

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

УДК 519.21

На правах рукописи

**ШАЙМЕРДЕНОВА АЛТЫНАЙ КАСЫМХАНОВНА**

**Точные асимптотические результаты и явные формулы для некоторых  
специальных ветвящихся процессов**

6D060100 - Математика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора философии (PhD)

Научные консультанты  
С.Сагитов PhD, профессор Чалмерского  
технологического университета и  
университета Гетеборга (Швеция)

Б.Е.Кангужин доктор физико-  
математических наук, профессор

Республика Казахстан  
Алматы, 2013

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ.....</b>	<b>3</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕРИАЛЫ.....</b>	<b>10</b>
1.1 Дробно-линейные процессы Гальтона-Ватсона.....	10
1.2 Процессы Крампа-Моуда-Ягерса.....	15
1.3 Контурные процессы.....	18
1.4 Классификация ветвящихся процессов со счетным числом типов.....	21
1.5 Некоторые факты из теории асимптотических методов.....	25
<b>2 ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ СО СЛАБОЙ КОНКУРЕНЦИЕЙ.....</b>	<b>28</b>
2.1 Общие свойства однородных по времени процессов рождения и гибели.....	31
2.2 Связь с линейным процессом рождения и гибели.....	37
2.3 Основные результаты для процесса рождения и гибели с взаимодействием.....	39
2.4 Доказательство для надкритического случая.....	43
2.5 Доказательство Теоремы 2 (ii).....	50
2.6 Доказательство Теоремы 2 (iii).....	53
<b>3 ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА- ВАТСОНА.....</b>	<b>56</b>
3.1 Разложение однотипного надкритического процесса Гальтона-Ватсона.....	58
3.2 Явные формулы для однотипного дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона.....	61
3.3 Процессы Гальтона-Ватсона со счетным числом типов частиц.....	63
3.4 Явные формулы для разложения надкритических дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона со счетным числом типов.....	65
3.5 Выводы явных формул, доказательство Теоремы 3.....	68
3.6 Контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц.....	71
3.7 Предельные теоремы для ветвящегося процесса в случайный момент времени.....	72
3.8 Многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде.....	79
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>89</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....</b>	<b>90</b>

## ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

- $Z_n$  –число потомков в  $n$  –ом поколении  
 $Z_{in}$  –число частиц типа  $i$  в момент времени  $n$   
 $\mathbb{E} X$  –математическое ожидание случайной величины  $X$   
 $M$  –среднее число частиц  
 $\mathbf{M}$  –матрица средних чисел потомков  
 $\mathbf{H}$  –матрица переходных вероятностей  
 $\mathbf{g}$  –вероятностное распределение типов  
 $\mathbb{Z}_+^\infty$  –множество векторов с неотрицательными целочисленными компонентами  
 $\mathbf{I} = (1_{\{i=j\}})_{i \geq 1, j \geq 1}$  –единичная матрица  
 $\alpha$  –параметр Мальтуса  
 $L$  –продолжительность жизни индивидуума  
 $\rho$  –собственное значение Перрона-Фробениуса  
 $R$  –радиус сходимости  
 $\mathbb{P}_m(\cdot)$  –условная вероятность  
 $\mathbb{E}_m(\cdot)$  –условное математическое ожидание  
 $\beta$  –средний возраст матери при деторождении  
 $\mathfrak{L}$  –медленно меняющаяся функция  
 $\lambda$  –интенсивность рождения  
 $\mu$  –интенсивность гибели  
 $\theta$  –интенсивность конкуренции  
 $X_0(\cdot)$  –линейный процесс рождения и гибели  
 $X_\theta(\cdot)$  –процесс рождения и гибели с взаимодействием  
 $M_\theta$  –средняя продолжительность экскурсии  
 $q$  –вероятность вырождения  
 $\mathbf{q}$  –вектор вероятности вырождения  
 $T$  –случайный момент времени  
 $\gamma$  –константа Эйлера  
 $T_i$  –среднее время достижения состояния  $i - 1$  начиная с состояния  $i$   
 $Q_i$  –вероятность достижения состояния  $i + 1$  до 0, начиная с состояния  $i$   
 $\mathfrak{Q}_p$  –вероятность вырождения в случайный момент времени  
КМЯ-процесс –процесс Крампа-Моуда-Ягерса  
ДЛ( $\mathbf{h}_i, \mathbf{g}, m$ ) –дробно-линейное распределение с соответствующими параметрами

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Теория ветвящихся процессов возникла как теория, пытавшаяся объяснить причины вырождения знаменитых фамилий в Великобритании. Исчезновение фамилий известных людей привлекло много внимания в середине 19-го века. В 1874 году появилась работа Ватсона и Гальтона "Задачи о вырождении фамилий". Потом математическая модель Гальтона и Ватсона (в дальнейшем будем употреблять термин "процесс Гальтона-Ватсона") в течение многих лет не привлекала к себе внимания. Последующие исследования принадлежат Фишеру (1922г., 1930г.). Эту модель Холдейн использовал в генетике (1927г.). Впервые полное и корректное определение вероятности вырождения для процесса Гальтона-Ватсона было дано Стеффенсеном (1930г., 1932г.). В 1938 году А.Н.Колмогоров определил асимптотическое поведение вероятности того, что фамилия будет продолжать существовать после большого числа поколений. Лотка (1931г., 1939г.), Семенов (1934г.), Шокли и Пирс (1938г.) использовали идею Гальтона и Ватсона в теории химических (неядерных) цепных реакций, в задачах изучения размножения электронов в электронном детекторном устройстве.

Теория ветвящихся процессов в настоящее время переживает этап бурного развития, мотивированного, в первую очередь, приложениями к теории популяционной генетики [1-3]. Она стала весьма разветвленной областью теории вероятностей и мощным инструментом исследования в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, теория просачивания, а также во многих разделах других наук, в частности, физика, химия и биология. Этим определяется актуальность темы исследования.

В диссертации рассматриваются процессы рождения и гибели с взаимодействием. Эта модель интересна тем, что между частицами имеется конкуренция. Важно знать среднее время вырождения такого процесса, т.е. знать как долго будет длиться процесс. Рассмотрены все три случая: надкритический, критический и докритический.

Также рассматривается процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения. Доказывается разложимость надкритических дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона на подтипы, определяются их контурные процессы. Также процессы такого вида рассматриваются в неоднородной среде, находятся вероятности невырождения. Вычисляется вероятность невырождения в случайный момент наблюдения однотипного дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона.

**Связь данной работы с другими научно-исследовательскими работами.** Эта работа в основном продолжает тематику работы Серика Сагитова [4], также используются идеи Андерсона и Дъехиче [5] для модели эпидемий.

**Объект исследования.** Объектами исследования являются процессы рождения и гибели, их среднее время вырождения, а также процессы Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения и их вероятности

невыврождения.

**Цель и задачи работы.** Целью исследования является получение точных асимптотических результатов и явных формул для некоторых специальных ветвящихся процессов.

Исследовательские задачи, поставленные в диссертации:

– получить предельные теоремы для среднего времени вырождения процесса рождения и гибели с взаимодействием в надкритическом, критическом и докритическом случаях, когда интенсивность взаимодействия между размножающимися частицами стремится к нулю;

– установить сходимость по распределению времени вырождения процесса с взаимодействием;

– доказать сходимость почти навсего времени вырождения процесса с взаимодействием ко времени вырождения линейного процесса рождения и гибели;

– через симуляции проверить асимптотические формулы для среднего времени вырождения процесса с взаимодействием;

– получить разложение надкритического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона на подтипы;

– найти простые явные формулы для основных характеристик дуальных ветвящихся процессов и преобразования Харриса-Севастьянова;

– определить контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц;

– получить предельные теоремы для одностипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент наблюдения;

– найти вероятности невырождения многотипных дробно-линейных ветвящихся процессов в неоднородной среде.

### **Научная новизна исследования.**

Одной из основных популяционных моделей с непрерывным временем является линейный процесс рождения и гибели  $(X_0(t), t \geq 0)$  с фиксированными интенсивностями рождения и гибели  $\lambda$  и  $\mu$  на одного индивидуума. Это простой пример ветвящегося процесса, описывающего популяцию независимо размножающихся индивидуумов и имеющие три разных режима размножения: надкритического ( $\lambda > \mu$ ), критического ( $\lambda = \mu$ ) и докритического ( $\lambda < \mu$ ).

Отсутствие конкуренции среди индивидуумов – главная слабость линейной популяционной модели рождения и гибели. Естественная модификация этой простой модели вводит дополнительную смерть из-за конкуренции. Мы рассматриваем индексированный процесс рождения и гибели  $(X_\theta(t), t \geq 0)$ , принимающий неотрицательные целые значения  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$  и имеющий интенсивности прыжков, однородные по времени

$$\begin{cases} \mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i + 1) = \lambda_i t + o(t), & \text{где } \lambda_i = i\lambda, \\ \mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i - 1) = \mu_i t + o(t), & \text{где } \mu_i = i\mu + i(i - 1)\theta, \\ \mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), \end{cases}$$

при  $t \rightarrow 0$ . Ключевые параметры модели  $(\lambda, \mu, \theta)$  – интенсивности рождения, гибели и конкуренции, предоставляющие описание демографической динамики до тех пор, пока процесс не достигнет поглощающего состояния  $i = 0$ .

Процесс Гальтона-Ватсона является базовой моделью для стохастической динамики численности населения, образованной независимо воспроизводящимися частицами.

Одна из ключевых характеристик процесса Гальтона-Ватсона – среднее число потомков  $M = f'(1)$ . В докритическом ( $M < 1$ ) и критическом ( $M = 1$ ) случаях процесс вырождается с вероятностью  $q = 1$ , в то время как в надкритическом случае ( $M > 1$ ) мы имеем  $q < 1$ . Очевидно,  $q = 0$ , тогда и только тогда, когда частица не производит потомства.

В надкритическом случае число потомков частиц прародителей либо конечно с вероятностью  $q$ , либо бесконечно с вероятностью  $1 - q$ . Признавая, что то же самое справедливо для любой частицы, появляющейся в процессах Гальтона-Ватсона, можно различать *скелето-образующие частицы*, имеющие бесконечную линию потомков, и *обреченные частицы*, имеющие конечную линию потомков. Для разложенного таким образом процесса Гальтона-Ватсона определены контурные процессы.

**Основные положения, выносимые на защиту.** Основные полученные результаты диссертации следующие:

- получены предельные теоремы для среднего времени вырождения процесса рождения и гибели с взаимодействием в надкритическом, критическом и докритическом случаях, когда интенсивность взаимодействия между размножающимися частицами стремится к нулю;

- получена сходимость по распределению времени вырождения процесса с взаимодействием для надкритического и докритического случаев;

- доказана сходимость почти наверное времени вырождения процесса с взаимодействием ко времени вырождения линейного процесса рождения и гибели;

- через симуляции проверены асимптотические формулы для среднего времени вырождения процесса с взаимодействием;

- получено разложение надкритического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона на подтипы (скелето-образующие и обреченные частицы);

- найдены простые явные формулы для основных характеристик дуальных ветвящихся процессов и преобразования Харриса-Севастьянова;

- определены контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц;

- получены предельные теоремы для однопотомочного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент наблюдения;

- найдены вероятности невырождения многотипных дробно-линейных ветвящихся процессов в неоднородной среде.

**Публикации и апробация.** Опубликованных работ по теме диссертации - 12 [6-17]: 5 в материалах международных конференций и 7 статей. В том числе 1 статья в международном научном издании, имеющем по данным информационной базы компании Томсон Рейтер (ISI Web of Knowledge, Thomson Reuters) ненулевой импакт-фактор: Lithuanian Mathematical Journal [6] (издательство Springer) и 1 статья в международном рейтинговом журнале Applied Mathematics [7], 4 статьи в научных изданиях, рекомендуемых Комитетом по контролю в сфере образования и науки.

Основные результаты диссертации были доложены на следующих международных конференциях: Conference of applied mathematics (2012, Каунас, Литва); Международная научная конференция студентов и молодых ученых "Мир науки" (2012, Алматы); XVth Summer international conference on probability and statistics (2012, Поморие, Болгария); I международная научно-практическая конференция (2012, Бийск, Россия); Международная научная конференция студентов, магистрантов и молодых ученых "Ломоносов - 2012" (2012, Астана).

Также результаты докладывались

на статистическом семинаре Чалмерского университета в Гетеборге "Seminarier Matematiska vetenskapen" (Швеция, 2011, 2012),

на семинаре при кафедре фундаментальной математики "Спектральная теория линейных операторов и ее приложения" (рук. академик Т.Ш.Кальменов, член корр. М.А.Садыбеков и проф. Б.Е.Кангужин, Алматы, 2012, 2013),

на семинаре "Современные научные проблемы математики, механики и информационных технологий" (рук. академик Б.Т.Жумагулов, академик Данаев Н.Т., Алматы, 2013).

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех разделов и списка литературы. Работа изложена на 92 страницах, включая 8 рисунков и список литературы из 47 наименований.

**Основное содержание работы.** Существуют детерминистические модели роста популяции частиц. Такие модели описываются дифференциальными уравнениями. Нахождение числа частиц в определенный момент времени сводится к решению дифференциальных уравнений [11-12; 14]. Особая черта детерминистического решения состоит в следующем: каждый раз, когда начальное значение одно и то же, размер популяции в данный момент времени будет одним и тем же. В данной работе рассматриваются стохастические популяционные модели.

Первый раздел диссертации посвящен основным понятиям и необходимым материалам, в особенности дробно-линейным процессам Гальтона-Ватсона [4].

Во втором разделе рассматривается процесс рождения и гибели с интенсивностями рождения  $i\lambda$  и интенсивностями гибели  $i\mu + i(i-1)\theta$ , где  $i$  – текущее состояние процесса. Положительная интенсивность конкуренции  $\theta$  предполагается малой. В надкритическом случае, когда  $\lambda > \mu$ , этот процесс может быть рассмотрен как демографическая модель для популяции с высокой конкуренцией вокруг  $\frac{\lambda - \mu}{\theta}$ .

Мы рассматриваем индексированный процесс рождения и гибели  $(X_\theta(t), t \geq 0)$ . Ключевые параметры модели —  $(\lambda, \mu, \theta)$  интенсивности рождения, гибели и конкуренции, предоставляющие следующее описание демографической динамики до тех пор, пока процесс не достигнет поглощающего состояния  $i = 0$ .

Учитывая нынешнюю численность населения  $i \geq 1$ , следующее изменение в размере популяции обусловлено либо рождением, либо гибелью частиц. Предполагается, что сосуществующие частицы дают потомство независимо друг от друга с интенсивностью  $\lambda$  на одну частицу, так что взаимодействие между частицами не влияет на события рождения. Гибель частицы моделируется через два параметра: параметр  $\mu$  дает смертность "по естественным причинам" на одну частицу, а параметр  $\theta$ , как правило, считается малым количественным показателем смертности из-за давления конкуренции (множитель  $i(i-1)$ , появляющийся перед  $\theta$  представляет собой количество пар конкурирующих частиц). Полагая  $\theta = 0$ , возвращаемся к линейному процессу рождения и гибели  $X_0(\cdot)$ .

Были выведены некоторые полезные свойства однородных по времени процессов рождения и гибели. Сравнивая квадратную форму интенсивности гибели с линейной интенсивностью рождения гарантируем, что наш процесс рождения и гибели с конкуренцией вырождается с вероятностью единица (в отличие от линейных надкритических процессов рождения и гибели, которые никогда не вымирают с положительной вероятностью). Одна из самых интересных характеристик процесса  $X_\theta(\cdot)$  — случайное время вырождения  $\tau_\theta$ .

Если  $\theta$  маленькое, то слагаемое  $i(i-1)\theta$  намного меньше, чем  $i\mu$  при  $i \ll \theta^{-1}$ , так что процесс  $X_\theta(\cdot)$  при относительно низких уровнях может быть аппроксимирован линейным процессом рождения и гибели  $X_0(\cdot)$  с параметрами  $(\lambda, \mu)$  и тем же начальным состоянием  $X_0(0) = m$ . Это может быть реализовано использованием конструкции сравнения (а coupling construction), представленной в параграфе 2.2.

Параграф 2.3 представляет основные асимптотические результаты для математического ожидания и распределения времени вырождения  $\tau_\theta$  при  $\theta \rightarrow 0$ . Остальные параграфы второго раздела содержат доказательства полученных результатов. Результаты второго раздела опубликованы в работе [6].

В параграфе 3.2 третьего раздела мы подводим результаты касающиеся явного разложения надкритических однопородных процессов Гальтона-Ватсона. Параграф 3.3 представляет процессы Гальтона-Ватсона со счетным числом типов. Основные результаты разложимости надкритических дробно-линейных ветвящихся процессов собраны в параграфе 3.4 и их выводы содержатся в параграфе 3.5. Надкритический ветвящийся процесс с условием вырождения — снова ветвящийся процесс, был недавно получен в очень общей ситуации [18]. В общем случае преобразованные законы размножения характеризуются в



неявном виде, и их трудно анализировать. Первые пять параграфов третьего раздела представляют случай, когда свойства скелето-образующих и обреченных частиц очень прозрачны. Далее даются контурные процессы для обреченных и скелето-образующих частиц. Продолжает этот раздел параграф под названием “Предельные теоремы для однотипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент времени”. В последнем параграфе этого раздела рассматриваются многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде. Результаты данного раздела опубликованы в работах [7-10].

В диссертации использован программный пакет MATLAB 2009 для симулирования процесса рождения и гибели с взаимодействием, также программа Incscare для получения разных рисунков.

Автор выражает особую благодарность научному руководителю профессору С.Сагитову за быстрое введение в тематику ветвящихся процессов, за постановку интересных задач и за многочисленные полезные советы, способствовавшие их решению. Также выражает благодарность научному консультанту профессору Б.Е.Кангужину за всестороннюю поддержку, профессору В.А.Ватутину (Математический институт им. В.А.Стеклова РАН, Россия) за интерес к работе, отделу Математической статистики университета Чалмерса (г.Гетеборг, Швеция), в лице профессора Улле Хэггстрёма, за оказанное гостеприимство.

# 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕРИАЛЫ

В этом разделе вводится понятие дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона. Процессы Гальтона-Ватсона обобщены как КМЯ-процессы. Далее определяются контурные процессы. Также даются некоторые определения и теоремы из теории асимптотических методов.

## 1.1 Дробно-линейные процессы Гальтона-Ватсона

Теория ветвящихся процессов берет свое начало с процессов Гальтона-Ватсона и Марковских ветвящихся процессов. Процессы Гальтона-Ватсона учитывают только размеры поколений. В реальной жизни поколения и физическое время могут иметь весьма разнообразные отношения.

В простом случае процессы Гальтона-Ватсона также рассматриваются как процессы в реальном времени, при условии, что все индивидуумы (подробнее описаны ниже) будут иметь продолжительности жизни равной единице (год или сезон). В таких случаях, мы предполагаем, что индивидуумы рождаются в начале сезона. Несколько более общих процессов в дискретном времени позволяют индивидуумам жить в течение нескольких дискретных сезонов, в течение которых они могут дать потомство несколько раз. Еще в более общих процессах индивидуумы имеют произвольную продолжительность жизни и произвольное размножение в течение жизни.

Ветвящийся процесс — постоянно растущее тело математического исследования, имеющее приложения в различных сферах, особенно в теоретической популяционной биологии. Простой ветвящийся процесс — это процесс Гальтона-Ватсона. Очень удобной интерпретацией ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона является их описание в терминах эволюции популяции частиц. Процесс начинается с одной частицы. Через  $Z_0$  обозначим эту начальную частицу. Эта частица имеет единичную продолжительность жизни. В конце жизни частица производит случайное число новых частиц  $\xi$  в соответствии с распределением  $\mathbb{P}(\xi = k) = p_k, k = 0, 1, \dots$ . Каждая новая частица также имеет единичную продолжительность жизни и в конце жизни порождает (независимо от других частиц) случайное число потомков в соответствии с распределением  $p_k, k = 0, 1, \dots$ . Таким образом, при  $n \geq 0$

$$Z_{n+1} = \xi_1^{(n)} + \dots + \xi_{Z_n}^{(n)},$$

где  $\xi_i^{(n)}$  — число потомков  $i$ -ой частицы  $n$ -го поколения ( $i = 1, 2, \dots, Z_n$ ), причем  $\xi_i^{(n)}$  одинаково распределены при всех  $i = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots$  и независимы. В однотипном случае последующие размерности популяции  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  имеют формы Марковской цепи с состояниями  $\{0, 1, 2, \dots\}$ .

Цепь Маркова с дискретным временем — это последовательность дискретных случайных величин  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  со следующим свойством:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n),$$

т.е. при фиксированном настоящем будущее независимо от прошлого. Например, одномерное дискретное случайное блуждание (математическая модель процесса случайных изменений) является цепью Маркова с целыми состояниями, чье начальное распределение задается функцией вероятности случайной величины  $X_0$ , а переходные вероятности определены как

$$p_{i,i+1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = p_i,$$

$$p_{i,i-1} = \mathbb{P}(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = 1 - p_i, i \in \mathbb{Z},$$

$$p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = 0, |i - j| \neq 1.$$

Важный аналитический инструмент для изучения ветвящихся процессов — производящие функции. Закон размножения частиц в популяции дается через производящую функцию

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, |s| \leq 1.$$

Среднее число частиц вычисляется через производящую функцию  $M = f'(1)$ . Сравнивая среднее число частиц  $M$  с единицей, получим классификацию ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона:

- если  $M > 1$ , процесс называется надкритическим,
- если  $M < 1$ , процесс называется докритическим,
- если  $M = 1$ , процесс называется критическим.

Если дана  $f(s) = \mathbb{E}(s^{Z_1})$ ,  $n$ -ой итерацией этой функции будет производящая функция за  $n$ -ое поколение

$$f^{(n)}(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n}) = f(\dots(f(s))\dots).$$

В диссертации рассматривается случай, когда процесс Гальтона-Ватсона имеет дробно-линейное распределение. Распределение числа потомков для дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона дается через

$$p_0 = h_0; p_k = h_1 \left( \frac{m}{1+m} \right)^{k-1} \frac{1}{1+m}, k = 1, 2, \dots$$

Тогда производящая функция дробно-линейного распределения имеет вид

$$f(s) = h_0 + \frac{h_1 s}{1 + m - ms} \quad (1)$$

где  $h_0 \in [0,1]$  – вероятность, при которой частица не имеет потомства,  $h_1 = 1 - h_0$  – вероятность того, что частица будет иметь хотя бы одного потомка и  $m > 0$ . Итерации дробно-линейных производящих функций также дробно-линейные, что позволяет упростить некоторые вычисления [19, с. 7].

В многотипном случае частицы все еще независимо размножаются, но число потомков уже может зависеть от материнского типа. Гибкое семейство популяционных моделей получено через средние числа процессов Гальтона-Ватсона со счетным числом типов [2; 20; 21; 22]. Это бесконечномерные Марковские цепи

$$\mathbf{Z}_n = (Z_{1n}, Z_{2n}, \dots), n = 0, 1, 2, \dots,$$

у которых  $i$ -ая компонента  $Z_{in}$  дает число частиц типа  $i$ , существующих в момент времени  $n$ . Дробно-линейные процессы Гальтона-Ватсона со счетным числом типов полностью определяются тройкой параметров  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ , где  $\mathbf{H} = (h_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  – субстохастическая матрица,  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots)$  – вероятностное распределение и  $m$  – положительная константа.

Для заданной тройки  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$  дробно-линейные процессы Гальтона-Ватсона имеют следующий закон размножения частиц: частица типа  $i$  не имеет потомства с вероятностью  $h_{i0} = 1 - \sum_{j \geq 1} h_{ij}$ . Учитывая, что эта частица имеет по крайней мере одно потомство, тип первой дочери будет  $j$  с вероятностью  $h_{ij}/(1 - h_{i0})$  и ряд последующих дочерей имеют геометрическое распределение со средним  $m$ . За исключением первой дочери, типы всех других частиц соответствуют тому же распределению  $\mathbf{g}$  независимо друг от друга и *независимо от типа матери*.

Счетная матрица средних чисел потомков

$$\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^{\infty}, \quad m_{ij} = \mathbb{E}(Z_{j1} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i),$$

где  $\mathbf{e}_i = (1_{\{i=1\}}, 1_{\{i=2\}}, \dots)$ , в дробно-линейном случае находится как

$$\mathbf{M} = \mathbf{H} + m\mathbf{H}\mathbf{1}^t \mathbf{g}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{1}^t$  – транспонирование вектор строки  $\mathbf{1} = (1, 1, \dots)$ . Производящая функция для  $\mathbf{Z}_n$  явно выражается в терминах  $(\mathbf{M}, \mathbf{g}, m)$ .

Мы используем следующие векторные обозначения:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ ,

$\mathbf{s}^x = s_1^{x_1} s_2^{x_2} \dots$ ,  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$ . Пусть  $\mathbf{x}^t$  – обозначение для транспонированного вектора  $\mathbf{x}$  и через  $\mathbf{I}$  обозначается единичная матрица  $(1_{\{i=j\}})_{i \geq 1, j \geq 1}$ . Обозначим через  $\mathbb{Z}_+^\infty$  множество векторов  $\mathbf{k}$  с неотрицательными целочисленными компонентами и конечными  $k = \mathbf{k}\mathbf{1}^t$ .

**Определение 1 [4].** Пусть  $(h_0, h_1, h_2, \dots)$  – распределение вероятностей на  $\{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $(g_1, g_2, \dots)$  – вероятностное распределение на  $\{1, 2, \dots\}$ , и  $m$  – положительная константа. Предположим, что  $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \dots)$ ,  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots)$ . Будем говорить, что случайный вектор  $\mathbf{Z}$  имеет дробно-линейное распределение ДЛ( $\mathbf{h}, \mathbf{g}, m$ ), если

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z} = \mathbf{0}) = h_0, \quad \mathbb{P}(\mathbf{Z} = \mathbf{k} + \mathbf{e}_i) = \frac{h_i m^k}{(1+m)^{k+1}} \binom{k}{k_1, k_2, \dots} \mathbf{g}^{\mathbf{k}}$$

для всех  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^\infty$ , где  $k = \mathbf{k}\mathbf{1}^t$ .

Название распределения объясняется дробно-линейной формой его многомерной производящей функции

$$\mathbb{E}(\mathbf{s}^{\mathbf{Z}}) = h_0 + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} h_i s_i}{1 + m - m \sum_{i=1}^{\infty} g_i s_i},$$

которая является расширением ее одномерной версии (1). Слегка модифицированная Теорема 1 из [23] (посвященная конечномерному случаю) демонстрирует то, что определение 1 охватывает всевозможные дробно-линейные производящие функции. Дробно-линейное распределение – это многомерное геометрическое распределение, модифицированное в 0.

