

Казахский национальный университет имени аль – Фараби

УДК 531.3:007 531.3:62-50

На правах рукописи

СУХЕНКО АННА СЕРГЕЕВНА

**Разработка алгоритмов определения и управления ориентацией
низкоорбитальных малых космических аппаратов**

6D060300 – Механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты

кандидат физико – математических наук, доцент

Ракишева З.Б.

PhD – доктор, профессор Токийского Университета

Шиничи Накасукэ

Республика Казахстан

Алматы, 2015

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ	12
1.1 Малый космический аппарат	12
1.2 Системы координат	12
1.3 Координаты углового положения малого космического аппарата	13
1.4 Внешняя среда	15
2 СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА	20
2.1 Постановка задачи	20
2.2 Уравнения вращательного движения малого космического аппарата	21
2.3 Основные компоненты системы определения и управления ориентацией малого космического аппарата.....	24
3 УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ УСЛОВИЯХ НЕДОСТУПНОСТИ ПОЛНОГО ВЕКТОРА ИЗМЕРЕНИЙ	37
3.1 Управление угловым движением малого космического аппарата.....	37
3.2 Исследование устойчивости углового движения малого космического аппарата	38
3.3 Определение параметров углового движения малого космического аппарата	43
4 РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ УЧЕТЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ, ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПОГРЕШНОСТЕЙ В РАБОТЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ - МАХОВИКОВ	60
4.1 Методы разработки робастного управления	60

4.2 Робастное управление ориентацией малого космического аппарата на базе n_{∞} - управления	73
4.3 Методы разработки управления, устойчивого к погрешностям в работе исполнительных органов	84
4.4 Управление ориентацией малого космического аппарата, устойчивое к погрешностям в работе исполнительных органов	92
5 РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА.....	96
5.1 Результаты численного моделирования управляемого углового движения малого космического аппарата при условиях недоступности полного вектора измерений	96
5.2 Результаты численного моделирования управляемого углового движения малого космического аппарата при учете неопределенностей моментов инерции, внешних возмущений и погрешностей в работе исполнительных органов - маховиков.....	101
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	108
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	109

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

ДЗЗ	- дистанционное зондирование Земли;
ИСК	- инерциальная система координат;
КА	- космический аппарат;
ЛМН	- линейное матричное неравенство;
МКА	- малый космический аппарат;
ОСК	- орбитальная система координат;
ССК	- связанная система координат;
СУО	- система определения и управления ориентацией;
ХУ	- характеристическое уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

Оценка современного состояния решаемой научной или научно-технологической задачи. Фактически каждый космический аппарат является уникальным по своему назначению и составу, параметрам служебных подсистем, их характеристикам и т.д. На текущий момент рынок космической промышленности может предложить множество вариантов основных компонентов и служебных подсистем КА в зависимости от его основных характеристик, оставляя потребителю возможность разработки собственного программно - математического обеспечения, которое обеспечит требуемую функциональность космического аппарата.

Одной из основных служебных подсистем КА является система определения и управления ориентацией. Система определения и управления ориентацией обеспечивает ориентирование КА в заданном направлении в процессе полета в зависимости от режимов управления, предусмотренных для выполнения его основных задач (космическая съемка, сбор научной информации, связь и т.д.). Решение этих задач требует определения ориентации космического аппарата с помощью датчиков ориентации и управления ею с помощью исполнительных органов [1].

Датчики ориентации выдают необходимую информацию для определения углового положения и угловой скорости КА. В основном в качестве датчиков ориентации на современных космических аппаратах используют гироскопические датчики, магнитные датчики, солнечные датчики, звездные датчики и т.д. Исполнительные органы вырабатывают управляющий момент, обеспечивающий требуемое угловое положение (ориентацию) КА. К исполнительным органам относят маховики, электромагнитные исполнительные органы, реактивные двигатели и т.д [2].

Определение текущего углового положения и угловой скорости КА, а также выработка сигналов управления для исполнительных органов производится в логическом устройстве управления. В зависимости от задач КА

и требуемой точности ориентирования в логическое устройство КА могут быть заложены различные алгоритмы определения и управления его ориентацией.

В данной работе рассматривается система определения и управления ориентацией малого космического аппарата, относящегося к классу наноспутников. На современных наноспутниках в составе системы определения и управления ориентацией используются солнечные, магнитные, гироскопические датчики, маховики и электромагнитные исполнительные органы. Одними из основных задач, решаемых в рамках данной работы являются: 1) разработка алгоритмов определения и управления ориентацией МКА в условиях доступности частичного набора выходных данных датчиков ориентации; 2) разработка алгоритмов управления ориентацией МКА, обеспечивающих устойчивость требуемой ориентации МКА к возмущениям, обусловленным неопределенностям динамической модели КА и погрешностям в работе исполнительных органов. В качестве основного режима управления ориентацией используется режим орбитальной ориентации, в котором КА может проводить космическую съемку, обмен информацией в ходе сеанса связи и т.д.

Для определения угловой скорости МКА в основном используются гироскопические датчики, которые дают в качестве выходных параметров угловую скорость МКА. Угловое положение МКА может быть определено непосредственно на основе выходных параметров солнечного или магнитного датчика. Однако в связи с различной точностью выходных параметров и частотой обновления выходных параметров приведенных датчиков, а также с тем, что солнечный датчик может работать только на освещенной стороне орбиты на практике для определения ориентации КА используются алгоритмы, использующие комбинированный набор выходных параметров нескольких датчиков. К таким известным алгоритмам можно отнести алгоритм TRIAD, позволяющий определять угловое положение КА на основе двух векторных измерений (например, вектор направления на Солнце и вектор магнитной индукции Земли) [3], алгоритмы QUEST [4] и фильтр Калмана [5, 6].

Для разработки управления ориентацией КА в литературе приводятся различные теории и методики, например, модальное управление [7], оптимальное управление на базе квадратичного критерия качества [8], оптимальное управление по расходу энергии [9], оптимальное по времени управление [10], адаптивное управление [11, 12]. Относительно недавно начала развиваться теория робастного управления для разработки управления, устойчивого к различным возмущениям и неопределенностям [13]. Для разработки робастного управления используются различные методики, в частности теория H_∞ - управления [14], теория управления со скользящим режимом [15], адаптивное управление [16].

Для разработки управления со скользящим режимом требуется подобрать такую скользящую поверхность, где ориентация космического аппарата достигает требуемого характера. Разработка адаптивного управления сопряжена с большим количеством вычислений и в некоторых случаях адаптивное управление может быть реализовано в системах с высокопроизводительными вычислительными устройствами [17]. При разработке H_∞ - управления не возникает подобных сложностей, по этой причине оно может быть успешно использовано и реализовано на вычислительных устройствах систем управления космических аппаратов.

