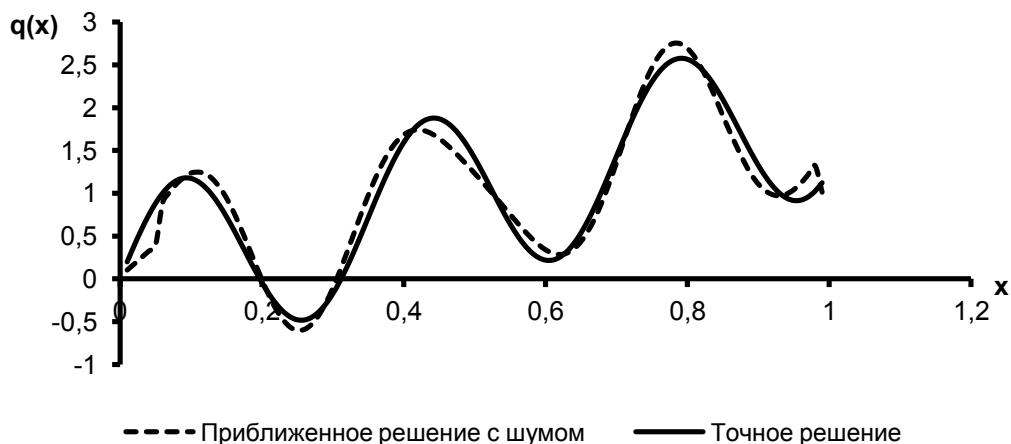


Рисунок 23 -График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума $\sigma(t)$ при $lp = 0,0009$

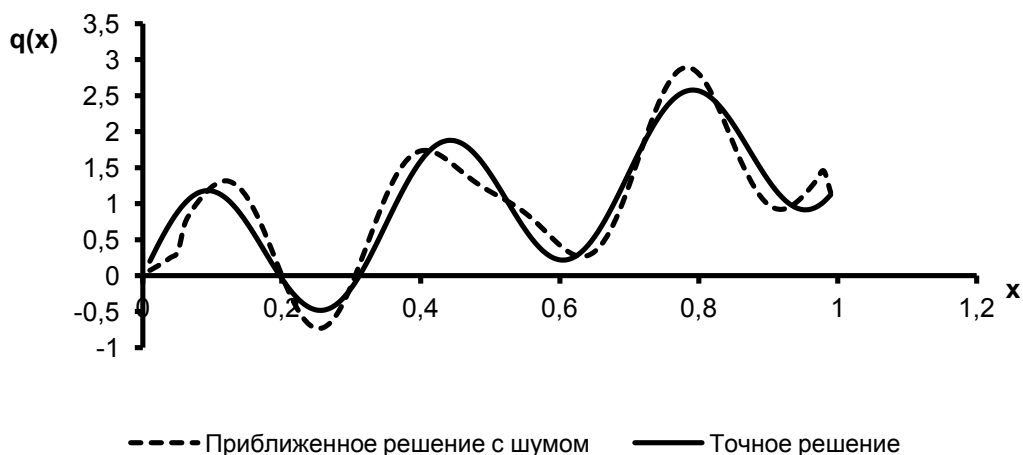


Рисунок 24 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума $\sigma(t)$ при $lp = 0,0015$

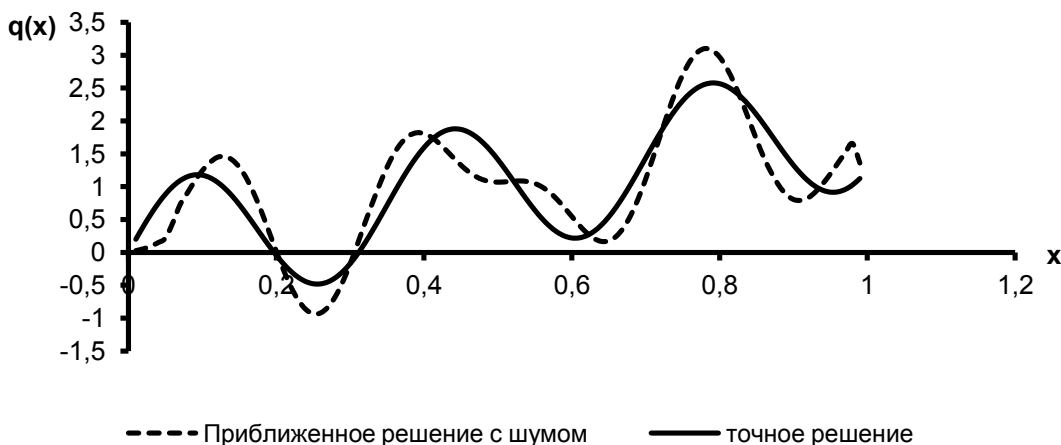


Рисунок 25 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума $\sigma(t)$ при $lp = 0,0024$

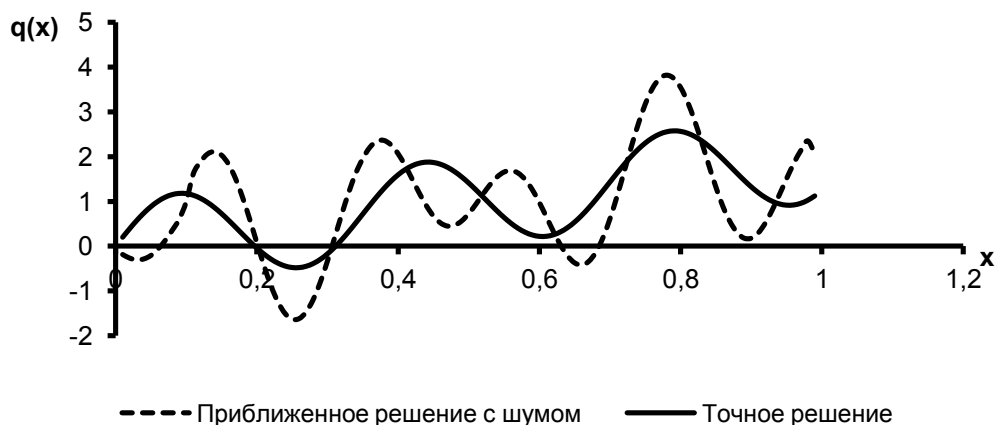


Рисунок 26 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума $\sigma(t)$ при $lp = 0,00551$

Таблица 5 - Сравнительный анализ численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана с добавлением шума $\sigma(t)$, при различных коэффициентах lp методам итерации Ландвебера для заданных различных количествах узлов сетки n , с регуляризацией $\alpha=0.0001$ для функций $q(x) = 2x + \sin 18x$

Метод	Метод Ландвебера			
	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$
узлы сетки n	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$
коэффициент lp	$lp = 0,0009$	$lp = 0,0015$	$lp = 0,0024$	$lp = 0,0051$
Количество итерации	1411	1410	1445	1410
Норма погрешности $\ \tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\ $	4,9510039E-03	6,1009051E-03	7,8227622E-03	1,3730176E-02
Количество машинного времени	1 мин 33,12 сек	1 мин 23,92 сек	1,64 сек	41,04 сек

Результаты численных расчетов предложенными методами, с заданным возмущением данных, показывают непрерывную зависимость решения уравнения от изменения входных данных.

В уравнении (1.97)

$$\alpha \tilde{\omega}(x,t) + A^* A \tilde{\omega}(x,t) = A^* f_\gamma(t)$$

где $f_\gamma(t) = f(t) + \alpha \tilde{\omega}^0(x,t)$, α - положительный параметр, $\tilde{\omega}^0(x,t)$ - пробное решение.

Пусть имеется информация о решении $\tilde{\omega}^0(x,t)$ и выполняется соотношение

$$\alpha \tilde{\omega}^0(x,t) + A^* A \tilde{\omega}^0(x,t) \approx f_\gamma(t)$$

Принимая $\sigma_n = (\alpha \tilde{\omega}^0 + A^* A \tilde{\omega}^0 - f)$, получим

$$\alpha \tilde{\omega}(x,t) + A^* A \tilde{\omega}(x,t) = f_\gamma + l \sigma_t$$

где l коэффициент. Величина l принимает значения от 0,99 до 0,999.

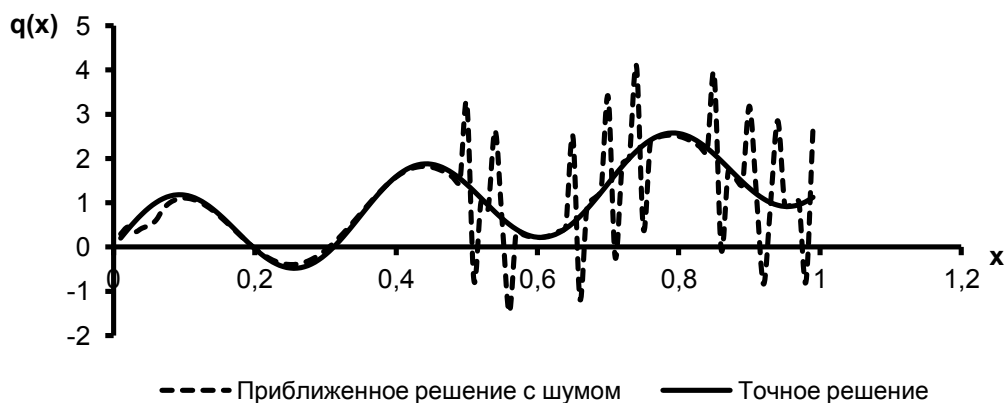


Рисунок 27- График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$ методом Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума σ при $l = 0,990$

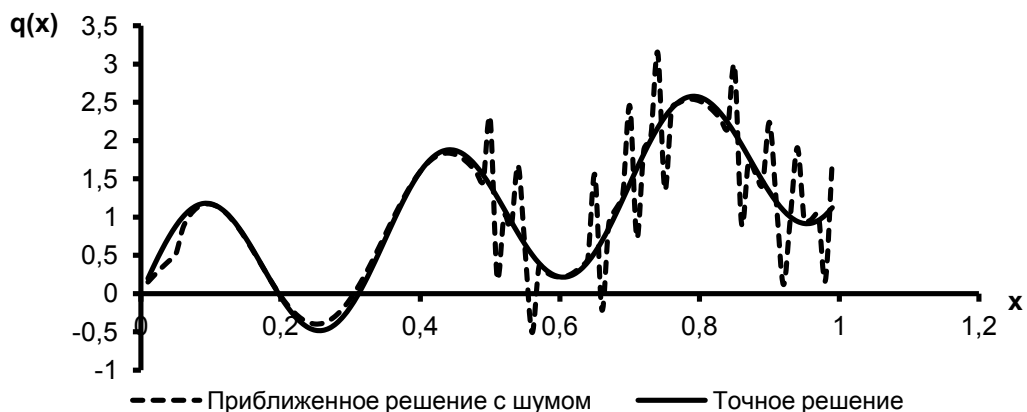


Рисунок 28 -График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума σ при $l = 0,995$

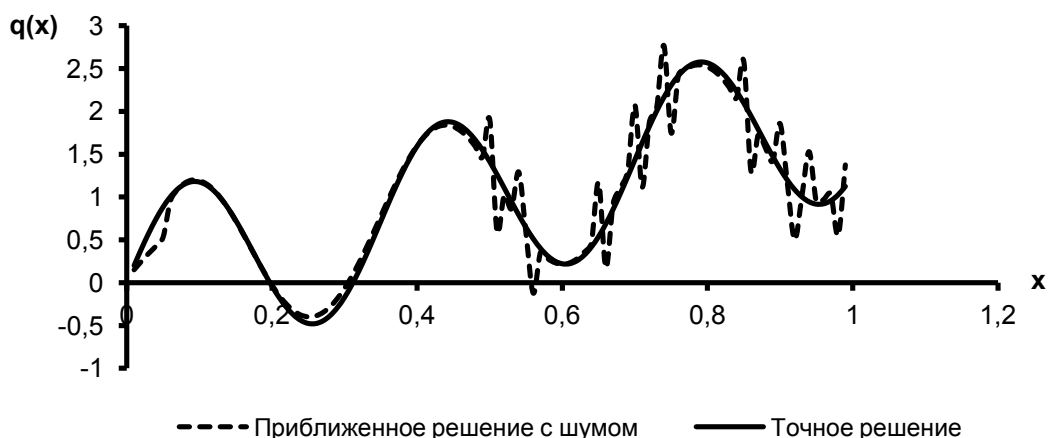


Рисунок 29-График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума σ при $l = 0,997$

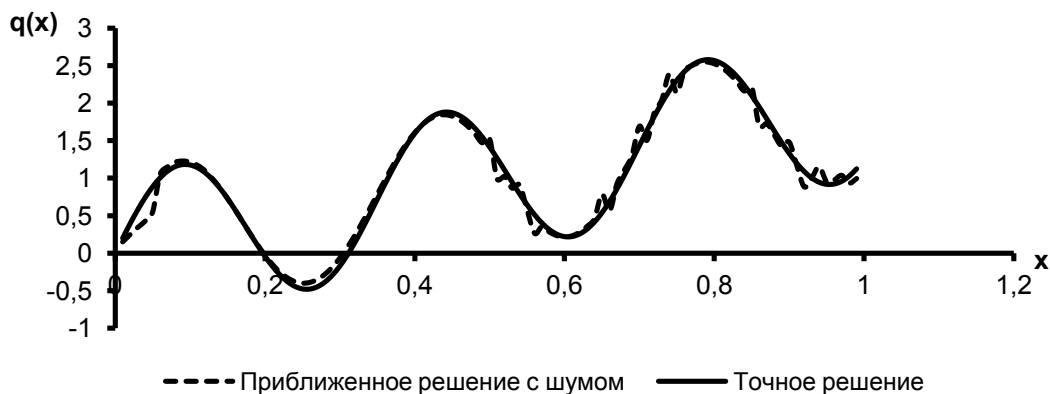


Рисунок 30 - График функций $q(x) = 2x + \sin 18x$, восстановленный методом итерации Ландвебера при $n = 100$, с добавлением шума σ при $l = 0,999$

Таблица 6 - Сравнительный анализ численного решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана с добавлением шума $\sigma(t)$, при различных коэффициентах l методам итерации Ландвебера для заданных различных количествах узлов сетки n , с регуляризацией $\alpha = 0.0001$ для функций $q(x) = 2x + \sin 18x$

Метод	Метод Ландвебера			
	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$
узлы сетки n	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$	$n = 100$
коэффициент l	$l = 0,990$	$l = 0,997$	$l = 0,997$	$l = 0,999$
Количество итерации	1409	1411	1411	1412
Норма погрешности $\ \tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\ $	1,3691738E-02	7,5690895E-03	5,7161190E-03	4,3256008E-03
Количество машинного времени	1 мин 23,34 сек	1 мин 33,25 сек	1 мин 29,40 сек	1 мин 29,55 сек

На основе выше предложенных методов для уравнения Гельфанда – Левитана второго рода были разработаны эффективные алгоритмы численной реализации и написаны программные коды. Приведены результаты расчетов для различных функции $q(x)$ в отрезке $[-x_L, x_L]$, где $x_L = 1$, количество слоев $n = 100, 300, 500, 1000$. Начальное приближение во всех случаях было выбрано равным правой части системы линейных уравнений (1.96), (3.11). Проведены расчеты нахождения искомой функции $\tilde{\omega}(x, t)$, $t \in (-x_L, x_L)$ и по нему восстановления коэффициента $q(x)$.

Так же как и при решении уравнения Гельфанда – Левитана первого рода прямая задача (1.46) - (1.47) заменяется эквивалентной задачей Гурса (1.49). Для получения дополнительной информации о решении прямой задачи вида (1.48), необходимо использовать более мелкую сетку разбиения расчетной области D_1 при численном решении задачи (1.49) разностной схемой (1.63). Сеточную функцию соответствующую $r(t) = u(0, t)$ обозначим следующим образом $r^n = u_m^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, K$. На рисунке 31 показан график численного решения прямой задачи $u(0, t)$. Полученная сеточная функция является дополнительным условием для решения обратной задачи методам Гельфанда-Левитана второго рода [15, с.269-304]. На рисунке 32 приведен результат численного решения семейств интегральных уравнении Гельфанда-Левитана второго рода и их сравнение с точным решением $\tilde{\omega}(x, x)$.