Действительно, если дробно-линейный процесс  $\mathbf{Z}$  задается с помощью тройки параметров  $(\mathbf{h}, \mathbf{g}, m)$ , тогда он представляется в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + (\mathbf{Y}_1 + \dots + \mathbf{Y}_N) \cdot \mathbf{1}_{\{\mathbf{X} \neq \mathbf{0}\}}$$

в терминах взаимно независимых случайных величин  $(\mathbf{X}, N, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \dots)$ . Векторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}_j$  имеют вид многомерных распределений Бернулли

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{0}) = h_0, \quad \mathbb{P}(\mathbf{X} = \mathbf{e}_i) = h_i, \quad \mathbb{P}(\mathbf{Y}_j = \mathbf{e}_i) = g_i, \quad i \geq 1, j \geq 1,$$

и  $N$  – геометрическая случайная величина с распределением

$$\mathbb{P}(N = k) = m^k (1 + m)^{-k-1}, k \geq 0.$$

Заметим,  $\mathbf{Z}$  при условии, что  $\mathbf{Z} \neq \mathbf{0}$ , имеет многомерное сдвинутое геометрическое распределение

$$\mathbb{E}(\mathbf{s}^{\mathbf{Z}} \mid \mathbf{Z} \neq \mathbf{0}) = \frac{(1 - h_0)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} h_j s_j}{1 + m - m \sum_{j=1}^{\infty} g_j s_j}.$$

**Определение 2 [4].** Пусть  $\mathbf{H} = (h_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$  субстохастическая матрица со строками  $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots)$ , имеющая неотрицательные элементы, такие, что  $h_{i0} := 1 - h_{i1} - h_{i2} - \dots$  принимающее значение на  $[0, 1]$ . Пусть  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots)$  – вероятностное распределение на  $\{1, 2, \dots\}$  и  $m$  положительная константа. Многотипный процесс Гальтона-Ватсона будет называться дробно-линейным с параметрами  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ , если для всех  $i = 1, 2, \dots$  частица типа  $i$  производит потомство согласно ДЛ $(\mathbf{h}_i, \mathbf{g}, m)$  распределению.

Заметим, что параметры  $(\mathbf{g}, m)$  подчинены достаточно сильному ограничению заключающемуся в том, что закон размножения игнорирует тип матери. Это требование для производящих функций

$$f_i^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbb{E}(\mathbf{s}^{\mathbf{Z}_n} \mid \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i), i = 1, 2, \dots \quad (3)$$

означает свойство их дробно-линейности. Легко заметить, что знаменатели в выражении

$$f_i(\mathbf{s}) \equiv f_i^{(1)}(\mathbf{s}) = h_{i0} + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} s_j}{1 + m - m \sum_{j=1}^{\infty} g_j s_j}$$

не зависят от номера  $i$  и вследствие этого итерации таких производящих функций  $f_i(f_1(\mathbf{s}), f_2(\mathbf{s}), \dots)$  также являются дробно-линейными функциями.

**Теорема А [4].** Рассмотрим многотипный дробно-линейный процесс Гальтона-Ватсона с параметрами  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ , начиная с частицы типа  $i$ . Его размерность  $n$ -го поколения, вектор  $\mathbf{Z}_n$ , имеет дробно-линейное распределение ДЛ $(\mathbf{h}_i^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)}, m^{(n)})$ , параметры которых удовлетворяют соотношениям

$$m^{(n)} = m \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{g} \mathbf{M}^k \mathbf{1}^t, \quad (4)$$

$$m^{(n)} \mathbf{g}^{(n)} = m \mathbf{g} (\mathbf{I} + \mathbf{M} + \dots + \mathbf{M}^{n-1}), \quad (5)$$

$$\mathbf{H}^{(n)} = \mathbf{M}^n - \frac{m^{(n)}}{1 + m^{(n)}} \mathbf{M}^n \mathbf{1}^t \mathbf{g}^{(n)}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{H}^{(n)}$  - матрица со строками  $(\mathbf{h}_i^{(n)})_{i=1}^{\infty}$ .

Умножая обе части равенства (6) на вектор  $\mathbf{1}^t$ , получим

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) = (1 + m^{(n)})^{-1} \mathbf{M}^n \mathbf{1}^t, \quad (7)$$

где  $\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0})$  – вектор столбец с элементами  $\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)$ .

Из теоремы А вытекает, что при условии невырождения, вектор  $\mathbf{Z}_n$  имеет многомерное сдвинутое геометрическое распределение

$$\mathbb{E}[\mathbf{s}^{\mathbf{Z}_n} | \mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i] = \frac{(1 - h_{i0}^{(n)})^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij}^{(n)} s_j}{1 + m^{(n)} - m^{(n)} \sum_{j=1}^{\infty} g_j^{(n)} s_j}. \quad (8)$$

Доказательство этой теоремы можно найти в работе [4].

Таким образом, теорема А позволяет выразить основные параметры дробно-линейного процесса  $(\mathbf{h}_i^{(n)}, \mathbf{g}^{(n)}, m^{(n)})$ , относящегося к  $n$ -му поколению от прародительницы типа  $i$ , через матрицу средних значений  $\mathbf{M}$  и параметры  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$  исходного многотипного дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона.

## 1.2 Процессы Крампа-Моуда-Ягерса

Дискретный однотипный процесс Крампа-Моуда-Ягерса (КМЯ)  $\{Z_n\}_{n \geq 0}$  описывает стохастические изменения в численности населения для модели размножения с перекрывающимися поколениями [24]. По сравнению с популяцией Гальтона-Ватсона, состоящего из *частиц*, более уместно говорить об *индивидуумах*, строящие КМЯ-популяцию. Предполагается, что индивидуумы что живут и размножаются независимо, в соответствии с общим законом жизни, указав точку размножения процесса  $(N_1, \dots, N_L)$ , где  $L$  – продолжительность жизни индивидуума и  $N_i$  – число его дочерей, произведенного в возрасте  $i$ . В работе С.Сагитова [4, с.2944] вводится специальный класс таких процессов как дробно-линейные КМЯ-процессы и

обсуждается тесная связь с классом многотипных дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона.

**Определение 3 [4].** Дискретный однотипный КМЯ-процесс называется дробно-линейным, если его индивидуальный закон удовлетворяет следующему свойству:  $N_L = 0$  и дана  $L = k$  случайные величины  $N_1, \dots, N_{k-1}$  независимы и имеют общее геометрическое распределение.

Пусть  $\mathbb{P}(L > n) = d_n$  и  $m = \mathbb{E}(N_1 | L > 1)$ . Дробно-линейный КМЯ-процесс полностью описывается через пару  $(\mathbf{d}, m)$ : вектор  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$  с неотрицательными компонентами удовлетворяющими  $1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots$  и положительной константой  $m$ . В частности, общее число потомков  $N_1 + \dots + N_{L-1}$  имеет среднюю  $\nu = m(\ell - 1)$ , где  $\ell = \mathbb{E}(L)$ .

**Определение 4 [4].** Рассмотрим дробно-линейный КМЯ-процесс с параметрами  $(\mathbf{d}, m)$ . Пусть  $f(s) = \sum_{n \geq 1} d_n s^n$  и предположим

$$R_f = \inf \{s > 0 : f(s) = \infty\}.$$

Если  $f(R_f) \geq 1/m$ , определяется параметр Мальтуса  $\alpha$  КМЯ-процесса как единственное вещественное решение уравнения  $mf(e^{-\alpha}) = 1$ . Если  $f(R_f) < 1/m$ , тогда  $\alpha = -\infty$ .

Из  $\ell = 1 + f(1)$ , находим  $\nu = mf(1)$  и легко заметить, что условия  $\nu < 1, \nu = 1, \nu > 1$  эквивалентны условиям  $\alpha < 0, \alpha = 0, \alpha > 0$ . В рамках КМЯ-процессов [25] ветвящийся процесс называется докритическим, если параметр Мальтуса отрицательный,  $\alpha < 0$ , критическим, если  $\alpha = 0$ , или надкритическим, если  $\alpha > 0$ . Отметим, что при  $\alpha > -\infty$

$$mf(se^{-\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{d}_n s^n, \widehat{d}_n = md_n e^{-\alpha n}$$

является производящей функцией для так называемой регенерации возраста бессмертного индивидуума [24]. (Заметим, что в критическом случае имеем  $\widehat{d}_n = \frac{\mathbb{P}(L > n)}{\mathbb{E}(L) - 1}$ .) Соответствующее среднее значение

$$\beta = m \sum_{n=1}^{\infty} n d_n e^{-\alpha n}$$

обычно называют средним возрастом матери при деторождении [25]. При  $\alpha = -\infty$ , полагаем  $\beta = \infty$ .

Оказывается, тройка  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ , соответствующая дробно-линейному



процессу Гальтона-Ватсона  $Z_n$ , может быть связана с дробно-линейным КМЯ-процессом  $Z_n = \mathbf{Z}_n \mathbf{1}^t$ , характеризуемым парой  $(\mathbf{d}, m)$ , где вектор  $\mathbf{d}$  имеет следующие компоненты

$$d_n = \mathbf{g} \mathbf{H}^n \mathbf{1}^t, n \geq 1. \quad (9)$$

Приведем рассуждения, показывающие, что это действительно так. Пусть начальная частица процесса Гальтона-Ватсона имеет распределение  $\mathbf{g}$ . Если начальная частица умирает без каких-либо потомств, мы говорим, что начальный индивидуум КМЯ-процесса имел длину жизни  $L=1$  и если начальная частица произвела по крайней мере одно потомство, мы говорим  $L>1$ . Очевидно, что  $\mathbb{P}(L>1) = \mathbf{g} \mathbf{H} \mathbf{1}^t$ . Ключевая идея определения КМЯ-процесса — это посмотреть на индивидуум как на последовательность первых потомков частицы, которая либо сама начальная частица, либо частица, которая не первый потомок. Следовательно,  $L>1$  и мы говорим  $L>2$ , если первая дочь прародителя произвела по крайней мере одного потомка. Это объясняет (9), при  $n=2$ . Продолжая таким образом, мы видим, что (9) действительно дает нам распределение длины жизни прародитель-индивидуума. Обратим внимание на рисунок 2.С, который дает генеалогическое дерево как на рисунке 2.А, но уже в терминах индивидуума. Каждая вертикальная стрелка-ветвь на рисунке 2.С представляет индивидуума, который уже умер к моменту наблюдения  $n=5$ . В частности, начальный индивидуум прожил две единицы времени, произведя двух дочерей: одна из них живет две единицы времени, а другая — только один. Мы видим также, что первая внучка начального индивидуума производит двоих дочерей в разных возрастах. КМЯ-процесс  $Z_n$  отслеживает только общее количество частиц Гальтона-Ватсона в момент времени  $n$ , игнорируя информацию о типах частиц. Чтобы восстановить эту информацию можно ввести дополнительную маркировку индивидуумов, используя типы частиц Гальтона-Ватсона. Эволюция помеченных индивидуумов над типом пространства может быть смоделирована как Марковская цепь, пространство состояний которых  $\{0, 1, 2, \dots\}$  является пространством типа  $\{1, 2, \dots\}$  процесса Гальтона-Ватсона, дополненное состоянием  $\{0\}$ . Переходные вероятности такой цепи задаются стохастической матрицей  $\overset{\circ}{\mathbf{H}} = (\overset{\circ}{h}_{ij})_{i, j \geq 0}$ , где  $\overset{\circ}{h}_{ij} = h_{ij}$ , при  $i \geq 1, j \geq 0, \overset{\circ}{h}_{0j} = 0$ ; при  $j \geq 1$  и  $\overset{\circ}{h}_{00} = 1$ . В терминах цепи Маркова длина жизни  $L$  — это время до поглощения в  $\{0\}$ , начиная от  $j \in \{1, 2, \dots\}$  с вероятностью  $g_j$ . Помеченный индивидуум имеет возможность посетить все элементы пространства, кроме фантомных типов, определяемых ниже.

**Определение 5 [4].** Рассмотрим многотипный процесс Гальтона-Ватсона с параметрами  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, t)$ . Если  $j$ -ый элемент вектора  $\mathbf{g} \mathbf{H}^n$  будет ноль для всех  $n \geq 0$ , тогда мы называем  $j$  фантомным типом процесса Гальтона-

Ватсона.

Среди многих пар  $(\mathbf{H}, \mathbf{g})$ , приводящих к тому же распределению вектора длины жизни  $\mathbf{d}$ , подчеркиваем следующего одного

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & d_2/d_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & d_3/d_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_4/d_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{e}_1.$$

Для этого конкретного выбора  $(\mathbf{H}, \mathbf{g})$  легко проверить, что (9) выполняется. В этом случае тип частицы рассматривается как возраст соответствующего индивидуума. Очевидно, что нет фантомных типов, если  $d_n > 0$  для всех  $n \geq 1$ . Если  $d_a > 0$  и  $d_{a+1} = 0$  для некоторого натурального  $a$ , тогда, чтобы избежать фантомных типов мы должны ограничить пространство состояний до  $\{1, \dots, a\}$ . Заметим, что при  $\mathbf{g} = \mathbf{e}_2$  тип  $j=1$  становится фантомным типом.

### 1.3 Контурные процессы

Контурный процесс случайного дерева – представление дерева в виде случайного блуждания. Рассмотрим конечное дерево из рисунка 1 и ее контурный процесс. Объясним как они получены друг из друга. Дерево имеет высоту равную 5. Каждая точка дерева означает один потомок. В нашем случае их всего 13 штук. Далее мы обводим пунктирной линией это дерево и смотрим сколько шагов сделано вверх (отметим, что шаги влево тоже считаются как шаги вверх). У нас из первоначального старта было сделано 4 шага, и значит в правой части рисунка чертим 4 прямых линии в виде стрелок. Далее мы шагнули вниз. Этот шаг мы чертим как наклонную вниз. Дальше 1 шаг вверх и 1 шаг влево в левой части рисунка, тогда рисуем 2 шага вверх в виде стрелок справа. И продолжаем так, пока не пройдем всю пунктирную линию. Таким образом, получается контурный процесс в виде случайного блуждания, как получено на рисунке справа.

Теперь мы хотим получить из полученного контурного процесса обратно начальное генеалогическое дерево. Это происходит следующим образом: на рисунке справа проводим горизонтальную линию единичной высоты, видно, что через эту линию наше дерево в виде экскурсий разделилось на 2 подэкскурсий. Это означает, что начальная частица дала 2 потомков и эти потомки отображаются в виде прямых, вытекающих из начальной частицы, которые отображены вертикальными прямыми. Проводим следующую горизонтальную прямую. Эта прямая делит правую экскурсию на 2 подэкскурсии, а левая экскурсия остается неразделенной. В итоге, за это поколение получают 3 потомка. Это означает, что из правой частицы вытекают 2 потомка. Левая

частица произвела только одного потомка. Продолжая этот процесс мы полностью восстановим начальное дерево.

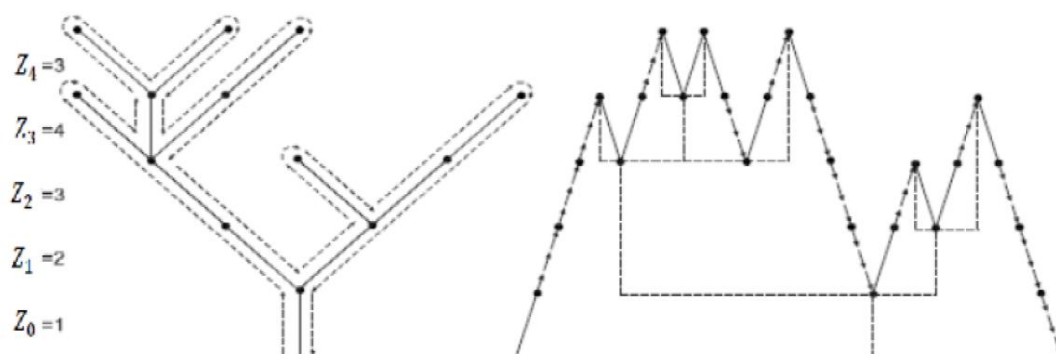


Рисунок 1 — Генеалогическое дерево и ее контурный процесс

Также нужно отметить, что все частицы данного дерева имеют *лексикографический порядок*: 0, 01, 011, 0111, 0112, 01121, 01122, 0113, 01131, 02, 021, 022, 0221. Они занумерованы в следующем порядке: начальная частица имеет порядковый номер 0, а потомки этой частицы под номером 0 занумерованы слева направо через 01 и 02, т.е. первый и второй потомок частицы 0. Потомки следующего поколения занумерованы также слева направо в порядке 011 и 021, 022. Эти обозначения в свою очередь означают, что потомок 011 является первым потомком частицы 01, потомок под номером 021 является первым потомком частицы 02, а 022 вторым потомком частицы 02. А потомки следующего поколения занумерованы как 0111, 0112, 0113 и 0221. Последнее четвертое поколение состоит из потомков с номерами 01121, 01122 и 01131.

Теперь расскажем о контурных процессах, порожденных из деревьев Гальтона-Ватсона с несколькими типами частиц. Покажем, что в многомерном мелко-линейном случае контурные процессы [26] имеют красивую Марковскую структуру постоянной скорости спуска с независимыми и одинаково распределенными прыжками вверх.

Для текущих мелко-линейных процессов Гальтона-Ватсона важно использовать частную версию генеалогических деревьев: с учетом группы братьев и сестер вытекающих из той же частицы, *левая ветвь* должна связывать мать с ее *первым потомком* (что ее тип может зависеть от типа матери).

Рисунок 2 иллюстрирует простое определение контурного процесса для конечного дерева, сопровождаемое путем вокруг дерева. Контурный процесс — это колебательный линейный график (рисунок 2.В), представляющий высоту расположения виртуального вождения автомобиля с постоянной скоростью вдоль пути, изложенной на рисунке 2.А. Заметим, что ось  $x$  на рисунке 2.А вводит только различие среди разных ветвей на таком же уровне, следовательно, скорость машины обозначена вдоль оси  $y$ . Полученный контур дерева на рисунке 2.В является экскурсией случайного блуждания, начало и конец которого на уровне  $-1$ . Даже если реализация генеалогического дерева

бесконечна, можно еще работать с контурными процессами после отрезания ветвей выше уровня  $n$ , соответствующий времени наблюдения, как показано на рисунке 2.

Как мы уже упомянули выше, легко восстановить дерево на рисунке 2.А из контурного процесса на рисунке 2.В. Все дерево А представлено экскурсией 2.В, начало и конец которого на самом нижнем уровне  $-1$ . Движущийся нижний уровень от  $-1$  к  $0$  разделяет дерево (рисунок 2.А) на 3 поддерева, вытекающих из 3 дочерей прародителя. В то же время, экскурсия В становится разделенной на 3 подэкскурсии, начало и конец которой на уровне  $0$ . Исходя из этого, двигаясь вверх от нижнего уровня и мы наблюдаем за тем как экскурсии, разложенные на подэкскурсии, позволяют нам полностью восстановить историю ветвления оригинального генеалогического дерева.

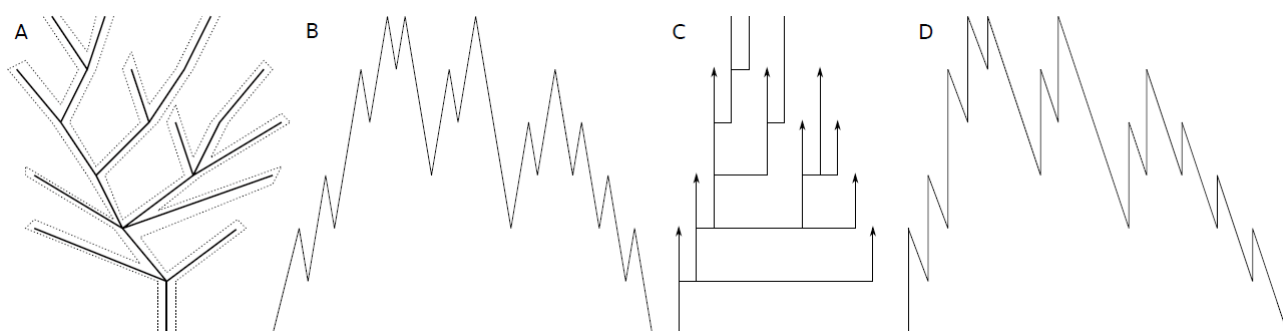


Рисунок 2 — А: дерево Гальтона-Ватсона (обозначено жирными линиями).  
 В: соответствующий развернутый контурный процесс.  
 С: другой вид того же дерева, изображенного в терминах индивидуумов.  
 D: модифицированный контурный процесс

Дерево на рисунке 2.А останавливается на уровне  $n = 5$  и сопровождается контурной (пунктирной) линией. На рисунке 2.С изображен другой вид того же дерева, изображенного в терминах индивидуумов с перекрывающимися поколениями. Вершины, отмеченные стрелками, представляют индивидуумы, которые погибли к тому времени. Прерванное дерево не дает информацию о судьбе трех вершин. На рисунке 2.Д показан модифицированный контурный процесс постоянной скорости спуска с независимо и одинаково распределенными прыжками вверх.

Подход контурного процесса оказался очень полезным в теории ветвящихся процессов [27]. В однотипном дробно-линейном случае, контурный процесс имеет простую структуру переменного случайного блуждания. Переменяющиеся вверх и вниз отрезки имеют независимую длину сдвинутого геометрического закона, имеющих средние  $h_0^{-1}$  для отрезков вверх и средние  $\frac{1+m}{m}$  для отрезков вниз.

В многотипных дробно-линейных процессах можно обеспечить Марковское свойство контурного процесса.

**Теорема В [4].** *Контурный процесс многотипного дробно-линейного процесса является Марковской цепью с переходными вероятностями*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{(l,i) \rightarrow (l+1,j)\} &= h_{ij}, & \mathbb{P}\{(l,i) \rightarrow (l-1,0)\} &= h_{i0}, \\ \mathbb{P}\{(l,0) \rightarrow (l+1,j)\} &= \frac{m}{1+m} g_j, & \mathbb{P}\{(l,0) \rightarrow (l-1,0)\} &= \frac{1}{1+m}, \\ \mathbb{P}\{(-1,0) \rightarrow (-1,0)\} &= 1,\end{aligned}$$

для всех  $i \geq 1, j \geq 1, l \geq 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Вводим дополнительные маркировки вершин в контурных линиях. Каждая вершина будет отмечена парой целых чисел  $(l, i)$  с  $l \geq -1$  и  $i \geq 0$ . Текущее состояние  $(l, i)$  с  $l \geq 0, i \geq 1$  дает три вида информации о контурных процессах: текущий уровень  $l$ , до этого уровня был шаг вверх и основная частица типа  $i$ . Если контурный процесс на вершине отмеченный  $(l, 0)$ , тогда его текущий уровень снова  $l$ ; но в этот раз мы знаем, что этот уровень был достигнут после того как шагнули вниз. Маркированный таким образом контурный процесс (если не считать первый обязательный переход с уровня  $-1$  к уровню  $0$ ) является Марковской цепью.

Следующий альтернативный способ введения Марковской структуры в контурном процессе дробно-линейного многотипного ветвящегося процесса не требует дополнительной маркировки. Это получается при помощи так называемого *прыжкового контурного процесса* [26]. Этот процесс имеет траекторию постоянной скорости спуска с независимыми прыжками вверх, каждый из которых распределен как длина жизни индивидуума  $L$ . Процесс начинается с уровня  $-1$  с мгновенным прыжком и происходит следующим образом: из всякого текущего уровня  $l$  прыжковый контурный процесс либо переходит на один уровень вниз к  $l-1$  и оседает там с вероятностью  $\frac{1}{1+m}$ , либо с вероятностью  $\frac{m}{1+m}$  переходит уровню  $k$  до перехода к уровню  $k+l-1$ . Рисунок 2.D наглядно иллюстрирует последнюю конструкцию.

#### 1.4 Классификация ветвящихся процессов со счетным числом типов

Многотипные процессы Гальтона-Ватсона классифицируются согласно асимптотическим свойствам матрицы средних значений  $\mathbf{M}^{(n)} = (m_{ij}^{(n)})_{i,j=1}^{\infty}$  с элементами

$$m_{ij}^{(n)} = \mathbb{E}(Z_{jn} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)$$

при  $n \rightarrow \infty$ . Из предположения независимости частиц следует рекурсия

$\mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{(n-1)}$ , где  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{(1)}$ . Отсюда  $\mathbf{M}^{(n)} = \mathbf{M}^n$ . Задано, что все степени  $\mathbf{M}^n$  поэлементно конечные (которое всегда верно в дробно-линейном случае), асимптотическое поведение этих степеней описывается через теорию Перрона-Фробениуса для счетных матриц [28].

Далее мы напоминаем о некоторых решающих заключениях из теории, верной для *неприводимой и аperiodической* счетной матрицы  $\mathbf{M}$ . Отметим, что неотрицательная матрица  $\mathbf{M}$  называется неприводимой, если для любой пары индексов  $(i, j)$  существует натуральное число  $n$  такое, что  $m_{ij}^{(n)} > 0$ . Период индекса  $i$  в неприводимой матрице  $\mathbf{M}$  определяется как наибольший общий делитель всех натуральных чисел  $n$ , такой, что  $m_{ii}^{(n)} > 0$ . В неприводимом случае все такие индексы имеют одинаковые периоды, которые называются периодом матрицы  $\mathbf{M}$ . Когда этот период равняется единице, тогда матрица  $\mathbf{M}$  называется аperiodическим.

По Теореме 6.1 из [28] все элементы матричного степенного ряда  $\mathbf{M}(s) = \sum_{n \geq 0} s^n \mathbf{M}^n$  имеют общий радиус сходимости  $0 \leq R < \infty$ , называемый параметром сходимости матрицы  $\mathbf{M}$ . Более того, верна одна из следующих альтернатив:

$$R\text{-транзгентный случай: } \sum_{n=0}^{\infty} m_{ii}^{(n)} R^n < \infty, i \geq 1,$$

$$R\text{-рекуррентный случай: } \sum_{n=0}^{\infty} m_{ii}^{(n)} R^n = \infty, i \geq 1.$$

Согласно [28] (Теорема 6.2 и замечание впоследствии) в  $R$ -рекуррентном случае существуют единственные с точностью до констант множителей, *положительные* векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , такие, что

$$R\mathbf{M}\mathbf{u}^t = \mathbf{u}^t, R\mathbf{v}\mathbf{M} = \mathbf{v}.$$

Используя  $R\mathcal{G}_j m_{ji} / \mathcal{G}_i$ , можно преобразовать матрицу  $\mathbf{M}$  в стохастическую матрицу.

$R$ -рекуррентном случай далее делится на два подслучая:  $R$ -ноль (null), когда  $\mathbf{v}\mathbf{u}^t = \infty$ , и  $R$ -положительный с  $\mathbf{v}\mathbf{u}^t < \infty$ . В  $R$ -ноль случае (и ясно также в  $R$ -транзгентном случае)

$$R^n m_{ij}^{(n)} \rightarrow 0 \text{ для всех } i, j \geq 1. \quad (10)$$

В  $R$ -положительно рекуррентном случае (Теорема 6.5 из [28]), можно нормировать собственные вектора таким образом, что  $\mathbf{v}\mathbf{u}^t = 1$  и получим

$$R^n m_{ij}^{(n)} \rightarrow u_i \mathcal{G}_j \text{ для всех } i, j \geq 1.$$

В матричном обозначении последняя поэлементная сходимость может быть записана как

$$R^n \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{u}^t \mathbf{v}, n \rightarrow \infty, \quad (11)$$

либо  $\mathbf{M}^n \sim \rho^n \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ , где  $\rho = 1/R$  – собственное значение Перрона-Фробениуса матрицы  $\mathbf{M}$ , т.е. максимальное собственное значение матрицы  $\mathbf{M}$  (положительное и простое).

**Определение 6 [4].** Процесс Гальтона-Ватсона со счетным числом типов будет называться докритическим (критическим, надкритическим) и транзиентным (рекуррент, ноль-рекуррент, положительно рекуррент) в пространстве типов, если  $\mathbf{M}$  матрица средних чисел потомков имеет радиус сходимости  $R > 1$  ( $R = 1, R < 1$ ) и является  $R$ -транзиентной ( $R$ -рекуррент,  $R$ -ноль рекуррент,  $R$ -положительно рекуррент).