Актуальность исследования. Во многих случаях для выполнения различных задач, поставленных в рамках миссии МКА, необходимо обеспечить требуемую точность его ориентирования при том, что малый космический аппарат в большей степени подвержен внешним возмущениям благодаря своей малой массе. Основными источниками возмущений для МКА являются моменты внешних сил, не меньшее влияние оказывают возмущения, обусловленные погрешностями в работе датчиков и исполнительных органов малого космического аппарата, а также возмущения, обусловленные различными неопределенностями. В связи с этим для решения поставленных перед космическим аппаратом задач необходима разработка алгоритмов высокоточного определения ориентации и алгоритмов управления

ориентацией, устойчивого к различным возмущениям. Многими авторами разработаны различные теории и методики определения и управления ориентацией МКА. Однако не все эти методики могут быть применены в отношении к любому космического аппарату, ввиду того, что все космические аппараты являются уникальными по составу компонентов систем управления. В связи с этим, данная тематика исследований является актуальной в течение последних нескольких десятилетий.

Новизна исследования. Работа посвящена разработке алгоритмов определения и управления ориентацией малого космического аппарата в режиме орбитальной ориентации при неполном векторе измерений и наличии неопределенностей. Новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- разработано управление с обратной связью по угловой скорости и угловому положению МКА для поддержания его орбитальной ориентации в условиях недоступности полного вектора измерений;

- разработано робастное управление для поддержания орбитальной ориентации малого космического аппарата при учете неопределенностей моментов инерции и погрешностей в работе исполнительных органов - маховиков;

- разработано управление, устойчивое к погрешностям в работе исполнительных органов маховиков, на основе применения теории синтеза H_∞ - управления и введения условий на размещение корней характеристического уравнения замкнутой системы управления.

Целью исследования является создание алгоритмов точного определения параметров ориентации малого космического аппарата в условиях недоступности полного вектора измерений и создание алгоритмов управления ориентацией малых космических аппаратов с учетом возмущений, обусловленных погрешностями в работе исполнительных органов и неопределенностями моментов инерции.

Объектом исследования является система определения и управления ориентацией малого космического аппарата.

Предметом исследования является процесс ориентации малого космического аппарата, функционирование компонентов системы определения и управления ориентацией малого космического аппарата, алгоритмы определения и управления ориентацией малого космического аппарата.

Методы исследования: математический аппарат теории движения твёрдого тела, математический аппарат теории управления, компьютерное моделирование, качественные методы исследования, численные методы исследования.

Задачи исследования:

- моделирование основных компонентов системы определения и управления ориентацией малого космического аппарата: магнитного датчика, солнечного датчика, маховика;

- разработка алгоритма определения угловой скорости и углового положения малого космического аппарата с высокой точностью на базе измерений солнечного и магнитного датчиков;

- разработка законов управления ориентацией малого космического аппарата с учетом внешних возмущений, а также возмущений, обусловленных погрешностями в работе исполнительных органов и неопределенностями моментов инерции малого космического аппарата.

Теоретическая и практическая значимость работы. Полученные результаты по разработке алгоритма определения ориентацией могут послужить основой для создания и внедрения алгоритма поддержания орбитальной ориентации МКА на случай отказа датчиков угловых скоростей. Теоретические результаты по разработке робастного управления могут послужить основой для создания и внедрения алгоритма поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях неопределенности моментов инерции и погрешностей в работе исполнительных органов МКА.

Общая характеристика работы. Настоящая диссертационная работа состоит из пяти разделов. В первом разделе приведены основные исходные данные для решения поставленных в рамках диссертации задач: описание рассматриваемого малого космического аппарата и компонентов его системы определения и управления ориентацией, режимы управления МКА и рассматриваемый в работе режим орбитальной ориентации, внешняя среда, используемые в работе системы координат для описания движения МКА, орбита МКА, параметры, с помощью которых описывается движение и ориентация МКА. Во втором разделе описываются уравнения динамики и кинематики вращательного движения МКА, математические модели основных компонентов системы определения и управления ориентацией МКА. Разделы 3,4 посвящены решению основных задач, поставленных в рамках диссертации. В третьем разделе рассматриваются пути решения задачи поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях недоступности полного вектора измерений (недоступность измерений гироскопического датчика), которые заключаются в разработке алгоритма определения углового положения и угловой скорости МКА на базе датчиков углового положения и разработке закона управления ориентацией МКА, обеспечивающего устойчивость его орбитальной ориентации. В четвертом разделе изложена методика синтеза робастного управления ориентацией МКА для решения задачи поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях погрешностей работы его исполнительных органов, неопределенностей моментов инерции МКА и внешних возмущений. В пятом разделе приводятся результаты численного исследования приведенных в диссертации задач определения и управления ориентацией МКА и их анализ.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертационной работе докладывались и обсуждались на Международной конференции "Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках" (г. Самара, Российская Федерация, 2014 г.), на научных семинарах в ДТОО "Институт космической техники и технологий" (г. Алматы,

2014 - 2015 г.г.), на научных семинарах механико - математического факультета КазНУ имени аль - Фараби (2014 - 2015 г.г.), на научных семинарах факультета аэронавтики и астронавтики Токийского университета (г. Токио, Япония, 2014 - 2015 г.г.).

Публикации и общий вклад докторанта. По материалам диссертационной работы опубликовано 10 печатных работ, в том числе 1 статья в зарубежном научном журнале с ненулевым импакт - фактором, 2 статьи в журналах, рекомендованных Комитетом по контролю в сфере образования и науки РК, 1 статья в ведущем российском рецензируемом научном издании, входящем в РИНЦ, 3 доклада в материалах зарубежных международных конференций, 3 доклада в материалах казахстанских международных конференций.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти разделов, которые разбиты на подразделы, заключения и списка использованных источников из 76 наименований, содержит 116 страниц основного текста, включая 25 рисунков.

Автор выражает благодарность отечественному научному руководителю к.ф. - м.н., проф. Ракишевой З.Б. и зарубежному научному руководителю PhD, проф. Шиничи Накасукэ за проявленное внимание к работе и получение большого опыта в решении научных задач.

1 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

1.1 Малый космический аппарат

В диссертационной работе рассматривается малый космический аппарат, прообразом которого является наноспутник на базе платформы CubeSat3U массой 4.2 кг (рисунок 1.1). В качестве полезной нагрузки на наноспутнике рассматривается камера для проведения съемки поверхности Земли.

