Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 519.21 На правах рукописи

ШАЙМЕРДЕНОВА АЛТЫНАЙ КАСЫМХАНОВНА

Точные асимптотические результаты и явные формулы для некоторых специальных ветвящихся процессов

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
С.Сагитов PhD, профессор Чалмерского технологического университета и университета Гетеборга (Швеция)

Б.Е.Кангужин доктор физико-математических наук, профессор

Республика Казахстан
Алматы, 2013

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

Z_n – число потомков в n – ом поколении
Z_{in} – число частиц типа i в момент времени n
$\mathbb{E}X$ – математическое ожидание случайной величины X
M – среднее число частиц
$\mathbf{M}$ – матрица средних чисел потомков
$\mathbf{H}$ – матрица переходных вероятностей
$\mathbf{g}$ – вероятностное распределение типов
$\mathbb{Z}_+^\infty$ – множество векторов с неотрицательными целочисленными компонентами
$\mathbf{I} = (1_{\{i=j\}})_{i\geq 1,\ j\geq 1}$ – единичная матрица
α – параметр Мальтуса
L – продолжительность жизни индивидуума
ρ – собственное значение Перрона-Фробениуса
R – радиус сходимости
$\mathbb{P}_m(\cdot)$ – условная вероятность
$\mathbb{E}_m(\cdot)$ – условное математическое ожидание
β – средний возраст матери при деторождении
$\mathfrak{L}$ – медленно меняющаяся функция
λ – интенсивность рождения
μ – интенсивность гибели
θ – интенсивность конкуренции
$X_0(\cdot)$ – линейный процесс рождения и гибели
$X_\theta(\cdot)$ – процесс рождения и гибели с взаимодействием
M_θ – средняя продолжительность экскурсии
q – вероятность вырождения
$\mathbf{q}$ – вектор вероятности вырождения
T – случайный момент времени
γ – константа Эйлера
T_i – среднее время достижения состояния $i-1$ начиная с состояния i
Q_i – вероятность достижения состояния $i+1$ до 0, начиная с состояния i
$\mathfrak{Q}_p$ – вероятность вырождения в случайный момент времени
КМЯ-процесс – процесс Крампа-Моуда-Ягерса
ДЛ$(\mathbf{h}_i, \mathbf{g}, m)$ – дробно-линейное распределение с соответствующими параметрами

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Теория ветвящихся процессов возникла как теория, пытавшаяся объяснить причины вырождения знаменитых фамилий в Великобритании. Исчезновение фамилий известных людей привлекло много внимания в середине 19-го века. В 1874 году появилась работа Ватсона и Гальтона "Задачи о вырождении фамилий". Потом математическая модель Гальтона и Ватсона (в дальнейшем будем употреблять термин "процесс Гальтона-Ватсона") в течение многих лет не привлекала к себе внимания. Последующие исследования принадлежат Фишеру (1922г., 1930г.). Эту модель Холдейн использовал в генетике (1927г.). Впервые полное и корректное определение вероятности вырождения для процесса Гальтона-Ватсона было дано Стеффенсеном (1930г., 1932г.). В 1938 году А.Н.Колмогоров определил асимптотическое поведение вероятности того, что фамилия будет продолжать существовать после большого числа поколений. Лотка (1931г., 1939г.), Семенов (1934г.), Шокли и Пирс (1938г.) использовали идею Гальтона и Ватсона в теории химических (неядерных) цепных реакций, в задачах изучения размножения электронов в электронном детекторном устройстве.

Теория ветвящихся процессов в настоящее время переживает этап бурного развития, мотивированного, в первую очередь, приложениями к теории популяционной генетики [1-3]. Она стала весьма разветвленной областью теории вероятностей и мощным инструментом исследования в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, теория просачивания, а также во многих разделах других наук, в частности, физика, химия и биология. Этим определяется актуальность темы исследования.

В диссертации рассматриваются процессы рождения и гибели с взаимодействием. Эта модель интересна тем, что между частицами имеется конкуренция. Важно знать среднее время вырождения такого процесса, т.е. знать как долго будет длиться процесс. Рассмотрены все три случая: надкритический, критический и докритический.