Возвращаясь к дробно-линейным ветвящимся процессам с параметрами  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ , рассмотрим матрицу  $\mathbf{M}$  средних чисел потомков, данную через (2). Ясно, что неприводимость матрицы  $\mathbf{M}$  запрещает фантом типы (Определение 5). Обратное утверждение неверно, если существуют так называемые окончательные типы, которые никогда не производят потомство, другими словами, если  $\mathbf{H}$  содержит нулевые строки.

**Теорема С [4].** Матрица  $\mathbf{M}$ , заданная через (2), является неприводимой, тогда и только тогда, когда нет фантомных типов и  $\mathbf{H}$  не содержит нулевые строки. Если  $\mathbf{M}$  неприводимая и аperiодическая, то следующие три утверждения справедливы:

(i) параметр сходимости  $\mathbf{M}$  вычисляется как

$$R = \begin{cases} e^{-\alpha}, & \text{если } \alpha > -\infty, \\ R_f, & \text{если } \alpha = -\infty, \end{cases} \quad (12)$$

используя определение 4 и формулу (9) для компонента  $\mathbf{d}$ ,

- (ii)  $\mathbf{M}$  будет  $R$ -рекуррентной тогда и только тогда, когда  $\alpha > -\infty$ ,
- (iii)  $\mathbf{M}$  будет  $R$ -положительно рекуррентной тогда и только тогда когда  $\beta < \infty$ .

В положительно рекуррентном случае мы имеем поэлементную сходимость (11), где поэлементно положительные и конечные векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  даются через

$$\mathbf{u}^t = (1+m)\beta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} R^k \mathbf{H}^k \mathbf{1}^t, \quad \mathbf{v} = \frac{m}{1+m} \sum_{k=0}^{\infty} R^k \mathbf{g} \mathbf{H}^k,$$

и удовлетворяют  $\mathbf{v}\mathbf{u}^t = \mathbf{v}\mathbf{1}^t = 1$ , а также  $\mathbf{g}\mathbf{u}^t = \frac{1+m}{m\beta}$ .

**Пример.** Предположим, что для некоторой положительной константы  $r$  пара  $(\mathbf{H}, \mathbf{g})$  удовлетворяет одному или обоим из следующих условий

1.  $\mathbf{g}\mathbf{H} = r\mathbf{g}$  так, что  $\mathbf{g}\mathbf{M} = (1+m)r\mathbf{g}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{g}$ ,
2.  $\mathbf{H}\mathbf{1}^t = r\mathbf{1}^t$  так, что  $\mathbf{M}\mathbf{1}^t = (1+m)r\mathbf{1}^t$  и  $\mathbf{u} = \mathbf{1}$ .

Обязательно  $r \leq 1$ , поскольку  $r = r\mathbf{g}\mathbf{1}^t = \mathbf{g}\mathbf{H}\mathbf{1}^t \leq \mathbf{g}\mathbf{1}^t = 1$ . В обоих случаях мы получим  $\rho = (1+m)r$ ,  $\beta = \frac{1+m}{m}$ , и  $\mathbb{P}(L > n) = r^n$ . Заметим, что  $\mathbb{P}(L = \infty) = 1$  при  $r = 1$ .

Рассмотрим дробно-линейный процесс Гальтона-Ватсона с неприводимой и апериодической  $\mathbf{M}$ , полагая, что  $\beta < \infty$ . В этом случае согласно Теореме С имеем  $\mathbf{M}^n \sim \rho^n \mathbf{u}^t \mathbf{v}$ , где  $\rho = R^{-1} = e^\alpha$ . Отсюда следует, что левый собственный вектор  $\mathbf{v}$  описывает устойчивое распределение типа  $\mathbf{e}_i \mathbf{M}^n \sim u_i \rho^n \mathbf{v}$ , а правый собственный вектор  $\mathbf{u}$  сравнивает производительность различных типов  $\mathbf{M}^n \mathbf{1}^t \sim \rho^n \mathbf{u}^t$ , потому что  $u_i$  может быть интерпретирован как "репродуктивное значение" типа  $i$ . В следующих трех утверждениях изложены основные асимптотические результаты для дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона, а распространения аналогичных утверждений для конечномерного случая получены в [23; 29].

**Утверждение 1 [4].** В докритическом положительно рекуррентном случае, когда  $\rho < 1$  или эквивалентно  $M < 1$ ,

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim \rho^n (1+m)^{-1} (1-M) \mathbf{u}^t. \quad (13)$$

Более того, для любого начального типа  $i$  получим

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n = \mathbf{k} \mid \mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{k}) \text{ для всех } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}_+^\infty,$$

где  $\mathbf{Y}$  имеет распределение ДЛ( $\tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathbf{g}}, \tilde{m}$ ) с  $\tilde{m} = m\ell(1-M)^{-1}$ ,

$$\tilde{\mathbf{h}} = (1+m)(1-M)^{-1} \mathbf{v} - m\mathbf{g}(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{h}}\mathbf{1}^t = 1,$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \lambda^{-1}(1-M)\mathbf{g}(\mathbf{I} - \mathbf{M})^{-1}.$$

**Утверждение 2 [4].** В критическом положительно рекуррентном случае, когда  $\rho = 1$  имеем



$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim n^{-1}(1+m)^{-1} \beta \mathbf{u}^t.$$

Если вектор  $\mathbf{w}$  имеет ограниченные компоненты ( $\sup_{j \geq 1} |w_j| < \infty$ ) и  $\mathbf{v}\mathbf{w}^t > 0$ , тогда для всех  $x > 0$  и  $i \geq 1$

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \mathbf{w}^t > nx \mid \mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i) \rightarrow e^{-x/c_w}, \quad c_w = (1+m)\beta^{-1} \mathbf{v}\mathbf{w}^t.$$

Другими словами, при условии невырождения  $n^{-1}\mathbf{Z}_n$  слабо сходится к  $X\mathbf{v}$ , где  $X$  экспоненциально распределено со средним  $(1+m)\beta^{-1}$ .

**Утверждение 3 [4].** В надкритическом положительно рекуррентном случае, когда  $\rho > 1$

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \rightarrow (\rho - 1)(1+m)^{-1} \beta \mathbf{u}^t.$$

Более того, для всех  $\mathbf{w}$  с ограниченными компонентами и  $\mathbf{v}\mathbf{w}^t > 0$

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \mathbf{w}^t > \rho^n x \mid \mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}, \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i) \rightarrow e^{-x(\rho-1)/c_w}, \quad x > 0.$$

### 1.5 Некоторые факты из теории асимптотических методов

Важным методом получения асимптотических формул является метод Лапласа. Этот метод был найден Лапласом в его изысканиях по теории вероятностей. Он применяется для получения асимптотических формул для функций, представленных интегралами вида

$$\int_{a(t)}^{b(t)} F(x, t) dx,$$

где функция  $F(x, t)$  сохраняет знак на отрезке интегрирования и имеет на этом отрезке максимум, выделяющийся тем резче, чем больше значение параметра  $t$ . Сущность метода Лапласа состоит в том, что весь интеграл заменяется асимптотически некоторой величиной, зависящей лишь от локального поведения подинтегральной функции в точке максимума, т.е. выражается через значения подинтегральной функции и ее производные в точке максимума. Эта точка называется вкладом точки максимума в интеграл. Рассмотрим интеграл вида  $\int_a^b \varphi(x) e^{th(x)} dx$ , где  $a, b, \varphi(x)$  и  $h(x)$  не зависят от  $t$ . Приведем утверждения теорем из [30].

**Теорема D [30].** Пусть  $\varphi(x)$  и  $h(x)$  – аналитические функции на отрезке  $(a, b)$ ,  $x = c$  – точка максимума  $h(x)$ . Если точка  $x = c$  совпадает с одним из концов и  $h'(c) \neq 0$ , то для вклада  $V_c(t)$  точки  $x = c$  в данный интеграл имеет место следующая асимптотика (если ограничимся лишь первым членом

асимптотического ряда и  $\varphi(c) \neq 0$ )

$$V_c(t) \sim \frac{\varphi(c)e^{th(c)}}{th'(c)}, t \rightarrow \infty.$$

**Теорема Е [30].** Пусть  $\varphi(x)$  и  $h(x)$  – аналитические функции на отрезке  $(a, b)$ , а  $x=c$  – точка максимума функции  $h(x)$ . Если точка  $a < c < b$  и  $h''(c) \neq 0$ , то для вклада  $V_c(t)$  точки  $x=c$  в данный интеграл имеет место следующая асимптотика (если ограничимся лишь первым членом асимптотического ряда и  $\varphi(c) \neq 0$ )

$$V_c(t) \sim \varphi(c) \sqrt{-\frac{2\pi}{th''(c)}} e^{th(c)}, t \rightarrow \infty.$$

Дадим определение медленно меняющейся функции и приведем утверждение Тауберовой теоремы из [31, с. 513]. Эти утверждения нам понадобятся при доказательстве теорем.

**Определение 7 [31].** Заданная на  $(0, \infty)$  положительная функция  $\mathfrak{L}$  называется медленно меняющейся на бесконечности в том и только в том случае, когда она удовлетворяет условию

$$\frac{\mathfrak{L}(tx)}{\mathfrak{L}(t)} \rightarrow 1$$

при  $t \rightarrow \infty$ , для любого  $x > 0$ .

**Определение 8 [31].** Функция  $U$  называется правильно меняющейся с показателем  $\kappa$  в том и только в том случае, когда для нее выполняется

$$U(x) = x^\kappa \mathfrak{L}(x),$$

$U$  – положительная функция,  $\kappa$  – конечное число,  $-\infty < \kappa < \infty$  и  $\mathfrak{L}$  – медленно меняющаяся функция.

Пусть  $U$  – мера сосредоточенная на  $(\overline{0}, \infty)$  и такая, что ее преобразование Лапласа  $\omega(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta x} U(dx)$  существует при  $\zeta > 0$ . Удобно описывать меру  $U$  в терминах соответствующей "функции распределения" определенной при  $x \geq 0$ , как  $U(\overline{0}, x)$ . Мы увидим, что при весьма общих условиях поведение  $\omega$  вблизи нуля однозначно определяет асимптотическое поведение  $U(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Любое подобное соотношение между  $\omega(\zeta)$  и  $U(x)$  называется тауберовой теоремой.

Введем две положительные переменные  $t$  и  $\varpi$ , связанные соотношением  $t\varpi = 1$ . Тогда  $\varpi \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Теорема F [31].** Для фиксированного  $0 \leq \kappa < \infty$  каждое из соотношений

$$\frac{\omega(\varpi \zeta)}{\omega(\varpi)} \rightarrow \frac{1}{\zeta^\kappa}, \varpi \rightarrow 0,$$

$$\frac{U(tx)}{\omega(\varpi)} \rightarrow \frac{x^\kappa}{\Gamma(\kappa + 1)},$$

и

$$\frac{U(tx)}{U(t)} \rightarrow x^\kappa, t \rightarrow \infty$$

влечет остальные.

Из второго соотношения, при  $x = 1$ , получим  $\omega(\varpi) \sim U(t)\Gamma(\kappa + 1)$ .

Это и есть желаемая тауберова теорема.

Сформулируем Тауберову теорему для последовательности.

**Теорема G [31].** Пусть  $a_n \geq 0$ , и пусть  $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$  сходится при  $0 \leq s < 1$ . Если  $\mathfrak{L}$  медленно меняется на бесконечности и  $0 \leq \kappa < \infty$ , то каждое из двух соотношений

$$F(s) \sim \frac{1}{(1-s)^\kappa} \mathfrak{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), s \rightarrow 1- \quad (14)$$

и

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\kappa + 1)} n^\kappa \mathfrak{L}(n), n \rightarrow \infty \quad (15)$$

влечет другое.

Далее, если последовательность  $a_n$  монотонна и  $0 < \kappa < \infty$ , то (14) равносильно соотношению

$$a_n \sim \frac{1}{\Gamma(\kappa)} n^{\kappa-1} \mathfrak{L}(n), n \rightarrow \infty.$$

## 2 ПРОЦЕССЫ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ СО СЛАБОЙ КОНКУРЕНЦИЕЙ

В этом разделе рассматривается процесс рождения и гибели с интенсивностями рождения  $i\lambda$  и интенсивностями гибели  $i\mu + i(i-1)\theta$ , где  $i$  – текущее состояние процесса. Положительная интенсивность конкуренции  $\theta$  предполагается малым. В надкритическом случае, когда  $\lambda > \mu$ , этот процесс может быть рассмотрен как демографическая модель для популяции с высокой конкуренцией вокруг  $\frac{\lambda - \mu}{\theta}$  (рисунок 3).

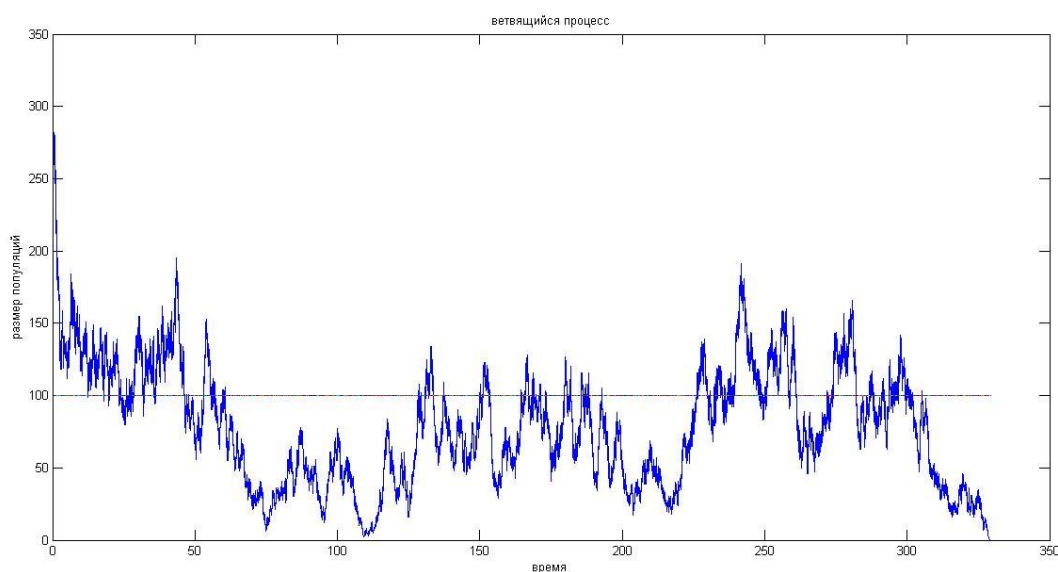


Рисунок 3 – Надкритический процесс долгое время остается вокруг порогового значения  $\frac{\lambda - \mu}{\theta} = 100$  ( $\lambda = 2, \mu = 1.9, \theta = 0.001$  и процесс начинается с 300 частицы)

Одной из основных популяционных моделей с непрерывным временем является линейный процесс рождения и гибели  $(X_0(t), t \geq 0)$  с фиксированными интенсивностями рождения и гибели,  $\lambda$  и  $\mu$ , на одного индивидуума. Это простой пример ветвящегося процесса, описывающего популяцию независимо размножающихся индивидуумов и имеющие три разных режима размножения: надкритического ( $\lambda > \mu$ ), критического ( $\lambda = \mu$ ) и докритического ( $\lambda < \mu$ ).

Свойства линейного процесса рождения и гибели  $X_0(\cdot)$  и его время вырождения  $\tau_0$  хорошо известны, [32, с. 270-272]. В частности,

$$\mathbb{E}_m X_0(t) = me^{(\lambda - \mu)t}$$

и

$$\mathbb{P}_m(\tau_0 \leq t) = \begin{cases} \left( \frac{\mu(1 - e^{(\mu-\lambda)t})}{\lambda - \mu e^{(\mu-\lambda)t}} \right)^m, & \text{в докритическом и надкритическом случаях,} \\ \left( \frac{\lambda t}{1 + \lambda t} \right)^m, & \text{в критическом случае,} \end{cases}$$

где через  $\mathbb{P}_m(\cdot)$  и  $\mathbb{E}_m(\cdot)$  обозначаются условная вероятность и условное математическое ожидание при условии, что соответствующий процесс рождения и гибели начинается с состояния  $m$ . Отсюда следует, что в надкритическом и критическом случаях  $\mathbb{E}_m(\tau_0) = \infty$  и в докритическом случае  $\mathbb{E}_m(\tau_0) < \infty$ .

Предполагая, что  $t \rightarrow \infty$  получаем вероятности вырождения

$$\mathbb{P}_m(\tau_0 < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{в докритическом и критическом случаях,} \\ \left( \frac{\mu}{\lambda} \right)^m, & \text{в надкритическом случае.} \end{cases}$$

Более того, в докритическом случае

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_m \left( \tau_0 \leq \frac{\ln m + \ln \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) + x}{\mu - \lambda} \right) &= \left( \frac{\mu \left( 1 - e^{\ln m + \ln \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) + x} \right)}{\lambda - \mu e^{m \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)} e^x} \right)^m \\ &= \left( 1 + \frac{\mu - \lambda}{(\mu - \lambda) m e^x} \right)^m \rightarrow e^{-(e^{-x})}, \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (16)$$

и в критическом случае

$$\mathbb{P}_m(\tau_0 \leq mx) = \left( \frac{\lambda m x}{1 + \lambda m x} \right)^m \rightarrow \exp\{-(\lambda x)^{-1}\}, \quad m \rightarrow \infty. \quad (17)$$

Отсутствие конкуренции среди индивидуумов — главная слабость линейной популяционной модели рождения и гибели. Естественная модификация этой простой модели вводит дополнительную смерть из-за конкуренции. Мы рассматриваем индексированный процесс рождения и гибели  $(X_\theta(t), t \geq 0)$ , принимающий неотрицательные целые значения  $i \in \{0, 1, 2, \dots\}$  и имеющий однородные по времени интенсивности прыжков

$$\begin{cases} \mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i+1) = \lambda_i t + o(t), & \text{где } \lambda_i = i\lambda, \\ \mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i-1) = \mu_i t + o(t), & \text{где } \mu_i = i\mu + i(i-1)\theta, \\ \mathbb{P}_i(X_\theta(t) = i) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)t + o(t), \end{cases} \quad (18)$$

при  $t \rightarrow 0$ . Ключевые параметры модели —  $(\lambda, \mu, \theta)$  интенсивности рождения, гибели и конкуренции, предоставляющие следующее описание демографической динамики до тех пор, пока процесс не достигнет поглощающего состояния  $i = 0$ .

Учитывая нынешнюю численность населения  $i \geq 1$ , следующее изменение в размере популяции обусловлено либо рождением, либо гибелью частиц. Предполагается, что сосуществующие частицы дают потомство независимо друг от друга с интенсивностью  $\lambda$  на одну частицу, так что взаимодействие между частицами не влияет на события рождения. Гибель частицы моделируется через два параметра: параметр  $\mu$  дает смертность "по естественным причинам" на одну частицу, а параметр  $\theta$ , как правило, считается малым количественным показателем смертности из-за давления конкуренции (множитель  $i(i-1)$ , появляющийся перед  $\theta$  представляет собой количество пар конкурирующих частиц). Полагая  $\theta = 0$ , возвращаемся к линейному процессу рождения и гибели  $X_0(\cdot)$ .

Процесс  $X_\theta(\cdot)$  является примером так называемого логистического ветвящегося процесса изученного в [33] вместе со своей копией в непрерывном времени. Наиболее заметным в новой функции  $X_\theta(\cdot)$ , по сравнению с линейным процессом рождения и гибели  $X_0(\cdot)$ , является наличие порогового значения

$$i_\theta = \lfloor \frac{\lambda - \mu}{\theta} \rfloor + 1 \quad (20)$$

в надкритическом случае. Полученное из уравнения  $\lambda_i \approx \mu_i$  пороговое значение  $i_\theta$  разбивает пространство состояний на две части.

При  $i < i_\theta$  процесс  $X_\theta(\cdot)$  растет, а когда  $i > i_\theta$  процесс убывает. Соответственная биологическая интерпретация этого порогового значения *пропускная способность* окружающей среды для популяции.

Сейчас мы выведем некоторые полезные свойства однородных по времени процессов рождения и гибели. Сравнивая квадратную форму интенсивности гибели с линейной интенсивностью рождения гарантируем, что наш процесс рождения и гибели с конкуренцией вырождается с вероятностью единица (в отличие от линейных надкритических процессов рождения и гибели, которые никогда не вымирает с положительной вероятностью). Одна из самых интересных характеристик процесса  $X_\theta(\cdot)$  — это случайное время вырождения  $\tau_\theta$ .

Если  $\theta$  маленькое, то слагаемое  $i(i-1)\theta$  намного меньше чем  $i\mu$ , при  $i \ll \theta^{-1}$ , так что процесс  $X_\theta(\cdot)$  при относительно низких уровнях может быть

аппроксимирован линейным процессом рождения и гибели  $X_0(\cdot)$  с параметрами  $(\lambda, \mu)$  и тем же начальным состоянием  $X_0(0) = m$ . Это делается использованием конструкции сравнения (a coupling construction) представленного в параграфе 2.2.

Параграф 2.3 представляет основные асимптотические результаты для математического ожидания и распределения времени вырождения  $\tau_\theta$  при  $\theta \rightarrow 0$ . Остальные параграфы этого раздела содержат доказательства.

## 2.1 Общие свойства однородных по времени процессов рождения и гибели

Далее мы приводим краткий обзор полезных результатов для однородных по времени процессов рождения и гибели с интенсивностями рождения  $\lambda_i$  и гибели  $\mu_i$ , некоторые из этих свойств можно найти в [34-35]. Важна вероятность

$$Q_i = \mathbb{P}_i(\text{достижения } i+1 \text{ до } 0),$$

удовлетворяющая рекурсии

$$Q_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} Q_{i-1} Q_i,$$

отсюда получим

$$\frac{1}{1 - Q_i} = 1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{1}{1 - Q_{i-1}}.$$

Далее

$$\frac{1}{1 - Q_i} = 1 + \frac{\lambda_i}{\mu_i} \left( 1 + \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}} \frac{1}{1 - Q_{i-2}} \right),$$

продолжая подставлять таким образом

$$\frac{1}{1 - Q_i} = \sum_{j=0}^i \frac{\lambda_i \dots \lambda_{i-j+1}}{\mu_i \dots \mu_{i-j+1}},$$

так как 0 поглощающее состояние  $Q_0 = 0$ , отсюда используя обозначение

$$\pi_0 = 1, \pi_j = \frac{\mu_1 \dots \mu_j}{\lambda_1 \dots \lambda_j}, \Pi_0 = 0, \Pi_k = \sum_{j=0}^{k-1} \pi_j,$$

получим

$$\frac{1}{1-Q_i} = \frac{1}{\pi_i} \sum_{j=0}^i \pi_{i-j}.$$

Таким образом,  $Q_i = \frac{\Pi_i}{\Pi_{i+1}}$ .

В более общем случае, при  $i \in (k, n) \subset (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_i(\text{достижения состояния } n \text{ до } k) &= \frac{\Pi_i - \Pi_k}{\Pi_n - \Pi_k}, \\ \mathbb{P}_i(\text{достижения состояния } k \text{ до } n) &= \frac{\Pi_n - \Pi_i}{\Pi_n - \Pi_k}. \end{aligned}$$

Используя это, можно вычислить условные вероятности прыжков

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_i(\text{первый прыжок вниз} \mid \text{достижения состояния } i+1 \text{ до } k) \\ &= \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\mathbb{P}_{i-1}(\text{достижения состояния } i+1 \text{ до } k)}{\mathbb{P}_i(\text{достижения состояния } i+1 \text{ до } k)} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\Pi_{i-1} - \Pi_k}{\Pi_i - \Pi_k}, \end{aligned}$$

что в свою очередь приведет к рекурсии

$$\begin{aligned} \beta_i^k &\equiv \mathbb{E}_i(\text{время достижения состояния } i+1 \mid \text{достижения состояния } i+1 \text{ до } k) \\ &= \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{\Pi_{i-1} - \Pi_k}{\Pi_i - \Pi_k} (\beta_{i-1}^k + \beta_i^k), \end{aligned}$$

приводя к общему знаменателю и используя соотношения

$$\mu_i \pi_{i-1} = \lambda_i \pi_i, \quad \Pi_i + \pi_i = \Pi_{i+1},$$

получим

$$\beta_i^k = \frac{\Pi_i - \Pi_k}{\lambda_i (\Pi_{i+1} - \Pi_k)} + \frac{\mu_i (\Pi_{i-1} - \Pi_k)}{\lambda_i (\Pi_{i+1} - \Pi_k)} \beta_{i-1}^k, \quad \beta_{k+1}^k = \frac{1}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}},$$

отсюда итерируя



$$\begin{aligned}
\beta_i^k &= \frac{\Pi_i - \Pi_k}{\lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_k)} + \frac{\mu_i(\Pi_{i-1} - \Pi_k)}{\lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_k)} \frac{\Pi_{i-1} - \Pi_k}{\lambda_{i-1}(\Pi_i - \Pi_k)} \\
&+ \frac{\mu_i(\Pi_{i-1} - \Pi_k)}{\lambda_i(\Pi_{i+1} - \Pi_k)} \frac{\mu_{i-1}(\Pi_{i-2} - \Pi_k)}{\lambda_{i-1}(\Pi_i - \Pi_k)} \beta_{i-2}^k \\
&+ \dots + \frac{\mu_i \dots \mu_{k+2}}{\lambda_k \dots \lambda_{k+2}} \frac{(\Pi_{k+2} - \Pi_k)(\Pi_{k+1} - \Pi_k)}{(\Pi_{i+1} - \Pi_k)(\Pi_i - \Pi_k)} \beta_{k+1}^k
\end{aligned}$$

и используя для последнего слагаемого

$$\frac{\Pi_{k+2} - \Pi_k}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} = \frac{\pi_{k+1} + \pi_k}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} = \frac{\pi_k \left( \frac{\mu_{k+1}}{\lambda_{k+1}} + 1 \right)}{\lambda_{k+1} + \mu_{k+1}} = \frac{\pi_k}{\lambda_{k+1}} = \frac{\Pi_{k+1} - \Pi_k}{\lambda_{k+1}},$$

получим

$$\beta_i^k = \frac{\pi_i}{(\Pi_i - \Pi_k)(\Pi_{i+1} - \Pi_k)} \sum_{j=k+1}^i \frac{(\Pi_j - \Pi_k)^2}{\lambda_j \pi_j}. \quad (21)$$

Аналогично для  $k \in [1, i]$  условные прыжковые вероятности

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_k(\text{первый прыжок вверх} \mid \text{достижения состояния } k-1 \text{ до } i+1) \\
&= \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} \frac{\mathbb{P}_{k+1}(\text{достижения состояния } k-1 \text{ до } i+1)}{\mathbb{P}_k(\text{достижения состояния } k-1 \text{ до } i+1)} = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} \frac{\Pi_{i+1} - \Pi_{k+1}}{\Pi_{i+1} - \Pi_k}
\end{aligned}$$

дают рекурсию

$$\begin{aligned}
\beta_k^{i+1} &\equiv \mathbb{E}_k(\text{время достижения состояния } k-1 \mid \text{достижения состояния } k-1 \text{ до } i+1) \\
&= \frac{1}{\lambda_k + \mu_k} + \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} \frac{\Pi_{i+1} - \Pi_{k+1}}{\Pi_{i+1} - \Pi_k} (\beta_{k+1}^{i+1} + \beta_k^{i+1})
\end{aligned}$$

в результате разностного уравнения

$$\beta_k^{i+1} = \frac{\Pi_{i+1} - \Pi_k}{\mu_k(\Pi_{i+1} - \Pi_{k-1})} + \frac{\lambda_k}{\mu_k} \frac{\Pi_{i+1} - \Pi_{k+1}}{\Pi_{i+1} - \Pi_{k-1}} \beta_{k+1}^{i+1}, \quad \beta_i^{i+1} = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i},$$

откуда следует

$$\beta_k^{i+1} = \frac{\pi_{k-1}}{(\Pi_{i+1} - \Pi_{k-1})(\Pi_{i+1} - \Pi_k)} \sum_{j=k}^i \frac{(\Pi_{i+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j}. \quad (22)$$

Заметим, что для всех  $v > u \geq 0$  соотношения (21) и (22) дают

$$\sum_{i=u+1}^v \beta_i^u = \sum_{k=u+1}^v \beta_k^{v+1} = \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_{v+1} - \Pi_j)(\Pi_j - \Pi_u)}{\lambda_j \pi_j (\Pi_{v+1} - \Pi_u)}. \quad (24)$$

В самом деле, с помощью (21)

$$\sum_{i=u+1}^v \beta_i^u = \sum_{i=u+1}^v \frac{\pi_i}{(\Pi_i - \Pi_u)(\Pi_{i+1} - \Pi_u)} \sum_{j=u+1}^i \frac{(\Pi_j - \Pi_u)^2}{\lambda_j \pi_j},$$

изменив порядок суммирования

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_j - \Pi_u)^2}{\lambda_j \pi_j} \sum_{i=j}^v \frac{\pi_i}{(\Pi_i - \Pi_u)(\Pi_{i+1} - \Pi_u)} \\ &= \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_j - \Pi_u)^2}{\lambda_j \pi_j} \sum_{i=j}^v \left( \frac{1}{\Pi_i - \Pi_u} - \frac{1}{\Pi_{i+1} - \Pi_u} \right) \\ &= \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_j - \Pi_u)^2 (\Pi_{v+1} - \Pi_j)}{\lambda_j \pi_j (\Pi_j - \Pi_u) (\Pi_{v+1} - \Pi_u)}. \end{aligned}$$

Из второй суммы, учитывая (22)

$$\sum_{k=u+1}^v \beta_k^{v+1} = \sum_{k=u+1}^v \frac{\pi_{k-1}}{(\Pi_{v+1} - \Pi_{k-1})(\Pi_{v+1} - \Pi_k)} \sum_{j=k}^v \frac{(\Pi_{v+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j}$$

поменяем порядок суммирования и получим

$$= \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_{v+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j} \sum_{k=u+1}^j \frac{\pi_{k-1}}{(\Pi_{v+1} - \Pi_{k-1})(\Pi_{v+1} - \Pi_k)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_{v+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j} \sum_{k=u+1}^j \left( \frac{1}{\Pi_{v+1} - \Pi_k} - \frac{1}{\Pi_{v+1} - \Pi_{k-1}} \right) \\
&= \sum_{j=u+1}^v \frac{(\Pi_{v+1} - \Pi_j)^2 (\Pi_j - \Pi_u)}{\lambda_j \pi_j (\Pi_{v+1} - \Pi_j) (\Pi_{v+1} - \Pi_u)}.
\end{aligned}$$

Это подтверждение (в терминах первых моментов) постановки в [36] утверждает, что соответствующие условные времена первых попаданий равны по распределению.