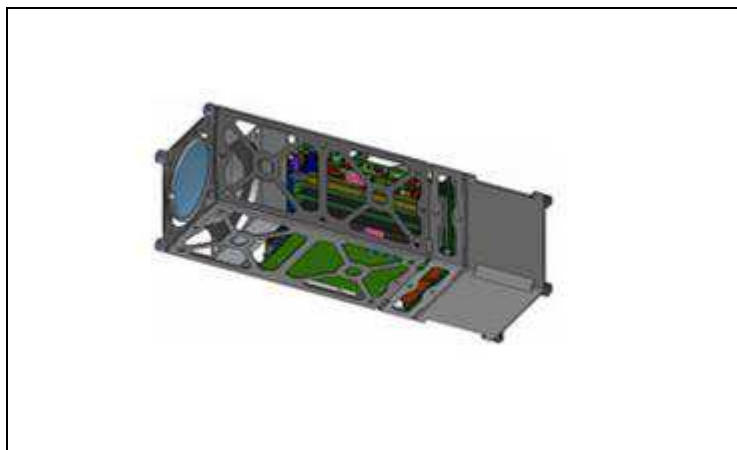


Рисунок 1.1 - Наноспутник на базе платформы CubeSat3U

Орбитой рассматриваемого МКА является солнечно - синхронная орбита высотой 560 км. Основными компонентами системы определения и управления ориентацией рассматриваемого МКА являются трехосный гироскопический датчик, используемый в качестве датчика угловой скорости, трехосный магнитный датчик и двухосные солнечные датчики, используемые в качестве датчиков углового положения, а также три маховика, установленные вдоль главных осей инерции МКА и используемые в качестве исполнительных органов.

1.2 Системы координат

Для описания ориентации МКА введем следующие системы координат (рисунок 1.3):

- $Ox_i y_i z_i$ - неподвижная инерциальная система координат, начало которой находится в центре масс Земли, ось Ox_i лежит в экваториальной плоскости и направлена в точку весеннего равноденствия, ось Oz_i совпадает с осью вращения Земли и направлена на северный полюс Земли, ось Oy_i дополняет систему до правой;

- $Cx_b y_b z_b$ - подвижная связанная система координат, начало которой находится в центре масс МКА, оси данной системы координат совпадают с главными центральными осями инерции МКА;

- $Cx_o y_o z_o$ - орбитальная система координат с началом в центре масс МКА, направление оси Cx_o совпадает с направлением движения МКА, ось Cz_o направлена в центр Земли, ось Cy_o - дополняет систему до правой.

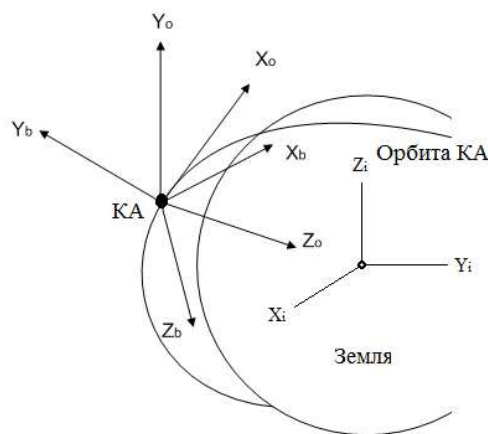


Рисунок 1.3 - Системы координат

В данной работе рассматривается задача поддержания орбитальной ориентации МКА. Под режимом орбитальной ориентации МКА понимается процесс совмещения осей связанной системы координат с осями орбитальной системы координат.

1.3 Координаты углового положения малого космического аппарата

Координаты углового положения КА, представленного моделью твердого тела, должны однозначно определять положение каждой точки МКА. Как

правило, положение КА рассматривается относительно какой - либо базовой системы координат. Для однозначного определения положения каждой точки твердого тела в базовой системе координат достаточно задать положение связанной с телом системы координат относительно базовой системы координат [18].

Положение связанной системы координат относительно базовой системы координат может быть задано с помощью различных параметров: углов Эйлера, углов Эйлера - Крылова, кватернионов [19], модифицированных параметров Родрига [20] и т.д. Из приведенных параметров большое распространение для описания углового положения КА получили кватернионы, в связи с тем, что они представляют собой довольно удобную форму представления углового положения КА, которой легко оперировать в вычислительном плане.

Положение твердого тела может быть задано с помощью кватерниона в соответствии со следующей теоремой: произвольное положение твердого тела задается нормированным кватернионом \vec{Q} по формулам [18, с.17]:

$$\vec{e}_k = \vec{Q} \vec{i}_k \vec{Q}^*, \quad k=1,2,3, \quad (1.1)$$

где

\vec{e}_k , \vec{i}_k - базисные векторы связанной и базовой систем координат, соответственно;

\vec{Q} - кватернион, определяющий положение твердого тела с базисом \vec{e}_k относительно базиса \vec{i}_k ;

\vec{Q}^* - кватернион, обратный к \vec{Q} .

Таким образом, придерживаясь данной теоремы, положение связанной системы координат МКА относительно инерциальной или орбитальной системы координат можно задать с помощью кватерниона \vec{Q} .

Кватернион \vec{Q} представляет собой четырехмерное гиперкомплексное число, которое можно представить в виде суммы скалярной части q_0 и векторной части \vec{q} [18, с.5]:

$$\vec{Q} = q_0 + q_1 \vec{k}_1 + q_2 \vec{k}_2 + q_3 \vec{k}_3 = q_0 + \vec{q}. \quad (1.2)$$

где

$\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ - единичные векторы, образующие правую ортогональную тройку.

В тригонометрической форме записи кватернион \vec{Q} записывается в виде [18, с.9]:

$$\vec{Q} = \cos \alpha + \vec{k} \sin \alpha, \quad (1.3)$$

где

α - угол радиус вектора точки, соответствующей гиперкомплексному числу \vec{Q} ;
 \vec{k} - единичный вектор, коллинеарный вектору \vec{q} .

Алгебра кватернионов позволяет представить конечный поворот тела в пространстве в простой форме в соответствии с теоремой Эйлера [18, с.20]: любое положение твердого тела с неподвижной точкой может быть получено из начального положения одним поворотом вокруг оси \vec{k} на угол $\alpha = 2 \arccos q_0$, где $\vec{Q} = q_0 + \vec{q}$ - нормированный кватернион, задающий положение тела.

Таким образом, скалярная часть кватерниона q_0 характеризует угол поворота вокруг оси конечного поворота МКА, а векторная часть кватерниона \vec{q} характеризует положение оси конечного поворота в пространстве.

1.4 Внешняя среда

На рассматриваемом МКА в качестве датчиков ориентации используются солнечный и магнитный датчик. В связи с этим, для описания их

математических моделей, введем математическую модель движения Солнца и математическую модель магнитного поля Земли.

Земля обращается вокруг Солнца по практически круговой орбите. Однако также можно представить движение Солнца вокруг Земли с параметрами орбиты, равными параметрам орбиты Земли вокруг Солнца. Рассмотрим математическую модель движения Солнца в орбитальной системе координат.