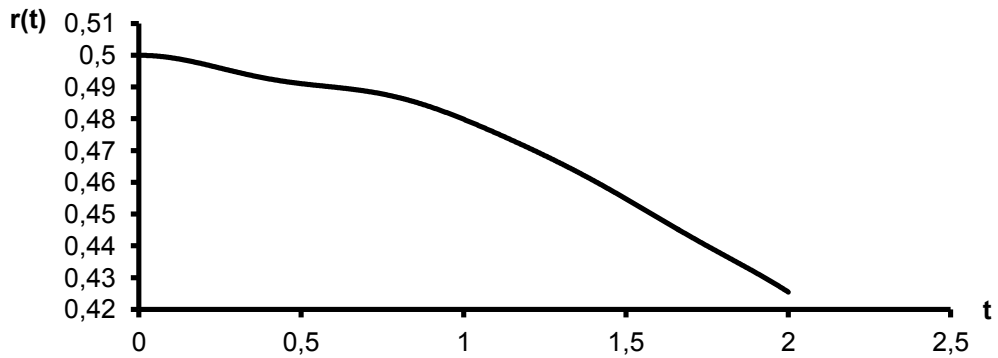


Рисунок 31 - График $r(t)$ для функций $q(x) = e^x + \sin 35x + \cos 25x$ при $n = 100$

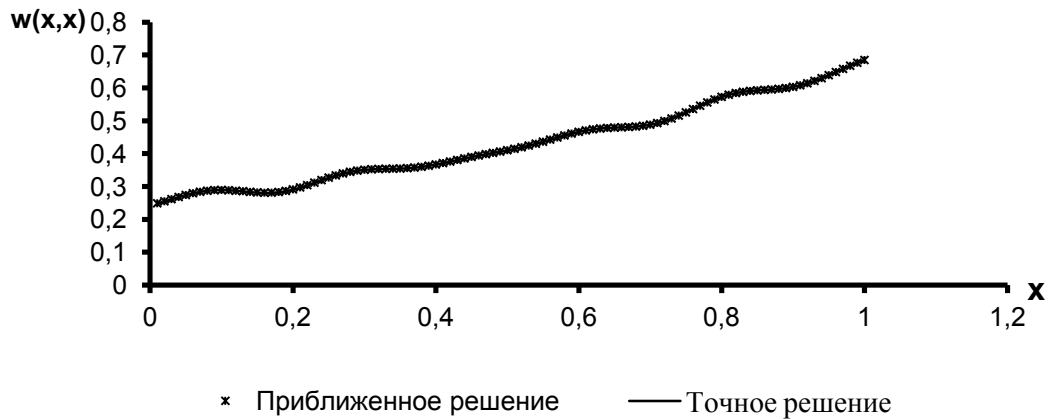


Рисунок 32 - График функций $\tilde{\omega}_h(x, x)$ определеннй методом Ландвебера для функций $q(x) = e^x + \sin 35x + \cos 25x$ при $n = 100$

Для нахождения сеточных значений функции $q(x)$ по найденным значениям $\tilde{\omega}_h(x, x)$ воспользуемся формулой (3.14). На рисунке 33 приведен график восстановленной функции $\tilde{q}_h(x)$

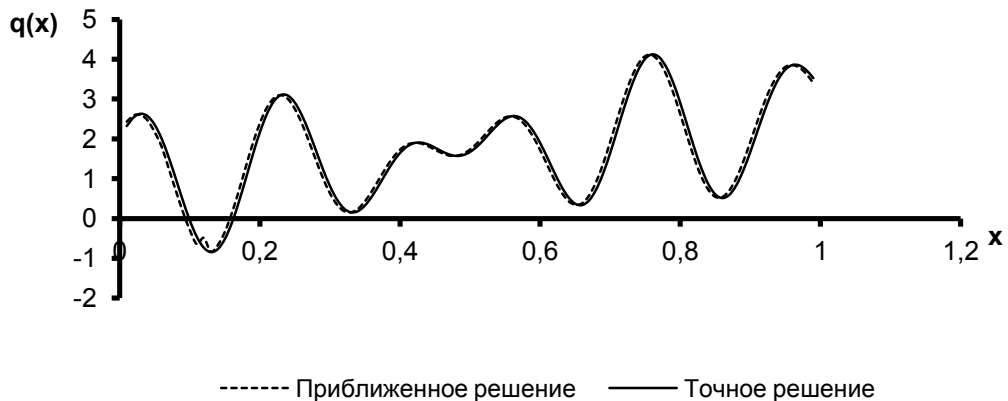


Рисунок 33 - График функций $q(x) = e^x + \sin 35x + \cos 25x$, восстановленный методом Ландвебера при $n = 100$

Результаты расчетов уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода показывают, что метод сопряженных градиентов является наиболее эффективным из тех методов, которые были реализованы, т.к. матрица системы является симметричной и сходится за малое количество итераций. Сравнительный анализ показывает что для численного решения рассматриваемого класса обратных задач использование метода сопряженных градиентов позволяет тратить меньшие машинные ресурсы.

4 ДВУМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА

4.1 Постановка и решение двумерной коэффициентной обратной задачи

Рассмотрим последовательность прямых задач [15, с. 334 - 340; 26, с. 807-810;48-54]

$$u_{tt}^{(k)} = u_{xx}^{(k)} + u_{yy}^{(k)} + q(x, y)u^{(k)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad k \in Z, \quad (4.1)$$

$$u^{(k)}|_{t=0} = 0, \quad (4.2)$$

$$u_t^{(k)}|_{t=0} = h(y)\delta(x), \quad (4.3)$$

$$u^{(k)}|_{y=\pi} = u^{(k)}|_{y=-\pi}, \quad (4.4)$$

Предполагаем, что след решения прямой задачи (4.1) - (4.4) существует и может быть измерен. В обратной задаче требуется восстановить непрерывную функцию $q(x, y)$ по дополнительной информации о решении прямой задачи (4.1)-(4.4)

$$u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t), \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in Z \quad (4.5)$$

где R - множество вещественных чисел, Z - множество всех целых чисел, δ - дельта-функция Дирака, k - некоторое фиксированное целое число, $h(y) = e^{iky}$. Здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что все рассматриваемые функции являются достаточно гладкими и 2π - периодическими по переменной y .

Необходимое условие существования решения (4.1)-(4.5) является следующим:

$$f^{(k)}(y, 0) = 0.$$

Обобщенное решение прямой задачи (4.1)-(4.4) является кусочно-непрерывным решением интегрального уравнения

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2} \theta(t - |x|) - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

тэта – функция Хэвисайда.

По аналогии с одномерным случаем, из интегрального уравнения (4.6) следует, что

$$u(x, y, t) = 0, \quad t < |x|, \quad (x, t) \in R \times R_+ \quad (4.7)$$

При $t > |x|$ имеем формулу

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{2} - \frac{1}{2} \iint_{\square(x, y, t)} q(\xi, y) u^{(k)}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad (4.8)$$

здесь $\square(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : |\xi| \leq \tau \leq t - |x - \xi|\}$.

Из формулы (4.7) следует, что

$$u^{(k)}(x, y, |x|) = \frac{h(y)}{2}. \quad (4.9)$$

Таким образом, для решения прямой задачи в классе обобщенных функций имеем задачу Гурса (4.1), (4.9) которое определяет классическое решение задачи (4.1) - (4.4) [15, с.334-340; 26 с.807-810].

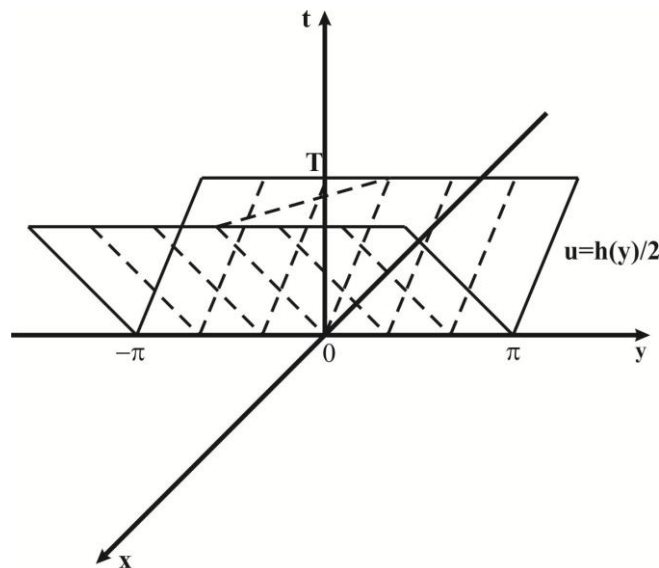


Рисунок 34 - Схема решения прямой задачи (4.1), (4.9)

Вводится последовательность вспомогательных прямых задач [15, с.334 - 340; 26, с.807-810]:

$$\omega_t^{(m)} = \omega_{xx}^{(m)} + \omega_{yy}^{(m)} + q(x, y)\omega^{(m)}, \quad x > 0, \quad y \in [-\pi, \pi], \quad t \in R, \quad m \in Z. \quad (4.10)$$

$$\omega^{(m)}(0, y, t) = e^{imy} \delta(t), \quad \frac{\partial \omega^{(m)}}{\partial x}(0, y, t) = 0, \quad (4.11)$$

$$\omega^{(m)}|_{y=\pi} = \omega^{(m)}|_{y=-\pi}. \quad (4.12)$$

Решение задачи (4.10) - (4.11) удовлетворяет следующему уравнению

$$\omega^{(m)}(x, y, t) = \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, y, t)} q(\xi, y) \omega(\xi, y, \tau) d\xi d\tau \quad (4.13)$$

где $\Delta(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : 0 < \xi \leq x, t - x + \xi < \tau < t + x - \xi\}$ треугольник образованный характеристиками, проходящими через точку (x, y, t) и осью t .

Нетрудно показать, что

$$\omega(x, y, t) \equiv 0, \quad 0 < x < |t|. \quad (4.14)$$

Поэтому фактической областью интегрирования в уравнении (4.13) для точек $(x, y, t) \in D = \{(x, y, t) : x \geq |t|\}$ будут прямоугольники $\square(x, y, t) = \{(\xi, y, \tau) : |\tau| \leq \xi \leq x - |t - \tau|\}$, образованный характеристиками, выходящими из точек $(0, y, 0)$, (x, y, t) , (рисунок 35).

Обозначим

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = \omega^{(m)}(x, y, t) - \frac{1}{2} e^{imy} [\delta(x-t) + \delta(x+t)]. \quad (4.15)$$

Кусочно-непрерывная функция $\tilde{\omega}(x, y, t)$ есть решение уравнения

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, t) = \frac{h(y)}{4} \theta(x - |t|) \left[\int_0^{\frac{x+t}{2}} q(\xi, y) d\xi + \int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi \right] + \frac{1}{2} \iint_{\square(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau, \quad x > 0. \quad (4.16)$$

Чтобы вычислить $\tilde{\omega}(x, y, x-0)$ в (4.16) надо положить $t = x$, тогда $\int_0^{\frac{x-t}{2}} q(\xi, y) d\xi = 0$ и

$\iint_{\square(x, y, t)} q(\xi, y) \tilde{\omega}(\xi, y, \tau) d\xi d\tau = 0$, т.к. $\square(x, y, t)$ превращается в отрезок при каждом

фиксированном y .

Таким образом

$$\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, x-0) = \frac{h(y)}{4} \int_0^x q(\xi, y) d\xi, \quad x > 0 \quad (4.17)$$

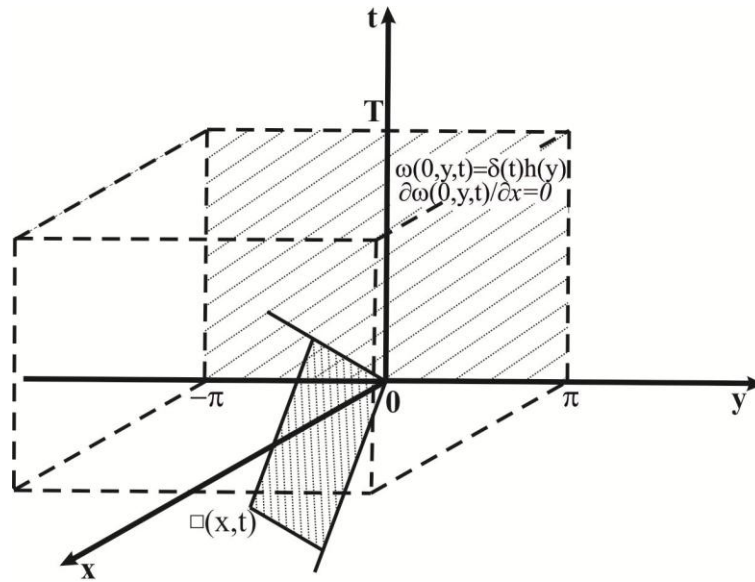


Рисунок 35 - Область решения обратной задачи (4.1) - (4.5)

Продолжим нечетным образом функции $u^{(k)}(x, y, t)$ и $f^{(k)}(y, t)$ по переменной t .

Очевидно, что

$$\begin{aligned} u^{(k)}(x, y, t) &= \int_R f^{(k)}(y, s) \omega^{(m)}(x, y, t-s) ds = \\ &= \int_R \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t) e^{imy} \right) \omega^{(m)}(x, y, t-s) ds = \int_R \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) e^{imy} \right) \omega^{(m)}(x, y, s) ds = \\ &= \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds. \end{aligned}$$

при $x > 0$, $y \in R$ и $k \in Z$. Здесь $f_m^{(k)}(t)$ - коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(y, t)$ при $\omega^{(m)} = e^{imy} \delta(t)$:

$$\begin{aligned} u^{(k)}(0, y, t) &= \int_R f^{(k)}(y, s) \omega^{(m)}(0, y, s) ds = \int_R f^{(k)}(y, s) e^{imy} \delta(t-s) ds = \\ &= \int_R \left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(s) e^{imy} \right) e^{imy} \delta(t-s) ds = \int_R f_m^{(k)}(s) \delta(t-s) ds = f_m^{(k)}(t). \end{aligned}$$

В уравнение (4.1) обратной задачи (4.1) - (4.5) выражение $q \cdot u$ запишем следующим образом

$$\begin{aligned} q \cdot u &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{ijy}, \\ q(x, y) \cdot u^k(x, y, t) &= \int_R \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j(t) e^{ijy} \right) \omega^{(m)}(x, y, t-s) ds = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} b_j(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds. \end{aligned}$$

Решение задачи (4.1), (4.5) может быть представлено в виде

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int_R \sum_{m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \omega^{(m)}(x, y, s) ds, \quad (4.18)$$

Используя (4.9), получим

$$u^{(k)}(x, y, t) = \int \sum_{R, m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \left\{ e^{imy} (\delta(x+t) + \delta(x-t)) + \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) \right\} ds.$$

Учитывая (4.10) и (4.11), преобразуем формулу (4.13)

$$u^{(k)}(x, y, t) = \frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int \sum_{-x, m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds,$$

При $x > |t|$ имеем

$$\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t+x) + f^{(k)}(y, t-x)] + \int \sum_{-x, m=1}^{\infty} f_m^{(k)}(t-s) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s) ds = 0. \quad (4.19)$$

При каждом фиксированном $x > 0$ соотношение (4.19) является интегральным уравнением первого рода относительно функции $\tilde{\omega}(x, y, t)$, $t \in (-x, x)$. Уравнение (4.19) является уравнением Гельфанда-Левитана.

4.2 Дискретизация двумерного уравнения Гельфанда – Левитана

В уравнений Гельфанда-Левитана (4.19) интеграл заменим суммой и при $t = t_j$, $j = -N, -N+1, \dots, 0, \dots, N-1, N$ получим систему, состоящую из $(2N+1)$ уравнений с $M \times (2N+1)$ неизвестными $\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)$, $m = 1, 2, \dots, M$; $i = -N, -N+1, \dots, N-1, N$;

$$\sum_{m=1}^M \sum_{i=-N}^N f_m^{(k)}(t_j - s_i) \tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i) \tau = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x)]. \quad (4.20)$$

Уравнение (4.20) в матричной форме можно записать в следующем виде

$$\sum_{m=1}^M F_m \vec{\omega}^{(m)} = \vec{f}^{(k)}, \quad (4.21)$$

где $F_m = \{f_m^{(k)}(t_j - s_i)\}_{\substack{i=-N, N \\ j=-N, N}}$, $m = 1, 2, \dots, M$, матрица размерности $(2N+1) \times (2N+1)$.

Искомые векторы

$$\vec{\omega}^{(m)} = \{\tilde{\omega}^{(m)}(x, y, s_i)\}_{i=-N, N}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4.22)$$

Правая часть

$$\vec{f}^{(k)} = \{-0.5(f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x))\}_{j=-N, N}. \quad (4.23)$$

Далее мы предполагаем что $m = 1$, тогда формула (4.20) примет вид

$$\sum_{i=-N}^N f^{(k)}(t_j - s_i) \tilde{\omega}(x, y, s_i) \tau = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x)]. \quad (4.24)$$

Перепишем уравнение (4.24) в операторной форме

$$A^{(k)} \tilde{\omega} = f^{(k)}. \quad (4.25)$$

делая следующие обозначения

$$A^{(k)} \tilde{\omega}(x, y, t) = \sum_{i=-N}^N f^{(k)}(t_j - s_i) \tilde{\omega}(x, y, s_i) \tau,$$

$$f^{(k)}(y, t) = -\frac{1}{2} [f^{(k)}(y, t_j + x) + f^{(k)}(y, t_j - x)].$$

Матрица $A^{(k)}$ будет иметь следующий вид

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} f^{(k)}(t_{-N} - s_{-N})\tau & f^{(k)}(t_{-N} - s_{-N+1})\tau & \dots & f^{(k)}(t_{-N} - s_1)\tau & \dots & f^{(k)}(t_{-N} - s_N)\tau \\ f^{(k)}(t_{-N+1} - s_{-N})\tau & f^{(k)}(t_{-N+1} - s_{-N+1})\tau & \dots & f^{(k)}(t_{-N+1} - s_1)\tau & \dots & f^{(k)}(t_{-N+1} - s_N)\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)}(t_0 - s_{-N})\tau & f^{(k)}(t_0 - s_{-N+1})\tau & \dots & f^{(k)}(t_0 - s_1)\tau & \dots & f^{(k)}(t_0 - s_N)\tau \\ f^{(k)}(t_1 - s_{-N})\tau & f^{(k)}(t_1 - s_{-N+1})\tau & \dots & f^{(k)}(t_1 - s_1)\tau & \dots & f^{(k)}(t_1 - s_N)\tau \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)}(t_{N-1} - s_{-N})\tau & f^{(k)}(t_{N-1} - s_{-N+1})\tau & \dots & f^{(k)}(t_{N-1} - s_1)\tau & \dots & f^{(k)}(t_{N-1} - s_N)\tau \\ f^{(k)}(t_N - s_{-N})\tau & f^{(k)}(t_N - s_{-N+1})\tau & \dots & f^{(k)}(t_N - s_1)\tau & \dots & f^{(k)}(t_N - s_N)\tau \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Вектор неизвестных и правая часть

$$\tilde{\omega}(x, y, t) = (\tilde{\omega}(x, y, s_{-N})\tau, \tilde{\omega}(x, y, s_{-N+1})\tau, \dots, \tilde{\omega}(x, y, s_{N-1})\tau, \tilde{\omega}(x, y, s_N)\tau)^T, \quad (4.27)$$

$$\tilde{f}^{(k)}(y, t) = -\frac{1}{2} (f^{(k)}(t_{-N})\tau, f^{(k)}(t_{-N+1})\tau, \dots, f^{(k)}(t_{N-1})\tau, f^{(k)}(t_N)\tau)^T. \quad (4.28)$$

Для численного решения уравнения Гельфанда-Левитана (4.24) используется метод простой итерации (в теории некорректных задач – метод итераций Ландвебера) в сочетании с регуляризацией М.М. Лаврентьева. Уравнение (4.25) заменяется следующим корректным уравнением

$$(\mu E + A^{(k)}) \tilde{\omega} = f_\gamma^{(k)} \quad (4.29)$$

где $f_\gamma^{(k)} = f^{(k)} + \mu \tilde{\omega}_0$, E - единичная матрица, μ - положительный параметр регуляризации М.М. Лаврентьева, $\tilde{\omega}_0$ - пробное решение, т.е. некоторое приближение к искомому решению.