Среднее время вырождения дается через формулу

$$\mathbb{E}_i(\text{время достижения состояния } 0) = \sum_{j=0}^{i-1} \pi_j \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Pi_{k \wedge i}}{\lambda_k \pi_k}. \quad (24)$$

Действительно, если обозначить последнее математическое ожидание через  $\zeta_i$ , тогда имеет место следующая рекурсия

$$\zeta_i = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \zeta_{i+1} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \zeta_{i-1},$$

с условием  $\zeta_0 = 0$ . Из этой рекурсии выводится формула (24) через замену  $\nu_i = \zeta_i - \zeta_{i+1}$  [35].

Как следует из (24)

$$T_i = \mathbb{E}_i(\text{время достижения состояния } i-1) = \pi_{i-1} \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k}. \quad (25)$$

Действительно, если написать время достижения состояния  $i-1$  через состояния  $i$  и  $i-1$ , то

$$T_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i} \left( \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + T_{i+1} + T_i \right) + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i} \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}$$

Приводим к общему знаменателю и получаем

$$T_i = \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} T_{i+1}$$

с условием  $T_{\infty} = 0$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
T_i &= \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i} T_{i+1} = \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i}{\mu_i \mu_{i+1}} + \frac{\lambda_i \lambda_{i+1}}{\mu_i \mu_{i+1}} T_{i+2} + \dots = \dots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda_i \dots \lambda_{i+j-1}}{\mu_i \dots \mu_{i+j}} = \pi_{i-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{i+j} \pi_{i+j}} = \pi_{i-1} \sum_{j=i}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \pi_j}.
\end{aligned}$$

В частности, для докритического линейного процесса рождения и гибели формула (24) дает

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_m(\tau_0) &= \sum_{k=1}^m \frac{\Pi_{k-1}}{\lambda_k \pi_k} + \Pi_{m-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{(\mu - \lambda)k} + \frac{\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m - 1}{\mu - \lambda} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k},
\end{aligned}$$

заменяя переменную через  $s = \lambda / \mu$ , получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_m(\tau_0) &= \frac{1}{\mu - \lambda} \left( \sum_{k=1}^m \frac{1 - s^k}{k} + (s^{-m} - 1) \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{s^k}{k} \right) \\
&= \frac{1}{\mu - \lambda} \left( \sum_{k=1}^m k^{-1} + \ln(1 - s) + s^{-m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{s^k}{k} \right),
\end{aligned}$$

здесь в третьем слагаемом сумма вычисляется в виде интеграла с  $\kappa = \ln \frac{1}{s}$

$$\int_m^{\infty} \frac{e^{\kappa(m-x)}}{x} dx,$$

заменяя  $x$  через  $\frac{m}{\kappa}(\kappa - z)$ , получим

$$\kappa \int_0^{\infty} \frac{e^{-mz}}{\kappa + z} dz.$$

Теперь к этому интегралу применяем Тауберovu теорему, приведенную во введении и убеждаемся в том, что

$$\kappa \int_0^{\infty} \frac{e^{-mz}}{\kappa + z} dz \sim \kappa \ln \frac{\kappa + 1/m}{\kappa},$$

которое стремится к 0, при  $m \rightarrow \infty$ . Таким образом, учитывая все это и из определения константы Эйлера  $\gamma$ , получим

$$\mathbb{E}_m(\tau_0) = \frac{\ln m + \gamma + \ln(1 - \lambda/\mu)}{\mu - \lambda} + o(1), m \rightarrow \infty, \quad (26)$$

где  $\gamma = 0,577\dots$ . Это дополняет слабую сходимости (17) в терминах асимптотического равенства соответствующего математического ожидания.

## 2.2 Связь с линейным процессом рождения и гибели

Чтобы частично распространять хорошие свойства линейного процесса рождения и гибели  $X_0(\cdot)$  к процессу с взаимодействием  $X_\theta(\cdot)$ , можно использовать следующую конструкцию сравнения [5].

Рассмотрим двумерный Марковский процесс  $(\widehat{X}_\theta(\cdot), \widehat{X}_0(\cdot))$  с переходными интенсивностями данных в списке

Тип перехода ( $0 \leq i < j$ )	Интенсивность перехода
$(i, i) \rightarrow (i + 1, i + 1)$	$\lambda i$
$(i, i) \rightarrow (i - 1, i - 1)$	$\mu i$
$(i, i) \rightarrow (i - 1, i)$	$\theta i(i - 1)$
$(i, j) \rightarrow (i + 1, j)$	$\lambda i$
$(i, j) \rightarrow (i - 1, j)$	$\mu i + \theta i(i - 1)$
$(i, j) \rightarrow (i, j + 1)$	$\lambda j$
$(i, j) \rightarrow (i, j - 1)$	$\mu j$

Этот процесс построен таким образом, что  $\widehat{X}_\theta(t) \leq \widehat{X}_0(t)$  для всех  $t \geq 0$ , и маргинальные распределения  $(\widehat{X}_\theta(\cdot), \widehat{X}_0(\cdot))$  совпадают с теми  $X_\theta(\cdot)$  и  $X_0(\cdot)$  соответственно.

Важным вопросом здесь является как долго этот двумерный процесс остается на диагонали, если  $(\widehat{X}_\theta(0), \widehat{X}_0(0)) = (m, m)$ . Пусть  $\kappa_\theta$  – число скачков процесса  $(\widehat{X}_\theta(\cdot), \widehat{X}_0(\cdot))$  до разделения (пока они не разойдутся), если компоненты остаются вместе до вырождения, мы полагаем  $\kappa_\theta = \infty$ . Ниже мы покажем, что

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta \leq n) \leq \frac{(m+n)n\theta}{\lambda + \mu}, \quad (27)$$

где через  $\mathbb{P}_{(m,m)}(\cdot)$  обозначается вероятность при условии, что двумерный процесс начинается с состояния  $(m, m)$ .

Пусть  $\theta \rightarrow 0$  и начальный уровень  $m$  фиксирован. В докритическом и критическом случаях общее число рождений и смертей в линейных процессах рождения и гибели почти наверное конечное и в связи с (27) можно заключить, что  $\tau_\theta \rightarrow \tau_0$  почти наверное. Кроме того, поскольку надкритические процессы с условием вырождения ведут себя как докритические ветвящиеся процессы, получаем, что  $\tau_\theta \rightarrow \tau_0$  почти наверное, при условии  $\tau_0 < \infty$ . Это наблюдение приводится в следующем параграфе как часть теоремы 1.

Чтобы доказать (27) заметим, что

$$\kappa_\theta = \inf \{k : U_k \neq V_k\},$$

где  $(U_k, V_k)_{k \geq 0}$  являются последовательными состояниями, посетившими процесс  $(\widehat{X}_\theta(\cdot), \widehat{X}_0(\cdot))$ . Заметим, что единственный способ для двумерного процесса сойти с диагонального пути — это переход  $(i, i) \rightarrow (i-1, i)$  с вероятностью  $\frac{\theta(i-1)}{\lambda + \mu + \theta(i-1)}$ , которая является незначительной, если текущий уровень  $i$  будет не слишком высокой. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta = n \mid \kappa_\theta > n-1) &= \sum_{i=1}^{m+n-1} \frac{\theta(i-1)}{\lambda + \mu + \theta(i-1)} \mathbb{P}_{(m,m)}(U_{n-1} = i) \\ &\leq \frac{\theta}{\lambda + \mu} \mathbb{E}_{(m,m)} U_{n-1} \leq \frac{(m+n)\theta}{\lambda + \mu}, \end{aligned}$$

получим (27)

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta \leq n) = 1 - \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta > k \mid \kappa_\theta > k-1),$$

используя неравенство  $1 - \prod_{k=1}^n p_k \leq \sum_{k=1}^n (1 - p_k)$ ,

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta > k \mid \kappa_\theta > k-1)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta = k \mid \kappa_\theta > k-1) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(m+k)\theta}{\lambda + \mu} \leq \frac{(m+n)n\theta}{\lambda + \mu}. \end{aligned}$$

### 2.3 Основные результаты для процесса рождения и гибели с взаимодействием

Утверждаем, что при  $\theta \rightarrow 0$  следующие две теоремы справедливы для процесса рождения и гибели определяемого через (19).

**Теорема 1.** Если  $X_\theta(0) = m$ , где  $m$  фиксированное положительное целое число, тогда

(i) в докритическом и критическом случаях, когда  $\lambda \leq \mu$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta \rightarrow \tau_0) = 1,$$

(ii) в надкритическом случае, когда  $\lambda > \mu$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta \rightarrow \tau_0 \mid \tau_0 < \infty) = 1,$$

и для всех  $x \geq 0$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta > xc_1 \sqrt{\theta} e^{c_2/\theta} \mid \tau_0 = \infty) \rightarrow e^{-x},$$

где

$$c_1 = \lambda(\lambda - \mu)^{-2} \sqrt{2\pi/\mu}, \quad c_2 = \lambda - \mu - \mu \ln(\lambda/\mu). \quad (28)$$

Теорема 1 (i) и первая часть (ii) доказаны в предыдущем параграфе. Доказательство второй части теоремы 1 (ii) дается после доказательства первой части следующей теоремы.

**Теорема 2.** Если  $X_\theta(0) = m_\theta$  и  $\theta m_\theta \rightarrow a > 0$ , тогда

(i) в надкритическом случае, когда  $\lambda > \mu$

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) \sim c_1 \sqrt{\theta} e^{c_2/\theta}$$

с положительными константами  $c_1, c_2$  данных через (28), и для любого  $x \geq 0$

$$\mathbb{P}_{m_\theta}(\tau_\theta > xc_1\sqrt{\theta}e^{c_2/\theta}) \rightarrow e^{-x},$$

(ii) в докритическом случае, когда  $\lambda < \mu$

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) = \frac{\ln(a\theta^{-1}) + \ln \frac{\mu - \lambda}{\mu} + \ln \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda + a} + \gamma}{\mu - \lambda} + o(1), \quad (29)$$

и для любого  $x \geq 0$

$$\mathbb{P}_{m_\theta} \left( \tau_\theta \leq \frac{\ln(a\theta^{-1}) + \ln \frac{\mu - \lambda}{\mu} + \ln \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda + a} + x}{\mu - \lambda} \right) \rightarrow e^{(-e^{-x})}. \quad (30)$$

(iii) в критическом случае, когда  $\lambda = \mu$

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) \sim \frac{(\pi/2)^{3/2}}{\sqrt{\theta\mu}}.$$

Асимптотические формулы для  $\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta)$  в Теореме 2 (ii), (iii) проверены через симуляции как показано на рисунках 4, 5. Сравнивая асимптотическую формулу (26) для линейного процесса рождения и гибели с формулой для процесса с конкуренцией (29) мы видим, что при  $\theta \rightarrow 0$  и  $\theta m_\theta \rightarrow a$  средняя продолжительность жизни уменьшается на

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_0) - \mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) \rightarrow \frac{1}{\mu - \lambda} \ln \frac{\mu - \lambda + a}{\mu - \lambda}.$$

Как следовало ожидать, эта разница становится малым при больших значениях  $\mu$  и/или при малых значениях  $a$ .

Заметим, что Теорема 2 (ii) обеспечивает аналог слабой сходимости (17) для линейных процессов рождения и гибели, однако мы не смогли найти аналог (18) в критическом случае. Следующая лемма играет важную роль в асимптотическом анализе всех трех случаев.



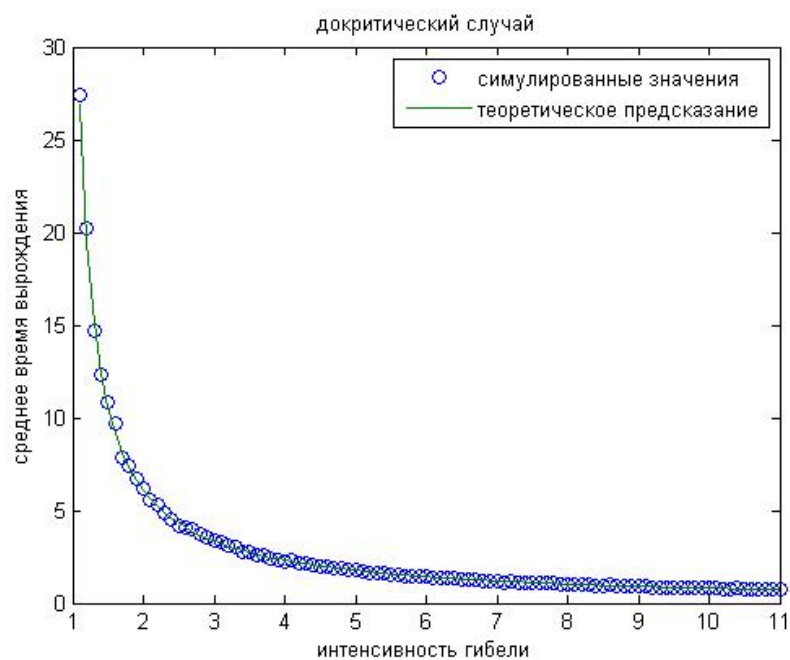


Рисунок 4 — Средние из 100 симуляций для каждого значения интенсивности гибели показаны в зависимости от значений, предсказываемых в Теореме 2 (ii). Выбор параметров: начальный размер популяции  $m_0 = 1000$ , интенсивность конкуренции  $\theta = 0.001$ , интенсивность рождения  $\lambda = 1$

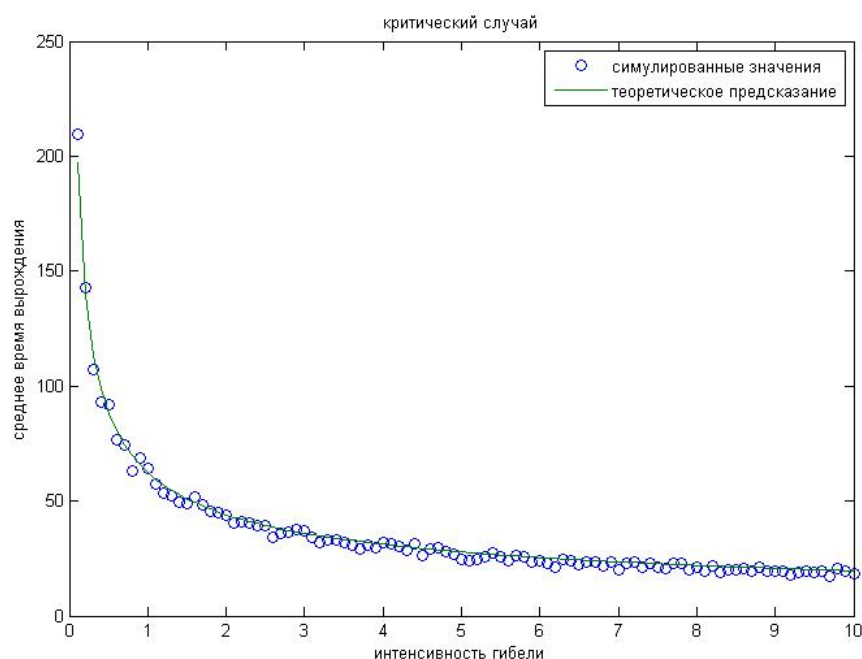


Рисунок 5 — Средние из 100 симуляций для  $m_0 = 1000$ ,  $\theta = 0.001$  показаны в зависимости от значений, предсказываемых в Теореме 2 (iii)

**Лемма 1.** Для нашей конкретной модели функция  $\pi_j = \prod_{i=0}^{j-1} \frac{\mu + \theta i}{\lambda}$  удовлетворяет аппроксимацию

$$\pi_j = (1 + j\theta/\mu)^{-1/2} e^{-W(j\theta)/\theta} (1 + \eta_j(\theta)), j \geq 1, \quad (31)$$

где  $W(x) = x - x \ln \frac{\mu + x}{\lambda} - \mu \ln \frac{\mu + x}{\mu}$  и для всех фиксированных  $T > 0$

$$\sup_{1 \leq j \leq T/\theta} |\eta_j(\theta)| \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Заметим, что

$$\begin{aligned} \theta \ln \pi_j &= \theta \sum_{k=0}^{j-1} \ln \frac{\mu + k\theta}{\lambda} \\ &= \int_0^{j\theta} \ln \frac{\mu + y}{\lambda} dy - \sum_{k=0}^{j-1} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \ln \frac{\mu + y}{\mu + k\theta} dy \end{aligned}$$

первый интеграл считается интегрированием по частям, а во втором слагаемом

$$\begin{aligned} \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \ln \frac{\mu + y}{\mu + k\theta} dy &= \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \ln \left( 1 + \frac{y - k\theta}{\mu + k\theta} \right) dy \\ &= \int_{k\theta}^{(k+1)\theta} \left( \frac{y - k\theta}{\mu + k\theta} + O(\theta^2) \right) dy = \frac{\theta^2}{2(\mu + k\theta)} + O(\theta^3). \end{aligned}$$

Отсюда сумма вычисляется как

$$\frac{\theta}{2} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\theta}{\mu + k\theta} + O(\theta^3) \sim \frac{1}{2} \theta \ln \frac{\mu + j\theta}{\mu} + O(j\theta^3),$$

тогда

$$= -W(j\theta) - \frac{\theta}{2} \sum_{k=0}^{j-1} \frac{\theta}{\mu + k\theta} + O(j\theta^3).$$

Остается проверить, что

$$\sup_{j \geq 0} \left| \prod_{k=0}^j e^{-\frac{\theta}{\mu+k\theta}} - \frac{\mu}{\mu+j\theta} \right| \rightarrow 0.$$

Действительно, произведение можно переписать в виде

$$\prod_{k=0}^j e^{-\frac{\theta}{\mu+k\theta}} = e^{-\sum_{k=0}^j \frac{\theta}{\mu+k\theta}},$$

вычислим сумму

$$\sum_{k=0}^j \frac{\theta}{\mu+k\theta} = \sum_{k=0}^j \frac{1}{k+w}$$

где  $w = \frac{\mu}{\theta}$ , заменив переменную  $k+w$  через  $i$ , получим

$$= \sum_{i=w}^{j+w} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{j+w} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^w \frac{1}{i}$$

используем тот факт, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + r_n,$$

где  $r_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , тогда

$$= \ln \frac{j+w}{w} + \varepsilon_j(\theta),$$

где  $\varepsilon_j(\theta) = r_{j+w} - r_w$ . Поэтому

$$\sup_{j \geq 0} \left| e^{-\left(\ln \frac{\mu+j\theta}{\mu} + \varepsilon_j(\theta)\right)} - \frac{\mu}{\mu+j\theta} \right| \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0,$$

поскольку  $\sup_j |\varepsilon_j(\theta)| \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0$ .

#### 2.4 Доказательство для надкритического случая

В этом параграфе мы сначала доказываем Теорему 2 (i) и в доказательстве Теоремы 1 (ii) заимствованы ключевые идеи из [5].

Мы начнем с рассмотрения надкритических процессов  $X_\theta(\cdot)$  с начальным состоянием  $X_\theta(0) = i_\theta$ , заданного через (20).  $K_\theta \sim \text{Exp}(1 - Q_{i_\theta})$  – это геометрическое число возвращений к исходному состоянию сверху до вымирания. Пусть  $\tau_\theta'$  будет время, необходимое для  $X_\theta(\cdot)$ , чтобы войти в уровень  $i_\theta$  сверху, и  $\tau_\theta''$  время поглощения отсчитывается от момента последнего входа в состояние  $i_\theta$  сверху. Если бы не было визитов в  $i_\theta$  сверху, положим  $\tau_\theta' = \tau_\theta$  и  $\tau_\theta'' = 0$ . Очевидно, что  $\tau_\theta$  является суммой  $\tau_\theta'$ ,  $\tau_\theta''$ , и  $K_\theta$  независимых продолжительностей соответствующих экскурсий. Отсюда следует, что утверждение (ii) Теоремы 2 является прямым следствием следующих трех лемм.

**Лемма 2.** В надкритическом случае при  $\theta \rightarrow 0$

$$1 - Q_{i_\theta} \sim \frac{(\lambda - \mu)\sqrt{\mu}}{\lambda^{3/2}} e^{-c_2/\theta}. \quad (32)$$

**Лемма 3.** В надкритическом случае средняя продолжительность экскурсии  $M_\theta$ , начиная от  $i_\theta$  и возвращаясь к  $i_\theta$  сверху, удовлетворяет

$$M_\theta \sim \sqrt{\frac{2\pi\theta}{\lambda}} \frac{1}{\lambda - \mu}, \theta \rightarrow 0.$$

**Лемма 4.** В условиях Теоремы 2 (i) для любого фиксированного положительного  $\varepsilon$

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta') = o(e^{\varepsilon/\theta}), \quad \mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta'') = o(e^{\varepsilon/\theta}), \quad \theta \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Как показано в параграфе 2.1

$$1 - Q_{i_\theta} = 1 - \frac{\Pi_{i_\theta}}{\Pi_{i_\theta+1}} = \frac{\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_{i_\theta}}{\Pi_{i_\theta+1}} = \frac{\pi_{i_\theta}}{\Pi_{i_\theta+1}}.$$

Согласно Лемме 1

$$\pi_{i_\theta} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} e^{-c_2/\theta}, \quad (33)$$

и с учетом

$$\Pi_{i_\theta} = \sum_{j=0}^{i_\theta-1} \pi_j = \sum_{j=0}^{i_\theta/2} \pi_j + \sum_{j=i_\theta/2+1}^{i_\theta-1} \pi_j,$$

при  $j$  маленьких  $\frac{\mu_j}{\lambda_j}$  будет как  $\frac{\mu}{\lambda}$  и первая сумма

$$\sum_{j=0}^{i_\theta/2} \pi_j = \sum_{j=0}^{i_\theta/2} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - \mu},$$

так как  $\lambda > \mu$  и  $\theta \rightarrow 0$ . Для больших  $j$  верна Лемма 1, т.е.

$$\sum_{j=i_\theta/2+1}^{i_\theta-1} \sqrt{\frac{\mu}{\mu + (j-1)\theta}} e^{-\frac{w(j\theta)}{\theta}} \leq \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} \frac{i_\theta}{2} e^{-\frac{c_2}{\theta}} \rightarrow 0, \theta \rightarrow 0,$$

итак,  $\sum_{j=0}^{i_\theta-1} \pi_j \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$  мы приходим к (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Мы покажем сначала, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \pi_j} \sim \frac{1}{(\lambda - \mu)\sqrt{\mu}} \sqrt{2\pi\theta} e^{c_2/\theta} \quad (34)$$

делением левой суммы на две части, используя порог  $l_\theta = \lceil \frac{2\lambda - \mu}{\theta} \rceil$   $\left(\mu_j > 2\lambda_j \Rightarrow j > \frac{2\lambda - \mu}{\theta}\right)$ . Заметим, что по определениям  $i_\theta$  и  $l_\theta$  мы имеем  $\pi_j \geq \pi_{i_\theta} \cdot 2^{j-l_\theta}$  для  $j > l_\theta$ . Таким образом, применяя (33) мы получим

$$\sum_{j=l_\theta+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \pi_j} = O(\theta / \pi_{i_\theta}) = O(\theta e^{c_2/\theta}).$$

И в самом деле, используя, что  $\frac{1}{j\pi_j} \leq \frac{\theta}{l_\theta} \frac{1}{\pi_{i_\theta}} 2^{-j+l_\theta}$  при  $j > l_\theta$  получим

$$\sum_{j=l_\theta+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j \pi_j} \leq \frac{\theta}{\lambda_{l_\theta} \pi_{l_\theta}} \sum_{j=l_\theta+1}^{\infty} 2^{-j+l_\theta}$$

заменяв переменную  $-j+l_\theta = -k$  и учитывая, что  $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$ ,

$$= \frac{\theta}{\lambda_{l_\theta} \pi_{l_\theta}} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{\theta}{\lambda_{l_\theta} \pi_{l_\theta}}.$$

Осталось подставить (33).