Положение Солнца относительно Земли можно охарактеризовать двумя угловыми координатами. Первая - угол возвышения (рисунок 1.4), который изменяется периодически в течение года на 23 градуса, начиная от первого дня весны, и задается как [21]:

$$\varepsilon_s = \frac{23\pi}{180} \sin\left(\frac{2\pi T_s}{365}\right), \quad (1.4)$$

где

T_s - время, прошедшее в днях с первого дня весны.

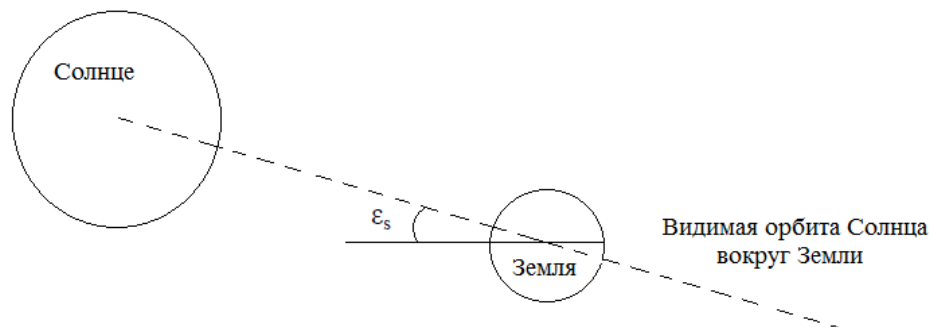


Рисунок 1.4 - Угол возвышения Солнца

Вторая угловая координата задается как угол между направлением на Солнце из центра Земли в первый день весны и текущим направлением на Солнце (рисунок 1.5) и может быть вычислен как [21]:

$$\lambda_s = \frac{2\pi T_s}{365}. \quad (1.5)$$

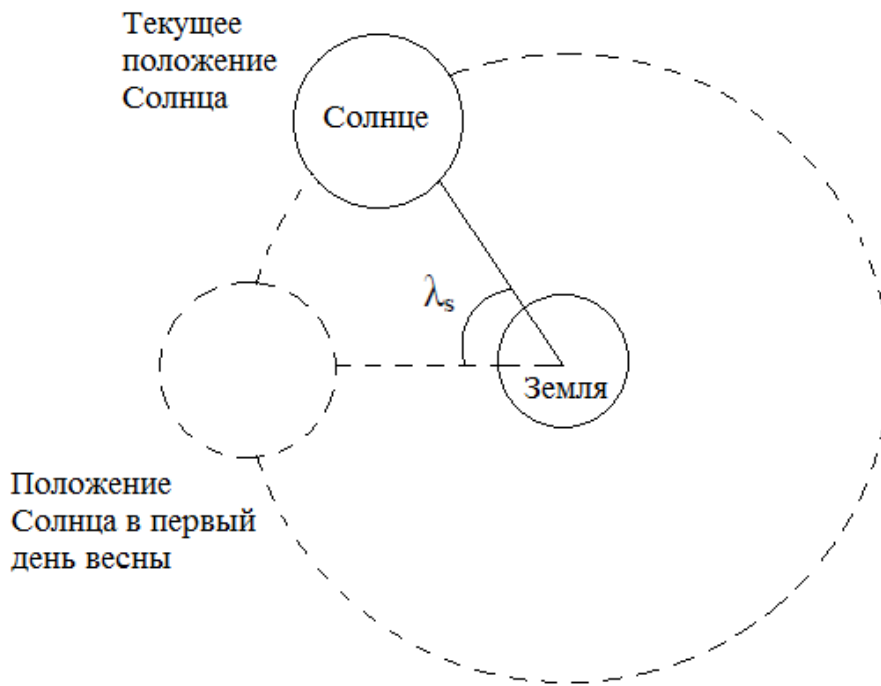


Рисунок 1.5 - Азимутальная угловая координата Солнца

Тогда положение Солнца относительно Земли в текущий момент времени можно определить как:

$$\vec{S}_I = R_{\lambda_s^z} R_{\varepsilon_s^y} \vec{S}_{I, fds}, \quad (1.6)$$

где

\vec{S}_I - вектор положения Солнца относительно Земли (ИСК);

$$R_{\lambda_s^z} = \begin{bmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{\varepsilon_s^y} = \begin{bmatrix} \cos \varepsilon & 0 & -\sin \varepsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varepsilon & 0 & \cos \varepsilon \end{bmatrix};$$

$\vec{S}_{I, fds}$ - положение Солнца относительно Земли в первый день весны,

$$\overrightarrow{S_{I, fds}} = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

Для получения положения Солнца относительно ОСК, необходимо умножить $\overrightarrow{S_I}$ на матрицу перехода между орбитальной и инерциальной системой координат R_i^o :

$$\overrightarrow{S_o} = R_i^o \overrightarrow{S_I}, \quad (1.7)$$

где

$$R_i^o = [\overrightarrow{b_x}, \overrightarrow{b_y}, \overrightarrow{b_z}].$$

При этом:

$$\overrightarrow{b_z} = \frac{\overrightarrow{r_{sat}}}{|\overrightarrow{r_{sat}}|}, \quad (1.8)$$

$$\overrightarrow{b_y} = \frac{\overrightarrow{V_{sat}} \times \overrightarrow{r_{sat}}}{|\overrightarrow{V_{sat}} \times \overrightarrow{r_{sat}}|}, \quad (1.9)$$

$$\overrightarrow{b_x} = \overrightarrow{b_y} \times \overrightarrow{b_z}, \quad (1.10)$$

где

$\overrightarrow{r_{sat}}$ - радиус - вектор, характеризующий положение МКА относительно ИСК.

$\overrightarrow{V_{sat}}$ - вектор скорости МКА.

Рассмотрим далее модель магнитного поля Земли. В соответствии с моделью магнитного поля Земли WMM2010, потенциал магнитного поля Земли может быть разложен в ряд по сферическим функциям [22]:

$$V_{МПЗ} = f(r, \varphi, \lambda, t) = a \sum_{n=1}^k \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos(k\lambda) + h_n^m \sin(k\lambda)] P_n^m(\cos \lambda) \right], \quad (1.11)$$

где

$V_{МПЗ}$ - потенциал магнитного поля Земли;

r, φ, λ - сферические координаты МКА в инерциальной системе координат;

r_e - радиус Земли;

g_n^m, h_n^m - коэффициенты модели магнитного поля Земли WMM 2005.

Дифференцируя (1.11) по сферическим координатам можно определить составляющие вектора магнитной напряженности в ИСК [22]:

$$H_r = -\frac{\partial V_{МПЗ}}{\partial r}, H_\varphi = -\frac{\partial V_{МПЗ}}{\partial \varphi}, H_\lambda = -\frac{\partial V_{МПЗ}}{\partial \lambda}. \quad (1.12)$$

Тогда в соответствии со связью между величинами магнитной напряженности и магнитного поля Земли определим вектор магнитной индукции магнитного поля Земли в соответствии с формулой [23]:

$$\vec{B}_I = \mu_0 \vec{H}_I, \quad (1.13)$$

где

μ_0 - магнитная постоянная, $\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ H / A}^2$;

\vec{H}_I - вектор напряженности магнитного поля Земли в ИСК.