Итерационный процесс с регуляризацией М.М. Лаврентьева примет вид

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A^{(k)}) \tilde{\omega}_n = f_\gamma^{(k)}.$$

Алгоритм расчета методом итерации состоит в следующем [15,с.60-66; 43,с.82-126; 47, с.265-268;55-57]:

1. Начальное приближение задается равной правой части $f_\gamma^{(k)}$;
2. Задается точность вычисления ε , для условия окончания итерационного процесса $|\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n| < \varepsilon$;
3. Вычисление проводится по следующему итерационному процессу

$$\frac{\tilde{\omega}_{n+1} - \tilde{\omega}_n}{\tau} + (\mu E + A^{(k)})\tilde{\omega}_n = f_\gamma^{(k)}.$$

Численным методом решения коэффициентных обратных задач для гиперболических уравнений посвящены работы многих авторов [58-72].

4.3 Сравнительный анализ численных экспериментов двумерного уравнения Гельфанда-Левитана

На основе метода итерации Ландвебера решения двумерной коэффициентной обратной задачи по восстановлению источника $q(x, y)$ разработан эффективный алгоритм численной реализации и написан программный код. При проведении серии численных экспериментов были взяты различные функции $q(x, y)$, которые будут приведены далее. Начальное приближение было выбрано равным правой части системы линейных уравнений (4.29). Проведены многочисленные расчеты нахождения искомой функции $\tilde{\omega}(x, y, t)$, $t \in (-x_L, x_L)$, $x \in (0, x_L)$, $y \in (0, x_L)$, и по нему восстановление коэффициента $q(x, y)$.

Прямая задача (4.1) - (4.4) заменяется эквивалентной задачей, которая состоит из последовательности задач Гурса (4.1), (4.9) для каждого заданного y . Для получения дополнительной информации о решении прямой задачи вида (4.5), необходимо использовать более мелкую сетку разбиения расчетной области D (рисунок 2) при численном решении задачи (4.1), (4.9) разностной схемой. Сеточную функцию соответствующую $u^{(k)}(0, y, t) = f^{(k)}(y, t)$ обозначим следующим образом $f^{(k),n} = u_m^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, K$.

Полученное семейство интегральных уравнений Гельфанда-Левитана относительно $\tilde{\omega}(x, y, t)$, зависящие от параметров x, y , численно реализуются при $x > |t|$ и при каждом y , в следующей сеточной области:

$$W^\tau = \{(x_i, y_j, t_k) : x_i = i \cdot h, i = \overline{0, n}, h \cdot n = x_L; y_j = j \cdot h, j = \overline{0, n}, h \cdot n = x_L; t_k = -x_L + k \cdot \tau, k = \overline{0, m}, \tau \cdot m = 2x_L\}.$$

Решение $f(y_j, t_k)$ прямой задачи продолжим нечетным образом на отрицательные t_k по формулам

$$\tilde{f}^{(k)}(y_j, t_k) = \begin{cases} -f^{(k)}(y_j, t_{n-k+1}), & k = \overline{1, n-1}, \quad j = \overline{1, n}, \\ f^{(k)}(y_j, t_{n_g}) = f(t_1), & j = \overline{1, n}, \\ f^{(k)}(y_j, t_{k-n_g+1}), & k = \overline{1, n_g-1}, \quad j = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (4.30)$$

где n_g - количество узлов сетки по направлению t , в которых вычислены дополнительная информация, как решение задачи Гурса (1.63). На каждом слое $x = x_i, i = 1, 2, 3, \dots, n; y = y_j, j = 1, 2, 3, \dots, n; t_k = -x_i + k \cdot \tau, k = 1, 2, 3, \dots, m, m \cdot \tau = 2x_i$ численно решается интегральное уравнение Гельфанда-Левитана.

Для решения интегрального уравнения используются методы, изложенные в пунктах 2.1, 3.1, 3.2. Для вычисления элементов матрицы $A^{(k)}$ по формуле (4.26), правой части (4.28) используется значения сеточной функции $\tilde{f}(y_j, t_k)$ определенной по формулам (4.30).

Для реализации численных экспериментов по алгоритму метода итерации Ландвебера в качестве входных данных были взяты следующие параметры: отрезок $[-x_L, x_L]$ по оси t , отрезок $[0, x_L]$ по оси x , количество слоев n , параметр регуляризации μ метода М.М. Лаврентьева (выбирается способом подбора).

При проведении серии численных экспериментов были взяты различные функции $q(x, y)$.

На рисунках 36, 37, 38, 39 - показаны результаты численных расчетов **методом итерации Ландвебера** при $e = 0,001$ функции

$$q(x, y) = \frac{e}{(x - 0.51)^2 + (y - 0.51)^2},$$

и функции

$$\tilde{\omega}(x, y, x-0) = \frac{e}{4(y-0.51)} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-0.51}{y-0.51} - \operatorname{arctg} \frac{-0.51}{y-0.51} \right),$$

которая находится по формуле (4.17). В ходе вычисления в данном примере количество слоев n было взято равным 10, параметр регуляризации $\mu = 0,5$, $x_L = 1$, $\varepsilon = 0,000001$ при этом были получены следующие выходные данные: погрешность $\|\tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\| = 0,00031857757$, количество итерации 245, количество машинного времени 6,78 сек.

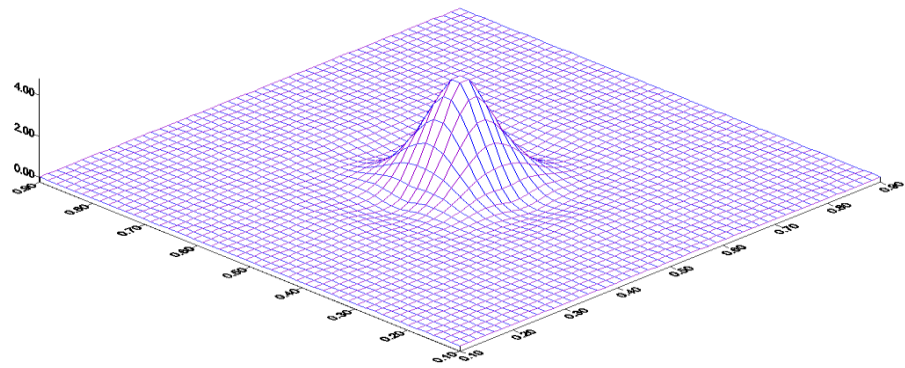


Рисунок 36 - График функции $q(x, y)$ при $n = 10$, $e = 0,001$

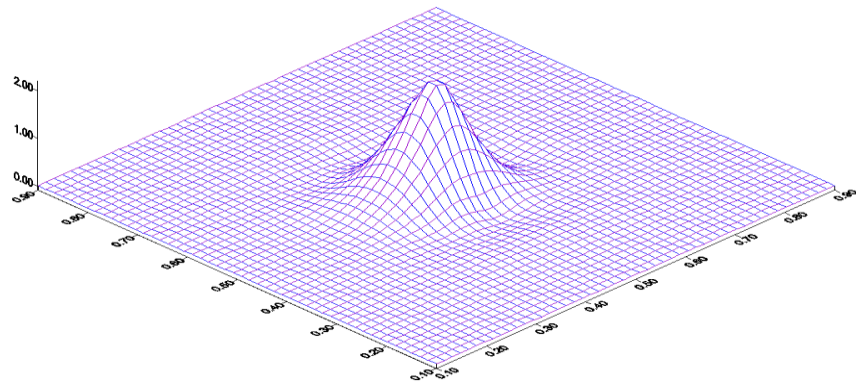


Рисунок 37 - График приближенного решения функции $q(x, y)$ восстановленный методом итерации Ландвебера, при $n = 10$, $e = 0,001$

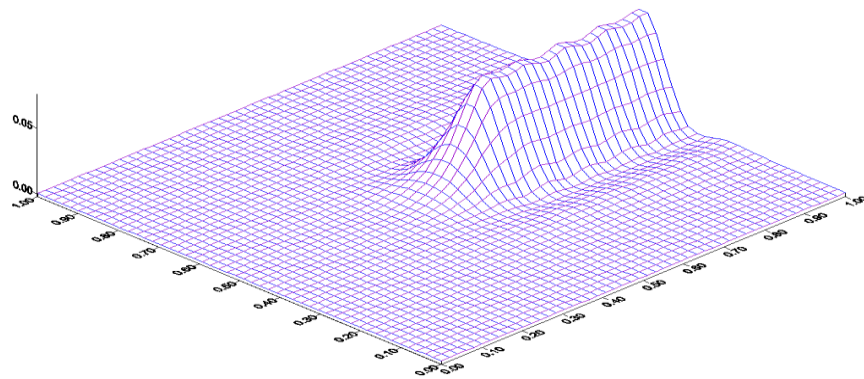


Рисунок 38 - График функции $\tilde{w}(x, y, x-0)$ при $n = 10$, $e = 0,001$

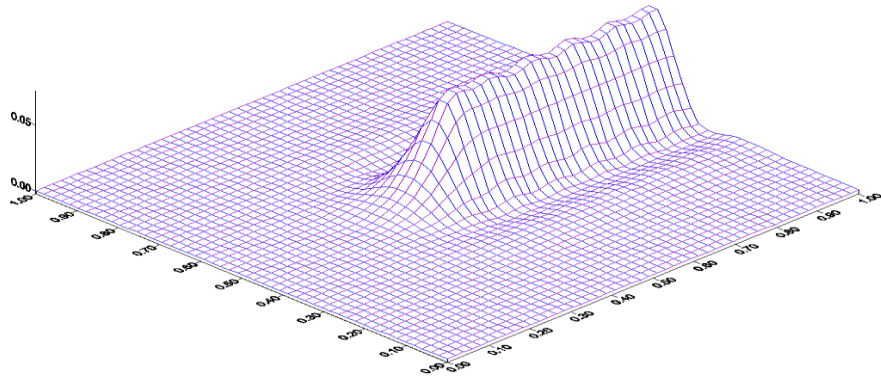


Рисунок 39 - График приближенного решения функции $\tilde{\omega}(x, y, x-0)$ восстановленный методом итерации Ландвебера, при $n=10$, $e=0,001$

На рисунках 40,41,42,43 - показаны результаты численных расчетов **методом сопряженных градиентов** при $e=0,001$ функций

$$q(x, y) = \frac{e}{(x-0.51)^2 + (y-0.51)^2},$$

$$\tilde{\omega}(x, y, x-0) = \frac{e}{4(y-0.51)} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-0.51}{y-0.51} - \operatorname{arctg} \frac{-0.51}{y-0.51} \right).$$

Количество слоев $n=10$, параметр регуляризации $\mu=0,5$, $x_L=1$, $\varepsilon=0,000001$ при этом были получены следующие данные: погрешность $\|\tilde{\omega}_r - \tilde{\omega}_{np}\| = 0,000004144269$, количество итерации 3, количество машинного времени 29,25 сек.

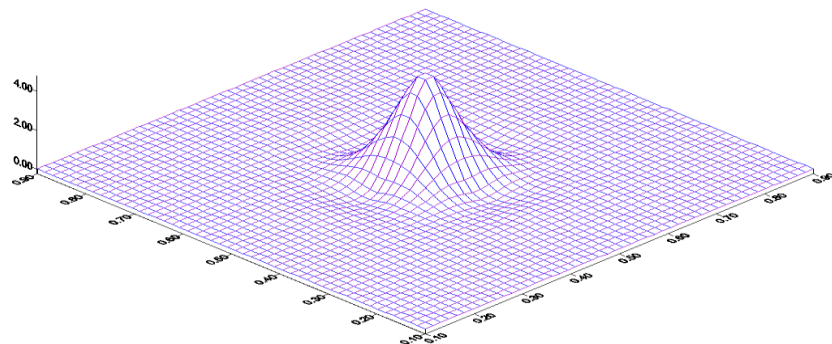


Рисунок 40 - График точного решения функции $q(x, y)$, при $n=10$, $e=0,001$

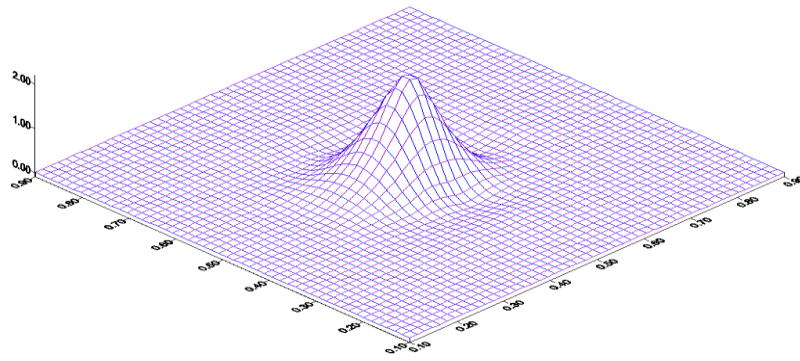


Рисунок 41 - График приближенного решения функции $q(x, y)$ методом сопряженных градиентов при $n = 10$, $e = 0,001$

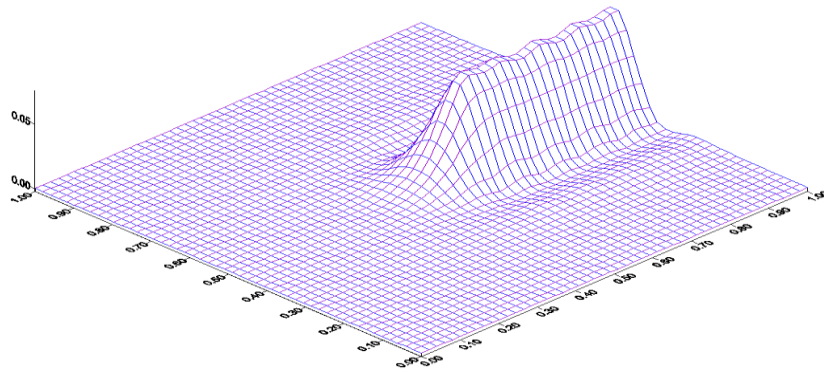


Рисунок 42 - График точного решения функции $\tilde{w}(x, y, x-0)$, при $n = 10$, $e = 0,001$

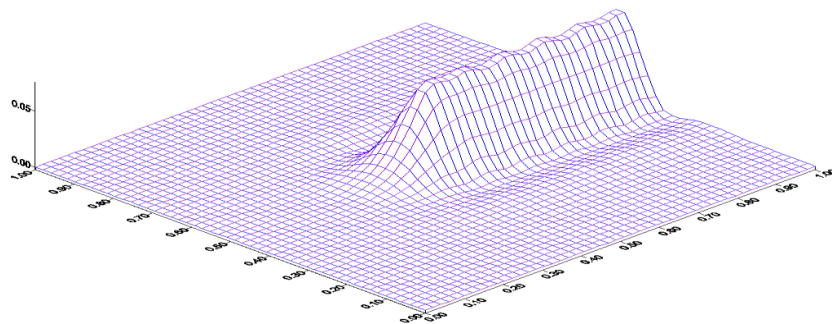


Рисунок 43 - График приближенного решения функции $\tilde{w}(x, y, x-0)$ методом сопряженных градиентов при $n = 10$, $e = 0,001$

На рисунках 44, 45, 46, 47 - показаны результаты численных расчетов методом квадратного корня при $e = 0,001$ функции

$$q(x, y) = \frac{e}{(x - 0.51)^2 + (y - 0.51)^2},$$

$$\tilde{\omega}(x, y, x-0) = \frac{e}{4(y-0.51)} \left(\operatorname{arctg} \frac{x-0.51}{y-0.51} - \operatorname{arctg} \frac{-0.51}{y-0.51} \right).$$

Количество слоев $n=10$, параметр регуляризации $\mu=0,5$, $x_L=1$, $\varepsilon=0,000001$ при этом были получены следующие данные: погрешность $\|\tilde{\omega}_r - \tilde{\omega}_{np}\| = 0,000000014901161$, количество машинного времени 4,05 сек.