Также рассматривается процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения. Доказывается разложимость надкритических дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона на подтипы, определяются их контурные процессы. Также процессы такого вида рассматриваются в неоднородной среде, находятся вероятности невырождения. Вычисляется вероятность невырождения в случайный момент наблюдения однотипного дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона.

Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами. Эта работа в основном продолжает тематику работы Серика Сагитова [4], также используются идеи Андерсона и Дьехиче [5] для модели эпидемий.

Объект исследования. Объектами исследования являются процессы рождения и гибели, их среднее время вырождения, а также процессы Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения и их вероятности невырождения.

Цель и задачи работы. Целью исследования является получение точных асимптотических результатов и явных формул для некоторых специальных ветвящихся процессов.

Исследовательские задачи, поставленные в диссертации:

– получить предельные теоремы для среднего времени вырождения процесса рождения и гибели с взаимодействием в надкритическом, критическом и докритическом случаях, когда интенсивность взаимодействия между размножающимися частицами стремится к нулю;

–установить сходимость по распределению времени вырождения процесса с взаимодействием;

–доказать сходимость почти наверное времени вырождения процесса с взаимодействием ко времени вырождения линейного процесса рождения и гибели;

– через симуляции проверить асимптотические формулы для среднего времени вырождения процесса с взаимодействием;

– получить разложение надкритического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона на подтипы;

–найти простые явные формулы для основных характеристик дуальных ветвящихся процессов и преобразования Харриса-Севастьянова;

–определить контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц;

– получить предельные теоремы для однотипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент наблюдения;

– найти вероятности невырождения многотипных дробно-линейных ветвящихся процессов в неоднородной среде.

Научная новизна исследования.

Одной из основных популяционных моделей с непрерывным временем является линейный процесс рождения и гибели $(X_0(t), t\ge 0)$ с фиксированными интенсивностями рождения и гибели λ и μ на одного индивидуума. Это простой пример ветвящегося процесса, описывающего популяцию независимо размножающихся индивидуумов и имеющие три разных режима размножения: надкритического ($\lambda>\mu$), критического ($\lambda=\mu$) и докритического ($\lambda<\mu$).

Отсутствие конкуренции среди индивидуумов – главная слабость линейной популяционной модели рождения и гибели. Естественная модификация этой простой модели вводит дополнительную смерть из-за конкуренции. Мы рассматриваем индексированный процесс рождения и гибели $(X_\theta(t), t\ge 0)$, принимающий неотрицательные целые значения $i\in\{0,1,2,...\}$ и имеющий интенсивности прыжков, однородные по времени

$$\begin{cases}\mathbb{P}_i(X_\theta(t)=i+1)=\lambda_i t+o(t), & \text{где } \lambda_i=i\lambda,\\ \mathbb{P}_i(X_\theta(t)=i-1)=\mu_i t+o(t), & \text{где } \mu_i=i\mu+i(i-1)\theta,\\ \mathbb{P}_i(X_\theta(t)=i)=1-(\lambda_i+\mu_i)t+o(t), & \end{cases}$$

при $t \to 0$. Ключевые параметры модели (λ, μ, θ) – интенсивности рождения, гибели и конкуренции, предоставляющие описание демографической динамики до тех пор, пока процесс не достигнет поглощающего состояния $i = 0$.

Процесс Гальтона-Ватсона является базовой моделью для стохастической динамики численности населения, образованной независимо воспроизводящимися частицами.

Одна из ключевых характеристик процесса Гальтона-Ватсона – среднее число потомков $M = f'(1)$. В докритическом ($M < 1$) и критическом ($M = 1$) случаях процесс вырождается с вероятностью $q = 1$, в то время как в надкритическом случае ($M > 1$) мы имеем $q < 1$. Очевидно, $q = 0$, тогда и только тогда, когда частица не производит потомства.