Для получения вектора магнитной индукции в ОСК умножим \vec{H}_I на матрицу перехода между орбитальной и инерциальной системой координат R_i^o :

$$\vec{B}_o = R_i^o \vec{B}_I. \quad (1.14)$$

2 СИСТЕМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

2.1 Постановка задачи

Малые космические аппараты в большей степени подвержены возмущениям по причине их небольшого веса и размеров. Основными внешними возмущениями являются гравитационные и аэродинамические моменты, моменты сил солнечного давления, магнитные моменты. Кроме того дополнительные возмущения возникают вследствие неопределенностей моментов инерции космического аппарата, погрешностей в работе его исполнительных органов и датчиков. Неопределенность моментов инерции имеет место благодаря наличию движущихся частей в конструкции космического аппарата (телескоп, солнечные панели, антенны) или погрешностям определения моментов инерции. Погрешности в работе исполнительных органов имеют место в основном для исполнительных органов, имеющих в составе движущиеся части (например, маховики и гиродины), и обусловлено изменением характера трения в подшипниках, насыщением исполнительных органов, задержкой сигналов управления и различными случайными ошибками в работе исполнительных органов. Погрешности в работе датчиков возникают вследствие сильной зашумленности их выходных сигналов, сбоев в работе их программного обеспечения и временной неработоспособности. Все это представляет собой основные причины, почему разработке и проектированию систем определения и управления ориентацией малых космических аппаратов должно уделяться большое внимание.

До недавнего времени основной проблемой при разработке систем определения и управления ориентацией малых космических аппаратов являлось обеспечение трехосной ориентации (управляемость КА по трем осям). И в основном для малых спутников рассматривались задачи двухосной [24] или одноосной ориентации [25, 26]. Но развитие микроэлектроники и космической

техники позволило использовать на малых космических аппаратах различные исполнительные органы для достижения трехосной ориентации.

В данной работе рассматривается задача управления трехосной ориентацией МКА с помощью исполнительных органов - маховиков для:

- поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях недоступности полного вектора измерений с датчиков (недоступность измерений датчика угловой скорости);

- поддержания орбитальной ориентации МКА при учете неопределенностей моментов инерции МКА, погрешностей в работе исполнительных органов и внешних возмущений.

2.2 Уравнения вращательного движения малого космического аппарата

Рассмотрим основные уравнения, описывающие изменение угловой скорости и углового положения МКА, управляемого с помощью трех маховиков. Для вывода динамических уравнений используем теорему об изменении кинетического момента твердого тела.

В связи с тем, что на космическом аппарате присутствуют маховики, кинетический момент МКА примет вид:

$$\vec{H}^b = J \vec{\omega}_{bi}^b + \vec{h}_a^b, \quad (2.1)$$

где

\vec{H}^b - кинетический момент МКА;

$J = \{J_x, J_y, J_z\}$ - диагональная (3x3) матрица тензора инерции МКА;

J_x, J_y, J_z - главные центральные моменты инерции МКА;

$\vec{\omega}_{bi}^b$ - угловая скорость МКА в связанной системе координат;

\vec{h}_a^b - кинетический момент маховиков.

Из теоремы об изменении кинетического момента следует [27]:

$$\frac{d\vec{H}^b}{dt} = -\vec{\omega}_{bi}^b \times \vec{H}^b + \vec{M}_e^b, \quad (2.2)$$

где

\vec{M}_e^b - момент внешних сил в проекциях на связанную систему координат.

Подставляя (2.2) в (2.1), получим:

$$\dot{\vec{\omega}}_{bi}^b = J^{-1} \left[-\vec{\omega}_{bi}^b \times (J\vec{\omega}_{bi}^b + \vec{h}_a^b) + \vec{M}_e^b + \vec{M}_c^b \right], \quad (2.3)$$

где

\vec{M}_c^b - управляющий момент маховиков, $\vec{M}_c^b = -\dot{\vec{h}}_a^b$.

Уравнение (2.3) в скалярной форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_{bi_x}^b &= \frac{1}{J_x} \left[(J_y - J_z) \omega_{bi_y}^b \omega_{bi_z}^b - h_{a_z}^b \omega_{bi_y}^b + h_{a_y}^b \omega_{bi_z}^b + M_{e_x}^b + M_{c_x}^b \right] \\ \dot{\omega}_{bi_y}^b &= \frac{1}{J_y} \left[(J_z - J_x) \omega_{bi_x}^b \omega_{bi_z}^b - h_{a_x}^b \omega_{bi_z}^b + h_{a_z}^b \omega_{bi_x}^b + M_{e_y}^b + M_{c_y}^b \right] \\ \dot{\omega}_{bi_z}^b &= \frac{1}{J_z} \left[(J_x - J_y) \omega_{bi_x}^b \omega_{bi_y}^b - h_{a_y}^b \omega_{bi_x}^b + h_{a_x}^b \omega_{bi_y}^b + M_{e_z}^b + M_{c_z}^b \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Кинематические уравнения в кватернионах имеют вид [18, с.27]:

$$\dot{\vec{\omega}}_{bi}^b = 2\vec{Q}_{bi}^{*} \otimes \dot{\vec{Q}}_{bi}, \quad (2.5)$$

где

\vec{Q}_{bi} - кватернион, задающий текущее угловое положение МКА в инерциальной системе координат;

\vec{Q}_{bi}^{*} - кватернион, обратный к \vec{Q}_{bi} , $\vec{Q}_{bi}^{*} = q_0^{bi} - \vec{q}^{bi}$;

\otimes - операция умножения кватернионов.

Так как в данной работе в качестве основного режима управления ориентацией МКА используется режим орбитальной ориентации, то для формирования закона управления ориентацией потребуется кватернион, задающий угловое положение МКА в орбитальной системе координат. Такой кватернион может быть получен из кинематического уравнения:

$$\overrightarrow{\omega}_{bo}^b = 2\overrightarrow{Q}_{bo}^* \otimes \overrightarrow{Q}_{bo}, \quad (2.6)$$

где

\overrightarrow{Q}_{bo} - кватернион, задающий текущее угловое положение МКА в орбитальной системе координат;

$\overrightarrow{Q}_{bo}^*$ - кватернион, обратный к \overrightarrow{Q}_{bo} , $\overrightarrow{Q}_{bo}^* = q_0^{bo} - \overrightarrow{q}^{bo}$;

\otimes - операция умножения кватернионов.