С другой стороны, за счет (31), заменяя переменную  $(j-1)\theta = s$

$$\sum_{j=1}^{l_\theta} \frac{1}{j \pi_j} \sim \int_0^{2\lambda-\mu} \frac{\sqrt{\mu+s}}{s\sqrt{\mu}} e^{W(s)/\theta} ds.$$

Функция  $W(\cdot)$  имеет максимум в интервале интегрирования в точке  $\hat{s} = \lambda - \mu$ , то заключаем, применяя метод Лапласа и используя, что  $W''(\hat{s}) = -\frac{1}{\lambda}$ ,  $\lambda > \mu$

$$\sum_{j=1}^{l_\theta} \frac{1}{\lambda_j \pi_j} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\mu}} \frac{\sqrt{\mu+\hat{s}}}{\hat{s}} \sqrt{\frac{2\pi}{-W''(\hat{s})}} \frac{1}{\theta} e^{W(\hat{s})/\theta} \sim \frac{\sqrt{2\pi\theta} e^{c_2/\theta}}{(\lambda-\mu)\sqrt{\mu}},$$

при  $\theta \rightarrow 0$ , что и завершает доказательство (34), поскольку второе слагаемое (т.е. сумма от  $l_\theta+1$  до  $\infty$ ) стремится к 0 быстрее чем первое слагаемое.

Объединяя (21) и (25) получаем

$$\begin{aligned} M_\theta &= \mathbb{E}_{i_\theta} (i_\theta \mapsto i_\theta + 1 | d_\theta = 0) + \mathbb{E}_{i_\theta+1} (\text{время достижения состояния } i_\theta) \\ &= \beta_{i_\theta}^0 + T_{i_\theta+1} = \frac{\pi_{i_\theta}}{(\pi_{i_\theta} - \Pi_0)(\pi_{i_\theta+1} - \Pi_0)} \sum_{k=1}^{i_\theta} \frac{(\pi_k - \Pi_0)^2}{\lambda_k \pi_k} + \pi_{i_\theta} \sum_{k=i_\theta+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \end{aligned}$$

учитывая, что  $\Pi_0 = 0$

$$= \pi_{i_\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k(i_\theta)}{\lambda_k \pi_k}, \text{ где } \psi_k(i) = \min \left\{ \frac{\pi_k^2}{\pi_i \pi_{i+1}}, 1 \right\}.$$

Соотношения (33) и (34) дают

$$\pi_{i_\theta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sim \sqrt{\frac{2\pi\theta}{\lambda}} \frac{1}{\lambda - \mu},$$

и остается только заметить, что  $\psi_k(i_\theta) \rightarrow 1$  равномерно по  $k$  больше, чем  $\varepsilon/\theta$  однако для малого фиксированного положительного  $\varepsilon$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Заметим, что согласно (23)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta'') &= \frac{1}{\lambda_{i_\theta} + \mu_{i_\theta}} + \mathbb{E}_{i_\theta-1}(\text{время достижения } 0 \mid \text{достигать состояние } 0 \text{ до } i_\theta) \\ &< \mathbb{E}_{i_\theta}(\text{время достижения } 0 \mid \text{достигать состояние } 0 \text{ до } i_\theta + 1) = \sum_{k=1}^{i_\theta} \beta_k^{i_\theta+1} \\ &= \sum_{k=1}^{i_\theta} \frac{\pi_{k-1}}{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_{k-1})(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_k)} \sum_{j=k}^{i_\theta} \frac{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j}, \end{aligned}$$

изменив порядок суммирования

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j} \sum_{k=1}^j \frac{\Pi_k - \Pi_{k-1}}{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_{k-1})(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_k)} \\ &= \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_j)^2}{\lambda_j \pi_j} \sum_{k=1}^j \left( \frac{1}{\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_k} - \frac{1}{\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_j) \Pi_j}{\Pi_{i_\theta+1} \lambda_j \pi_j} = \frac{1}{\lambda \Pi_{i_\theta+1}} \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{(\Pi_{i_\theta+1} - \Pi_j) \Pi_j}{j \pi_j}, \end{aligned}$$

так как  $\Pi_{i_\theta+1} \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{\Pi_j}{j \pi_j} - \frac{\lambda - \mu}{\lambda^2} \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{\Pi_j^2}{j \pi_j},$$

для маленького  $\varepsilon > 0$ , первую сумму можно переписать в виде суммы двух сумм (вторая сумма такая же, только с другим коэффициентом)

$$\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{i_\theta} \frac{\Pi_j}{j \pi_j} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\frac{\varepsilon}{\theta}} \frac{\Pi_j}{j \pi_j} + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=\frac{\varepsilon}{\theta}+1}^{i_\theta} \frac{\Pi_j}{j \pi_j},$$

где в первом слагаемом  $\Pi_j \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda - \mu}$ , а во втором стремится к нулю. Теперь используя выражение для  $\pi_j$  в Лемме 1 и заменяя переменную  $(j-1)\theta = s$ , получим интеграл вида

$$= \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu)\sqrt{\mu}} \int_0^\varepsilon \frac{\sqrt{\mu + s}}{s} e^{\frac{W(s)}{\theta}} ds,$$

используя, что  $s = \varepsilon$  является точкой максимума функций  $W(s)$ , применяя к интегралу метод Лапласа, получим следующее

$$= \frac{1}{\lambda(\lambda - \mu)\sqrt{\mu}} \frac{\sqrt{\mu + \varepsilon}}{\varepsilon} \sqrt{2\pi(\mu + \varepsilon)\theta} e^{\frac{c_\varepsilon}{\theta}} = o(e^{\varepsilon/\theta}),$$

где  $c_\varepsilon = W(\varepsilon)$ . Следовательно,  $\frac{\mathbb{E}(\tau_\theta'')}{e^{\varepsilon/\theta}} \sim \sqrt{\theta} \rightarrow 0$ , при  $\theta \rightarrow 0$ .

С другой стороны, при  $m_\theta \leq i_\theta$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta') &= \mathbb{E}_{m_\theta}(\text{время достижения } i_\theta \mid \text{достигать состояние } i_\theta \text{ до } 0) \\ &< \mathbb{E}_1(\text{время достижения } i_\theta + 1 \mid \text{достигать состояние } i_\theta + 1 \text{ до } 0) \\ &+ \mathbb{E}_{i_\theta+1}(\text{время достижения } i_\theta) \\ &= \sum_{i=1}^{i_\theta} \beta_i^0 + \pi_{i_\theta} \sum_{k=i_\theta+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} = o(e^{\varepsilon/\theta}), \end{aligned}$$

поскольку первое слагаемое, как уже было показано выше, порядка  $o(e^{\varepsilon/\theta})$ , а второе будет порядка  $\theta$  и для  $m_\theta > i_\theta$

$$\mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta') = \mathbb{E}_{m_\theta}(\text{время достижения } i_\theta) = \sum_{k=i_\theta+1}^{\infty} \frac{\Pi_{k \wedge m_\theta}}{\lambda_k \pi_k} = o(e^{\varepsilon/\theta}).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 (ii).** Предположим

$$S_\theta(\delta) = \inf \{t \geq 0 : \widehat{X}_0(t) \geq \delta / \theta\}.$$

С учетом предыдущего анализа, достаточно показать, что для некоторого



фиксированного  $\delta \in \left(0, \frac{\lambda - \mu}{\mu}\right)$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta > S_\theta(\delta) \mid \tau_0 = \infty) \rightarrow 1.$$

Проверим это, показав, что для некоторого фиксированного  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ,

$$b \in \left(0, \frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu}\right)$$

$$\mathbb{P}_{(m,m)}(\tau_\theta > S_\theta(b\theta^{1-\alpha}) \mid \tau_0 = \infty) \rightarrow 1, \quad (35)$$

и

$$\mathbb{P}_m(\tau_\theta > S_\theta(\delta) \mid \tau_\theta > S_\theta(b\theta^{1-\alpha})) \rightarrow 1. \quad (36)$$

Согласно (27) имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(m,m)}(U_k = V_k, k = 0, \dots, \theta^{-\alpha} \mid \tau_0 = \infty) &= 1 - \mathbb{P}_{(m,m)}(\kappa_\theta \leq \theta^{-\alpha}) \\ &= 1 - \frac{(m + \theta^{-\alpha})\theta^{-\alpha}\theta}{\lambda + \mu} \rightarrow 1, \alpha < \frac{1}{2}, \theta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}_m(V_{\theta^{-\alpha}} \geq b\theta^{-\alpha} \mid V_k \neq 0; 1 \leq k \leq \theta^{-\alpha}) \rightarrow 1,$$

так как при условии невырождения  $V_n$  только простое случайное блуждание, ограниченное множеством положительных целых чисел, имеющий дрейф, который ограничен снизу  $\frac{\lambda - \mu}{\lambda + \mu} > 0$ . Объединением последних двух соотношений получим (35).

Наконец, (36) следует из того, что вероятность

$$\mathbb{P}_i(\text{достигать состояние } n \text{ до } 0) = \Pi_i / \Pi_n = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}{\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j}$$

с  $i = b\theta^{-\alpha}$  и  $n = \delta/\theta$  стремится к единице, при  $\theta \rightarrow 0$  и  $\lambda > \mu$ .

## 2.5 Доказательство Теоремы 2 (ii)

В докритическом случае  $s = \lambda/\mu$  лежит в интервале  $(0,1)$ . Чтобы установить приближенную формулу (29) мы обращаемся к (24), который дает

$$\mathbb{E}_m(\tau_\theta) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\pi_j}{\lambda k \pi_k} = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{s^{k-j}}{k} \cdot r_j \cdots r_{k-1},$$

где  $r_i = \frac{\mu}{\mu + i\theta}$  и, с другой стороны,

$$\mathbb{E}_m(\tau_0) = \lambda^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{s^{k-j}}{k}.$$

Таким образом, в силу (26) мы должны убедиться в том, что

$$\sum_{j=0}^{a/\theta} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{s^{k-j}}{k} \cdot (1 - r_j \cdots r_{k-1}) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu - \lambda} \ln \frac{\mu - \lambda + a}{\mu - \lambda}. \quad (37)$$

Чтобы доказать (37), нужно выбрать произвольных, но фиксированно малых  $\varepsilon$  и больших  $T$ . Рассмотрим

$$\sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \sum_{k=j+1}^{j+T} \frac{s^{k-j}}{k} \cdot (1 - r_j \cdots r_{k-1}) = \sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \sum_{k=j+1}^{j+T} \frac{s^{k-j}}{k} \cdot \left( 1 - e^{-\frac{V(k\theta) - V(j\theta)}{\theta}} \right) + o(1),$$

где аналог Леммы 1 был использован с

$$V(x) = (x + \mu) \ln \frac{x + \mu}{\mu} - x,$$

$$V(x) - V(y) = (x - y) \ln \frac{x + \mu}{\mu} + (y + \mu) \left( \ln \frac{x + \mu}{y + \mu} - \frac{x - y}{y + \mu} \right).$$

В связи с последним равенством мы можем заменить  $e^{-\frac{V(k\theta) - V(j\theta)}{\theta}}$  с  $\left( \frac{\mu}{j\theta + \mu} \right)^{k-j}$

и получим

$$\sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \sum_{k=j+1}^{j+T} \frac{s^{k-j}}{k} \cdot (1 - r_j \cdots r_{k-1}) = \sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \sum_{l=1}^T \frac{s^l}{j} \cdot (1 - (1 + j\theta/\mu)^{-l}) + o(1).$$

Поскольку

$$\sum_{l=1}^{\infty} s^l (1 - (1 + j\theta/\mu)^{-l}) = \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s(1+j\theta/\mu)^{-1}} = \frac{s}{1-s} \cdot \frac{j\theta}{\mu(1-s) + j\theta},$$

для получения (37) остается заметить, что

$$\sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \sum_{l=1}^T \frac{s^l}{j} \cdot (1 - (1 + j\theta/\mu)^{-l}) = \frac{s}{1-s} \sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \frac{\theta}{\mu(1-s) + j\theta} + \rho_T(\theta),$$

где

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \limsup_{\theta \rightarrow 0} |\rho_T(\theta)| = 0,$$

и

$$\sum_{j=\varepsilon/\theta}^{a/\theta} \frac{\theta}{\mu(1-s) + j\theta} \rightarrow \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{\mu(1-s) + x} = \ln \frac{\mu - \lambda + a}{\mu - \lambda + \varepsilon}.$$

Это завершает доказательство (29).

Далее доказываем слабую сходимость, указанного в докритическом случае. Фиксируем некоторое  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ . В соответствии с подходом [37], мы устанавливаем (30) после разделения времени вырождения  $\tau_{\theta}$  на две части

$$\tau_{\theta} = \tau_{\theta,1} + \tau_{\theta,2},$$

где  $\tau_{\theta,1}$  – время для  $X_{\theta}(\cdot)$  достижения уровня  $\theta^{-\alpha}$  и  $\tau_{\theta,2}$  – время для процесса  $X_{\theta}(\cdot)$ , начиная с состояния  $\theta^{-\alpha}$  до поглощения в 0.

Если  $X_{\theta}(0) = m_{\theta}$  и  $\theta m_{\theta} \rightarrow a > 0$ , тогда согласно [38] зашкалированный процесс  $\theta X_{\theta}(\cdot)$  сходится по вероятности равномерно на компакте временных интервалов, к детерминированному движению  $x(\cdot)$ , определенного дифференциальным уравнением

$$x'(t) = (\lambda - \mu)x(t) - x^2(t), \quad x(0) = a. \quad (38)$$

Это уравнение имеет явное решение

$$\frac{1}{x(t)} = \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{\mu - \lambda} \right) e^{(\mu - \lambda)t} - \frac{1}{\mu - \lambda}. \quad (39)$$

Решаем формально  $x(t) = \theta^{1-\alpha}$  на данный момент  $t$ . Это требуется детерминированному движению для достижения низкого уровня  $\theta^{1-\alpha}$ , тогда находим

$$\tau_{\theta,1} = \frac{(1-\alpha) \ln \theta^{-1} - \ln(a^{-1} + (\mu - \lambda)^{-1})}{\mu - \lambda} + o(1) \quad (40)$$

по вероятности. Объединение (17) с (27) влечет за собой

$$P\left(\tau_{\theta,2} \leq \frac{\alpha \ln \theta^{-1} + \ln(1 - \lambda/\mu) + x}{\mu - \lambda}\right) \rightarrow e^{-e^{-x}}, \quad \theta \rightarrow 0,$$

который вместе с (40) дает (30).

Полное обоснование (40) можно достичь, используя подход, разработанный в [39] и [37]. Он основан на соответствующих интегралах уравнений

$$\frac{\partial h(z,t)}{\partial t} + (\lambda - \mu - \theta z)z \frac{\partial h(z,t)}{\partial z} = 0,$$

который в нашем случае является

$$h(z,t) = t - \frac{\ln(\mu - \lambda + z) - \ln x + \ln a - \ln(\mu - \lambda + a)}{\mu - \lambda}. \quad (41)$$

Если  $x(t)$  удовлетворяет (39), тогда  $h(x(t),t) = 0$  и, кроме того,  $x(t - h(z,t)) = z$ . Отсюда следует, что

$$|z - x(t)| \leq (\mu - \lambda + a)x(t) |h(z,t)|. \quad (42)$$

Для остальной части доказательства заменяем  $a$  через  $\theta m_\theta$  в соотношениях (39) и (41) определяющих  $x(t)$  и  $h(x,t)$ . Пусть через  $\nu_\varepsilon$  обозначается минимальное  $t > 0$ , такое, что  $|\theta X_\theta(t) - x(t)| > \varepsilon$ , и положим  $H_\theta(t) = |h(\theta X_\theta(t),t)|$  так, что  $H_\theta(0) = 0$ . Согласно [37] модифицированное Следствие 1 Леммы 5 в [39] дает

$$\mathbb{P}_{m_\theta}(H_\theta(t \wedge \nu_\varepsilon) > y) \leq 2 \exp\{-ky + tC_\varepsilon(\theta, k, t)\}$$

для всех положительных  $t$  и  $k$ , где функция  $C_\varepsilon(\theta, k, t)$  может быть выбрана

такой, что для некоторых положительных  $C_1, C_2, C_3$

$$C(\theta, k, t) = \frac{C_1 k \theta}{(x(t) - \varepsilon)^2} + \frac{C_2 k^2 \theta}{(x(t) - \varepsilon)^2} \exp\left\{ \frac{C_3 k \theta}{x(t) - \varepsilon} \right\},$$

если предположим, что  $x(t) > \varepsilon$ . Если к тому же  $x(t) - \varepsilon > C_4 \theta^{1-\alpha}$ , тогда

$$C(\theta, k, t) < C_5 k \theta^{2\alpha-1} + C_6 k^2 \theta^{2\alpha-1} e^{C_7 k \theta^\alpha}.$$

## 2.6 Доказательство Теоремы 2 (iii)

Согласно (24), имеем в критическом случае

$$\begin{aligned} \theta \mathbb{E}_{m_\theta}(\tau_\theta) &= \theta \sum_{j=0}^{m_\theta-1} \pi_j \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} = \\ &= \theta \sum_{k=1}^{m_\theta} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sum_{j=0}^{k-1} \pi_j + \theta \sum_{k=m_\theta+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k \pi_k} \sum_{j=0}^{m_\theta-1} \pi_j, \end{aligned}$$

используем (31) (при  $\lambda = \mu$ ) и делаем замены  $(k-1)\theta = y$ ,  $(j-1)\theta = x$ , тогда

$$\begin{aligned} &\sim \int_0^a \frac{\sqrt{\mu+y}}{\mu y} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{\mu+x}} e^{\frac{W(y)-W(x)}{\theta}} dx dy \\ &+ \int_a^\infty \frac{\sqrt{\mu+y}}{\mu y} e^{W(y)/\theta} dy \cdot \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\mu+x}} e^{-W(x)/\theta} dx = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где  $W(x) = x - (\mu+x) \ln \frac{\mu+x}{\mu}$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} W(x) &= x + (\mu+x) \ln \left( 1 - \frac{x}{\mu+x} \right) \\ &= x + (\mu+x) \left( -\frac{x}{\mu+x} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{(\mu+x)^2} - R \left( \frac{x}{\mu+x} \right) \right) \\ &= -\frac{x^2}{2\mu} (1 + 2r(x)), \end{aligned}$$

где  $r(x) = R\left(\frac{x}{\mu+x}\right) \frac{(\mu+x)^2}{x^2} \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что для любого  $T > 0$  первый интеграл можно разбить на сумму двух интегралов, притом первое слагаемое через замены  $\frac{x}{\sqrt{\mu\theta}} = t$  и  $\frac{y}{\sqrt{\mu\theta}} = z$  при  $\theta \rightarrow 0$  стремится к следующему интегралу

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\mu\theta}} \int_0^{T\sqrt{\mu\theta}} \frac{\sqrt{\mu+y}}{\mu y} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{\mu+x}} e^{\frac{W(y)-W(x)}{\theta}} dx dy \\ &= \int_0^T \frac{\sqrt{\mu+z\sqrt{\mu\theta}}}{\mu z} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\mu+t\sqrt{\mu\theta}}} e^{\frac{t^2-z^2}{2}} e^{t^2 r(t\sqrt{\mu\theta})} e^{-z^2 r(z\sqrt{\mu\theta})} dt dz \\ &\rightarrow \mu^{-1} \int_0^T z^{-1} \int_0^z e^{\frac{t^2-z^2}{2}} dt dz. \end{aligned}$$

С другой стороны, поскольку для  $0 \leq x \leq y$

$$\begin{aligned} W(y) - W(x) &= y - (\mu+y) \ln \frac{\mu+y}{\mu} - x + (\mu+x) \ln \frac{\mu+x}{\mu} \\ &= y - x + (\mu+y) \left[ \ln \frac{\mu+x}{\mu} - \ln \frac{\mu+y}{\mu} \right] + (\mu+x - (\mu+y)) \ln \frac{\mu+x}{\mu} \\ &= y - x + (\mu+y) \ln \left( 1 + \frac{x-y}{\mu+y} \right) + (x-y) \ln \frac{\mu+x}{\mu} \\ &\leq y - x + (\mu+y) \left( -\frac{y-x}{\mu+y} - \frac{1}{2} \left( \frac{y-x}{\mu+y} \right)^2 \right) + (x-y) \ln \frac{\mu+x}{\mu} \\ &= (x-y) \ln \frac{\mu+x}{\mu} - \frac{(y-x)^2}{2(\mu+y)}, \end{aligned}$$

имеем с  $C = \frac{\sqrt{\mu+a}}{\sqrt{\mu}}$

$$\int_{T\sqrt{\mu\theta}}^a \frac{\sqrt{\mu+y}}{y} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{\mu+x}} e^{\frac{W(y)-W(x)}{\theta}} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{T\sqrt{\mu\theta}}^a y^{-1} \left( \int_0^{y/2} e^{-\frac{(y-x)^2}{2(\mu+a)\theta}} dx + \int_{y/2}^y e^{\frac{x-y}{\theta} \ln \frac{\mu+x}{\mu}} dx \right) dy \\
&\leq \frac{C}{2} \int_{T\sqrt{\mu\theta}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{8(\mu+a)\theta}} dy + C \int_{T\sqrt{\mu\theta}}^a y^{-1} \int_{y/2}^y e^{\frac{x-y}{\theta} \ln \frac{\mu+y/2}{\mu}} dx dy \\
&\leq \frac{C\sqrt{\theta}}{2} \int_{T\sqrt{\mu}}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{8(\mu+a)}} dz + C\theta \int_{T\sqrt{\mu\theta}}^a \frac{dy}{y \ln \left( 1 + \frac{y}{2\mu} \right)},
\end{aligned}$$

где последний интеграл оценивается сверху константой плюс

$$\int_{T\sqrt{\mu\theta}}^{2\mu} \frac{dy}{y \ln \left( 1 + \frac{y}{2\mu} \right)} \leq \int_{T\sqrt{\theta/(4\mu)}}^1 \frac{dz}{z \left( z - \frac{z^2}{2} \right)} \leq \frac{2\sqrt{\mu}}{T\sqrt{\theta}} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\mu}{T\sqrt{\mu\theta}} \right).$$

Используя табличный интеграл

$$\int_0^{\infty} z^{-1} \int_0^z e^{\frac{t^2-z^2}{2}} dt dz = \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2}$$

закключаем, что

$$\limsup_{\theta \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\sqrt{\theta}} \int_0^a \frac{\sqrt{\mu+y}}{\mu y} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{\mu+x}} e^{\frac{W(y)-W(x)}{\theta}} dx dy - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \right| \leq \varepsilon_T,$$

где  $\varepsilon_T \rightarrow 0$  as  $T \rightarrow \infty$ .

Остается заметить, что при  $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha e^{-\frac{x^2}{\beta^2}} dx = \alpha\beta\sqrt{\pi}$

$$\int_a^{\infty} \frac{\sqrt{\mu+y}}{\mu y} e^{W(y)/\theta} dy \cdot \int_0^a \frac{1}{\sqrt{\mu+x}} e^{-W(x)/\theta} dx = o(\sqrt{\theta}).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Наши аппроксимации для среднего времени вырождения являются специфическими для популяционной модели, которую мы изучаем. Они должны быть сравнены с аналогичными вычислениями, выполненными в более общей постановке [40], где, однако, строгие обоснования для ряда важных шагов отсутствуют.

### 3 ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ВЕТВЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ ГАЛЬТОНА - ВАТСОНА

Процесс Гальтона-Ватсона является базовой моделью для стохастической динамики численности населения, образованной независимо воспроизводящими частицами. Он имеет долгую историю [41] с его происхождения, относящегося к 1837 году. Этот раздел посвящен процессам Гальтона-Ватсона со счетным числом типов. Один из основателей теории многотипных ветвящихся процессов Б.А.Севастьянов [42-43].

Однотипный процесс Гальтона-Ватсона представляет собой цепь Маркова  $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$  со счетным числом состояний  $\{0,1,2,\dots\}$ . Эволюция процесса описывается через производящую функцию

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad p_1 < 1, \quad (43)$$

где  $p_k$  обозначает вероятность того, что одна частица производит ровно  $k$  потомств. Если частицы воспроизводятся самостоятельно с тем же законом (43), тогда цепь  $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$  представляет последовательные размерности поколения. Здесь, если не указано иное, предполагается, что  $Z_0 = 1$ , т.е. ветвящийся процесс происходит из одной частицы. В связи с репродуктивной независимостью следует, что  $f^{(n)}(s) = \mathbb{E}(s^{Z_n})$  является  $n$ -ой итерацией  $f(s)$ .

Поскольку ноль является поглощающим состоянием процесса Гальтона-Ватсона,  $q^{(n)} = \mathbb{P}(Z_n = 0)$  монотонно возрастает до предела  $q$ , который называется вероятностью вырождения. Вероятность вырождения неявно определяется как минимальное неотрицательное решение уравнения

$$f(x) = x. \quad (44)$$

Одна из ключевых характеристик процесса Гальтона-Ватсона – среднее число потомков  $M = f'(1)$ . В докритическом ( $M < 1$ ) и критическом ( $M = 1$ ) случаях процесс вырождается с вероятностью  $q = 1$ , в то время как в надкритическом случае ( $M > 1$ ) мы имеем  $q < 1$ . Очевидно,  $q = 0$  тогда и только тогда, когда  $p_0 = 0$ .

В надкритическом случае, число потомков частиц прародителей либо конечно с вероятностью  $q$ , либо бесконечно с вероятностью  $1 - q$ . Признавая, что то же самое справедливо для любой частицы, появляющийся в процессах Гальтона-Ватсона, можно различать *скелето-образующие частицы*, имеющие бесконечную линию потомков [44], и *обреченные частицы*, имеющие конечную линию потомков. Графически мы получаем рисунок генеалогического дерева аналогичного приведенному на рисунке 6.



Если не учитывать обреченные частицы, частицы образуют скелет процесса Гальтона-Ватсона с преобразованным законом размножения, исключающего вымирания

$$\tilde{f}(s) = \frac{f(s(1-q) + q) - q}{1-q} \quad (45)$$

и с таким же средним  $\tilde{M} = M > 1$ . Формулу (45) обычно называют преобразованием Харриса-Севастьянова. С другой стороны, обреченные частицы образуют другой ветвящийся процесс, соответствующий надкритическому процессу с условием вымирания. Обреченные частицы производят только обреченные частицы, согласно другому преобразованному закону размножения  $\hat{f}(s) = f(sq)/q$ , который обычно называется дуальным законом размножения и имеет среднюю  $\hat{M} = f'(q) < 1$ . Надкритический процесс Гальтона-Ватсона, в целом, можно рассматривать как разложимые ветвящиеся процессы с двумя подтипами частиц [19]. Каждая скелето-образующая частица должна производить по крайней мере одну новую скелето-образующую частицу, а также может породить ряд обреченных частиц. В параграфе 3.1 это разложение подробно описывается для однотипных надкритических процессов Гальтона-Ватсона.