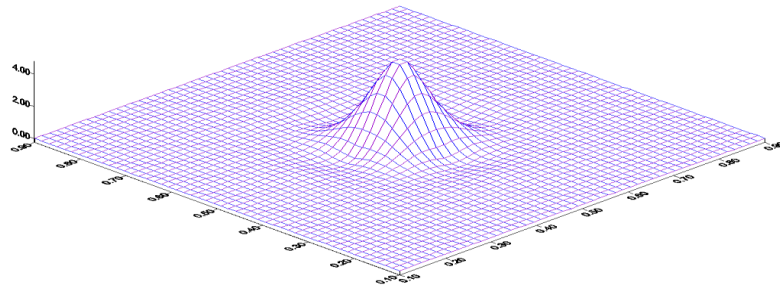


Рисунок 44 - График функции $q(x, y)$ при $n=10$, $e=0,001$

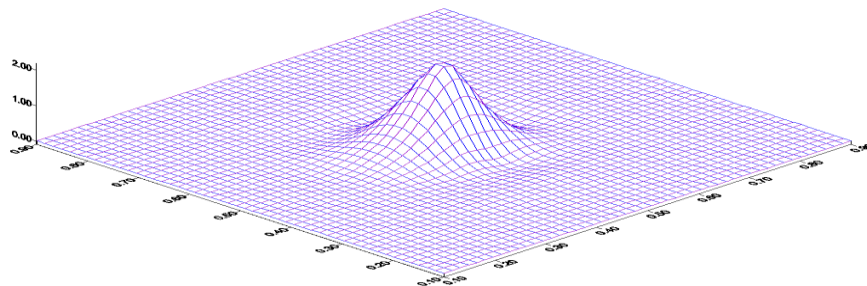


Рисунок 45- График приближенного решения функции $q(x, y)$ восстановленный методом квадратного корня при $n=10$, $e=0,001$

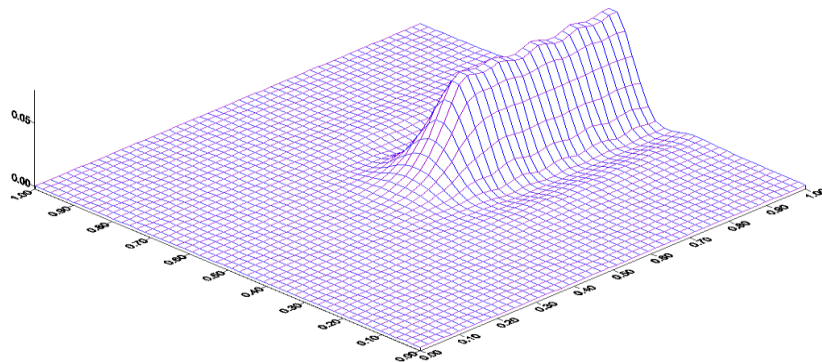


Рисунок 46 - График функции $\tilde{\omega}(x, y, x-0)$ при $n=10$, $e=0,001$

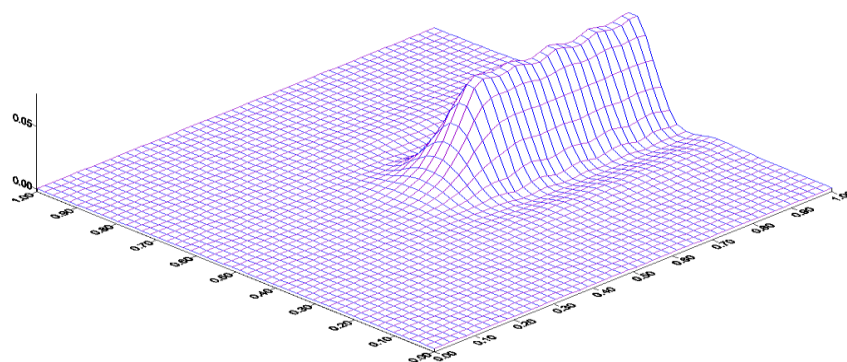


Рисунок 47 - График приближенного решения функции $\tilde{\omega}(x, y, x-0)$ найденный методом квадратного корня при $n = 10$, $e = 0,001$

Таблица 7 - Сравнительный анализ численного решения двумерного уравнения Гельфанда-Левитана различными методами при количестве узлов сетки $n = 10$, $\mu = 0.5$, $\varepsilon = 0,000001$ для функции $q(x, y) = \frac{e}{(x - 0.51)^2 + (y - 0.51)^2}$ где $e = 0,001$

Методы	Количество итерации	Норма погрешности $\ \tilde{\omega}_T - \tilde{\omega}_{np}\ $	Количество машинного времени	Сходимость
Метод Ландвебера	245	0,00031857757	6,78 сек.	сходится
Метод сопряженных градиентов	3	0,000004144269	29,25 сек.	сходится
Метод квадратного корня	-	0,0000000149011	4,05 сек.	сходится

Результаты по численному решению задачи (4.1) – (4.5) различными численными методами изложено в работах автора.

5 ВЫДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРОЯВЛЕННЫХ В РУДНОАЛТАЙСКОМ И КАЛБИНСКОМ РЕГИОНАХ

Целью настоящих исследований является получение фундаментальных знаний о закономерностях пространственного распределения химических элементов в пределах Рудного Алтая и Калбы на основе высокоточных аналитических исследований, ИСП-МС спектроскопии, с параллельным использованием математических методов прогноза с обработкой новейшими программными продуктами.

Для достижения поставленной цели выполнены следующие задачи [73-78]:

- собран и обобщен имеющийся архивный материал по геохимии рыхлых отложений, месторождений полезных ископаемых и техногенных объектов Рудного Алтая и Калбы;

- проведено геохимическое картирование по рыхлым отложениям в пределах Рудноалтайской, Калба-Нарымской и Западно-Калбинской структурно-металлогенических зон в масштабе 1:500 000 с отбором литохимических проб по вторичным ореолам;

- проведено аналитическое исследование ИСП-МС спектроскопии отобранных проб на 70 элементов в лаборатории инженерного профиля «ИРГЕТАС»;

- осуществлена обработка полученных результатов с выявлением аномалий химических элементов, проявленных в Рудноалтайском и Калбинском регионах с привязкой их к конкретным геологическим или техногенным объектам.

На начальной стадии исследований был осуществлен сбор и обобщение имеющейся информации по геохимии рыхлых отложений, месторождений полезных ископаемых и техногенных объектов Рудного Алтая и Калбы, как геохимически разнопрофильных эталонных регионов с наиболее интенсивно развитой горно-добычным производством. Локализация в пределах данных территорий множества месторождений полезных ископаемых различного масштаба и формационной принадлежности определяет выбор их как объектов исследования.

Вторым этапом исследований явились экспедиционные исследования, в ходе которых было проведено геохимическое картирование по рыхлым отложениям в пределах Рудноалтайской, Калба-Нарымской и Западно-Калбинской структурно-металлогенических зон в масштабе 1:500 000 с отбором литохимических проб по вторичным ореолам. В ходе полевых исследований опробовались почвы из закопуш на глубину до 20 сантиметров по ориентировочной сети 5x5 километров. Отбор проб почв и грунтов проводился в соответствии с ГОСТ 28168. Привязка точек опробования осуществлялась с помощью GPS навигатора GARMIN. В итоге было отобрано 777 почвенных проб на обследованной территории площадью свыше 40 тысяч квадратных километров.

Отобранные геохимические пробы были направлены в лабораторию инженерного профиля для проведения аналитических исследований методами ICP-MS спектроскопии на 70 элементов. Масс-спектрометрический метод определения элементов основан на измерении интенсивности потока ионов определяемых элементов с определенным отношением массы к заряду, возникающего при распылении пробы в аргоновую плазму, индуктивно возбуждаемую радиочастотным электромагнитным излучением.

Для выполнения определения содержания элементов образец переводится в раствор многокислотным разложением. Для этого после отбора проба высушивается при температуре 105 °С до воздушно-сухого состояния и измельчается до крупности частиц 1 мм. Рабочий образец дополнительно истирается до крупности не менее 71мкм. Пробы хранят в соответствии с СТ РК 1289.

Перед непосредственным выполнением анализа осуществляется процесс пробоподготовки, который включал подготовку стандартных растворов азотной кислоты для разложения проб и само кислотное разложение.

Для учета содержания определяемых элементов в используемых реактивах с каждой партией проб выполняется холостой опыт, который проводится через весь ход анализа.

Измерения выполняются на масс-спектрометре с индуктивно связанной плазмой Agilent 7500 сх, который готовится к работе в соответствии с инструкцией по эксплуатации. Измерения проводились в соответствии с программным обеспечением прибора. Для построения градуировочного графика зависимости интенсивности аналитического сигнала от концентрации анализируемого элемента в аргоновую плазму последовательно вводились не менее трех аттестованных смесей из комплекта (АС-1-АС-16) необходимых концентраций. Измерение концентрации АС и пробы проводились не менее двух раз. Если результат анализа по одному или нескольким элементам превышал верхнюю границу измеряемого диапазона, то проводились разбавление пробы. Контроль стабильности градуировочной характеристики проводится после каждых 10 измерений по стандартному образцу или АС.

Результаты измерений обрабатываются автоматически с выдачей данных на монитор компьютера (и принтер) в виде таблицы значений концентраций определяемых элементов в млн⁻¹ (ppm) в пробах почв согласно программному обеспечению прибора. Если расхождения между результатами двух параллельных измерений не превышают значений r_k , рассчитанных по формуле (5.1), то за результат анализа принимают среднее арифметическое значение параллельных измерений. В случае расхождения между результатами двух параллельных измерений, которые превышали допустимые значения, пробу усредняют и повторяют анализ. Если при повторном анализе расхождения между результатами превышали допустимые, выписывают результаты от меньшего до большего значения. Проба принимается неоднородной по этому элементу.

Контроль точности результатов измерений осуществлялся путем проведения внутреннего контроля качества (ВКК): базирующегося на повторяемости, внутрилабораторной прецизионности и точности. Оперативный контроль повторяемости выполнялся с использованием рабочих проб. Результат контрольной процедуры r_k (при выполнении двух параллельных определений) рассчитывался по формуле:

$$r_k = C_{\max} - C_{\min}, \quad (5.1)$$

где C_{\max} – максимальный результат из 2 параллельных определений; C_{\min} – минимальный результат из 2 параллельных определений.

Повторяемость σ_{rm} признают удовлетворительной, если

$$r_k \leq r_{\text{m}} \quad (5.2)$$

где r_{m} – предел повторяемости МВИ.

Оперативный контроль внутрилабораторной прецизионности проводился с использованием рабочих проб. Анализ осуществлялся в точном соответствии с методикой, когда измерения выполняются в разное время или двумя операторами.

Результат контрольной процедуры D_k (для двух результатов анализа) рассчитывают по формуле:

$$D_k = |C_1 - C_2|, \quad (5.3)$$

где C_1 – первый результат анализа пробы; C_2 – второй результат анализа пробы.

Внутрилабораторная прецизионность σ_{Rm} признавалась удовлетворительной, если

$$D_k \leq R_{\text{m}}, \quad (5.4)$$

где R_{m} – предел внутрилабораторной прецизионности МВИ.

При проведении оперативного контроля точности с использованием стандартных образцов (СО) и/или АС результат контрольной процедуры рассчитывались по формуле:

$$K_k = |C - C_{\text{CO}}|, \quad (5.5)$$

где C – результат анализа СО или (АС); C_{CO} – значение аттестованной характеристики СО или АС.

Норматив оперативного контроля точности K_{CO} рассчитывался по формуле:

$$K_{\text{CO}} = \sqrt{\Delta_{\text{ат}}^2 + 0,5R_{\text{m}}^2} \quad (5.6)$$

где $\Delta_{\text{ат}}$ – погрешность аттестованного значения СО или АС; R_{m} – предел внутрилабораторной прецизионности МВИ.

Точность признавалась удовлетворительной, если

$$K_k \leq K_{\text{CO}} \quad (5.7)$$

Оперативный контроль повторяемости проводился не реже одного раза в месяц. Оперативный контроль внутрилабораторной прецизионности проводился из расчета 10 % от каждой партии проб. Оперативный контроль точности проводился с каждой партией проб, поступающих из экспедиций.

Результат измерений (\bar{X}) в документах, предусматривающих его дальнейшее использование, представлялся в виде: $\bar{X} \pm \Delta, P = 0,95$
где \bar{X} – результат анализа пробы, млн⁻¹;

Δ – значение характеристики погрешности результата измерения, установленное при реализации МВИ в лаборатории.

Для дальнейшей обработки результаты анализа сводились в двумерную таблицу, удобную для импортирования в различные программные продукты. В строках расположены номера проб, а в столбцах химические элементы.

Всего было проанализировано 777 проб на 70 элементов.

По результатам экспедиционных и аналитических исследований произведена обработка, и анализ полученных результатов с помощью геоинформационных технологий определены аномалии химических элементов, проявленных в Рудноалтайском и Калбинском регионах с привязкой их к конкретным геологическим или техногенным объектам.

Первым шагом в данной методике после получения результатов опробования и данных лаборатории, является создание геоинформационных систем, что позволило провести на следующих этапах исследований статистическую обработку полученных данных с определением по каждому анализируемому элементу значений фонового и аномальных содержаний, а также определения закона определения исследуемой выборки. Для этих целей успешно применялись математические методы решения некорректных задач, различные программные продукты, а также построения геоинформационных систем: Micromine, MapInfo, Surfer и др.

На основании аномальных содержаний предполагается выделить геохимические аномалии по основным элементам, которые могут представить практический интерес в качестве полезного ископаемого. Геохимическая аномалия это участок земной коры (или поверхности земли), отличающийся существенно повышенными концентрациями каких либо химических элементов или их соединений по сравнению с фоновыми значениями и закономерно расположенный относительно скоплений полезных ископаемых (рудного тела, нефтяной или газовой залежи и др.). Геохимические аномалии характеризуются повышенными, по сравнению с фоновыми, концентрациями соединений или химических элементов. В районе месторождений геохимические аномалии образуют первичные ореолы в горных породах, вторичные ореолы в почвах и рыхлых отложениях, потоки рассеяния в поверхностных водах и донных отложениях, ореолы рассеяния в подземных водах, биогеохимические ореолы.

Помимо природных существуют техногенные геохимические аномалии, которые связаны с отвалами шахт, карьеров, отстойников, свалок и т.д. и (в почвах, рыхлых и донных отложениях, в грунтовых водах растительности). Они оказывают негативное влияние на окружающую среду, поскольку их интенсивность на поверхности Земли значительно сильнее в силу выноса миграции загрязняющих компонентов в ходе эксплуатации месторождений.

Изучение геохимических аномалий позволяет выделить площадь загрязнения, проследить потоки рассеяния химических элементов, пути их миграции.

Для выделения аномалий обычно рассчитывается коэффициент концентрации:

$$K_c = \frac{C}{C_\phi} \quad (5.8)$$

где C – содержание химического элемента в оцениваемом объекте, мг/кг; C_ϕ – фоновое содержание этого элемента, мг/кг

Критерий аномальности отклонений от фона является двусторонним и наряду с повышенными значениями поля геохимическими аномалиями могут признаваться и пониженные содержания элементов индикаторов и определяются значениями:

Для нормального закона

$$C_{Am} = \frac{C_\phi \pm 3S}{\sqrt{m}} \quad (5.9)$$

Для логнормального закона

$$C_{Am} = C_\phi \varepsilon^{\pm \frac{3}{\sqrt{m}}} \quad (5.10)$$

где $m=2, 3, 4, \dots, 9$ – число точек в контуре (при любом их числе m принимается не более 9).

Геохимическая зональность рудных месторождений базируется на естественных ассоциациях химических элементов, которые возможно определить используя изучение корреляционных зависимостей химических элементов.

Для определения особенностей геохимической зональности оконтуривают аномалию и производят ее оценку на основании параметров: средних содержаний элементов (C_{cp}), коэффициентов минерализации (K_m), аномальности (K_a), интенсивности (K_n), зональности (K_z), региональных коэффициентов зональности (K_{zp}), коэффициентов масштабности (Π_{u1}), рядов зональности по условной продуктивности (M_n), рядов ассоциаций (по K_m), прогнозных ресурсов (Q). Для этого используются следующие формулы:

$$C_{cp} = \frac{\sum C_i}{n} \quad (5.11)$$

где n – количество проб в аномалии, $\sum C_i$ – сумма содержаний элементов в аномалии (по каждому элементу).

$$K_m = n_a/n$$

где n_a – количество аномальных проб в выборке аномалии по каждому элементу. Используется для установления доли каждого элемента в общей комплексной аномалии. K_m - коэффициент аномальности показывает величину превышения содержаний по каждому элементу к фоновым ($C_{фон}$) содержаниям этих элементов во вмещающих породах.

$$K = \frac{C_{cp}}{C_{фон}} \quad (5.12)$$

где $C_{фон}$ – фоновое содержание элемента в породе.

Условная продуктивность или относительный метропроцент аномальных элементов в комплексной аномалии служит для определения коэффициентов интенсивности, а также для ранжирования элементов в аномалиях с целью получения рядов зональности.

$$M_n = K_m \times K_z \quad (5.13)$$

где M_n – условная продуктивность;

K_z – коэффициент зональности определяет соотношение элементов рудно-верхнерудных – надрудных (\mathcal{E}_p) к элементам рудно-подрудной группы (\mathcal{E}_n).

$$K_z = \frac{K\alpha\mathcal{E}_{p1} + K\alpha\mathcal{E}_{p2} + K\alpha\mathcal{E}_{p3}}{K\alpha\mathcal{E}_{n1} + K\alpha\mathcal{E}_{n2} + K\alpha\mathcal{E}_{n3}} \quad (5.14)$$

В случае выявления в ассоциации 3 элементов формула имеет вид:

$$K_z = \frac{K\alpha\mathcal{E}_{p1} + K\alpha\mathcal{E}_{p2}}{K\alpha\mathcal{E}_{n1}} \quad (5.15)$$

Тогда K_n – коэффициент интенсивности служит для оценки степени минерализации комплексной аномалии (рудные ореолы: K_n от 80-150 и выше; близрудные – от 40 до 80, дальнерудные 40-20 и фланговые – от 0 до 20).

$$K_n = M_n\mathcal{E}_{p1} + M_n\mathcal{E}_{p2} + M_n\mathcal{E}_{n1}. \quad (5.16)$$

Количественная характеристика выхода оруденения на поверхность коренных пород P_p в м²% обеспечивает подсчет продуктивности вторичного остаточного ореола рассеяния P согласно зависимостей:

$$P = \Delta x * 2l \left(\sum_{x=1}^N C_x - NC_\phi \right) = S(\bar{C}_x - C_\phi) \quad (5.17)$$

$$P_p = (1/k)P \quad (5.18)$$

где k — местное значение коэффициента остаточной продуктивности. Распространяя эту оценку до глубины (H, m) имеем геохимические ресурсы металла:

$$Q = \frac{P}{40k} * H \quad (5.19)$$

В результате была построена (рисунок 48) схема опробования (карта фактов), увязанная в единую геоинформационную систему с данными лабораторных исследований. Проведен первичный пространственный анализ распределения химических элементов в пределах района работ. Эти данные показали характер распределения порядка 70 химических элементов. Даже поверхностный анализ этих материалов свидетельствует, что близкие по своим химическим свойствам элементы имеют и близкий характер распределения,

обусловленный в первую очередь геолого-структурными особенностями региона.

Для более точного оконтуривания аномалий был проведен анализ по каждому элементу с выделением фоновых и аномальных значений по существующим методикам геохимического картирования [78 - 81], а также выделения границ популяций содержаний в изучаемой выборке.

На основании аномальных содержаний были выделены геохимические аномалии по химическим элементам, которые могут представить практический интерес в качестве полезного ископаемого. Геохимическая аномалия это участок земной коры (или поверхности земли), отличающийся существенно повышенными концентрациями каких либо химических элементов или их соединений по сравнению с фоновыми значениями и закономерно расположенный относительно скоплений полезных ископаемых (рудного тела, нефтяной или газовой залежи и др.). Геохимические аномалии характеризуются повышенными, по сравнению с фоновыми, концентрациями соединений или химических элементов. В районе месторождений геохимические аномалии образуют первичные ореолы в горных породах, вторичные ореолы в почвах и рыхлых отложениях, потоки рассеяния в поверхностных водах и донных отложениях, ореолы рассеяния в подземных водах, биогеохимические ореолы.