При этом угловая скорость $\overrightarrow{\omega}_{bo}^b$, используемая в (2.6), определяется по формуле:

$$\overrightarrow{\omega}_{bi}^b = \overrightarrow{\omega}_{bo}^b + \overrightarrow{\omega}_{oi}^b = \overrightarrow{\omega}_{bo}^b + R_b^o \overrightarrow{\omega}_{oi}^o, \quad (2.7)$$

где

R_b^o - матрица перехода между орбитальной и связанной системой координат;

$\overrightarrow{\omega}_{oi}^o = [0 \ -\omega_0 \ 0]^T$ - угловая скорость орбитальной системы координат относительно инерциальной системы координат.

Уравнения (2.6) можно записать в виде скалярных соотношений:

$$\begin{cases} \dot{q}_0^{bo} = \frac{1}{2} \left(-\omega_{bo_x}^b q_1^{bo} - \omega_{bo_y}^b q_2^{bo} - \omega_{bo_z}^b q_3^{bo} \right), \\ \dot{q}_1^{bo} = \frac{1}{2} \left(\omega_{bo_x}^b q_0^{bo} + \omega_{bo_z}^b q_2^{bo} - \omega_{bo_y}^b q_3^{bo} \right), \\ \dot{q}_2^{bo} = \frac{1}{2} \left(\omega_{bo_y}^b q_0^{bo} + \omega_{bo_x}^b q_3^{bo} - \omega_{bo_z}^b q_1^{bo} \right), \\ \dot{q}_3^{bo} = \frac{1}{2} \left(\omega_{bo_z}^b q_0^{bo} + \omega_{bo_y}^b q_1^{bo} - \omega_{bo_x}^b q_2^{bo} \right), \end{cases} \quad (2.8)$$

где

$q_0^{bo}, q_1^{bo}, q_2^{bo}, q_3^{bo}$ - компоненты кватерниона \bar{Q}_{bo} , задающего текущее угловое движение МКА относительно орбитальной системы координат.

2.3 Основные компоненты системы определения и управления ориентацией малого космического аппарата

Система определения и управления ориентацией обеспечивает ориентирование КА в заданном направлении в процессе полета в зависимости от режимов управления, предусмотренных для выполнения его основных задач. Решение этих задач требует определения параметров углового движения космического аппарата с помощью датчиков и управления угловым движением космического аппарата с помощью исполнительных органов [1, с.354].

Датчики определения параметров углового движения космического аппарата по назначению разделяются на датчики углового положения и датчики угловой скорости. Основные существующие на данный момент датчики углового положения функционируют на основе анализа информации из внешнего по отношению к корпусу КА пространства. К ним относят все датчики, использующие для своей работы оптическое излучение внешних по отношению к КА тел (Солнца, Луны, звезд, инфракрасное излучение Земли), а также датчики, измеряющие магнитное поле Земли, движение КА относительно окружающей Землю среды и т.п. [28].

В составе современных систем управления движением КА различного назначения в качестве датчиков углового положения используются такие приборы, как [1, с. 371 - 375; 29]:

- звездный датчик, определяющий свою ориентацию в пространстве на основе анализа текущего снимка звездного неба и его сопоставления с бортовым звездным каталогом;

- солнечный датчик, определяющий угловые координаты Солнца относительно системы координат прибора на основе выходных данных чувствительных элементов датчика, в качестве которых обычно используются ПЗС-матрицы, ПЗС-линейки и фотоэлектрические преобразователи;

- магнитный датчик, определяющий значение компонент вектора магнитной индукции магнитного поля Земли в результате функционирования чувствительных магнитных катушек прибора;

- датчик горизонта Земли, определяющий положение инфракрасного горизонта Земли в системе координат прибора в результате сканирования космического пространства с помощью специальных чувствительных элементов.

Из всех перечисленных датчиков углового положения наиболее точным является звездный датчик, кроме того это единственный датчик, который может давать в качестве выходного параметра текущее угловое положение КА. Для определения углового положения КА с помощью других датчиков (солнечный и магнитный датчики, датчик горизонта Земли) используются математические модели, построенные на основе основных принципов функционирования данных датчиков. В связи с различными погрешностями работы датчиков углового положения для получения гарантированной большей точности определения ориентации применяются методы, комбинирующие выходные параметры нескольких датчиков, например, алгоритмы TRIAD, QUEST и фильтр Калмана, позволяющий производить фильтрацию выходных данных датчиков [30, 31] и определять параметры углового движения КА [32].

Датчики угловой скорости - приборы, неподвижно установленные на корпусе КА и позволяющие измерять составляющую его вектора угловой скорости, параллельную оси чувствительности соответствующего датчика угловой скорости [1, с. 375]. В отличие от датчиков углового положения

датчики угловой скорости не нуждаются во внешней информации. Основными существующими на данный момент датчиками угловой скорости являются различные виды гироскопических датчиков – лазерные гироскопические датчики, волоконно – оптические гироскопические датчики, микромеханические гироскопические датчики и т.п. Однако для определения угловой скорости КА могут быть использованы не только гироскопические датчики, но и датчики углового положения, например, магнитный датчик, функционирующий на освещенной и теневой стороне орбиты [33, 34]. В данной работе предлагается алгоритм для оценки угловой скорости МКА на базе магнитного и солнечного датчиков.

В составе современных СУДН КА различного назначения в качестве исполнительных органов используются такие приборы, как [1, с. 369-371]:

- инерционные исполнительные органы - маховики. В СУО с маховиками используется инерционное свойство вращающегося твердого тела. Управляющий момент маховика создается путем изменения скорости вращения самого маховика. Три таких маховика с осями, расположенными во взаимно-перпендикулярных направлениях, обеспечивают трехосную ориентацию и стабилизацию КА;

- электромагнитные исполнительные органы - магнитные катушки, магнитные контуры и гистерезисные стержни используются как для управления угловым положением, так и для управления угловой скоростью КА. Чаще всего они используются для демпфирования колебаний КА и разгрузки маховиков. Выработка вращающего момента осуществляется в результате взаимодействия магнитных полей Земли и магнитного исполнительного органа;

- реактивные двигатели, производящие тягу за счет выброса топлива в сторону, противоположную движению КА. Использование парных малых реактивных двигателей в каждом канале управления КА может обеспечить его трехосную ориентацию.

В данной работе для выработки управляющих моментов используются исполнительные органы - маховики.

2.3.1 Солнечный датчик

Основным назначением солнечного датчика является вычисление текущих значений компонентов вектора направления на Солнце или угловых координат Солнца в системе координат, связанной с солнечным датчиком.

Существующие солнечные датчики можно разделить по типу выходного сигнала, принципу работы. По типу выходного сигнала различают одноосные и двухосные цифровые и аналоговые солнечные датчики.