В надкритическом случае число потомков частиц прародителей либо конечно с вероятностью q, либо бесконечно с вероятностью $1 - q$. Признавая, что то же самое справедливо для любой частицы, появляющейся в процессах Гальтона-Ватсона, можно различать *скелето-образующие частицы*, имеющие бесконечную линию потомков, и *обреченные частицы*, имеющие конечную линию потомков. Для разложенного таким образом процесса Гальтона-Ватсона определены контурные процессы.

Основные положения, выносимые на защиту. Основные полученные результаты диссертации следующие:

– получены предельные теоремы для среднего времени вырождения процесса рождения и гибели с взаимодействием в надкритическом, критическом и докритическом случаях, когда интенсивность взаимодействия между размножающимися частицами стремится к нулю;

–получена сходимость по распределению времени вырождения процесса с взаимодействием для надкритического и докритического случаев;

–доказана сходимость почти наверное времени вырождения процесса с взаимодействием ко времени вырождения линейного процесса рождения и гибели;

– через симуляции проверены асимптотические формулы для среднего времени вырождения процесса с взаимодействием;

–получено разложение надкритического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона на подтипы (скелето-образующие и обреченные частицы);

– найдены простые явные формулы для основных характеристик дуальных ветвящихся процессов и преобразования Харриса-Севастьянова;

–определены контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц;

– получены предельные теоремы для однотипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент наблюдения;

– найдены вероятности невырождения многотипных дробно-линейных ветвящихся процессов в неоднородной среде.

Публикации и апробация. Опубликованных работ по теме диссертации - 12 [6-17]: 5 в материалах международных конференций и 7 статей. В том числе 1 статья в международном научном издании, имеющем по данным информационной базы компании Томсон Рейтер (ISI Web of Knowledge, Thomson Reuters) ненулевой импакт-фактор: Lithuanian Mathematical Journal [6] (издательство Springer) и 1 статья в международном рейтинговом журнале Applied Mathematics [7], 4 статьи в научных изданиях, рекомендуемых Комитетом по контролю в сфере образования и науки.

Основные результаты диссертации были доложены на следующих международных конференциях: Conference of applied mathematics (2012, Каунас, Литва); Международная научная конференция студентов и молодых ученых "Мир науки" (2012, Алматы); XVth Summer international conference on probability and statistics (2012, Поморие, Болгария); I международная научно-практическая конференция (2012, Бийск, Россия); Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов - 2012" (2012, Астана).

Также результаты докладывались

на статистическом семинаре Чалмерского университета в Гетеборге "Seminarier Matematiska vetenskaper" (Швеция, 2011, 2012),

на семинаре при кафедре фундаментальной математики "Спектральная теория линейных операторов и ее приложения" (рук. академик Т.Ш.Кальменов, член корр. М.А.Садыбеков и проф. Б.Е.Кангужин, Алматы, 2012, 2013),

на семинаре "Современные научные проблемы математики, механики и информационных технологий" (рук. академик Б.Т.Жумагулов, академик Данаев Н.Т., Алматы, 2013).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех разделов и списка литературы. Работа изложена на 92 страницах, включая 8 рисунков и список литературы из 47 наименований.

Основное содержание работы. Существуют детерминистические модели роста популяции частиц. Такие модели описываются дифференциальными уравнениями. Нахождение числа частиц в определенный момент времени сводится к решению дифференциальных уравнений [11-12; 14]. Особая черта детерминистического решения состоит в следующем: каждый раз, когда начальное значение одно и тоже, размер популяции в данный момент времени будет одним и тем же. В данной работе рассматриваются стохастические популяционные модели.

Первый раздел диссертации посвящен основным понятиям и необходимым материалам, в особенности дробно-линейным процессам Гальтона-Ватсона [4].

Во втором разделе рассматривается процесс рождения и гибели с интенсивностями рождения $i\lambda$ и интенсивностями гибели $i\mu + i(i-1)\theta$, где i – текущее состояние процесса. Положительная интенсивность конкуренции θ предполагается малой. В надкритическом случае, когда $\lambda > \mu$, этот процесс может быть рассмотрен как демографическая модель для популяции с высокой конкуренцией вокруг $\frac{\lambda - \mu}{\theta}$.