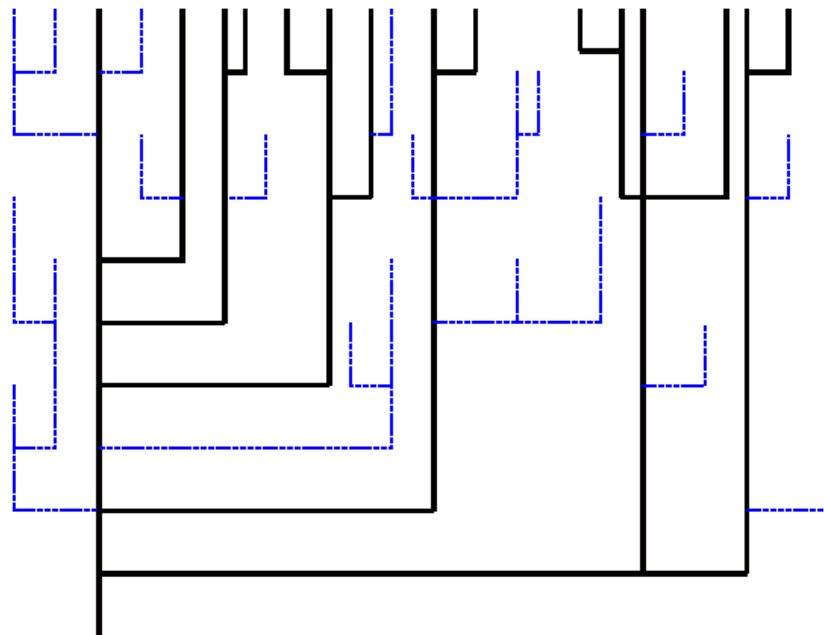


Рисунок 6 – Пример дерева Гальтона-Ватсона до уровня  $n = 10$ . Сплошные линии представляют бесконечную линию потомков, а пунктирные – конечную линию потомков

В частном случае, когда производящая функция размножения (43) является дробно-линейной, многие характеристики процесса Гальтона-Ватсона могут

быть вычислены в явном виде [45]. В параграфе 3.2 мы подводим результаты, касающиеся явного разложения надкритических однотипных процессов Гальтона-Ватсона.

Параграф 3.3 представляет процессы Гальтона-Ватсона со счетным числом типов. Наше внимание сосредоточено на дробно-линейном случае, недавно изученного в [4]. Основные результаты разложимости надкритических дробно-линейных ветвящихся процессов собраны в параграфе 3.4 и их выводы содержатся в параграфе 3.5. Примечательно, что надкритический ветвящийся процесс с условием вырождения снова ветвящийся процесс, был недавно изучен [18] в очень общей ситуации. В общем случае, преобразованные законы размножения характеризуются в неявном виде, и их трудно анализировать. Первые пять параграфов представляют случай, когда свойства скелето-образующих и обреченных частиц очень прозрачны. Далее даются контурные процессы для обреченных и скелето-образующих частиц. Продолжает этот раздел параграф под названием “Предельные теоремы для однотипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент времени”. В последнем параграфе рассматриваются многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде.

### 3.1 Разложение однотипного надкритического процесса Гальтона-Ватсона

Процесс Гальтона-Ватсона — однородная по времени Марковская цепь с переходными вероятностями, удовлетворяющие

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} s^j = (f^{(n)}(s))^i.$$

В надкритическом случае, со средним значением  $M > 1$  и вероятностью вырождения  $q < 1$ , используя свойство  $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij}^{(n)} q^j = q^i$ , можно получить еще один набор переходных вероятностей, предположив, что

$$\widehat{P}_{ij}^{(n)} := P_{ij}^{(n)} q^{j-i}.$$

Преобразованные переходные вероятности также обладают свойством ветвления

$$\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{P}_{ij}^{(n)} s^j = (\widehat{f}^{(n)}(s))^i,$$

где  $\widehat{f}^{(n)}(s) = f^{(n)}(sq)/q$  является  $n$ -ой итерацией так называемой дуальной производящей функций

$$\widehat{f}(s) = \frac{f(sq)}{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{p}_k s^k, \quad \widehat{p}_k = p_k q^{k-1}, k \geq 0.$$

Соответствующий дуальный процесс Гальтона-Ватсона — это докритический ветвящийся процесс со средним  $\widehat{M} = f'(q) < 1$  (рисунок 7). Дуальный процесс Гальтона-Ватсона распределен как оригинальный надкритический процесс Гальтона-Ватсона с условием вырождения:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n = j | Z_0 = i, Z_\infty = 0) &= \frac{\mathbb{P}(Z_n = j, Z_\infty = 0 | Z_0 = i)}{\mathbb{P}(Z_\infty = 0 | Z_0 = i)} \\ &= q^{-i} \mathbb{P}(Z_\infty = 0 | Z_n = j) P_{ij}^{(n)} \\ &= q^{j-i} P_{ij}^{(n)} \\ &= \widehat{P}_{ij}^{(n)}. \end{aligned}$$

Две части кривой на левой панели рисунка 7 представляют два преобразования надкритического ветвящегося процесса. Нижняя левая часть кривой, скопированная на правой панели рисунка 7 использованием различного масштаба, дает производящую функцию дуального процесса. Правая верхняя часть кривой на левой панели соответствует преобразованию Харриса-Севастьянова (45). Функция (45) является производящей функцией для распределения вероятностей

$$\tilde{p}_0 = 0, \tilde{p}_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_i \binom{i}{k} q^{i-k} (1-q)^{k-1}$$

со средним  $\tilde{M} = M$  в качестве исходного распределения потомства. Легко видеть, что  $n$ -ая итерация  $\tilde{f}(s)$  задается через

$$\tilde{f}^{(n)}(s) = \frac{f^{(n)}(s(1-q) + q) - q}{1-q}.$$

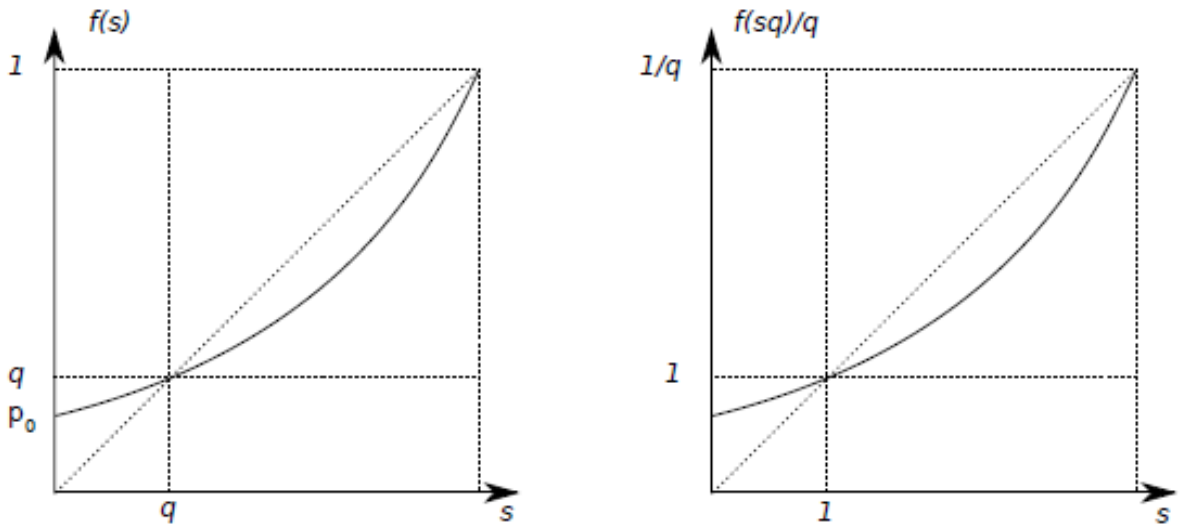


Рисунок 7 – Дуальность докритического и надкритического случаев. Слева: надкритическая производящая функция (43) с двумя положительными корнями  $(q, 1)$  для уравнения (44). Справа: дуальная производящая функция нарисованная на другом масштабе

Заглядывая в будущее системы воспроизводящих частиц мы можем различать два подтипа:

- скелето-образующие частицы с бесконечной линией потомков (строящие скелет генеалогического дерева),
- обреченные частицы, имеющие конечную линию частиц.

Они – подтипы разложимого двухтипного процесса Гальтона-Ватсона  $\{(S_n, D_n)\}_{n=0}^{\infty}$ , где  $S_n + D_n = Z_n$ .

Совместный закон размножения для скелето-образующих частиц имеет следующую производящую функцию

$$F(s, t) = \mathbb{E}(s^{S_1} t^{D_1}) = \frac{f(s(1-q) + tq) - f(tq)}{1-q}.$$

Проверка свойства ветвления для разложимого процесса дается

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(s^{S_n} t^{D_n} | Z_{\infty} > 0) &= \frac{\mathbb{E}(s^{Z_{1n}} t^{Z_{2n}} \mathbf{1}_{\{Z_{\infty} > 0\}})}{\mathbb{P}(Z_{\infty} > 0)} \\ &= \frac{\mathbb{E}(s^{S_n} t^{D_n}) - \mathbb{E}(t^{D_n} \mathbf{1}_{\{Z_{\infty} = 0\}})}{1-q} \end{aligned}$$

$$= \frac{f^{(n)}(s(1-q) + tq) - f^{(n)}(tq)}{1-q} = F^{(n)}(s, t).$$

Исходные распределения потомков могут быть восстановлены в виде смеси совместных законов двух подтипов

$$f^{(n)}(s) = (1-q)F^{(n)}(s, s) + q\hat{f}^{(n)}(s).$$

Заметим также, что общее число потомков для скелето-образующих частиц имеет следующее распределение

$$\bar{f}(s) = F(s, s) = \frac{f(s) - f(sq)}{1-q} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{p}_k s^k, \quad \bar{p}_k = (1-q)^{-1}(1-q^k)p_k,$$

со средним  $\bar{M} = \frac{M - \hat{M}q}{1-q}$ . Отсюда следует, что

$$\bar{M} = M + (M - \hat{M})\frac{q}{1-q}$$

и можно подвести итоги взаимоотношений между различными средними потомков

$$\hat{M} < 1 < \tilde{M} = M < \bar{M}.$$

### 3.2 Явные формулы для однопородного дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона

Важным примером процессов Гальтона-Ватсона является дробно-линейный ветвящийся процесс. Его закон размножения имеет дробно-линейную производящую функцию

$$f(s) = h_0 + \frac{h_1 s}{1 + m - ms} \quad (46)$$

полностью характеризуемого двумя параметрами: вероятностью  $h_0 = p_0$  того, что частица не будет иметь потомка, и среднее  $m$  геометрическое число потомков, кроме первого. Здесь  $h_1 = 1 - h_0$  обозначает вероятность наличия, по крайней мере, одного потомка. Заметим, что с  $h_0 = \frac{1}{1+m}$ , производящая

функция (46) описывает Геометрическое  $\left(\frac{1}{1+m}\right)$  распределение со средним  $m$ .

Если  $h_0 = 0$  производящая функция (46) дает Сдвинутое Геометрическое распределение  $\left(\frac{1}{1+m}\right)$  со средним  $m+1$ . Если  $m=0$ , приходим к распределению Бернулли с параметром  $h_1$ .

Поскольку итерации дробно-линейной функции снова дробно-линейные, многие ключевые характеристики дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона могут быть вычислены в явном виде через параметры  $(h_0, m)$ . Например, имеем  $M = h_1(1+m)$ , и если  $M > 1$ , получаем

$$q = h_0(1+m^{-1}) = \frac{1+m-M}{m}.$$

Дуальный закон распределения для (46) снова дробно-линейный

$$\widehat{f}(s) = \widehat{h}_0 + \frac{\widehat{h}_1 s}{1 + \widehat{m} - \widehat{m}s}, \quad \widehat{h}_0 = \frac{m}{m+1}, \quad \widehat{m} = h_0/h_1,$$

с  $\widehat{M} = 1/M$ . Преобразование Харриса-Севастьянова в дробно-линейном случае соответствует Сдвинутому Геометрическому распределению

$$\widetilde{f}(s) = \frac{s}{1 + \widetilde{m} - \widetilde{m}s}, \quad \widetilde{m} = m(1-q) = M - 1.$$

Интересен совместный закон распределения скелето-образующих частиц.

$$\begin{aligned} F(s,t) &= \frac{h_1}{1-q} \left( \frac{s(1-q) + tq}{1+m-m(s(1-q)+tq)} - \frac{tq}{1+m-mtq} \right) \\ &= \frac{s}{1+m-m(s(1-q)+tq)} \cdot \frac{1}{1+\widehat{m}-\widehat{m}t} \\ &= s \cdot \frac{1}{1+m-\widetilde{m}s-(m-\widetilde{m})t} \cdot \frac{1}{1+\widehat{m}-\widehat{m}t} \end{aligned}$$

имеет три независимых компонента:

– одна частица типа 1 (бесконечная линия);

– каждый из Геометрического  $\left(\frac{1}{1+m}\right)$  числа потомков выбирает

независимо скелето-образующий и обреченный подтип с вероятностями  $\widetilde{m}/m$  и  $(m-\widetilde{m})/m$  соответственно;

– Геометрическое  $\left(\frac{1}{1+\widehat{m}}\right)$  число обреченных частиц.

Заметим, что хотя оба маргинальных распределения  $\tilde{f}(s)$  и  $\widehat{f}(s)$  дробно-линейные, разложимый процесс Гальтона-Ватсона  $(S_n, D_n)$  не двухтипный дробно-линейный процесс Гальтона-Ватсона. Распределение общего числа потомков для скелето-образующих частиц не дробно-линейное

$$\bar{f}(s) = \frac{s}{1+m-ms} \cdot \frac{1}{1+\widehat{m}-\widehat{m}s}$$

и имеет среднюю

$$\bar{M} = 1 + m + \widehat{m} = M + (M + 1)\widehat{m}.$$

### 3.3 Процессы Гальтона-Ватсона со счетным числом типов частиц

Процесс Гальтона-Ватсона со счетным числом типов

$$\mathbf{Z}_n = (Z_{1n}, Z_{2n}, \dots), n = 0, 1, 2, \dots$$

описывает демографические изменения в популяции частиц с различными законами размножения в зависимости от типа частиц  $i \in \{1, 2, \dots\}$ . Здесь  $Z_{in}$  число частиц типа  $i$  существующие в поколении  $n$ . В многотипном случае используется векторное обозначение:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots), \mathbf{1} = (1, 1, \dots), \mathbf{e}_i = (1_{\{i=1\}}, 1_{\{i=2\}}, \dots),$$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (x_1 y_1, x_2 y_2, \dots), \mathbf{x}^{-1} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots), \mathbf{x}^{\mathbf{y}} = x_1^{y_1} x_2^{y_2} \dots,$$

пишем  $\mathbf{x}^t$ , если нужен столбец вектора  $\mathbf{x}$ .

Частицы типа  $i$  могут производить случайное число частиц различных типов, так что соответствующие законы размножения даются многомерными производящими функциями

$$f_i(\mathbf{s}) = \mathbb{E}(\mathbf{s}^{\mathbf{Z}_1} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i). \quad (47)$$

Среднее число частиц

$$m_{ij} = \mathbb{E}(Z_{j1} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)$$

удобно обобщить в виде матрицы  $\mathbf{M} = (m_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ . Для  $n$ -го поколения вектор производящих функций  $\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{s})$  с компонентами

$$f_i^{(n)}(\mathbf{s}) = \mathbb{E}(\mathbf{s}^{Z_n} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)$$

получается как итерации  $\mathbf{f}(\mathbf{s})$  с компонентами (47), а матрица средних задается через  $\mathbf{M}^n$ . Вектор вероятности вырождения  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots)$  имеет  $i$ -ю компоненту  $q_i$ , определенную как вероятность вырождения, учитывая, что процесс Гальтона-Ватсона начинается с одной частицы типа  $i$ . Вектор  $\mathbf{q}$  находится как минимальное решение с неотрицательными компонентами уравнения  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , который является многомерной версией (44).

Отныне ограничим наше внимание положительно рекуррентным случаем, когда существует собственное значение Перрона-Фробениуса  $\rho$  для  $\mathbf{M}$  с положительными собственными векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , такими, что

$$\mathbf{v}\mathbf{M} = \rho\mathbf{v}, \mathbf{M}\mathbf{u}^t = \rho\mathbf{u}^t, \mathbf{v}\mathbf{u}^t = \mathbf{v}\mathbf{1}^t = 1, \rho^{-n}\mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{u}^t\mathbf{v}, n \rightarrow \infty.$$

В надкритическом случае  $\rho > 1$ , все  $q_i < 1$  и можно говорить о разложении надкритического процесса Гальтона-Ватсона со счетным числом типов:  $(\mathbf{S}_n, \mathbf{D}_n)$ . Теперь каждый тип разлагается на два подтипа: либо с бесконечной, либо с конечной линией потомков. Разложенный надкритический процесс Гальтона-Ватсона снова процесс Гальтона-Ватсона со счетным числом типов, у которого законы размножений даются через

$$F_i(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \frac{f_i(\mathbf{s}(\mathbf{1} - \mathbf{q}) + \mathbf{t}\mathbf{q}) - f_i(\mathbf{t}\mathbf{q})}{1 - q_i}, \quad \hat{f}_i(\mathbf{t}) = \frac{f_i(\mathbf{t}\mathbf{q})}{q_i}.$$

Как показано в [4], что в дробно-линейном случае, собственное значение Перрона-Фробениуса  $\rho$ , если существует, то будет единственным положительным корнем уравнения

$$m \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \mathbf{g}\mathbf{H}^k \mathbf{1}^t = 1. \quad (48)$$

В положительно рекуррентном случае, когда следующая сумма конечная

$$\beta = m \sum_{k=1}^{\infty} k \rho^{-k} \mathbf{g}\mathbf{H}^k \mathbf{1}^t, \quad (49)$$

собственные векторы Перрона-Фробениуса  $(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  могут быть нормированы таким образом, что  $\mathbf{v}\mathbf{u}^t = \mathbf{v}\mathbf{1}^t = 1$ . Они вычисляются как



$$\mathbf{u}^t = (1+m)\beta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho^{-k} \mathbf{H}^k \mathbf{1}^t, \quad (50)$$

$$\mathbf{v} = \frac{m}{1+m} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-k} \mathbf{g} \mathbf{H}^k. \quad (51)$$

В надкритическом положительно рекуррентном случае с  $\rho > 1$  и  $\beta < \infty$  вектор вероятности вырождения дается через

$$\mathbf{q} = \mathbf{1} - (\rho - 1)(1+m)^{-1} \beta \mathbf{u}. \quad (52)$$

Заметим, что  $\mathbf{g} \mathbf{u}^t = \frac{1+m}{m\beta}$  и

$$\mathbf{g} \mathbf{q}^t = \frac{1+m-\rho}{m}. \quad (53)$$

Общее число потомков для частиц типа  $i$  имеет среднюю

$$M_i = (1 - h_{i0})(1+m). \quad (54)$$

### 3.4 Явные формулы для разложения надкритических дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона со счетным числом типов

В этом параграфе получены явные формулы для разложения надкритических дробно-линейных процессов Гальтона-Ватсона со счетным числом типов. Вывод этих результатов дается в следующем параграфе.

Рассмотрим положительно рекуррентный надкритический случай с  $\rho > 1$  и  $\beta < \infty$ . Показано, что дуальный закон размножения снова дробно-линейный

$$\widehat{f}_i(\mathbf{s}) = \widehat{h}_{i0} + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{h}_{ij} s_j}{1 + \widehat{m} - \widehat{m} \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{g}_j s_j}, \quad (55)$$

где

$$\widehat{h}_{i0} = \frac{h_{i0}}{q_i}, \quad \widehat{h}_{ij} = \frac{h_{ij} q_j}{q_i \rho}, \quad (56)$$

$$\widehat{m} = \frac{1+m-\rho}{\rho}, \quad \widehat{g}_j = \frac{g_j q_j m}{1+m-\rho}. \quad (57)$$

Оказывается, что следующие удивительно простые формулы справедливы для основных характеристик дуальных ветвящихся процессов:

$$\hat{\rho} = \rho^{-1}, \quad (58)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\nu - 1}{\rho - 1}, \quad \nu = m \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{g} \mathbf{H}^n \mathbf{1}^t. \quad (59)$$

Для векторов Перрона-Фробениуса получены следующие выражения:

$$\hat{\mathbf{u}} = \beta \hat{\beta}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{q}^{-1} = (\mathbf{q}^{-1} - \mathbf{1})(1 + m)(M - 1)^{-1}, \quad (60)$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{m}{1 + m} \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{g} \mathbf{H}^k) \mathbf{q}. \quad (61)$$

Покажем, что преобразование Харриса-Севастьянова приводится к многомерному сдвинутому геометрическому распределению

$$\tilde{f}_i(\mathbf{s}) = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{h}_{ij} s_j}{1 + \tilde{m} - \tilde{m} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{g}_j s_j}, \quad (62)$$

где

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{1 - q_j}{1 - q_i} (h_{ij} + m g_j (q_i - h_{i0})), \quad (63)$$

$$\tilde{m} = \rho - 1, \quad \tilde{g}_j = \frac{m}{\rho - 1} g_j (1 - q_j). \quad (64)$$

Более того, докажем, что

$$\tilde{\rho} = \rho, \quad \tilde{\beta} = \frac{\rho}{\rho - 1}, \quad (65)$$

и

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{1}, \quad \tilde{\mathbf{v}} = m \sum_{k=0}^{\infty} \rho^{-1-k} (\mathbf{g} \{ \mathbf{H} + m \rho^{-1} \mathbf{H} \mathbf{q}^t \mathbf{g} \}^k) (\mathbf{1} - \mathbf{q}). \quad (66)$$

**Теорема 3.** Рассмотрим дробно-линейный процесс Гальтона-Ватсона, характеризующийся тройкой  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ . Предположим, что этот процесс надкритический и положительно рекуррентный на пространстве состояний, т.е.  $\rho > 1$  и  $\beta < \infty$ . Его дуальный процесс Гальтона-Ватсона и его скелет также дробно-линейные процессы Гальтона-Ватсона с преобразованными тройками параметров  $(\widehat{\mathbf{H}}, \widehat{\mathbf{g}}, \widehat{m})$  и  $(\widetilde{\mathbf{H}}, \widetilde{\mathbf{g}}, \widetilde{m})$  с компонентами, заданными через (56), (57), (63), (64).

Совместная производящая функция потомков для скелето-образующих частиц типа  $i$  имеет форму

$$F_i(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\widetilde{h}_{ij} s_j}{1 + m - \widetilde{m} \widetilde{\mathbf{g}} \mathbf{s}^t - (m - \widetilde{m}) \widehat{\mathbf{g}} \mathbf{t}^t} \left( h_{ij0} + \frac{\sum_{k=1}^{\infty} h_{ijk} t_k}{1 + \widehat{m} - \widehat{m} \widehat{\mathbf{g}} \mathbf{t}^t} \right), \quad (67)$$

где

$$h_{ij0} = \frac{h_{ij}}{h_{ij} + m g_j (q_i - h_{i0})}, \quad h_{ijk} = \frac{m g_j q_i \widehat{h}_{ik}}{h_{ij} + m g_j (q_i - h_{i0})}.$$

Аналогично однопотипному случаю, мы можем различать в (67) три компонента, но уже зависимых:

– "возрожденная" скелето-образующая частица типа  $i$  может менять свой тип на  $j$  с вероятностью  $\widetilde{h}_{ij}$ ;

– многомерное геометрическое число потомков обоих подтипов независит от  $i$  и  $j$ ;

– дробно-линейное число обреченных потомков с судьбой первого потомка зависит от  $(i, j)$ .

Общее число потомков скелето-образующих частиц типа  $i$  имеет производящую функцию  $\bar{f}_i(s) = F_i(\mathbf{s}\mathbf{1}, \mathbf{s}\mathbf{1})$  следующей формы:

$$\bar{f}_i(s) = \frac{s}{1 + m - m s} \left( 1 - \alpha_i + \frac{\alpha_i s}{1 + \widehat{m} - \widehat{m} s} \right),$$

где  $\alpha_i = \frac{\rho - 1}{1 - q_i} (q_i - h_{i0})$  должна принадлежать интервалу  $(0, 1)$ . Соответствующее среднее число потомков больше, чем данная через (54):

$$\bar{M}_i = 1 + m + \alpha_i (1 + \widehat{m}) = M_i + (1 + m) \left( h_{i0} + \frac{(\rho - 1)(q_i - h_{i0})}{\rho(1 - q_i)} \right).$$

### 3.5 Выводы явных формул, доказательство Теоремы 3

В этом параграфе мы выводим формулы данные в параграфе 3.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (55). Из

$$\widehat{f}_i(\mathbf{s}) = \frac{f_i(\mathbf{s}\mathbf{q})}{q_i} = \frac{h_{i0}}{q_i} + \frac{\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} s_j q_j}{q_i \left( 1 + m - m \sum_{j=1}^{\infty} g_j s_j q_j \right)}$$

отсюда несложно получить (55) с (56) и (57). Должны убедиться, что  $\widehat{\mathbf{g}}\mathbf{1}^t = 1$  и

$$\widehat{h}_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \widehat{h}_{ij}.$$

Первое требование вытекает из (53). Второе получается из

$$\mathbf{H}\mathbf{q}^t = \rho(\mathbf{H}\mathbf{1}^t - \mathbf{1}^t + \mathbf{q}^t) \quad (68)$$

которое доказывается далее. Имеем (соотношение (6) из [4])

$$\mathbf{H} = \mathbf{M} - \frac{m}{1+m} \mathbf{M}\mathbf{1}^t \mathbf{g}$$

и, следовательно,  $\mathbf{M}\mathbf{1}^t = (1+m)\mathbf{H}\mathbf{1}^t$ , которое является (54). Из последних двух равенств и (52) найдем сначала

$$\mathbf{H}\mathbf{q}^t = \frac{1}{1+m} \mathbf{M}\mathbf{1}^t - \rho(\mathbf{1}^t - \mathbf{q}^t) + \frac{\rho-1}{1+m} \mathbf{M}\mathbf{1}^t$$

и потом получим (68).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (58). В силу уравнения (48), которое определяет собственное значение Перрона-Фробениуса для дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона, чтобы показать (58) достаточно проверить, что

$$\widehat{m} \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \widehat{\mathbf{g}} \widehat{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t = 1.$$

Заметим, что согласно (56)

$$\widehat{\mathbf{g}}\widehat{\mathbf{H}}^k = \frac{m}{(1+m-\rho)\rho^k}(\mathbf{g}\mathbf{H}^k)\mathbf{q}. \quad (69)$$

Отсюда следует,

$$\widehat{\mathbf{g}}\widehat{\mathbf{H}}^n\mathbf{1}^t = \frac{m}{(1+m-\rho)\rho^n}\mathbf{g}\mathbf{H}^n\mathbf{q}^t, \quad (70)$$

поэтому мы должны проверить, что

$$m \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{g}\mathbf{H}^n \mathbf{q}^t = \rho. \quad (71)$$

Обращаясь к (68), находим

$$\mathbf{H}^n \mathbf{q}^t = \rho(\mathbf{H}^n \mathbf{1}^t - \mathbf{H}^{n-1} \mathbf{1}^t + \mathbf{H}^{n-1} \mathbf{q}^t), \quad (72)$$

которое влечет

$$(\rho-1) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}^n \mathbf{q}^t = \rho(\mathbf{1}^t - \mathbf{q}^t). \quad (73)$$

Последнее соотношение и (53) дают (71).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (59).** Начиная с аналога (49) находим с помощью (70)

$$\widehat{\beta} = \widehat{m} \sum_{n=1}^{\infty} n \widehat{\rho}^{-n} \widehat{\mathbf{g}}\widehat{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t = \frac{m}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{g}\mathbf{H}^n \mathbf{q}^t.$$

Переписывая (72) как

$$n\mathbf{H}^n\mathbf{q}^t = \rho(n\mathbf{H}^n\mathbf{1}^t - (n-1)\mathbf{H}^{n-1}\mathbf{1}^t + (n-1)\mathbf{H}^{n-1}\mathbf{q}^t) + \rho\mathbf{H}^{n-1}(\mathbf{q}^t - \mathbf{1}^t)$$

получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{H}^n\mathbf{q}^t = \frac{\rho}{\rho-1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{H}^n (\mathbf{1}^t - \mathbf{q}^t).$$

Таким образом,

$$\widehat{\beta} = \frac{m}{\rho - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{g} \mathbf{H}^n (\mathbf{1}^t - \mathbf{q}^t) = \frac{M - 1}{\rho - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА (60) и (61). Из (56) получим  $\widehat{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t = (\mathbf{H}^n \mathbf{q}^t) \mathbf{q}^{-1}$ . Это и аналог (50)

$$\widehat{\mathbf{u}} = (1 + \widehat{m}) \widehat{\beta}^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\rho}^{-n} \widehat{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t$$

в силу (73) дают (60)

$$\widehat{\mathbf{u}} = \frac{(1 + m)(\rho - 1)}{\rho(M - 1)} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}^n \mathbf{q}^t \right) \mathbf{q}^{-1} = (\mathbf{q}^{-1} - \mathbf{1})(1 + m)(M - 1)^{-1}.$$

С другой стороны, аналог (51) вместе с (69) влечет

$$\widehat{\mathbf{v}} = \frac{\widehat{m}}{1 + \widehat{m}} \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\rho}^{-k} \widehat{\mathbf{g}} \widehat{\mathbf{H}}^k = \frac{m}{1 + m} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{g} \mathbf{H}^k \mathbf{q}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Имеем

$$\begin{aligned} & f_i(\mathbf{s}(\mathbf{1} - \mathbf{q}) + \mathbf{t}\mathbf{q}) - f_i(\mathbf{t}\mathbf{q}) \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} s_j (1 - q_j) + \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} t_j q_j}{1 + m - m \sum_{k=1}^{\infty} g_k s_k (1 - q_k) - m \sum_{k=1}^{\infty} g_k t_k q_k} - \frac{\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} t_j q_j}{1 + m - m \sum_{k=1}^{\infty} g_k t_k q_k} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} s_j (1 - q_j)}{1 + m - \widetilde{m} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{g}_k s_k - (m - \widetilde{m}) \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}_k t_k} \\ &+ \frac{(\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} t_j q_j)(m \sum_{k=1}^{\infty} g_k s_k (1 - q_k))}{(1 + m - \widetilde{m} \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{g}_k s_k - (m - \widetilde{m}) \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}_k t_k) \rho (1 + \widehat{m} - \widehat{m} \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{g}_k t_k)}. \end{aligned}$$

Заменяя в последнем числителе на  $m \sum_{j=1}^{\infty} g_j s_j (1-q_j) \sum_{k=1}^{\infty} h_{ik} t_k q_k$  и разделив все выражение на  $1-q_i$ , получим

$$F_i(\mathbf{s}, \mathbf{t}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{s_j (1-q_j) (1-q_i)^{-1}}{1 + m - \tilde{m} \tilde{\mathbf{g}} \mathbf{s}^t - (m - \tilde{m}) \widehat{\mathbf{g}} \mathbf{t}^t} \left( h_{ij} + \frac{m g_j q_i \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{h}_{ik} t_k}{1 + \widehat{m} - \widehat{m} \widehat{\mathbf{g}} \mathbf{t}^t} \right)$$

и соотношение (67) получено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА (62) и (65). Полагая  $\mathbf{t} = \mathbf{1}$  в (67), приходим к (62). Заметим, что согласно определению (63) и соотношениям (53), (68) имеем

$$\tilde{\mathbf{g}} \mathbf{1}^t = 1, \quad \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{1}^t = \mathbf{1}^t.$$

Поскольку  $\tilde{\rho}$  является единственным положительным решением

$$\tilde{m} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\rho}^{-n} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t = 1$$

и  $\tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t = 1$  получим

$$(\tilde{\rho} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\rho}^{-n} = 1.$$

Таким образом,  $\tilde{\rho} = \rho$  и

$$\tilde{\beta} = \tilde{m} \sum_{n=1}^{\infty} n \tilde{\rho}^{-n} \tilde{\mathbf{g}} \tilde{\mathbf{H}}^n \mathbf{1}^t = (\rho - 1) \sum_{n=1}^{\infty} n \rho^{-n} = \frac{\rho}{\rho - 1}.$$

### 3.6 Контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц

Приступим к определению контурных процессов для скелето-образующих и обреченных частиц.

**Теорема 4.** *Многотипные контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц являются Марковскими цепями с соответствующими переходными вероятностями*

$$\mathbb{P}\{(l, i) \rightarrow (l+1, j)\} = \frac{1-q_j}{1-q_i} (h_{ij} + mg_j(q_i - h_{i0})),$$

$$\mathbb{P}\{(l, i) \rightarrow (l-1, 0)\} = 0,$$

$$\mathbb{P}\{(l, 0) \rightarrow (l+1, j)\} = \frac{m}{\rho} g_j(1-q_j), \quad \mathbb{P}\{(l, 0) \rightarrow (l-1, 0)\} = \frac{1}{\rho},$$

$$\mathbb{P}\{(-1, 0) \rightarrow (-1, 0)\} = 1,$$

и

$$\mathbb{P}\{(l, i) \rightarrow (l+1, j)\} = \frac{h_{ij}q_j}{q_i\rho}, \quad \mathbb{P}\{(l, i) \rightarrow (l-1, 0)\} = \frac{h_{i0}}{q_i},$$

$$\mathbb{P}\{(l, 0) \rightarrow (l+1, j)\} = \frac{m}{1+m} g_j q_j, \quad \mathbb{P}\{(l, 0) \rightarrow (l-1, 0)\} = \frac{\rho}{1+m},$$

$$\mathbb{P}\{(-1, 0) \rightarrow (-1, 0)\} = 1,$$

для всех  $i \geq 1, j \geq 1, l \geq 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим контурный процесс для обреченных частиц. Отмечаем вершины контурного процесса парами целых чисел  $(l, i)$  с  $l \geq -1$  и  $i \geq 0$ . Текущее состояние  $(l, i)$  с  $l \geq 0, i \geq 1$  означает следующее: на текущий уровень  $l$  мы пришли снизу и тип этой частицы  $i$ . Если контурный процесс на вершине отмечен как  $(l, 0)$ , тогда снова его текущий уровень  $l$ , но сейчас этот уровень был достигнут сверху. Первый переход с уровня  $-1$  к уровню  $0$  считается обязательным. Но если не будем этого учитывать, то этот контурный процесс будет Марковской цепью. А в случае скелето-образующих частиц, также аналогично отмечаем вершины контурного процесса через  $(l, i)$  с  $l \geq -1$  и  $i \geq 0$  и получим Марковскую цепь.

В первом случае, так как частица типа  $i$  не производит потомка с нулевой вероятностью, мы идем вниз по контурному процессу тоже с нулевой вероятностью. Это еще раз показывает то, что скелето-образующие частицы имеют бесконечное генеалогическое дерево и контурный процесс с бесконечной глубиной.

### 3.7 Предельные теоремы для ветвящегося процесса в случайный момент времени

Хорошо известно, что для критических процессов Гальтона-Ватсона справедлива следующая предельная теорема [46, с. 49].

**Теорема Н [46].** *В критическом случае, когда  $M = 1$ , если производящая функция удовлетворяет условию  $f''(1) = 2B \in (0, \infty)$ , то имеет место*



следующая асимптотика вероятности невырождения процесса за  $n$  поколений

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{Bn}, n \rightarrow \infty.$$

То есть имеется асимптотическое поведение вероятности невырождения за фиксированный момент наблюдений. А что если мы будем наблюдать процесс в случайное время  $T$ ? Какова вероятность невырождения критического процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением наблюдаемого в случайное время? Какова вероятность невырождения процессов близких к критическим в случайный момент времени?

Рассмотрим для простоты однотипный ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением.

В этом случае среднее число потомков вычисляется как  $M = f'(1) = h_1(1+m)$ . Закон размножения за  $n$  поколений сохраняет свойство дробно-линейности [19, с. 6]

$$f^{(n)}(s) = h_0^{(n)} + h_1^{(n)} \frac{s}{1 + m^{(n)} - m^{(n)}s},$$

где

– в надкритическом случае, когда  $M > 1$ , вероятность  $h_1^{(n)} = \frac{M^n(1-t)}{M^n - t}$  и

$$1 + m^{(n)} = \frac{M^n - t}{1 - t};$$

– в докритическом случае, когда  $M < 1$ , вероятность  $h_1^{(n)} = \frac{M^n(t-1)}{t - M^n}$  и

$$1 + m^{(n)} = \frac{t - M^n}{t - 1};$$

– в критическом случае, когда  $M = 1$ , вероятность  $h_1^{(n)} = \frac{1}{1 + mn}$  и

$$1 + m^{(n)} = 1 + mn, \text{ с } t = \frac{1+m}{m} h_0 \text{ и где } h_1^{(n)} \text{ является } \mathbb{P}(Z_n \neq 0) \text{ вероятностью}$$

невырождения.

Аналог теоремы Н для ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона с дробно-линейным распределением

**Теорема I [46].** В критическом случае, когда  $M = 1$ , верна следующая асимптотика вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона за  $n$  поколений

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) \sim \frac{1}{mn}, n \rightarrow \infty.$$

Учитывая эту теорему, хотим получить аналогичный результат для вероятности невырождения дробно-линейного процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения.

Пусть  $T \sim Geom(p)$  – геометрически распределенное случайное время, т.е.  $\mathbb{P}(T = n) = p(1-p)^n$ . Наша цель найти асимптотические свойства вероятности невырождения дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения  $T$ .

В этом параграфе даются асимптотические свойства вероятности невырождения критических дробно-линейных ветвящихся процессов Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдения  $T$ . Из результата видно, что в случайный момент наблюдения вероятность невырождения отличается от случая в теореме I на  $\ln n$  (учитывается, что  $p$  порядка  $\frac{1}{n}$ ). В полученном нами результате вероятность невырождения становится больше за счет  $\ln n$ . Почему больше? Случайный момент  $T$  меньше момента  $n$ . Значит вероятность невырождения больше. Может быть, случайный момент  $T$  больше момента  $n$ , но с маленькой вероятностью  $\mathbb{P}(T > n) = (1-p)^n$  (хвост геометрического распределения). Поэтому в среднем  $T$  меньше момента  $n$ , что и делает вероятность невырождения больше.

Далее рассматриваются близкие к критическому случаю процессы и их вероятности невырождений в случайный момент времени.

Для краткости, вероятность невырождения в случайный момент наблюдения обозначим через  $1 - \mathfrak{Q}_p$ , так как зависит от параметра  $p$ . Она находится по формуле полной вероятности

$$1 - \mathfrak{Q}_p = \mathbb{P}(Z_T \neq 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \mathbb{P}(Z_T \neq 0 | T = n),$$

Заметим, что условная вероятность  $\mathbb{P}(Z_T \neq 0 | T = n)$  совпадает с вероятностью невырождения  $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$ .

**Теорема 5.** *Вероятность невырождения критического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона в случайный момент наблюдений удовлетворяет соотношению*

$$1 - \mathfrak{Q}_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, p \rightarrow 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Эту теорему будем доказывать с помощью Тауберовой теоремы. Вероятность невырождения за  $n$  поколения в критическом случае

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \frac{1}{1 + mn}.$$

Учитывая эту формулу, получим формулу вероятности невырождения в случайный момент времени для критического случая

$$1 - \Omega_p = \mathbb{P}(Z_T \neq 0) = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{1 + mn}.$$

Далее, применяя Тауберову теорему получим асимптотику для вероятности невырождения  $1 - \Omega_p$ . В нашем случае  $a_n = \frac{1}{1 + mn}$ ,  $s = 1 - p$ . Имеем,

$$1 + \frac{1}{1+m} + \frac{1}{1+2m} + \dots + \frac{1}{1+mn} \sim \frac{1}{m} \ln n, n \rightarrow \infty.$$

Сравнивая с (15), замечаем, что  $\kappa = 0$ ,  $\mathfrak{L}(n) = \frac{1}{m} \ln n$ . По утверждению теоремы (15) влечет (14). Тогда имеет место

$$p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n}{1 + mn} \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, p \rightarrow 0+.$$

Это завершает доказательство данной теоремы.

Интересен случай, когда  $M = M(p)$  в зависимости от  $p$  стремится к единице, т.е.  $M(p) \rightarrow 1$  при  $p \rightarrow 0$ .

Учитывая выражение для  $t$ , перепишем вероятность  $\mathbb{P}(Z_n \neq 0)$  в следующем виде в надкритическом и докритическом случаях

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \frac{M^n}{1 + m(1 + M + \dots + M^{n-1})}.$$

Отсюда

$$1 - \Omega_p = p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1 + m(1 + M + \dots + M^{n-1})}. \quad (74)$$

**Теорема 6.** Пусть  $M < 1$ . Если  $\frac{1-M(p)}{p} \rightarrow c$  (при  $p \rightarrow 0$ ), тогда для вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения верно

$$1 - \Omega_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, p \rightarrow 0.$$

**Теорема 7.** Пусть  $M > 1$ . Если  $\frac{M(p)-1}{p} \rightarrow c$  (при  $p \rightarrow 0$ ), тогда для вероятности невырождения процесса в случайный момент наблюдения верно

$$1 - \Omega_p \sim \frac{1}{m} p \ln p^{-1}, p \rightarrow 0.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6.** Рассмотрим отдельно вероятность  $1 - \Omega_p$  в докритическом случае, при  $M < 1$ . Нас интересует асимптотическое поведение вероятности невырождения (74) в случайный момент времени  $T$ , когда  $\frac{1-M(p)}{p} \rightarrow c$  (при  $p \rightarrow 0$ ), т.е. при достаточно малых  $p$  для  $M$  имеется следующее неравенство  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon : \forall p < p_\varepsilon$  выполняется  $1 - (c + \varepsilon)p \leq M \leq 1 - (c - \varepsilon)p$ .

Из оценки для  $M$  получим  $1 - (1 + c + \varepsilon)p \leq M(1 - p) \leq 1 - (1 + c - \varepsilon)p$ . С помощью последнего неравенства и  $M < 1$  оценим сумму от 0 до  $\infty$  снизу

$$\begin{aligned} p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1 + m(1 + M + \dots + M^{n-1})} &\geq p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(1 - (1 + c + \varepsilon)p)^n}{1 + mn} \\ &\geq (1 - (1 + c + \varepsilon)p)^{\varepsilon/p} p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{1}{1 + mn} \geq (1 - (1 + c + \varepsilon)p)^{\varepsilon/p} p \int_0^\varepsilon \frac{dx}{p + mx} \\ &\geq \frac{1}{m} (1 - (1 + c + \varepsilon)p)^{\varepsilon/p} p (\ln p^{-1} + \ln m\varepsilon). \end{aligned}$$

Отсюда,

$$\liminf_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \Omega_p}{p \ln p^{-1}} \geq \frac{e^{-(1+c+\varepsilon)\varepsilon}}{m}. \quad (75)$$

Разделим (74) на две суммы

$$1 - \Omega_p = p \left[ \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\dots+M^{n-1})} + \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\dots+M^{n-1})} \right].$$

Оценивая сверху обе суммы, видим, что основной вклад дает первая сумма

$$\begin{aligned} p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\dots+M^{n-1})} &\leq p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(1-(1+c-\varepsilon)p)^n}{1+mnM^{\varepsilon/p}} \\ &\leq p \sum_{x_n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor p} \frac{p}{p+mx_n e^{\varepsilon/p \ln(1-(c+\varepsilon)p)}} \leq p \left[ 1 + \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{p+mx e^{\varepsilon/p \ln(1-(c+\varepsilon)p)}} \right] \\ &\leq p \left[ \frac{1}{m} \ln p^{-1} + 1 + \frac{1}{m} (p+m\varepsilon e^{\varepsilon/p \ln(1-(c+\varepsilon)p)}) \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что  $\lim_{p \rightarrow 0} e^{\varepsilon/p \ln(1-(c+\varepsilon)p)} = e^{-\varepsilon(c+\varepsilon)}$ . Таким образом, чтобы доказать

$$\limsup_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \Omega_p}{p \ln p^{-1}} \leq \frac{1}{m} \quad (76)$$

достаточно показать, что предел второй суммы при  $p \rightarrow 0$  будет 0.

Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1+m \frac{1-M^n}{1-M}} &\leq \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor+1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1+m \frac{1-M^{\varepsilon/p}}{1-M}} \\ &= \frac{1}{1+\frac{m}{1-M}(1-M^{\varepsilon/p})} \frac{(M(1-p))^{\varepsilon/p}}{1-M(1-p)} \leq p \frac{1-M}{m(1-(c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}} \frac{(1-(1+c-\varepsilon)p)^{\varepsilon/p}}{(1+c-\varepsilon)p} \\ &\rightarrow \frac{c}{me^{-(c-\varepsilon)\varepsilon}} \frac{e^{-(1+c-\varepsilon)\varepsilon}}{1+c-\varepsilon}, p \rightarrow 0, \end{aligned}$$

умножая на  $p$ , получим, что  $p \frac{c}{me^{-(c-\varepsilon)\varepsilon}} \frac{e^{-(1+c-\varepsilon)\varepsilon}}{1+c-\varepsilon}$  стремится к 0, при  $p \rightarrow 0$  и фиксированном  $\varepsilon$ . Полученные (76) и (75) доказывают данную теорему, при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.** Теперь рассмотрим надкритический случай. Также заинтересованы асимптотическим поведением вероятности

невырождения (74) в случайный момент времени  $T$ , когда  $\frac{M(p)-1}{p} \rightarrow c$  (при  $p \rightarrow 0$ ), т.е. при достаточно малых  $p$  для  $M$  имеем следующее:  $\forall \varepsilon > 0, \exists p_\varepsilon, \forall p < p_\varepsilon$  выполняется неравенство  $1 + (c - \varepsilon)p \leq M \leq 1 + (c + \varepsilon)p$ .

С помощью  $M > 1$  и неравенства

$$1 - (1 - c + 2\varepsilon)p \leq M(1 - p) \leq 1 - (1 - c - 2\varepsilon)p,$$

сначала оценим сумму от 0 до  $\infty$  снизу

$$\begin{aligned} 1 - \Omega_p &= p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1 + m(1 + M + \dots + M^{n-1})} \geq p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(1-p)^n}{1 + mn(1 + (c + \varepsilon)p)^{\varepsilon/p}} \\ &\geq p(1-p)^{\varepsilon/p} \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{1}{1 + m_\varepsilon n}, \end{aligned}$$

где  $m_\varepsilon = m(1 + (c + \varepsilon)p)^{\varepsilon/p}$

$$\begin{aligned} &= p(1-p)^{\varepsilon/p} \sum_{x_n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor p} \frac{p}{p + m_\varepsilon x_n} \geq \frac{p(1-p)^{\varepsilon/p}}{m_\varepsilon} \int_p^{p+\varepsilon m_\varepsilon} \frac{dy}{y} \\ &\geq \frac{p(1-p)^{\varepsilon/p}}{m_\varepsilon} (\ln p^{-1} + \ln \varepsilon m_\varepsilon). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\liminf_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \Omega_p}{p \ln p^{-1}} \geq \frac{e^{-\varepsilon}}{m e^{\varepsilon(c+\varepsilon)}}.$$

(при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим нужное нам неравенство). Оценим сумму сверху, для этого (74) выражаем в следующем виде

$$1 - \Omega_p = p \left[ \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(M(1-p))^n}{1 + m(1 + M + \dots + M^{n-1})} + \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1 + m(1 + M + \dots + M^{n-1})} \right].$$

Заметим, что основную роль играет первая сумма

$$\begin{aligned}
p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(M(1-p))^n}{1+m(1+M+\dots+M^{n-1})} &\leq p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{(1-(1-c-2\varepsilon)p)^n}{1+mn} \\
&\leq p \sum_{n=0}^{\lfloor \varepsilon/p \rfloor} \frac{1}{1+mn} \leq p \left[ \frac{1}{m} \ln p^{-1} + 1 + \frac{p+m\varepsilon}{m} \right].
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\limsup_{p \rightarrow 0} \frac{1 - \Omega_p}{p \ln p^{-1}} \leq \frac{1}{m},$$

так как

$$\begin{aligned}
\sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor + 1}^{\infty} \frac{(M(1-p))^n}{1+m \frac{M^n - 1}{M - 1}} &\leq \frac{1}{1 + \frac{m}{M - 1} (M^{\varepsilon/p} - 1)} \sum_{n=\lfloor \varepsilon/p \rfloor + 1}^{\infty} (1 - (1 - c - 2\varepsilon)p)^n \\
&= \frac{M - 1}{m(M^{\varepsilon/p} - 1)} \frac{(1 - (1 - c - 2\varepsilon))^{\varepsilon/p}}{(1 - c - 2\varepsilon)p} \leq \frac{M - 1}{m(1 + (c - \varepsilon)p)^{\varepsilon/p}} \frac{(1 - (1 - c - 2\varepsilon))^{\varepsilon/p}}{(1 - c - 2\varepsilon)p} \\
&\rightarrow \frac{ce^{-\varepsilon(1-c-2\varepsilon)}}{me^{(c-\varepsilon)\varepsilon}(1-c-2\varepsilon)}, p \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Учитывая множитель  $p$ , получим  $p \frac{ce^{-\varepsilon(1-c-2\varepsilon)}}{me^{(c-\varepsilon)\varepsilon}(1-c-2\varepsilon)} \rightarrow 0, p \rightarrow 0$  (при фиксированном  $\varepsilon$ ). Это завершает доказательство теоремы.

### 3.8 Многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде

Рассмотрим закон распределения однотипных частиц в неоднородной среде. Пусть неоднородная среда состоит из двух режимов. В первом режиме частицы размножаются по закону

$$f_1(s) = h_{01} + \frac{h_{11}s}{1 + m_1 - m_1s},$$

с  $h_{01} + h_{11} = 1$ , где  $h_{01}$  – вероятность того, что не будет потомка для первой среды (второй индекс означает номер среды), а  $h_{11}$  – вероятность того, что частица в первом режиме имеет хотя бы один потомок. Во втором режиме закон распределение задается как

$$f_2(s) = h_{02} + \frac{h_{12}s}{1 + m_2 - m_2s},$$

с  $h_{02} + h_{12} = 1$ , где  $h_{02}$  – также вероятность того, что не будет потомка (для второго режима), а  $h_{12}$  – вероятность того, что частица во втором режиме будет иметь хотя бы один потомок.

Пусть первый режим длится  $n_1$  поколений, а второй режим длится  $n_2$  поколений, где  $n_1 + n_2 = n$ . Законы размножения за  $n_1$  и  $n_2$  шагов для двух режимов

$$f_1^{(n_1)}(s) = h_{01}^{(n_1)} + \frac{h_{11}^{(n_1)}s}{1 + m_1^{(n_1)} - m_1^{(n_1)}s},$$

$$f_2^{(n_2)}(s) = h_{02}^{(n_2)} + \frac{h_{12}^{(n_2)}s}{1 + m_2^{(n_2)} - m_2^{(n_2)}s}.$$

И соответственно средние находятся

$$M_1 = f_1'(1) = (1 + m_1)h_{11}$$

$$M_2 = f_2'(1) = (1 + m_2)h_{12}.$$

Производящая функция для процесса в неоднородной среде, которая состоит из двух однородных режимов

$$f_{2\text{reg}}^{(n)}(s) = f_1^{(n_1)}(f_2^{(n_2)}(s)) = h_0^{(n)} + \frac{h_1^{(n)}s}{1 + m^{(n)} - m^{(n)}s},$$

где  $m^{(n)} = m_2^{(n_2)} + m_1^{(n_1)}M_2^{n_2}$ ,  $h_1^{(n)} = \frac{M_1^{n_1}M_2^{n_2}}{1 + m_2^{(n_2)} + m_1^{(n_1)}M_2^{n_2}}$  [47]. Тогда

$$\frac{1}{\mathbb{P}(Z_n \neq 0)} = \frac{1}{M_1^{n_1}M_2^{n_2}} + \frac{m_2^{(n_2)}}{M_1^{n_1}M_2^{n_2}} + \frac{m_1^{(n_1)}}{M_1^{n_1}},$$

где  $m_2^{(n_2)} + m_1^{(n_1)}M_2^{n_2} = m_1M_2^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} M_1^{j-1} + m_2 \sum_{j=1}^{n_2} M_2^{j-1}$ .

Действительно, предположим, что в каждом поколении одного режима будет хотя бы одна частица. И эти частицы будут спиной дерева Гальтона-Ватсона как на рисунке 8, т.е., по крайней мере, одна частица достигает  $n$ -ое поколение. С помощью такого представления получаем среднее число частиц в  $n$ -м



поколении, кроме первой частицы в каждом поколений (при условии, что такой есть). Вектор  $m_1 M_1^{r-1}$  представляет среднее число частиц в  $n$ -м поколении, вытекающих из спинной частицы, сидящий на уровне  $r \in [0, n_1 - 1]$ , когда  $r < n_1$ . Тогда также вектор  $m_2 M_2^{r-1}$  представляет среднее число частиц в  $n$ -м поколении, вытекающих из спинной частицы, сидящей на уровне  $r \in [0, n - 1]$ , когда  $r \geq n_1$ . На каждом уровне  $r$  существует геометрическое число частиц со средним  $m_1$  или  $m_2$ . Суммируя все спинные частицы, получим нужную нам формулу.

Рассмотрим частные случаи:

1-случай.  $M_1 > 1, M_2 > 1, n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \neq 0) &= \frac{M_1^{n_1} M_2^{n_2}}{1 + m_1^{(n_1)} M_2^{n_2} + m_2^{(n_2)}} \\ &= \frac{M_1^{n_1} M_2^{n_2}}{1 + m_1 M_2^{n_2} \sum_{j=1}^{n_1} M_1^{j-1} + m_2 \sum_{j=1}^{n_2} M_2^{j-1}} \rightarrow \frac{M_1 - 1}{m_1}. \end{aligned}$$

2-случай.  $M_1 < 1, M_2 < 1, n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \neq 0) &= \frac{M_1^{n_1} M_2^{n-n_1}}{1 + m_1 M_2^{n-n_1} \sum_{j=1}^{n_1} M_1^{j-1} + m_2 \sum_{j=1}^{n_2} M_2^{j-1}} \\ &= \frac{M_1^{n_1} M_2^{n_2}}{1 + m_1 M_2^{n_2} \frac{1}{1-M_1} + m_2 \frac{1}{1-M_2}} \sim \frac{M_1^{n_1} M_2^{n_2} (1-M_2)}{m_2}. \end{aligned}$$

3-случай.  $M_1 < 1, M_2 > 1, n_1 = const, n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_n \neq 0) &= \frac{M_1^{n_1} M_2^{n-n_1}}{1 + m_1 M_2^{n-n_1} \sum_{j=1}^{n_1} M_1^{j-1} + m_2 \sum_{j=1}^{n_2} M_2^{j-1}} \\ &= \frac{M_1^{n_1} M_2^{n_2}}{1 + m_1 M_2^{n_2} \frac{1-M_1^{n_1}}{1-M_1} + m_2 \frac{M_2^{n_2} - 1}{M_2 - 1}} \rightarrow \frac{M_1^{n_1}}{m_1 \frac{1-M_1^{n_1}}{1-M_1} + m_2 \frac{1}{M_2 - 1}}. \end{aligned}$$

4-случай.  $M_1 = 1, M_2 = 1, n_1 \rightarrow \infty, n_2 \rightarrow \infty$

$$\mathbb{P}(Z_n \neq 0) = \frac{M_1^{n_1} M_2^{n-n_1}}{1 + m_1 M_2^{n-n_1} \sum_{j=1}^{n_1} M_1^{j-1} + m_2 \sum_{j=1}^{n_2} M_2^{j-1}} = \frac{1}{m_1 n_1 + m_2 n_2} \sim \frac{k_\alpha}{n},$$

при  $\frac{n_1}{n} \rightarrow \alpha, 0 < \alpha < 1$ , где  $k_\alpha = \frac{1}{\alpha m_1 + (1-\alpha)m_2}$ .