Аналоговые солнечные датчики изготавливаются, например, на базе четырехквadrантных фотодиодов, фотодиодов определения положения (position sensitive photodiode). Угловые координаты Солнца в системе координат, связанной с солнечным датчиком, могут быть определены с помощью функции, описывающей четыре выходных значения электрического тока фотодиодов.

Цифровые солнечные датчики изготавливаются на базе детекторов с множеством светочувствительных элементов. Увеличение числа чувствительных элементов позволяет увеличить точность солнечного датчика, так как в данном случае он способен отличать Солнце от других источников света. На многих солнечных датчиках для этих целей используются ПЗС - матрицы или CMOS - детекторы [35].

По принципу работы различают оптические и щелевые солнечные датчики с микроотверстиями.

Оптические солнечные датчики состоят из трех компонентов: оптический элемент для формирования изображения Солнца, детектор для получения изображения Солнца, расположенный в фокальной плоскости датчика, блок электроники для обработки получаемых изображений и проведения необходимых измерений. При этом первый и второй компоненты часто объединяются в одну функциональную единицу - оптическую головку [36].

Для фокусировки света на детекторе оптического солнечного датчика, расположенного в фокальной плоскости датчика, в составе оптического элемента могут быть использованы линзы, но в связи с тем, что линзы

добавляют вес и усложняют вычисления для этого используются различные щелевые кодирующие маски [37].

Щелевые солнечные датчики разрабатываются как на базе фотоэлектрических преобразователей [38], так и на базе цифровых детекторов с множеством светочувствительных элементов [39].

Для фокусировки света на детекторе щелевого солнечного датчика, расположенного в фокальной плоскости датчика, на фронтальной плоскости датчика используются тонкие щелевые отверстия, расположенные над детектором. Как правило в случае двухосных щелевых солнечных датчиков могут использоваться несколько щелевых отверстий [40, 41, 42]. Обработка выходных данных детекторов щелевых солнечных датчиков производится в блоке электроники.

В рамках данной работы рассмотрим математическую модель одноосного щелевого солнечного датчика, где в качестве чувствительного элемента используются цифровой детектор. Рассматриваемый датчик выдает в качестве выходного сигнала одну из угловых координат Солнца в системе координат прибора.

Падающий под углом θ луч проходит через тонкую щель и попадает на детектор датчика (рисунок 2.1), который генерирует цифровой сигнал в зависимости от смещения dx падающего луча [43].

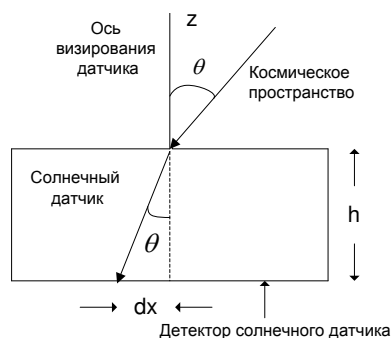


Рисунок 2.1 – Схема работы одноосного щелевого солнечного датчика

$$dx = KDS, \tag{2.9}$$

где

dx - смещение падающего луча;

DS - цифровой сигнал солнечного датчика (в десятичном виде).

Для кодировки цифрового сигнала используется код Грея (где два соседних значения различаются только в одном разряде), который однозначно можно перевести в бинарный вид, и далее в десятичный.

В блоке электроники солнечного датчика получаемый с детектора цифровой сигнал переводится в десятичный вид и производится расчет угла падения луча или углового положения Солнца в системе координат прибора [43, с. 7361]:

$$\theta = \arcsin \frac{nKDS}{\sqrt{KDS^2 + h^2}}, \quad (2.10)$$

$$K = \frac{Length}{2^m}, \quad (2.11)$$

где

m - битность датчика;

$Length$ - длина датчика;

h - высота датчика.

Генерация сигнала датчиком производится только в том случае, если угол падения луча находится в пределах поля зрения солнечного датчика [43, с. 7361]:

$$DS = \text{int} \left(\frac{\theta \cdot 2^m}{FOV} \right), \quad (2.12)$$

где

FOV - поле зрения солнечного датчика.

Поле зрения определяется исходя из физических размеров датчика [43, с. 7361]:

$$\text{FOV} = 2 \arcsin\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}}\right), \quad (2.13)$$

$$a = \frac{\text{Length}}{2}. \quad (2.14)$$

Чувствительность датчика (погрешность) зависит от угла падения луча, и при значениях близких к крайним ($\theta = \frac{\text{FOV}}{2}$) точность солнечного датчика понижается, максимальную погрешность можно вычислить по формуле [43, с. 7362]:

$$\varepsilon = \arcsin\left(\frac{K(2^{m-1} - 1)}{(2^{m-1} - 1)^2 K^2 + h^2}\right) - \arcsin\left(\frac{K2^{m-1}}{(2^{m-1})^2 K^2 + h^2}\right), \quad (2.15)$$

где ε - погрешность солнечного датчика.

Результаты численного моделирования работы щелевого солнечного датчика приведены на рисунке 2.2. На графике приведено изменение углового положения Солнца относительно оси визирования солнечного датчика (угол θ).

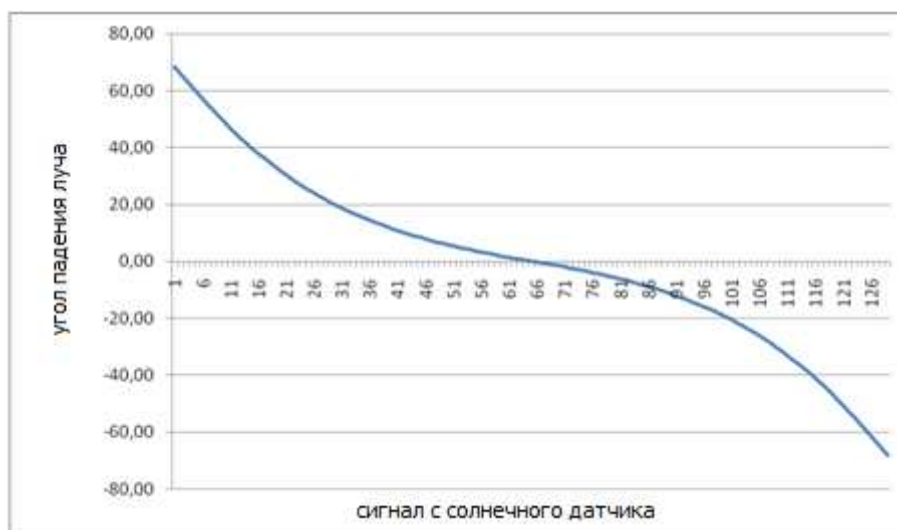


Рисунок 2.2 - График изменения углового положения Солнца относительно оси визирования солнечного датчика

Для определения второй угловой координаты Солнца можно использовать аналогичный одноосный датчик, расположенный перпендикулярно к основному датчику или использовать два детектора в одном корпусе с взаимоперпендикулярными щелями, расположенными над ними (рисунок 2.3). Тогда вторая угловая координата Солнца φ может быть определена аналогичным образом.