Помимо природных существуют техногенные геохимические аномалии, которые связаны с отвалами шахт, карьеров, отстойников, свалок и т.д. и (в почвах, рыхлых и донных отложениях, в грунтовых водах растительности). Они оказывают негативное влияние на окружающую среду, поскольку их интенсивность на поверхности Земли значительно сильнее в силу выноса миграции загрязняющих компонентов в ходе эксплуатации месторождений.

В ходе настоящих исследований установлены как природные так и техногенные геохимические аномалии для всех определяемых элементов.

В пределах оконтуренных геохимических аномалии были определены особенности изменения содержания Li на глубину до 500 м на основании объемных реконструкций.

Здесь возникает обратная задача об определении особенностей изменения содержания Li , B , Na , Al , W на глубине h по известной интенсивности на поверхности земли. Для достижения этой цели была разработана математическая модель в виде интегрального уравнения Фредгольма первого рода, которую можно считать обобщением уравнения Гельфанда-Левитана [1, с.90-95;82].

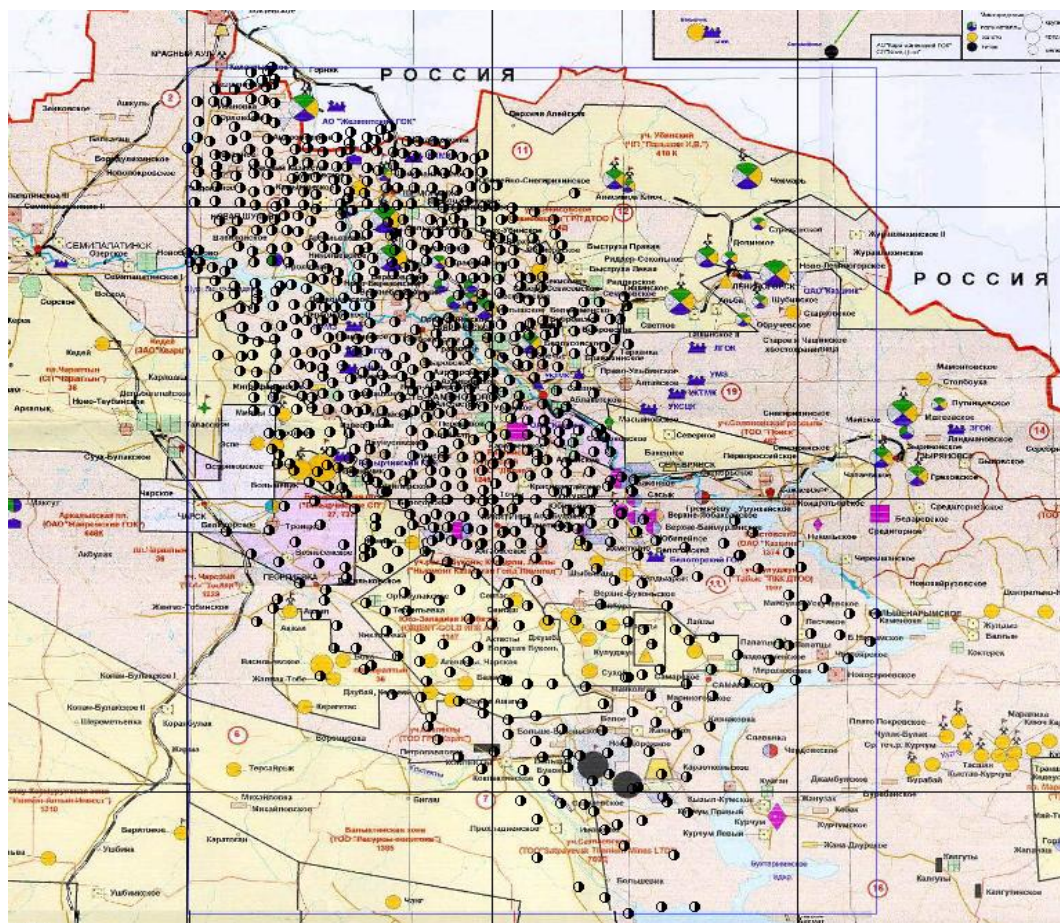


Рисунок 48 - Схема опробования по рыхлым отложениям в пределах Калбы, Прииртышья и Рудного Алтая

Математическая модель. Для исследований была выбрана одна из выделенных аномалии.

Рассмотрим задачу, когда источник аномалии оценивается плоской моделью - интегральным уравнением с ядром Пуассона [1,с.90-95]

$$A(z) = \int_a^b K(x, y, s)z(y, s)ds = u(x, y), \quad y_{\min} \leq y \leq y_{\max} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} z(y, a) &= z(y, b) = 0, \\ z(c, x) &= z(d, y) = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

ГДЕ $a = x_{\min}, b = x_{\max}, c = y_{\min}, d = y_{\max}$.

$$K(x, y, s) = \frac{h}{\pi(x-s)^2 + h^2}.$$

где $u(x, y)$ - поле на дневной поверхности ($y=0$), а $z(y, s)$ - поле на уровне h ниже поверхности земли, также представляет собой некорректную задачу.

Экспериментальные данные представлены в координатах Гаусса – Крюгера (Пулково 1942 г.). Для численного решения переходим к безразмерным координатам $x = \bar{x} / 10^7$, $y = \bar{y} / 10^7$, $u(x, y) = \bar{u}(x, y) / 100$.

Проведен вычислительный эксперимент для обработки и анализа полученных результатов с выявлением аномалии естественных ассоциации химических элементов, проявленных в исследуемых регионах.

В качестве входных данных использовалась информация по геохимии и минералогии рыхлых отложений, месторождений полезных ископаемых Рудного Алтая и Калбы:

$$x_{\min} = 1,4500, x_{\max} = 1,472612, y_{\min} = 0,535822, y_{\max} = 0,564762, h = 0,05.$$

Заменим интегральное уравнение суммой по формуле прямоугольников

$$\sum_{l=1}^n K(x_i, y_j, s_l) z(y_j, s_l) \Delta s = u(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}. \quad (5.22)$$

где $\Delta s = (x_{\max} - x_{\min}) / n$.

Уравнение (5.22) запишем в виде СЛАУ

$$Az = f \quad (5.23)$$

где A - квадратная матрица.

$$A = \{a_{il}\}_{i=1, n, l=1, n}, \quad a_{il} = \frac{h \cdot \Delta s}{\pi(x_i - s_l)^2 + h^2},$$

Соответственно вектор неизвестных

$$\bar{z} = \{z(y, s_l)\}_{l=1, n},$$

и правая часть

$$\bar{f} = \{u(x_i, y)\}_{i=1, n}.$$

Основной особенностью системы (5.23) являются:

- а) большая размерность $n = 300 - 1000$, $m = 500 - 1500$;
- б) сильная разреженность матрицы A и правая части \bar{f} ;
- в) плохая обусловленность.

Поэтому согласно [15, с.49-52; 16, с.31-33] для численного решения уравнения (5.23) используем метод регуляризации М. Лаврентьева

$$(\mu E + A)z = f. \quad (5.25)$$

Для численной реализации поставленной задачи используем метод итерации Ландвебера

$$\frac{z^{k+1} - z^k}{\tau} + \bar{A}z^k = f.$$

Для проведения счета на мелкой сетке на персональном компьютере Pentium 4 требуется большой объем оперативной памяти, поэтому численный эксперимент был проведен на суперкомпьютере URSA на базе 128 четырехядерных процессоров Intel® Xeon® серии E5335 2.00GHz при КазНУ им. аль-Фараби. В ходе численного эксперимента для лития были заданы следующие параметры: параметр регуляризации М. Лаврентьева $\mu = 0,5$, точность решения $\varepsilon = 10^{-6}$, глубина $h = 0,05$, количество слоев $n = 135$ по оси x и $m = 165$ по оси y , при этом было получено решение с требуемой точностью ε , количеством итерации 1157 и количеством машинного времени 13,31 сек.

Таблица 8 - Пример результатов расчета изменения содержания Li в пределах аномалии на глубине 500 м

Аномальные точки	Результаты аналитических исследований на дневной поверхности, (г/т)	Полученные числовые данные на глубине $h = 500$, (г/т)
1	126,60	250,14
2	57,68	111,37
3	76,91	151,26
4	126,60	250,14
5	122,20	240,89
6	88,03	171,37
7	133,00	262,00
8	141,00	278,01

Цифровая поверхность, построенная графическим редактором Surfer характера распределения аномалий Li на дневной поверхности по данным, которые были собраны в ходе полевых и лабораторных исследований показана на рисунке 50. На рисунке 51 построена цифровая поверхность графическим редактором Surfer характера распределения аномалий Li на глубине h по данным, которые были получены численно методом итерации Ландвебера с регуляризацией Лаврентьева. В таблице 8 указаны некоторые данные, по которым были построены цифровые данные на дневной поверхности и на глубине h .

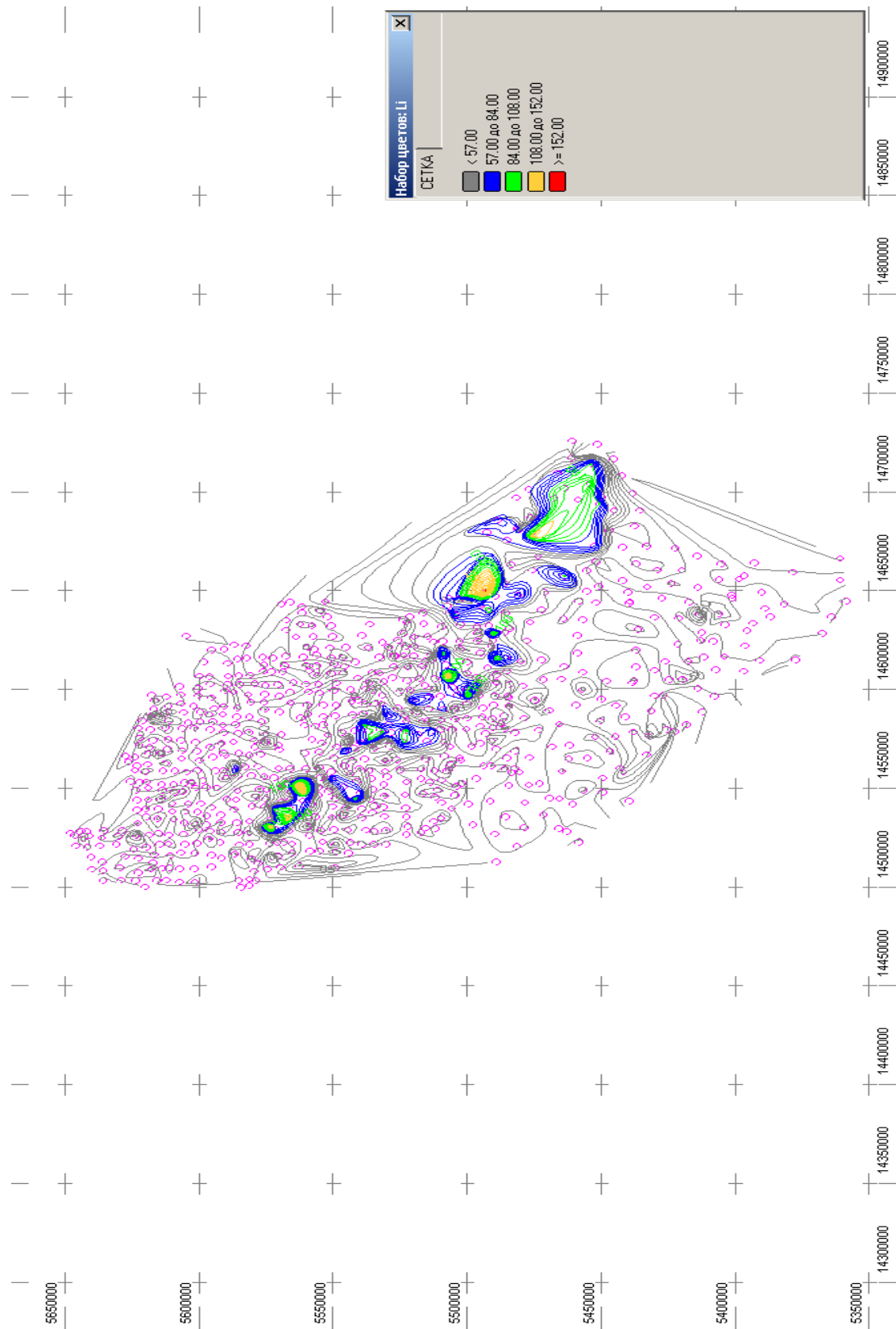


Рисунок 49 - Характер распределения аномалий Li в пределах района экспедиционных работ 2012 года полученный геоинформационной системе Micromine

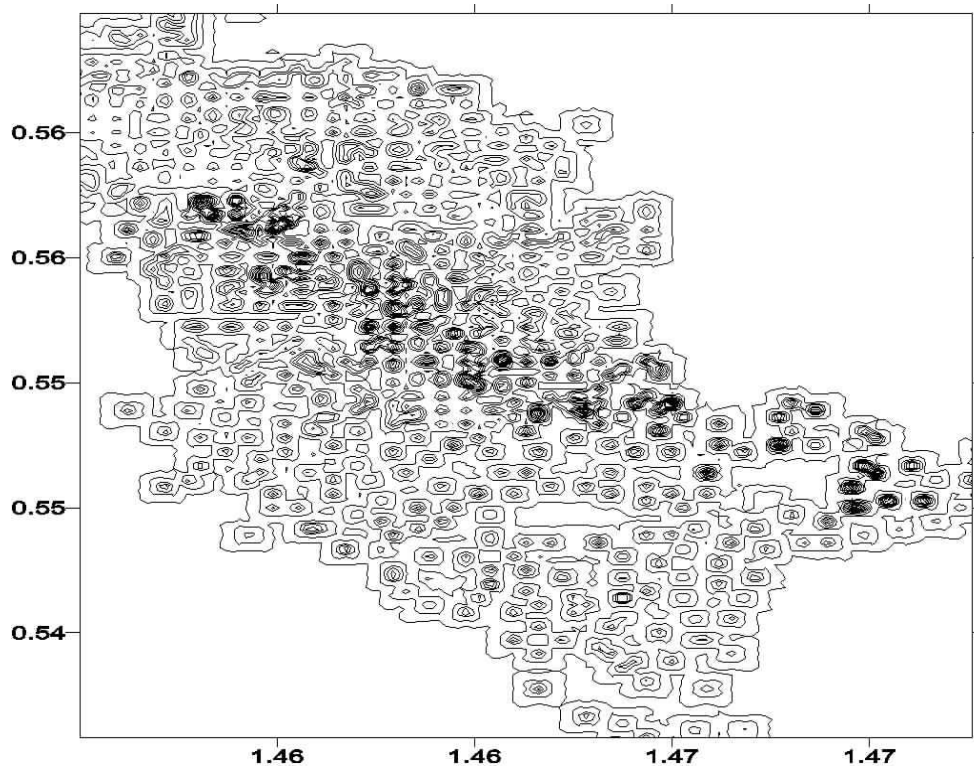


Рисунок 50 – Характер распределения аномалий Li на дневной поверхности, полученный с помощью графического редактора Surfer

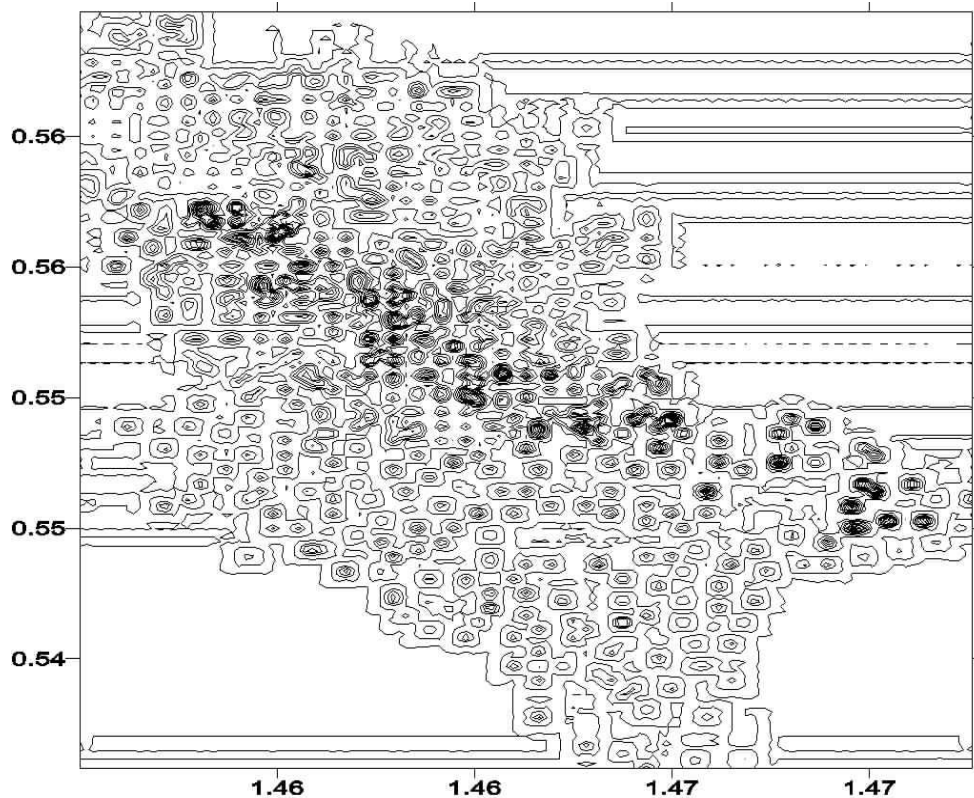


Рисунок 51 - Характер распределения аномалий Li на глубине $h = 0,05$ численно реализованный методом итерации Ландвебера с регуляризацией Лаврентьева, полученный с помощью графического редактора Surfer

Численный эксперимент для химического элемента бор были заданы следующие параметры: параметр регуляризации М. Лаврентьева $\mu=0,5$, точность решения $\varepsilon=10^{-6}$, глубина $h=0,05$, количество слоев $n=135$ по оси x и $m=165$ по оси y , при этом было получено решение с требуемой точностью ε , количеством итерации 1489 и количеством машинного времени 11,19 сек.