Если неоднородная среда состоит из  $k$  однородных сред, длительности каждой среды  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , соответственно сумма длительности всех режимов равняется  $n$ , и производящие функций для разных  $k$  сред разные

$f_j(s) = h_{0j} + \frac{h_{1j}s}{1 + m_j - m_j s}$ ,  $j = 1, \dots, k$ . То производящая функция

$$f_{kreg}^{(n)}(s) = f_1^{(n_1)}(f_2^{(n_2)} \dots (f_k^{(n_k)}(s)) \dots) = h_0^{(n)} + \frac{h_1^{(n)} s}{1 + m^{(n)} - m^{(n)} s},$$

где

$$m^{(n)} = m_k^{(n_k)} + m_{k-1}^{(n_{k-1})} M_k^{n_k} + \dots + m_1^{(n_1)} M_2^{n_2} \dots M_k^{n_k},$$

$$h_1^{(n)} = \frac{M_1^{n_1} M_2^{n_2} \dots M_k^{n_k}}{1 + m_k^{(n_k)} + m_{k-1}^{(n_{k-1})} M_k^{n_k} + \dots + m_1^{(n_1)} M_2^{n_2} \dots M_k^{n_k}},$$

и 1 деленная вероятность невырождения

$$\frac{1}{\mathbb{P}(Z_n \neq 0)} = \frac{1}{h_1^{(n)}} = e^{-s_{n_k}} + \sum_{j=2}^k a_{n_{k-j+1}} e^{-s_{n_{k-j+1}}}$$

где  $s_{n_k} = \ln M_1^{(n_1)} + \dots + \ln M_k^{(n_k)}$  и  $a_{n_j} = m_j^{(n_j)}$ ,  $j = 2, \dots, k$ .

Теперь рассматриваем случай, когда есть счетное число типов частиц. Пусть  $i$  фиксированное натуральное число. Частица типа  $i$  имеет потомков типа  $1, 2, \dots$ . Первый потомок может зависеть от типа матери, а типы последующих потомков не зависят от типа матери.

Многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы полностью описываются тройкой  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ . Поясним смысл этих характеристик.

Вероятность того, что частица является частицей типа  $i$  равна  $g_i$ . Считаем, что  $\sum_i g_i = 1$ . Через  $\mathbf{g}$  обозначим векторное вероятностное распределение  $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots)$ . Субстохастическая матрица  $\mathbf{H}$  со строками  $\mathbf{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots)$ , состоящая из неотрицательных чисел, таких, что  $\sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} < 1$ . Вероятностный смысл величины  $h_{ij}$  означает вероятность того, что у материнской частицы типа  $i$  появляется поколение частицы типа  $j$ . Тогда число  $h_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij}$  означает вероятность отсутствия потомка у частицы типа  $i$ . Наконец, выясним вероятностный смысл последнего параметра тройки  $(\mathbf{H}, \mathbf{g}, m)$ . Частицы имеют геометрическое число последующих потомков со средним  $m$ . В терминах индивидуума каждый год, за исключением последнего года его жизни, каждый индивидуум дает независимое геометрическое число потомков со средним  $m$ .

Одна из актуальных проблем в данной модели – это определение вероятности того, что частицы всех типов не вымрут за  $n$  поколение. Если вымрет один тип, то вымрут и остальные типы.

Данный параграф продолжает тематику работы [4]. Наша модель в отличие от ситуации работы [4] учитывает фактор изменения среды обитания.

Постановка задачи:

1. Рассмотрим два режима. Пусть в первом режиме, который длится  $n_1$  поколений многотипные ветвящиеся процессы задаются начальной тройкой  $(\mathbf{H}_1, \mathbf{g}_1, m_1)$ . Второй режим длительностью  $(n - n_1)$  характеризуется тройкой  $(\mathbf{H}_2, \mathbf{g}_2, m_2)$ . Требуется найти при различных соотношениях между  $n_1$  и  $(n - n_1)$  асимптотические формулы для вероятностей невырождения процесса за  $n$  поколений, когда  $n \rightarrow \infty$ .

2. Пусть среда состоит из  $k$  однородных режимов. Найти вероятность невырождения процесса за  $n$  поколений в критическом случае. Какова вероятность невырождения при чередовании двух режимов?

Через  $Z_{in}$  обозначим число частиц типа  $i$  в  $n$ -ом поколений. В частности, если в начале отсутствуют частицы типа 2, то  $Z_{20} = 0$ . Матрица средних значений  $\mathbf{M}$  с элементами  $m_{ij}$ . Величина  $m_{ij}$  означает условное математическое ожидание случайной величины  $Z_{j1}$ , если начальное поколение представляет одну частицу типа  $i$ , то есть  $m_{ij} = \mathbb{E}(Z_{j1} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)$ , где  $\mathbf{e}_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots)$ ,  $\delta_{ki}$  – символ Кронекера ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Пусть  $m_{ij}^{(n)} = \mathbb{E}(Z_{jn} | \mathbf{Z}_0 = \mathbf{e}_i)$ . Согласно теореме Перрона-Фробениуса, если некоторая степень матрицы  $\mathbf{M}$  строго положительна, тогда

$$m_{ij}^{(n)} = \rho^n u_i \vartheta_j + O(\rho_0^n)$$

для некоторого  $0 < \rho_0 < \rho < \infty$ , где  $\rho$  максимальное собственное значение

матрицы  $\mathbf{M}$ . Векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  положительный правый и левый собственные векторы, такие что  $(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 1, (\mathbf{v}, \mathbf{1}) = 1$ .

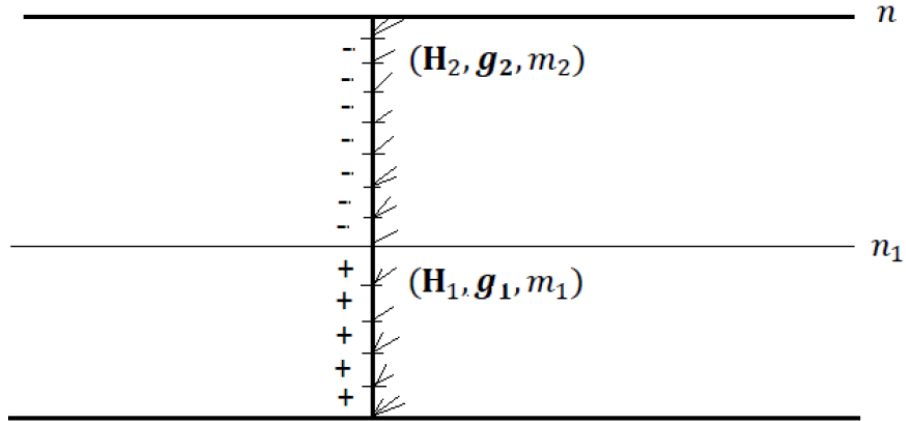


Рисунок 8 — Спинное представление дерева Гальтона-Ватсона, достигшего наблюдаемый уровень в неоднородной среде

**Теорема 8.** Вектор вероятности невырождения удовлетворяет

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) = \mathbf{H}_1^{(n_1)} \mathbf{H}_2^{(n-n_1)} \mathbf{1}^t = \frac{1}{1 + m_1^{(n_1)} + m_2^{(n-n_1)}} \mathbf{M}_1^{n_1} \mathbf{M}_2^{n-n_1} \mathbf{1}^t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в каждом поколении будет хотя бы одна частица. И эти частицы будут спиной дерева Гальтона-Ватсона как на рисунке 8, т.е., по крайней мере, одна частица достигает  $n$ -ое поколение. Аналогично однородному случаю [4] с помощью спинного представления получаем среднее число частиц в  $n$ -ом поколении кроме первой частицы в каждом поколении (при условии, что такой есть). Вектор  $m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_1^{n_1-r-1} \mathbf{M}_2^{n-n_1}$  представляет среднее число частиц в  $n$ -ом поколении, вытекающих из спинной частицы, сидящей на уровне  $r \in [0, n-1]$ , когда  $r < n_1$ . Тогда также вектор  $m_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_2^{n-r-1}$  представляет среднее число частиц в  $n$ -м поколении, вытекающих из спинной частицы, сидящей на уровне  $r \in [0, n-1]$ , когда  $r \geq n_1$ . На каждом уровне  $r$  существуют геометрическое число частиц со средним  $m_1$  или  $m_2$ . Суммируя все спинные частицы, получим

$$\begin{aligned} m_1^{(n_1)} \mathbf{g}_1^{(n_1)} + m_2^{(n-n_1)} \mathbf{g}_2^{(n-n_1)} &= m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_1^{n_1-1} \mathbf{M}_2^{n-n_1} + m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_1^{n_1-2} \mathbf{M}_2^{n-n_1} + \dots \\ &+ m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_2^{n-n_1} + m_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_2^{n-n_1-1} + m_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_2^{n-n_1-2} + \dots + m_2 \mathbf{g}_2. \end{aligned} \quad (77)$$

Отсюда умножая справа на вектор из единиц

$$m_1^{(n_1)} + m_2^{(n-n_1)} = m_1 \sum_{k=0}^{n_1-1} \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_1^k \mathbf{M}_2^{n-n_1} \mathbf{1}^t + m_2 \sum_{j=0}^{n-n_1-1} \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_2^j \mathbf{1}^t.$$

Также аналогично формуле (5) из [4] получим

$$\mathbf{H}_1^{(n_1)} \mathbf{H}_2^{(n-n_1)} = \mathbf{M}_1^{n_1} \mathbf{M}_2^{n-n_1} - \frac{1}{1 + m_1^{(n_1)} + m_2^{(n-n_1)}} \mathbf{M}_1^{n_1} \mathbf{M}_2^{n-n_1} \mathbf{1}^t (m_1^{(n_1)} \mathbf{g}_1^{(n_1)} + m_2^{(n-n_1)} \mathbf{g}_2^{(n-n_1)}). \quad (78)$$

Легко проверяется умножением формулы (78) справа на вектор из единиц.

Для упрощения применим теорему Перрона-Фробениуса в частных случаях, где  $\rho$ -перронов корень.

– Обе среды являются надкритическими ( $\rho_1 > 1, \rho_2 > 1$ ), тогда при  $n_1 \rightarrow \infty, n - n_1 \rightarrow \infty$  вероятность невырождения

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \rightarrow \frac{\beta_1(\rho_1 - 1)}{1 + m_1} \mathbf{u}_1^t.$$

– Среда критическая, т.е.  $\rho_1 = 1, \rho_2 = 1$ , тогда при  $n_1 \rightarrow \infty, n - n_1 \rightarrow \infty$  и  $\frac{n_1}{n} \rightarrow \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) вероятность невырождения

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim \frac{K_\alpha}{n} \mathbf{u}_1^t,$$

где  $K_\alpha = \frac{c_1}{\frac{1 + m_2}{\beta_2}(1 - \alpha) + \frac{1 + m_1}{\beta_1} \alpha c_1}$ ,  $c_1 = (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2^t)$ .

– Случай, когда одна из сред докритическая, а другая надкритическая ( $\rho_1 < 1, \rho_2 > 1$ ), тогда вероятность невырождения

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim \frac{\rho_1^{n_1} \mathbf{u}_1^t (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2^t)}{\frac{1 + m_1}{\beta_1} \frac{1}{1 - \rho_1} (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2^t) + \frac{1 + m_2}{\beta_2} \frac{1}{\rho_2 - 1}}$$

при  $n_1 \rightarrow \infty$ ,  $n - n_1 = \text{const}$ .

– Обе среды докритические, т.е.  $\rho_1 < 1, \rho_2 < 1$ , тогда вероятность невырождения

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim \frac{c_1 \rho_1^{n_1} \rho_2^{n-n_1} \beta_2 (1-\rho_2)}{1+m_2} \mathbf{u}_1^t$$

при  $n_1 \rightarrow \infty$ ,  $n - n_1 \rightarrow \infty$ , где  $c_1 = (\mathbf{v}_1 \mathbf{u}_2^t)$ .

– Случай, когда одна из сред докритическая, а другая надкритическая ( $\rho_1 < 1, \rho_2 > 1$ ), тогда при  $n_1 = \text{const}$ ,  $n \rightarrow \infty$  вероятность невырождения

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \rightarrow \frac{\rho_1^{n_1} \beta_1 (1-\rho_1)}{(1+m_1)(1-\rho_1^{n_1})} \mathbf{u}_1^t.$$

Теперь рассмотрим случай, когда неоднородная среда состоит из  $k$  однородных сред обитания. В этом случае формула (77) имеет вид

$$\begin{aligned} m_1^{(n_1)} \mathbf{g}_1^{(n_1)} + \dots + m_k^{(n_k)} \mathbf{g}_k^{(n_k)} &= m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_1^{n_1-1} \mathbf{M}_2^{n_2} \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} + m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_1^{n_1-2} \mathbf{M}_2^{n_2} \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \\ &+ \dots + m_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{M}_2^{n_2} \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} + m_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_2^{n_2-1} \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} + m_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_2^{n_2-2} \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \\ &+ \dots + m_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} + \dots + m_k \mathbf{g}_k \mathbf{M}_k^{n_k-1} + m_k \mathbf{g}_k \mathbf{M}_k^{n_k-2} + \dots + m_k \mathbf{g}_k, \end{aligned}$$

где  $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ .

Аналогично (78) может быть записана

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^{(n_1)} \dots \mathbf{H}_k^{(n_k)} &= \mathbf{M}_1^{n_1} \mathbf{M}_2^{n_2} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \\ &- \frac{1}{1 + m_1^{(n_1)} + \dots + m_k^{(n_k)}} \mathbf{M}_1^{n_1} \mathbf{M}_2^{n_2} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \mathbf{1}^t (m_1^{(n_1)} \mathbf{g}_1^{(n_1)} + \dots + m_k^{(n_k)} \mathbf{g}_k^{(n_k)}). \end{aligned}$$

где

$$m_1^{(n_1)} + \dots + m_k^{(n_k)} = m_1 \mathbf{g}_1 \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \mathbf{M}_1^{j_1} \mathbf{M}_2^{n_2} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \mathbf{1}^t$$

$$+ m_2 \mathbf{g}_2 \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \mathbf{M}_2^{j_2} \mathbf{M}_3^{n_3} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \mathbf{1}^t + \dots + m_k \mathbf{g}_k \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \mathbf{M}_k^{j_k} \mathbf{1}^t.$$

Таким образом, вероятность невырождения

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) = \mathbf{H}_1^{(n_1)} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_k^{(n_k)} \mathbf{1}^t = \frac{\mathbf{M}_1^{n_1} \mathbf{M}_2^{n_2} \dots \mathbf{M}_k^{n_k} \mathbf{1}^t}{1 + m_1^{(n_1)} + \dots + m_k^{(n_k)}}$$

используя теорему Перрона-Фробениуса

$$\sim \frac{c_2 c_3 \dots c_k \rho_1^{n_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_k^{n_k}}{m_1 \mathbf{g}_1 a_{j_1} c_2 \dots c_k \mathbf{u}_1^t + m_2 \mathbf{g}_2 a_{j_2} c_3 \dots c_k \mathbf{u}_2^t + \dots + m_k \mathbf{g}_k a_{j_k} \mathbf{u}_k^t} \quad (79)$$

где  $c_r = (\mathbf{v}_{r-1}, \mathbf{u}_r^t)$ ,  $r = 2, 3, \dots, k$  и

$$a_{j_1} = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \rho_1^{j_1} \rho_2^{n_2} \dots \rho_k^{n_k}, \quad a_{j_2} = \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \rho_2^{j_2} \rho_3^{n_3} \dots \rho_k^{n_k} \quad \text{и т.д.} \quad a_{j_k} = \sum_{j_k=0}^{n_k-1} \rho_k^{j_k}.$$

Если рассмотреть критический случай ( $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 1$ ) и учесть, что  $m_i \mathbf{g}_i \mathbf{u}_i^t = \frac{1+m_i}{\beta_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , тогда формула (79) упрощается

$$= \frac{c_2 c_3 \dots c_k}{c_2 \dots c_k \frac{1+m_1}{\beta_1} n_1 + c_3 \dots c_k \frac{1+m_2}{\beta_2} n_2 + \dots + \frac{1+m_k}{\beta_k} n_k} \mathbf{u}_1^t.$$

Учитывая, что  $\frac{n_i}{n} \rightarrow \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  при  $n_i \rightarrow \infty$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$  ( $0 < \alpha_i < 1$ ), находим

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim \frac{c_2 \dots c_k}{\left[ c_2 \dots c_k \frac{1+m_1}{\beta_1} \alpha_1 + c_3 \dots c_k \frac{1+m_2}{\beta_2} \alpha_2 + \dots + \frac{1+m_k}{\beta_k} \alpha_k \right] n} \mathbf{u}_1^t. \quad (80)$$

Перепишем формулу (80) критического случая для случая двух чередующихся сред

$$\mathbb{P}(\mathbf{Z}_n \neq \mathbf{0}) \sim \frac{K_{\alpha_1 \dots \alpha_k}}{n} \mathbf{u}_1^t,$$

где для  $k = l + l_1$

$$K_{\alpha_1 \dots \alpha_k} = \frac{c_1^l c_2^{l_1}}{\alpha_1 \frac{1+m_1}{\beta_1} c_1^l c_2^{l_1} + \alpha_2 \frac{1+m_2}{\beta_2} c_1^l c_2^{l_1-1} + \dots + \alpha_{k-1} \frac{1+m_2}{\beta_2} c_1 + \alpha_k \frac{1+m_1}{\beta_1}}.$$

Заметим, что  $l_1 = l$  для четных  $k$  и  $l_1 = l - 1$  для нечетных  $k$ . Этот случай интересен тем, что чередующиеся среды можно рассмотреть как чередование благоприятных и неблагоприятных сред.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория ветвящихся процессов в настоящее время переживает этап бурного развития, мотивированного, в первую очередь, приложениями к теории популяционной генетики и биологии. Она стала весьма разветвленной областью теории вероятностей и мощным инструментом исследования в различных областях математики, таких как теория алгоритмов, теория массового обслуживания, теория случайных отображений, теория просачивания, а также во многих разделах других наук, в число которых входят, в частности, физика, химия и биология. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению процессов рождения и гибели со слабым взаимодействием, также изучаются процессы Гальтона-Ватсона с дробно-линейным законом размножения.

Результаты полученные в диссертации:

- получены предельные теоремы для среднего времени вырождения процесса рождения и гибели с взаимодействием в надкритическом, критическом и докритическом случаях, когда интенсивность взаимодействия между размножающимися частицами стремится к нулю;

- получена сходимость по распределению времени вырождения процесса с взаимодействием для надкритического и докритического случаев;

- доказана сходимость почти наверное времени вырождения процесса с взаимодействием ко времени вырождения линейного процесса рождения и гибели;

- через симуляции проверены асимптотические формулы для среднего времени вырождения процесса с взаимодействием;

- получено разложение надкритического дробно-линейного ветвящегося процесса Гальтона-Ватсона на подтипы (скелето-образующие и обреченные частицы);

- найдены простые явные формулы для основных характеристик дуальных ветвящихся процессов и преобразования Харриса-Севастьянова;

- определены контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц;

- получены предельные теоремы для однопоточного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент наблюдения;

- найдены вероятности невырождения многотипных дробно-линейных ветвящихся процессов в неоднородной среде.

Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в теории популяционной генетики и биологии, а также в различных областях математики.

Основной материал, представленный в диссертации, был опубликован в семи научных журналах и сборниках пяти зарубежных и международных научных конференций.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Haccou P., Jagers P., Vatutin V.A. Branching Processes: Variation, Growth and Extinction of Populations. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. –p. 316.
- 2 Kimmel M. and Axelrod D. Branching Processes in Biology. – New York: Springer, 2002. –p. 230.
- 3 Pakes A.G. Biological Applications of Branching Processes. In Handbook of Statistics 21, Amsterdam; Netherlands: Elsevier Science, 2003. – P. 693-773.
- 4 Sagitov S. Linear-fractional branching processes with countably many types// Stoch. Proc. and their Appl. – 2013. – № 123. – P.2940-2956.
- 5 Andersson H. and Djehiche B. A threshold limit theorem for the stochastic logistic epidemic// J. Appl. Prob. – 1998. – № 35(3) , P.662-670.
- 6 Sagitov S. and Shaimerdenova A. Extinction times for a birth-death process with a weak competition// Lithuanian Mathematical Journal. – 2013. – № 53(2). – P.220-234.
- 7 Sagitov S. and Shaimerdenova A. Decomposition of supercritical linear-fractional branching processes// Applied Mathematics. – 2013. – № 4(2). – P. 352-359.
- 8 Шаймерденова А.К. Многотипные дробно-линейные ветвящиеся процессы в неоднородной среде// Вестник НАН РК. – 2012. – № 5. – С. 46-49.
- 9 Шаймерденова А.К. Предельные теоремы для однотипного дробно-линейного ветвящегося процесса в случайный момент времени// Доклады НАН РК.- 2013. – № 4. – С. 41-48.
- 10 Шаймерденова А.К. Контурные процессы для скелето-образующих и обреченных частиц// Вестник КазНПУ. – 2013. – № 2 (42). – С.190-198.
- 11 Толеуханов А.Е. и Шаймерденова А.К. Резольвента корректно-краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка//Известия НАН РК. – 2010. – № 2 (273). – С.24-29.
- 12 Шаймерденова А.К., Тлеулесова А.М. и Темирбекова Л.Н. Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств//Вестник КазНУ. – 2011. – № 2 (69). – С.58-62.
- 13 Sagitov S. and Shaimerdenova A. Decomposition of supercritical branching processes with countably many types// XV Summer international conference on probability and statistics. – Pomorie; Bulgaria. – 2012, June 23-30. –P. 37.
- 14 Шаймерденова А.К. и Тлеулесова А.М. Обобщенные матричные резольвенты// I международная научно-практическая конференция. – Бийск; Россия. – 2012, 29 января -1 февраля. –С. 78-82.
- 15 Шаймерденова А.К. Время вырождения для популяционной модели с высокой конкуренцией// Conference of applied mathematics. –Литва. –2012, апрель 20. – С. 11-12.
- 16 Shaimerdenova A.K. The dual reproduction law in the linear-fractional case// Международная научная конференция студентов и молодых ученых "Мир науки". –Алматы. –2012, апрель 23-26. –P. 51.
- 17 Шаймерденова А.К. Время вырождения для популяционной модели с высокой конкуренцией// Международная научная конференция студентов,

магистрантов и молодых ученых "Ломоносов 2012". –Астана. –2012, апрель 13-14. –С. 108-109.

18 Jagers P. and Lagerås A.N. General branching processes conditioned on extinction are still branching processes// *Electr. Comm. Probab.* –2008. – № 13, – P.540-547.

19 Athreya K. and Ney P. *Branching processes.* –London-New York-Sydney: John Wiley & Sons, 1972. – p.287.

20 Barbour A. and Luczak M. Laws of large numbers of epidemic models with countably many types// *Ann. Appl. Probab.* – 2008. – № 18. – P. 2208-2238.

21 Hoppe F.M. Coupling and the Non-degeneracy of the Limit in Some Plasmid Reproduction Models// *Theor. Popul. Biol.* –1997. –№ 52. –P. 27-31.

22 Seneta E. and Tavaré S. Some stochastic models for plasmid copy number// *Theor. Popul. Biol.* –1983. –№ 23. –P. 241-256.

23 Joffe A. and Letac G. Multitype linear fractional branching processes// *J. Appl. Probab.* –2006.- № 43. –P. 1091-1106.

24 Jagers P. and Sagitov S. General branching processes in discrete time as random trees// *Bernoulli.* –2008. - № 14. –P. 949-962.

25 Jagers P. *Branching processes with biological applications.* New-York: Wiley, 1975.

26 Lambert A. The contour of splitting trees is a Levy process// *Ann. Probab.* – 2010. –№ 38. –P. 348-395.

27 Geiger J. and Kersting G. Depth-first search of random trees, and Poisson point processes// *In Classical and Modern Branching Processes.* – New York: Springer, 1997.– P. 111-126.

28 Seneta E. *Non-negative matrices and Markov chains.* – New-York: Springer, 2006. –p.294.

29 Pollak E. Survival probabilities and extinction times for some multitype branching processes// *Adv. Appl. Prob.* –1974. –№ 6. –P. 446-462.

30 Евграфов М.А. *Асимптотические оценки и целые функции.* –М.:Наука, 1979. –с.320.

31 Феллер В. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* –М.: Мир, 1967. –т.2. –с.752.

32 Grimmet G.R. and Stirzaker D.R. *Probability and Random Processes (3rd Edition).* –Oxford: Clarendon Press, 2001. –p.596.

33 Lambert A. The branching process with logistic growth// *Ann. Appl. Prob.* – 2005. – № 15. – P. 1506-1535.

34 Karlin S. and McGregor J. The classification of birth and death processes// *Trans. Amer. Math. Soc.* – 1957. –№ 86(2). – P. 366-400.

35 Karlin S. and Taylor M. *A first course in stochastic processes (2nd Edition).* –New York: Academic Press, 1975, –p.557.

36 Sumita U. On conditional passage time structure of birth-death processes// *J. Appl. Prob.* – 1984. – № 21(1). – P.10-21.

37 Barbour A. D. The duration of closed stochastic epidemic// *Biometrika.* – 1975. –№ 62(2). – P. 477-482.

- 38 Kurtz J. Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes// J. Appl. Prob. – 1970. – № 7, –P. 49-58.
- 39 Barbour A.D. On a functional central limit theorem for Markov population processes// Adv. Appl. Prob. – 1974. –№ 6(1). – P. 21-39.
- 40 Doering C.R., Sargsyan K.V. and Sander L.M. Extinction times for birth-death processes: exact results, continuum asymptotics, and the failure of the Fokker-Plank approximation// Multiscale Model. Simul. – 2005. – № 3(2). – P. 283-299.
- 41 Heyde C.C. and Seneta E. J. Bienayme: Statistical Theory Anticipated. –Springer, New York, 1977.
- 42 Севастьянов Б.А. Теория ветвящихся процессов// Успехи мат.наук. –1951. –№ 6. – С.47-99.
- 43 Sewastjanow B. A. Verzweigungsprozesse. – Berlin: Akademie-Verlag, 1974.
- 44 O'Connell N. Yule process approximation of the skeleton of a branching process// J. Appl. Prob. –1993. –№ 41, –P. 725-729.
- 45 Klebaner F., Rosler U. and Sagitov S. Transformations of Galton-Watson processes and linear fractional reproduction// Adv. Appl. Probab. –2007. –№ 39. –P.1036-1053.
- 46 Ватутин В.А. Ветвящиеся процессы. – М.: МИАН, 2008. –с.108.
- 47 Dyakonova E., Vatutin V. and Sagitov S. Survival of branching processes in random environments// Труды МИАН. – 2013. – p.33.