Мы рассматриваем индексированный процесс рождения и гибели $(X_\theta(t), t \geq 0)$. Ключевые параметры модели – (λ, μ, θ) интенсивности рождения, гибели и конкуренции, предоставляющие следующее описание демографической динамики до тех пор, пока процесс не достигнет поглощающего состояния $i = 0$.

Учитывая нынешнюю численность населения $i \geq 1$, следующее изменение в размере популяции обусловлено либо рождением, либо гибелью частиц. Предполагается, что сосуществующие частицы дают потомство независимо друг от друга с интенсивностью λ на одну частицу, так что взаимодействие между частицами не влияет на события рождения. Гибель частицы моделируется через два параметра: параметр μ дает смертность "по естественным причинам" на одну частицу, а параметр θ, как правило, считается малым количественным показателем смертности из-за давления конкуренции (множитель $i(i-1)$, появляющийся перед θ представляет собой количество пар конкурирующих частиц). Полагая $\theta = 0$, возвращаемся к линейному процессу рождения и гибели $X_0(\cdot)$.

Были выведены некоторые полезные свойства однородных по времени процессов рождения и гибели. Сравнивая квадратную форму интенсивности гибели с линейной интенсивностью рождения гарантируем, что наш процесс рождения и гибели с конкуренцией вырождается с вероятностью единица (в отличие от линейных надкритических процессов рождения и гибели, которые никогда не вымирают с положительной вероятностью). Одна из самых интересных характеристик процесса $X_\theta(\cdot)$ – случайное время вырождения τ_θ.

Если θ маленькое, то слагаемое $i(i-1)\theta$ намного меньше, чем $i\mu$ при $i \ll \theta^{-1}$, так что процесс $X_\theta(\cdot)$ при относительно низких уровнях может быть аппроксимирован линейным процессом рождения и гибели $X_0(\cdot)$ с параметрами (λ, μ) и тем же начальным состоянием $X_0(0) = m$. Это может быть реализовано использованием конструкции сравнения (a coupling construction), представленной в параграфе 2.2.

Параграф 2.3 представляет основные асимптотические результаты для математического ожидания и распределения времени вырождения τ_θ при $\theta \to 0$. Остальные параграфы второго раздела содержат доказательства полученных результатов. Результаты второго раздела опубликованы в работе [6].

В параграфе 3.2 третьего раздела мы подводим результаты касающиеся явного разложения надкритических однотипных процессов Гальтона-Ватсона. Параграф 3.3 представляет процессы Гальтона-Ватсона со счетным числом типов. Основные результаты разложимости надкритических дробно-линейных ветвящихся процессов собраны в параграфе 3.4 и их выводы содержатся в параграфе 3.5. Надкритический ветвящийся процесс с условием вырождения – снова ветвящийся процесс, был недавно получен в очень общей ситуации [18]. В общем случае преобразованные законы размножения характеризуются в неявном виде, и их трудно анализировать. Первые пять параграфов третьего раздела представляют случай, когда свойства скелето-образующих и обреченных частиц очень прозрачны. Далее даются контурные процессы для обреченных и скелето-образующих частиц. Продолжает этот раздел параграф под названием “Предельные теоремы для однотипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент времени”. В последнем параграфе этого раздела рассматриваются многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде. Результаты данного раздела опубликованы в работах [7-10].

В диссертации использован программный пакет MATLAB 2009 для симулирования процесса рождения и гибели с взаимодействием, также программа Incscape для получения разных рисунков.

Автор выражает особую благодарность научному руководителю профессору С.Сагитову за быстрое введение в тематику ветвящихся процессов, за постановку интересных задач и за многочисленные полезные советы, способствовавшие их решению. Также выражает благодарность научному консультанту профессору Б.Е.Кангужину за всестороннюю поддержку, профессору В.А.Ватутину (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия) за интерес к работе, отделу Математической статистики университета Чалмерса (г.Гетеборг, Швеция), в лице профессора Улле Хэггстрёма, за оказанное гостеприимство.