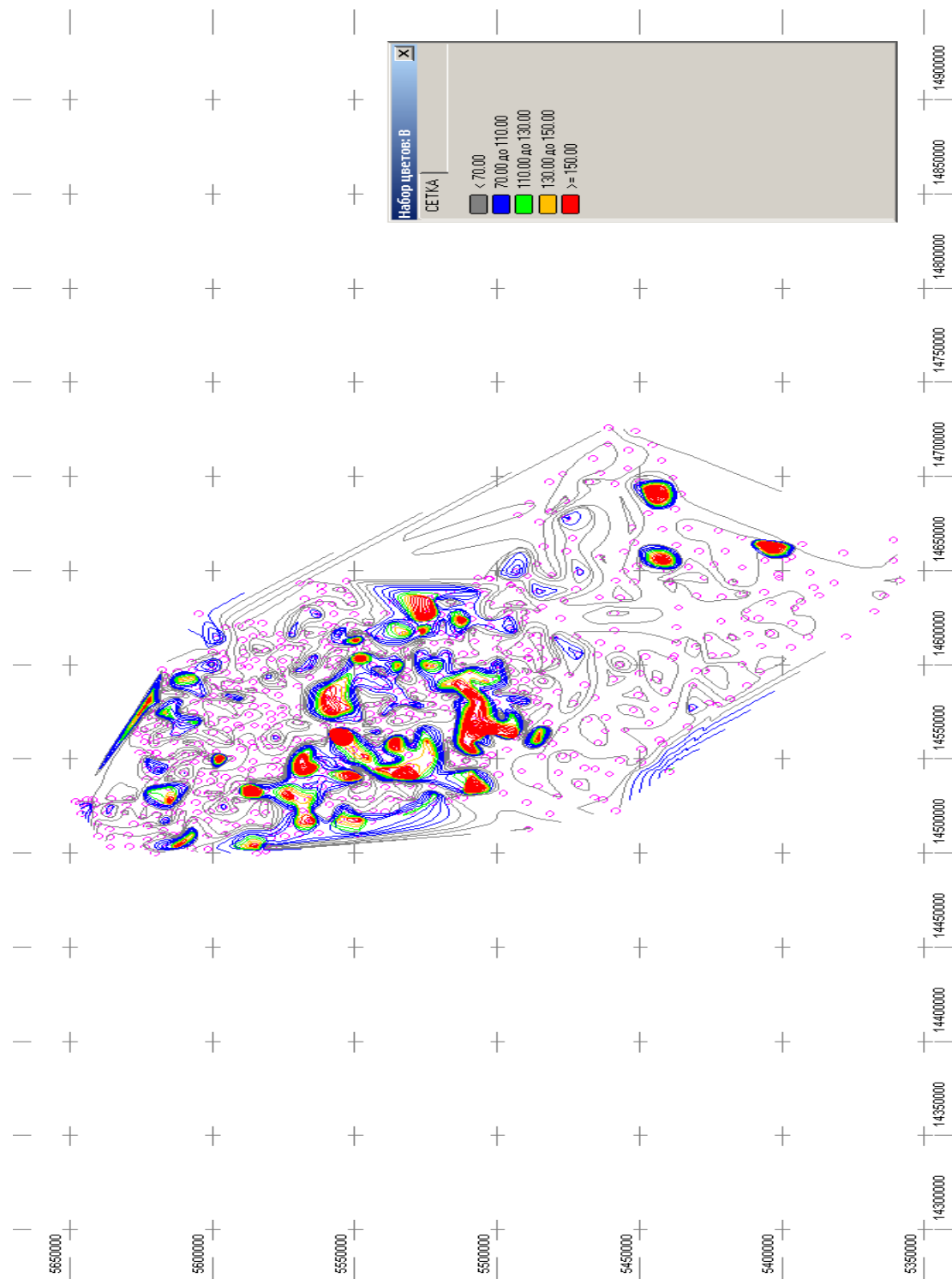


Рисунок 52 - Характер распределения аномалий В в пределах района экспедиционных работ 2012 года полученный геоинформационной системе Micromine

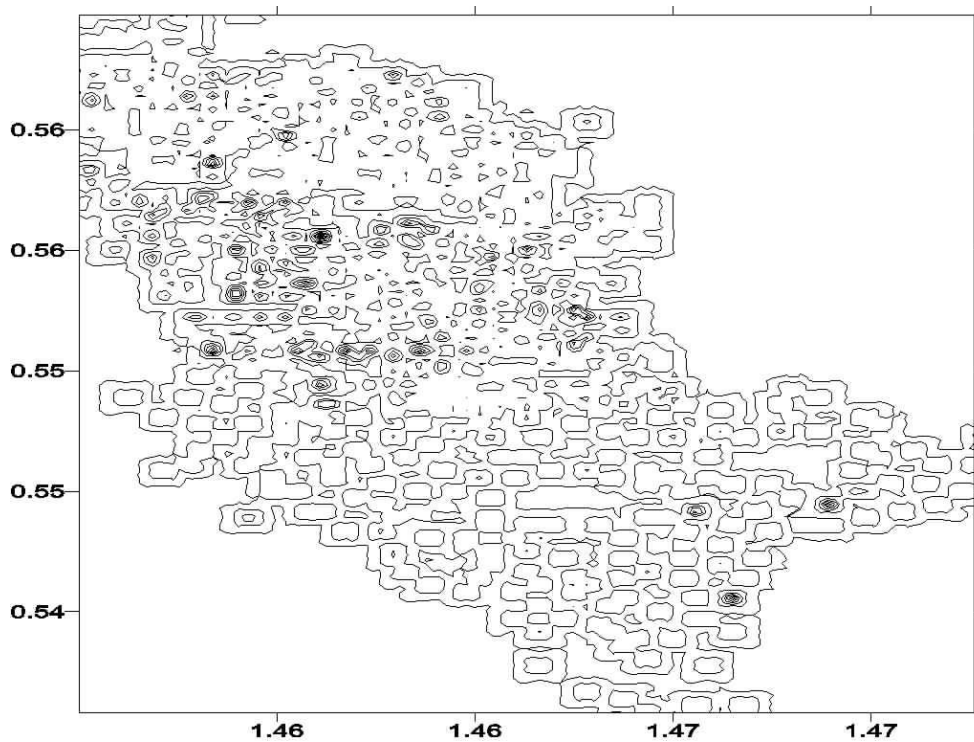


Рисунок 53 - Характер распределения аномалий V на дневной поверхности, полученный с помощью графического редактора Surfer

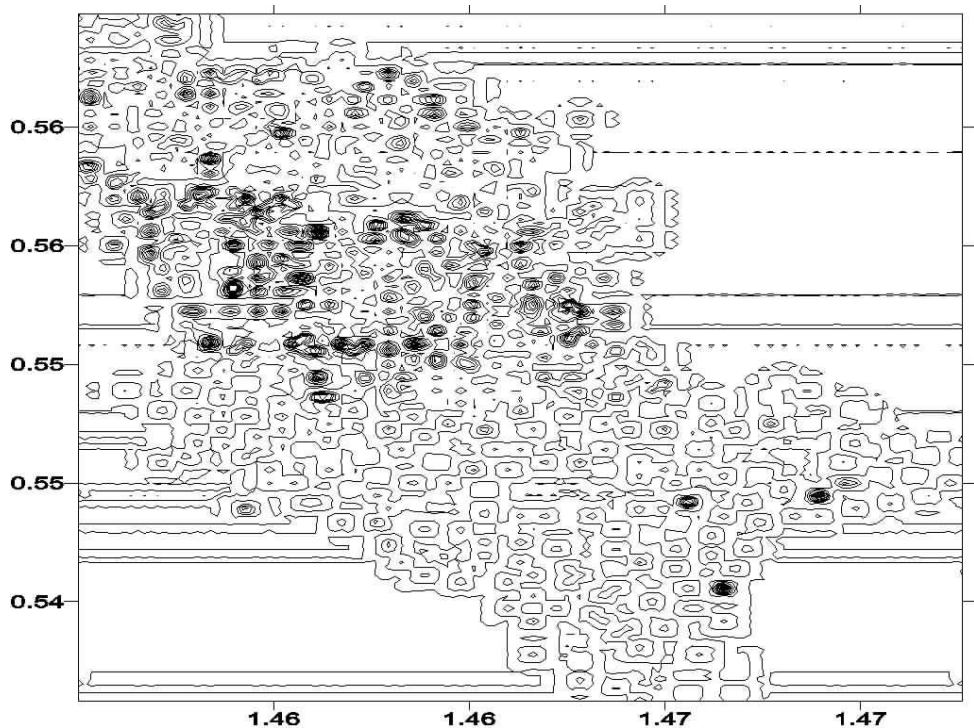


Рисунок 54 - Характер распределения аномалий V на глубине $h = 500$ численно реализованный методом итерации Ландвебера с регуляризацией Лаврентьева, полученный с помощью графического редактора Surfer

Численный эксперимент для химического элемента натрия были заданы следующие параметры: параметр регуляризации М. Лаврентьева $\mu=0,5$, точность решения $\varepsilon=10^{-6}$, глубина $h=0,05$, количество слоев $n=135$ по оси x и $m=165$ по оси y , при этом было получено решение с требуемой точностью ε , количеством итерации 1838 и количеством машинного времени 1 мин 41,32 сек.

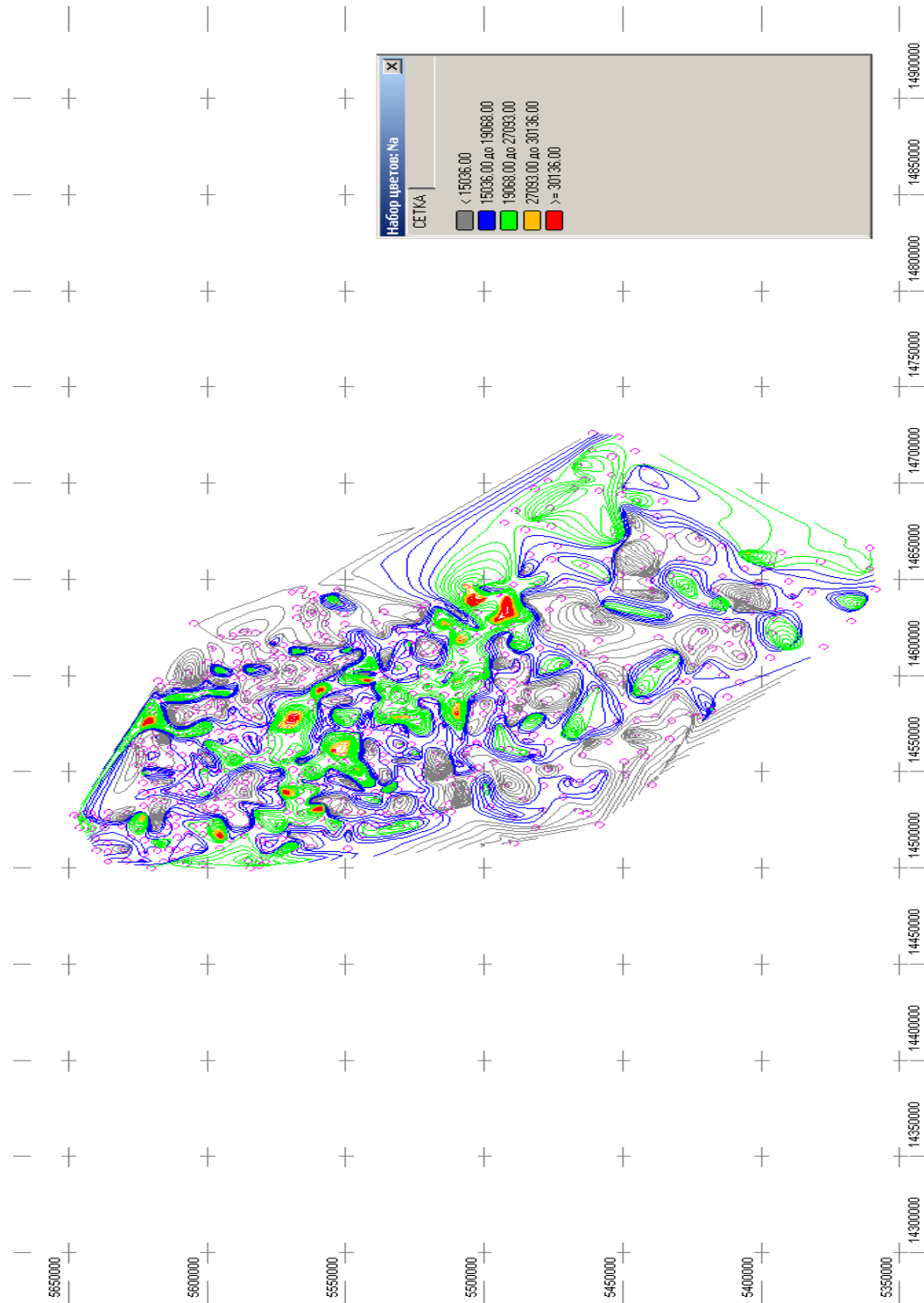


Рисунок 55 - Характер распределения аномалий Na в пределах района экспедиционных работ 2012 года

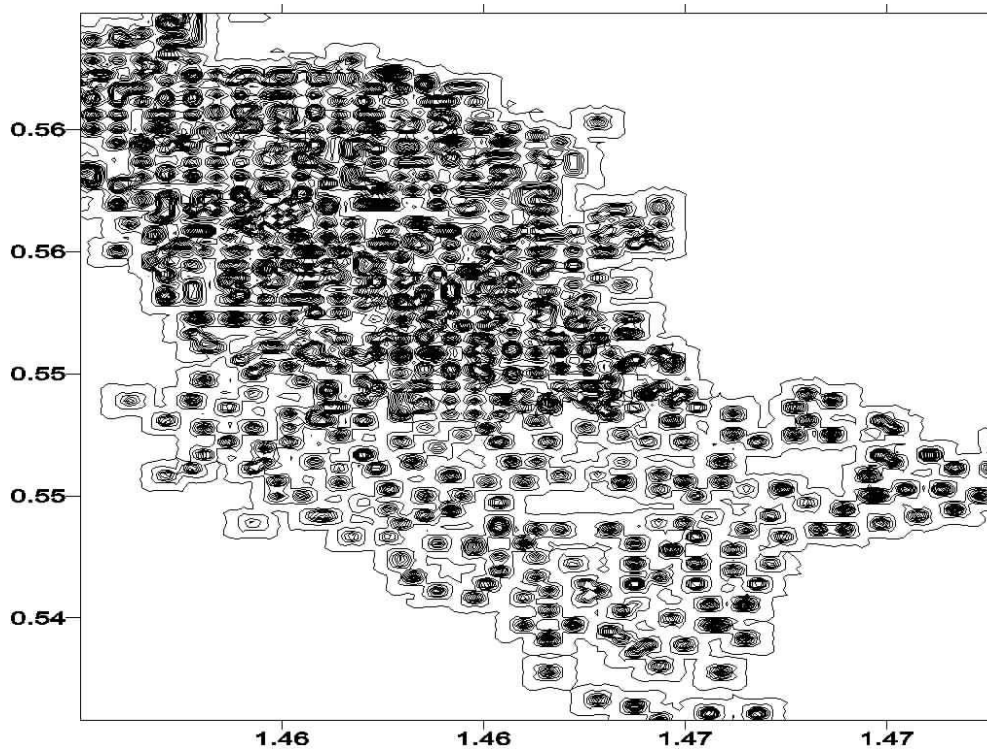


Рисунок 56 - Характер распределения аномалий Na на дневной поверхности, полученный с помощью графического редактора Surfer.

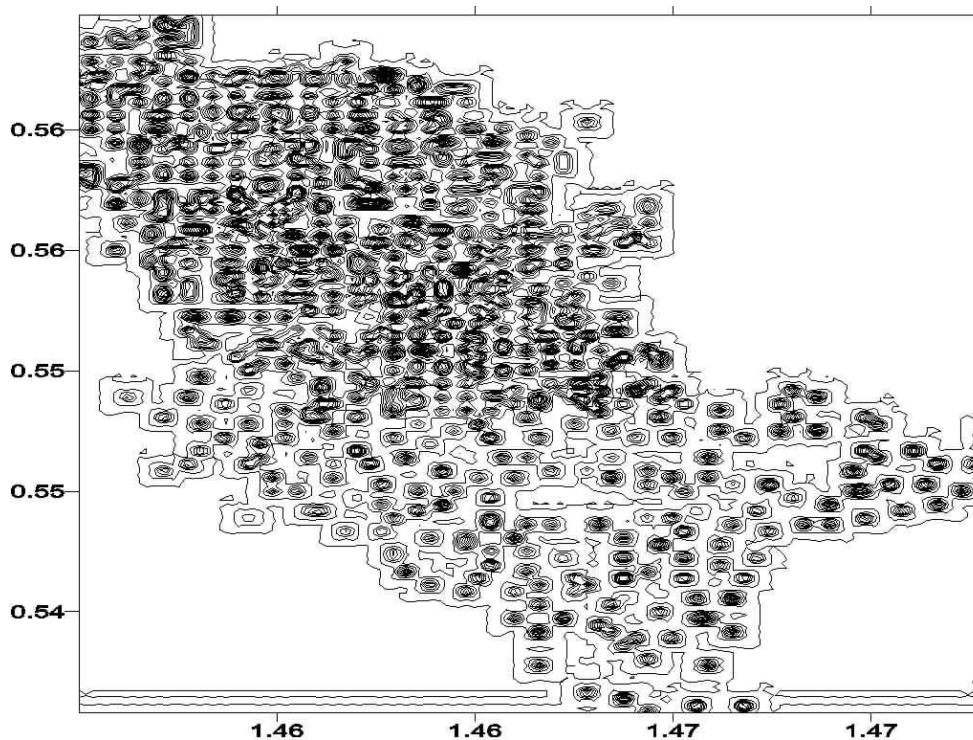


Рисунок 57 - Характер распределения аномалий Na на глубине $h=500$ численно реализованный методом итерации Ландвебера с регуляризацией Лаврентьева, полученный с помощью графического редактора Surfer.

Численный эксперимент для химического элемента алюминия были заданы следующие параметры: параметр регуляризации $\mu=0,5$, точность решения $\varepsilon=10^{-6}$, глубина $h=0,05$, количество слоев $n=135$ по оси x и $m=165$ по оси y , при этом было получено решение с требуемой точностью ε , количеством итерации 2312 и количеством машинного времени 2,13 сек.

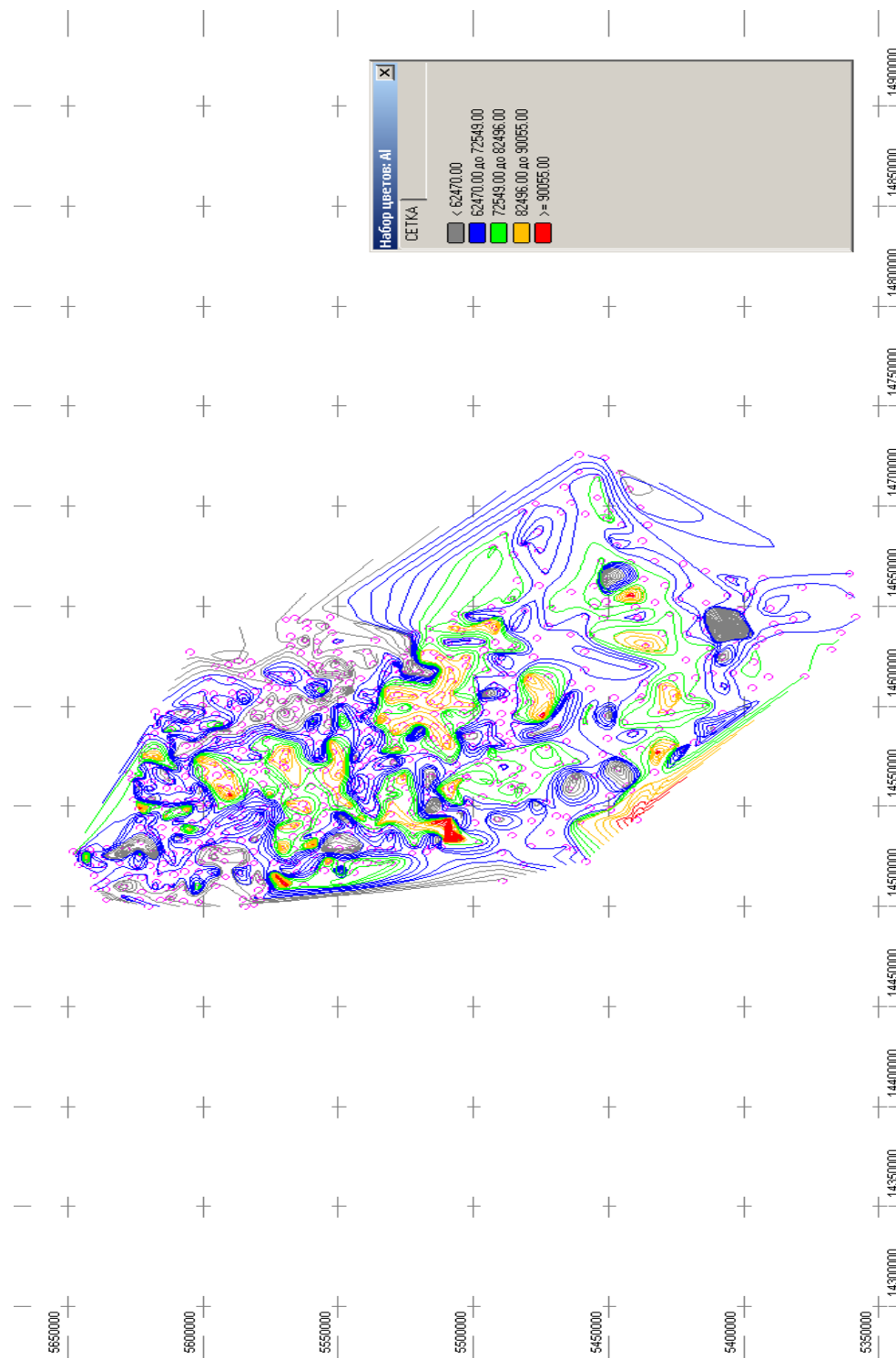


Рисунок 58 - Характер распределения аномалий Al в пределах района экспедиционных работ 2012 года

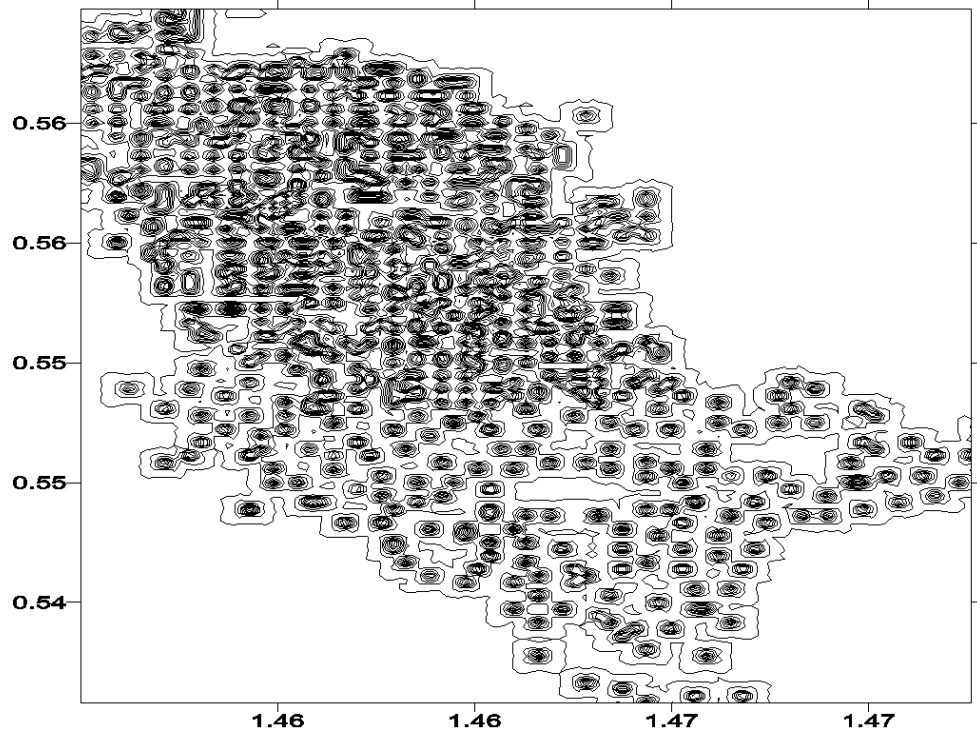


Рисунок 59 - Характер распределения аномалий AI на дневной поверхности, полученный с помощью графического редактора Surfer

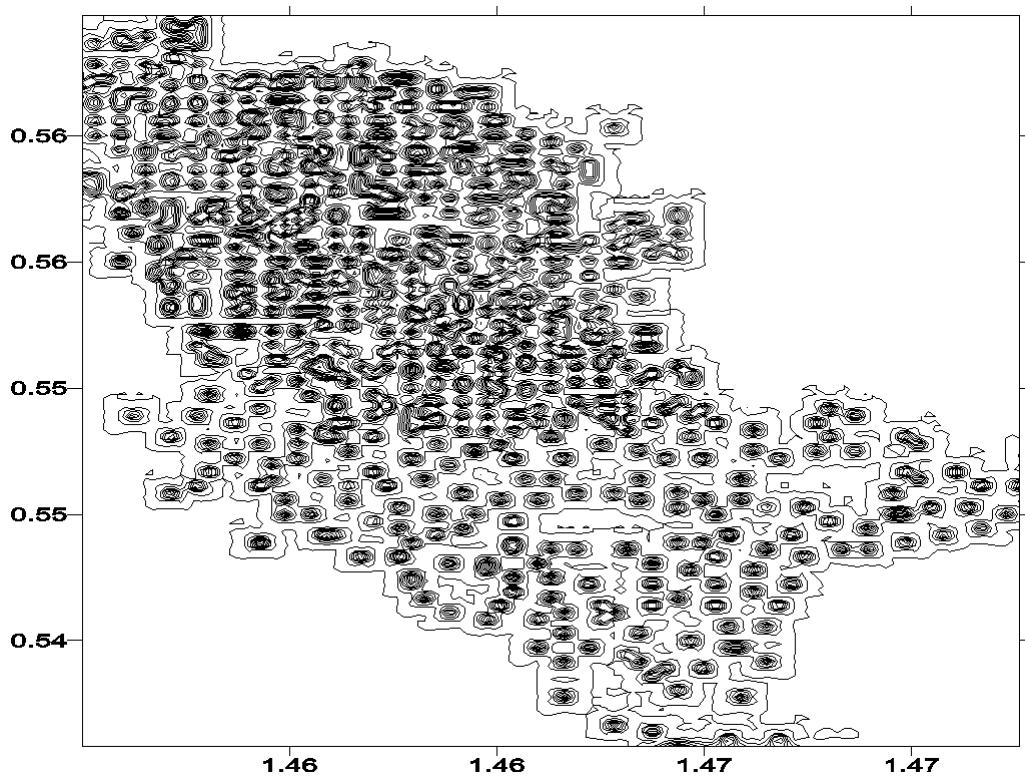


Рисунок 60 - Характер распределения аномалий AI на глубине $h = 500$ численно реализованный методом итерации Ландвебера с регуляризацией Лаврентьева, полученный с помощью графического редактора Surfer

Численный эксперимент для химического элемента вольфрам были заданы следующие параметры: параметр регуляризации М. Лаврентьева $\mu=0,5$, точность решения $\varepsilon=10^{-6}$, глубина $h=0,05$, количество слоев $n=135$ по оси x и $m=165$ по оси y , при этом было получено решение с требуемой точностью ε , количеством итерации 2749 и количеством машинного времени 6 мин 21,33 сек.

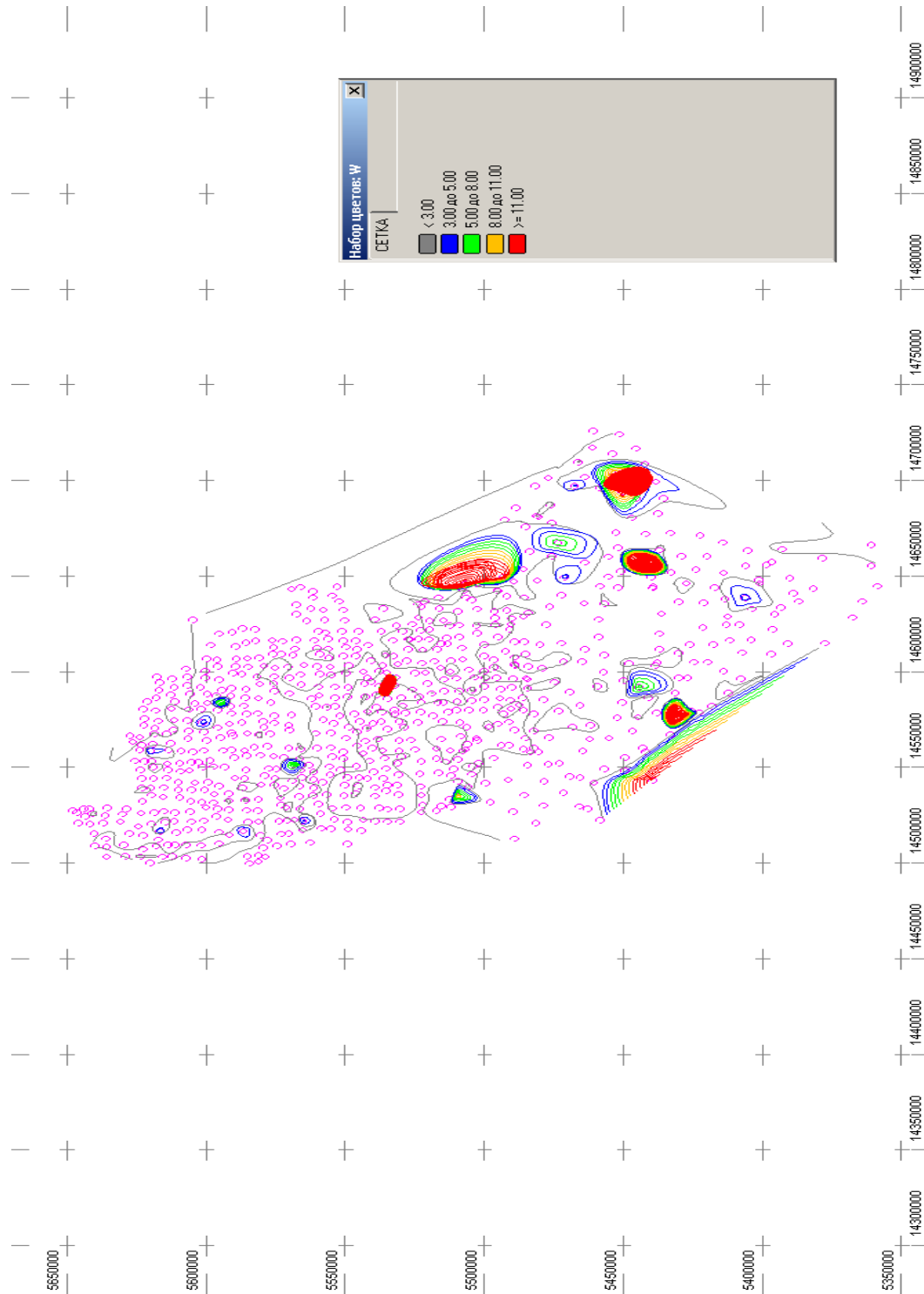


Рисунок 61 - Характер распределения аномалий W в пределах района экспедиционных работ 2012 года

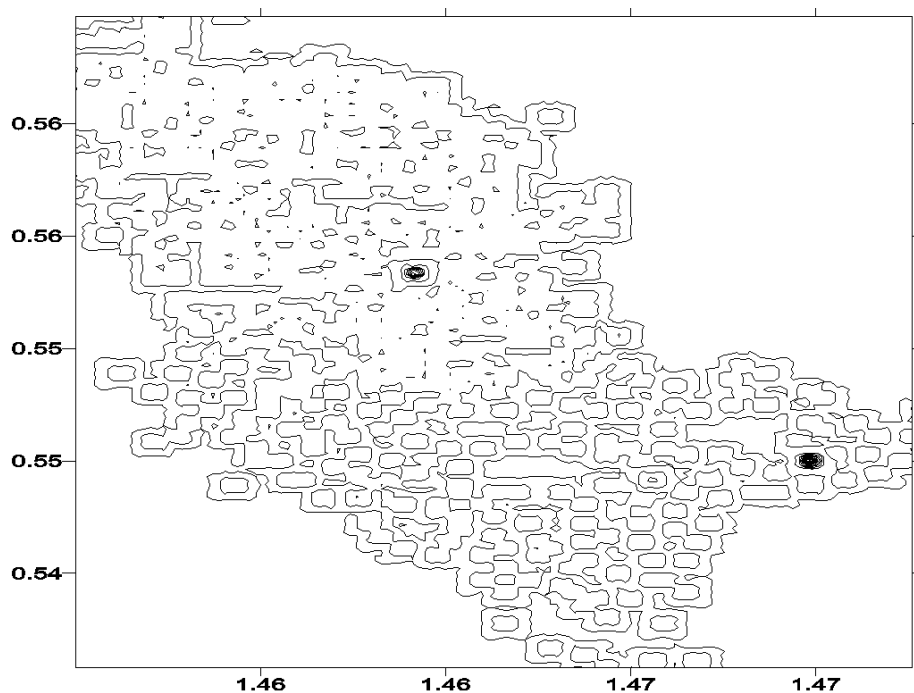


Рисунок 62 - Характер распределения аномалий W на дневной поверхности, полученный с помощью графического редактора Surfer

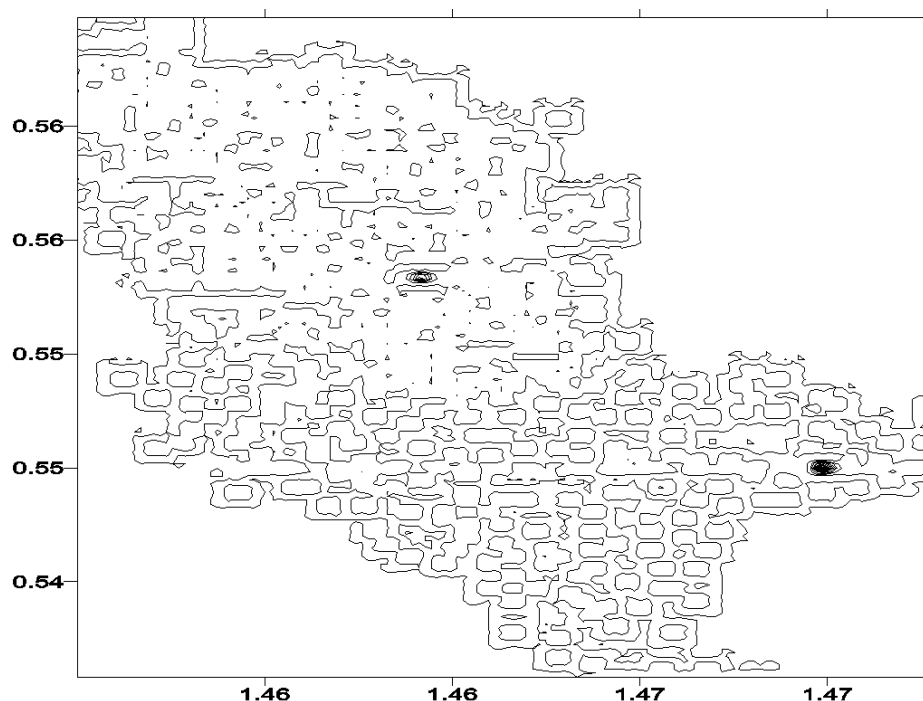


Рисунок 63 - Характер распределения аномалий W на глубине $h=500$ численно реализованный методом итерации Ландвебера с регуляризацией Лаврентьева, полученный с помощью графического редактора Surfer

Построенная математическая модель, алгоритм численного решения позволяет по данным участкам спрогнозировать поведение аномалий химических элементов на глубину 500 метров. Это позволит определить перспективы установленных аномальных площадей и выделить участки первой очереди для проведения геолога - разведочных работ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена разработке и исследованию численных методов для решения интегрального уравнения Гельфанда-Левитана.

В работе получены следующие результаты:

- теорема сходимости решения регуляризованной задачи к решению исходной некорректной коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения;

- разностным методом численно решена прямая задача с сосредоточенным источником для уравнения гиперболического типа, которая согласно результатам работ [13, с.22-64; 15, с.278-281] эквивалентна задаче Гурса;

- построена и исследована на устойчивость, численно решена разностная схема для прямой задачи с сосредоточенным источником гиперболического типа с заменой $\delta(x)$ - дельта функции Дирака, функцией, которая удовлетворяет некоторым ее свойствам;

- интегральное уравнение Гельфанда-Левитана первого рода с несимметричным ядром к решению, которого сводится решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения приведена к операторной форме $A\tilde{\omega} = f$, применением сопряженного оператора A^* получен симметричный интегральный оператор A^*A ;

- построена регуляризованное методом регуляризации М.М. Лаврентьева уравнение $\alpha\tilde{\omega} + A^*A\tilde{\omega} = A^*f_\gamma$, решение которого дает квазирешение уравнения $A\tilde{\omega} = f$;

- выбор эффективных параметров в методе регуляризации М.М.Лаврентьева;

- проведена дискретизация уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода;

- проведен численный эксперимент для решения дискретизированного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода методами сопряженных градиентов, итерации Ландвебера и методом квадратного корня;

- проведен сравнительный анализ предложенных методов численного решения дискретизированного уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода по таким параметрам как количество итерации, норма погрешности, количество машинного времени;

- разработаны алгоритмы и написаны программные коды для решения дискретизированного уравнения Гельфанда-Левитана первого и второго рода методами сопряженных градиентов, Ландвебера и квадратного корня;

- проведен численный эксперимент для решения дискретизированного двумерного интегрального уравнения Гельфанда-Левитана методами сопряженных градиентов, итерации Ландвебера и методом квадратного корня;

- проведен сравнительный анализ методов численного решения дискретизированного двумерного интегрального уравнения Гельфанда-

Левитана по таким параметрам как количество итерации, норма погрешности, количество машинного времени;

- разработаны алгоритмы и написаны программные коды для решения дискретизированного двумерного уравнения Гельфанда-Левитана методами сопряженных градиентов, Ландвебера и квадратного корня;

- разработана математическая модель на основании уравнения Гельфанда-Левитана для определения особенности изменения содержания химических элементов на глубине 500 метров в пределах оконтуренных геохимических аномалии;

Таким образом, поставленные в диссертационной работе задачи исследования полностью решены.

Результаты расчетов и проведенный сравнительный анализ использованных методов показывают, что метод сопряженных градиентов является наиболее оптимальным методом для поставленной задачи, так как метод сходится за меньшее количество итераций по сравнению с методом Ландвебера, требуется меньше машинного времени по сравнению с методом квадратного корня.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в работах автора [83-95].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Тихонов А.Н., Гончарски А.В. Некорректные задачи естествознания. – М: Изд-во Моск. ун-та, 1987.- 229 с.
- 2 Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А, Ланеев Е.Б. Регулярные методы и алгоритмы расчета обратных задач в моделях оптических структур. учеб. пособие. - М.:РУДН, 2008. - 155 с.
- 3 Тихонов А.Н. Математическая геофизика. - М.: ОИФЗ РАН, 1999.- 476 с.
- 4 Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН, сер. матем. - 1951. - Т.15.- С. 309-360.
- 5 Крейн М.Г. Решение обратной задачи Штурма-Лиувилля // Докл. АН СССР. - 1951. - Т. 76, №1. - С. 21-24.
- 6 Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля и их приложения. - Киев: Наукова думка, 1977. - 329 с.
- 7 Титчмарш Э.Т. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / пер. с англ. Б.Д. Лидского; под ред. Б.М. Левитана. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. - Т.1.- 278 с.
- 8 Титчмарш Э.Т. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка / пер. с англ. Б.Д. Лидского; под ред. Б.М. Левитана. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1961. - Т.2. - 554 с.
- 9 Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы). - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. - 671с.
- 10 Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма – Лиувилля. - М.: Наука, 1984.- 240 с.
- 11 Левитан Б.М., Саргсян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. - 432 с.
- 12 Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР. - 1954. - Т.94, № 6.- С. 767-770.
- 13 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. -263 с.
- 14 Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициента гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988.- 168 с.
- 15 Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
- 16 Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. учебное пособие. - НГУ, 1981. - 75 с.
- 17 Лаврентьев М.М. Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. -1959. - Т. 127, №1. - С. 31-33.

- 18 Парийский Б.С. Обратная задача для волнового уравнения с воздействием на глубине // В кн.: Некоторые прямые и обратные задачи сейсмологии. Вычисл. Сейсмология. - М.: Наука, 1968. - Вып.4. - С. 139-169.
- 19 Парийский Б.С. Экономичные методы численного решения уравнений в свертках и систем алгебраических уравнений с теплицевыми матрицами. - М.: ВЦ АН СССР, 1977.-75 с.
- 20 Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. - М.:Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. - Изд. 2-ое.-284 с.
- 21 Кабанихин С.И. О линейной регуляризации многомерных обратных задач для гиперболического уравнения // Докл. АН СССР. -1989. -Т. 309, №4.- С. 791-795.
- 22 Романов В.Г. О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка // Сиб. матем. журн. -2009. -Т. 50, №4. - С. 883-889.
- 23 Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной среды // Труды МИАН. -1971. -Т. 115. - С. 28-38.
- 24 Белишев М.И. Об одном подходе к многомерным обратным задачам для волнового уравнения // Докл. АН СССР. -1985.- Т.280, №4. - С. 807-810.
- 25 Белишев М.И., Благовещенский А.С. Многомерные аналоги уравнений типа Гельфанда-Левитана-Крейна в обратной задаче для волнового уравнения. Условно-корректные задачи математической физики и анализа. - Новосибирск: Наука, 1992.- С.50-63.
- 26 Кабанихин С.И., Баканов Г.Б. Дискретный аналог метода Гельфанда-Левитана в двумерной обратной задаче для гиперболического уравнения // Сибирский математический журнал.- 1999. - Т.40, №2. - С.307-324.
- 27 Атанбаев С.А. Об одном методе регуляризации некорректной задачи Коши для эволюционного типа // Математика и механика. -1970.-Т.1- С.34-37.
- 28 Атанбаев С.А., Кожобеков П.А. Об одном методе решения обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности // Вестник КазГУ. -1999.-Т.15.- С.56-59.
- 29 Темирбулатов С. И. Обратные задачи для эллиптических уравнений. - Алма-Ата: Изд-во КазГУ,1975. -72 с.
- 30 Отелбаев М.О. Оценка спектра оператора Штурма-Лиувилля. – Алматы: Гылым, 1990. – 191 с.
- 31 Отелбаев М.О., Рысбайулы Б. Приближенный метод решения нелинейных операторных уравнений: итерационный процесс, оценка скорости сходимости // Доклады НАН РК. -1999.- Т.5. - С. 20-25.
- 32 Елубаев С. Об одной обратной задаче для телеграфного уравнения. //Докл. АН СССР.-1969. -Т.189, №3. - С.461-463.
- 33 Романов В.Г., Бидайбеков Е.Ы. К теории обратных задач магнитно-теллурического зондирования //Докл. АН СССР.-1985.-Т.280,№4. - С.807-810.

- 34 Кальменов Т.Ш. Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Материалы международной конференции «Тихонов и современная математика» МГУ. - М., 2006. –Т.1.- С.42-55.
- 35 Кальменов Т.Ш., Исаков У.А. О сильной разрешимости задачи Коши для уравнения Лаплас. Неклассические уравнения математической физики. - 2007. - С. 158-171.
- 36 Баканов Г.Б. Методы решения конечно-разностных обратных задач теории распространения волн. - Кызылорда, 2011.
- 37 Исаков К.Т., Кабанихин С.И. Оптимизационный метод в двумерной обраной задаче для гиперболического уравнения // Вестник КарГУ.-1998.-Т.9, №1.-С.40-47.
- 38 Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсейтова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. – Алматы; Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач» благотворительный фонд обратных задач естествознания, -2006.- 432 с.
- 39 Нурсейтов Д.Б., Бектемесов М.А. Оценка скорости сильной сходимости метода итераций Ландвебера для решения начально-краевой задачи для уравнения Лапласа // Межд. конф. «Обратные и некорректные задачи математической физики». – Новосибирск, 2007. С. 30 - 36.
- 40 Kanguzhin V.E. Restoration of tape matrices with the help of the spectral data // J.Inv.Ill-Posed Problems -2010.-№18. - P. 389 - 400.
- 41 Нурсейтова А.Т., Тюлепбердинова Г.А. Сходимости метода итерации Ландвебера для решения задачи определения акустической жесткости // Вестник КазНПУ Серия «математика, механика, информатика». - 2008. - Т.21, №1. - С. 215-217.
- 42 Власов Е.А., Зарубин В.С., Г.Н. Кувыркин. Приближенные методы математической физики: учеб. для вузов под. ред. Зарубина В.С., Крищенко А.П.- М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. – 700 с.
- 43 Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.,1989. - 432с.
- 44 Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений. –Новосибирск: Наука,1980. – 179 с.
- 45 Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит.,1989. - 608 с.
- 46 Самарский А.А. Теория разностных схем. учебное пособие. - М.: Наука, 1977.- 656 с.
- 47 Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.- М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 636 с.
- 48 Араманович И.Г. и Левин В.И. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1964. - 286 с.
- 49 Лаврентьев М.М., Васильев В.Г. , Романов В.Г. Многомерные обратные задачи для дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во Наука, Сибирское отделение, 1969. - 73 с.

- 50 Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. - М.: Наука. гл. ред. физ-мат. лит., 1989. - 128 с.
- 51 Романов В.Г. Дифференциальные свойства фундаментального решения уравнения второго порядка гиперболического типа. Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. - Новосибирск: ВЦ СО РАН, 1979. - С.110-121.
- 52 Бухгейм А.Л. Введение в теорию обратных задач. – Наука; Сиб. отд-ние, 1988. - 184 с.
- 53 Городецкий В.В., Нагнибида Н.Н., Настасиев П.П. Методы решения задач по функциональному анализу. - Краснадар: Выща шк., 1990. – 479 с.
- 54 Кабанихин С.И. О регуляризации многомерных обратных задач для гиперболических уравнений // Докл. АН СССР. -1990. -Т. №40, №3. - С. 579-583.
- 55 Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. - М.:Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1990. - 232 с.
- 56 Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Линейные операторы и некорректные задачи. - М.: Наука, 1991. – 331 с.
- 57 Martin Hanke. Conjugate gradient type method for ill-posed problems. 1995.
- 58 Романов В.Г. О численном методе решения одной обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. матем. журн. - 1996. - Т. 37. - С. 633 - 655.
- 59 Карчевский А.Л. О поведении функционала невязки для одномерной гиперболической обратной задачи // Сиб. журн. вычисл. Математики. -1999.- Т.2, №2. - С.137-161.
- 60 Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. Direct methods of solving inverse hyperbolic problems. – Netherlands: VSP/BRILL, 2004. - 179 p.
- 61 Ильин В.П. Об итерационном методе Качмажа и его обобщениях // Сиб. журн. индустр. матем. - 2006.- Т.9, №3. - С. 39–49.
- 62 Кабанихин С.И., Искаков К.Т. Обратные и некорректные задачи для гиперболических уравнений. – Алматы: Казахский нац. педагог. ун-т им. Абая, 2007. – 330 с.
- 63 Мухамеджанов С.Т. Об одном приближенном методе решения задач неравновесной фильтрации // Вестник КазНПУ.-2007.-Т.2, №18. - С.180-186.
- 64 Юрко В.А. Введение в теорию обратных задач. - М.: Физматлит, 2007.- 384 с.
- 65 Карчевский А.Л. Корректная схема действий при численном решении обратной задачи оптимизационным методом // Сиб. журн. вычисл. матем., - 2008. – Т. 11, №2. - С. 139–149.
- 66 Бибердорф Э.А. Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры: учебное пособие. – Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2008. - 145 с.
- 67 Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах для гиперболических уравнений // Сиб. электрон. матем. изв. -2010.- Т.7.- С.4 -10.

68 Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения. - Саратов: Изд-во Саратовского педагогического института, 2011. – 499 с.

69 Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications. – Germany: De Gruyter, 2011. - 459 p.

70 Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Шишленин М.А. Методы решения некорректных задач линейной алгебры. - Алматы: КазНПУ имени Абая, 2011. – 131 с.

71 Шишленин М.А., Новиков Н.С. Сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна // Труды второй межд. молод. школы-конференции «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». Сибирские электронные математические известия. -2011. - С. 379-393.

72 Kabanikhin S.I., Bektemesov V.A., Nurseitov D.B., Krivorotko O.I., Alimova A.N. An optimization method in the Diriclet problem for the wave equation // Journal of Inverse and Ill-posed problems. -2012. -Vol.20, № 2. - P.193-211.

73 Геология СССР. Т. 41. Восточный Казахстан / под ред. В.П. Нехорошева, Ш. Е. Есенова. - М.: Недра, 1967. - Ч. 1. – 467 с.; 1974. - Ч.2. – 396 с.

74 Щерба Г.Н., Дьячков Б.А., Нахтигаль Г.П. Металлогения Рудного Алтая и Калбы. - Алма-Ата: Наука, 1984. – 240 с.

75 Щерба Г. Н., Беспаяев Х. А., Дьячков Б. А., Мыслик А.М. , Ганженко Г.Д., Сапаргалиев Е.М., Гавриленко О. Д. и др. Большой Алтай (геология и металлогения) в 3 книгах. Алматы: Ғылым, 1998 - 2002.

76 Дьячков Б.А. Интрузивный магматизм и металлогения Восточной Калбы.– М., «Недра», 1972. - 211 с.

77 Гавриленко О.Д., Демченко А.И., Соляник В.П., Козловский М.К. Геохимическое картирование как основа экологического районирования урбанизированных территорий (на примере Восточного Казахстана). // Тезисы докладов междунар. Симпозиума по прикладной геохимии Стран СНГ. - М., 1997.

78 Махонина С.А., Олейник Ю.Ф., Гавриленко О. Д. Геохимическое картирование при поисках и разведке рудных месторождений в Лениногорском рудном районе // Современные информационные технологии в геологоразведочной и горнодобывающей областях: Междунар. науч. конф., - Усть-Каменогорск, 2006. - С.53-55.

79 Ганженко Г.Д., Гавриленко О.Д. и др. Геолого-экологическая оценка техногенных ресурсов редко метального производства Восточного Казахстана // Отчет о научно-исследовательской работе. – Усть-Каменогорск, 2001.

80 Войткевич Г.В., Кокин А.В., Мирошников А.Е. и др. Справочник по геохимии / - М.: Недра, 1990. - 480 с.

81 Аристов В.В. Методика геохимических поисков твердых полезных ископаемых. - М.: Недра, 1984. - 200 с.

82 Аникиев Д.В., Каштан Б.М., Благовещенский А.С., Мулдер В.А. Точный динамический метод решения обратной задачи сейсмоки на основе

интегральных уравнений Гельфанда-Левитана // Вопросы геофизики. - 2011. – Вып. 44. - С. 49-81.

83 Temirbekova L.N., Dairbaeva G. Method of optimization for solving the Gelfand - Levitan equation of the first kind // The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) .- Baku, Azerbaijan, 2011.-534 p.

84 Темирбекова Л.Н. Численный метод решения обратной задачи для гиперболических уравнений // III межд. молод. науч. шк.-конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». - Новосибирск, Академгородок, 2011. - С. 64-66.

85 Temirbekova L.N., Dairbaeva G. Optimization method of solving of the Gel'fand-Levitan equation // VI International conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation". – Antalya, Turkey, 2012. - P. 52-53.

86 Темирбекова Л.Н. Численный аналог метода Гельфанда-Левитана на конечном интервале // Межд.науч.конф. «Функциональный анализ и его приложения». - Астана, 2012. - С. 286-287.

87 Темирбекова Л.Н. Численное решение коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений // Вестник ВКГТУ им.Д. Серикбаева научный журнал. - 2011. -№4(54). - С. 104-109.

88 Даирбаева Г., Темирбекова Л.Н. Численное решение уравнения Гельфанда-Левитана на основе метода сингулярного разложения и оптимизации // Известия НАН РК, серия физико-математическая. - 2012. - №1(281) - С. 3-9.

89 Aliev F.A., Ismailov N.A., Temirbekova L.N. Methods of Solving the Choice of Extremal Modes for the Gas-Lift Process // Applied and Computational mathematics. An international Journal. - 2012.-Vol. 11, №3. - P. 348-357.

90 Даирбаева Г., Темирбекова Л.Н. Численный аналог метода Гельфанда-Левитана на конечном интервале // Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика, - 2013. - №1(76). - С. 60-71.

91 Темирбекова Л.Н. Двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана // Вестник НИА РК. -2013. -№2(48). - С.50-57.

92 Темирбекова Л.Н. Выявления аномалии естественных ассоциаций химических элементов проявленных в Рудноалтайском и Калбинском регионах // КазНПУ им. Абая. Вестник серия «Физ.-мат. наук». - 2013. -№ 1(41). - С.147-152.

93 Temirbekova L.N., Dairbaeva G. Gradient and Direct Method of solving Gelfand-Levitan Integral // Applied and Computational mathematics. An international Journal.-2013. -V. 12, №2. - P. 234-246.

94 Темирбекова Л.Н. Численное решение двумерного уравнения Гельфанда-Левитана // Межд. конф. «ВИТ-2013» . - Усть-Каменогорск, 2013, сентябрь 18-22. - 220-227с.

95 Темирбекова Л.Н. Выделение аномалий химических элементов проявленных в Рудноалтайском и Калбинском регионах // Вестник ЕНУ им Гумилева, -2013.- №4(95). - С.117-123.