Зная значение углов падения солнечного света θ, φ можно определить компоненты вектора направления на Солнце в системе координат прибора. Предположим, что значение компоненты S_{cz} вектора направления на Солнце равно 1, тогда остальные компоненты вектора направления на солнце определяются по следующей формуле:

$$\begin{aligned}
 S_{cx} &= \operatorname{tg} \theta, \\
 S_{cy} &= \operatorname{tg} \varphi, \\
 S_{cz} &= 1, \\
 \vec{S}_c &= \frac{[S_{cx}, S_{cy}, S_{cz}]}{\sqrt{S_{cx}^2 + S_{cy}^2 + S_{cz}^2}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

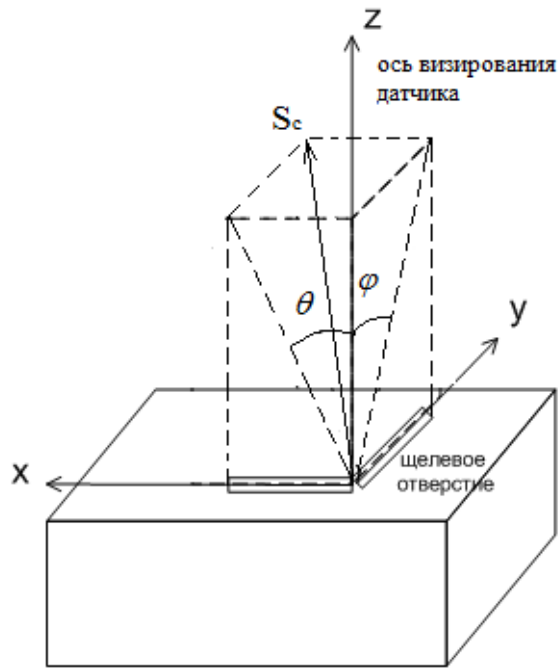


Рисунок 2.3 - Схема двухосного щелевого датчика

Для определения вектора направления на Солнце в системе координат МКА, умножим вектор \vec{s}_c на матрицу поворотов R_{sat}^s , характеризующую положение осей системы координат датчика относительно связанной системы координат МКА:

$$\vec{s}_{cb} = R_{sat}^s \vec{s}_c . \quad (2.17)$$

Для учёта шума солнечного датчика, являющегося следствием работы его цифрового детектора, выходной параметр датчика представляется в форме:

$$\vec{s}_{cb}^* = \vec{s}_{cb} + v(t) , \quad (2.18)$$

где

$v(t)$ - функция, определяющая шум солнечного датчика, под которым в данном случае понимается «белый шум».

2.3.2 Магнитный датчик

Магнитные датчики используются для измерения вектора магнитной индукции магнитного поля Земли. Они предназначены для измерения параметров как переменного электромагнитного поля, так и постоянного магнитного поля, обеспечивая преобразование магнитного потока в пропорциональный электрический сигнал. При создании магнитных датчиков используются различные физические явления, происходящие (возникающие) в полупроводниках и металлах при взаимодействии с магнитным полем. Известны магнитные датчики, использующие эффекты Холла и Гаусса, магнитосопротивления, эффект Суля, а также магнитодиодный и магнитогальванорекомбинационный эффекты и др. Существующие магнитные датчики реализуются в виде элементов Холла, магниторезисторов, магнитодиодов и магнитотранзисторов [44].

На данный момент наиболее популярными являются магнитные датчики, где в качестве чувствительных элементов используется элемент феррозонд - электрическая катушка с сердечником из магнитомягкого материала, питаемая переменным током. Принцип работы датчика базируется на чувствительности катушки к величине и направлению внешнего магнитного поля [45].

В данной работе в качестве магнитного датчика рассматривается феррозондовый магнитный датчик. Напряжение катушки датчика пропорционально изменению магнитного поля Земли [43, с. 7363]:

$$U_{мд_i} = aB_i + U_{мд}^0, \quad i=1..3, \quad (2.19)$$

где

$U_{мд_i}$ - напряжение i -ой катушки;

a - коэффициент пропорциональности;

$B_{м_i}$ - i -й компонент вектора магнитной индукции магнитного поля Земли в системе координат прибора;

$U_{\text{м}0}^0$ - начальное значение напряжения.

Магнитную индукцию в инерциальной системе координат теоретически можно определить через математическую модель магнитного поля Земли [22]:

$$\vec{B} = -\mu_0 \overrightarrow{\text{grad}}(V_{\text{МПЗ}}),$$

$$V_{\text{МПЗ}} = f(r, \varphi, \lambda, t) = a \sum_{n=1}^k \left[\left(\frac{r_e}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m \cos(k\lambda) + h_n^m \sin(k\lambda)] P_n^m(\cos\lambda) \right], \quad (2.20)$$

где

μ_0 - магнитная постоянная, $\mu_0 = 1.2566 \cdot 10^{-6} \text{ H / A}^2$;

$V_{\text{МПЗ}}$ - потенциал магнитного поля Земли;

r, φ, λ - сферические координаты МКА в инерциальной системе координат;

r_e - радиус Земли;

g_n^m, h_n^m - коэффициенты модели магнитного поля Земли WMM 2010.

Таким образом, зная напряжение, получаемое с катушки датчика, его можно оцифровать и получить компоненты вектора магнитной индукции в системе координат прибора в соответствии с формулой [43, с. 7363]:

$$B_{\text{м}i} = \frac{Ud_{\text{м}i} - Ud_{\text{м}0}^0}{a}, \quad i = 1..3, \quad (2.21)$$

где

$Ud_{\text{м}i}, Ud_{\text{м}0}^0$ - оцифрованные значения напряжения $U_{\text{м}i}, U_{\text{м}0}^0$ с катушки датчика.

Для определения вектора магнитной индукции в системе координат МКА, умножим вектор $\vec{B}_{\text{м}}$ на матрицу поворотов R_{sat}^s , характеризующую положение осей системы координат датчика относительно связанной системы координат МКА:

$$\vec{B}_{\text{mb}} = R_{\text{sat}}^s \vec{B}_{\text{м}}. \quad (2.22)$$

Для учёта шума магнитного датчика выходной параметр датчика представляется в форме:

$$\vec{B}_{mb}^* = \vec{B}_{mb} + \nu(t), \quad (2.23)$$

где

$\nu(t)$ - функция, определяющая шум магнитного датчика, под которым в данном случае понимается «белый шум».

Результаты численного моделирования работы магнитного датчика приведены на рисунке 2.4. Тремя линиями на графике показано изменение магнитной индукции магнитного поля Земли со временем в зависимости от положения космического аппарата на орбите.

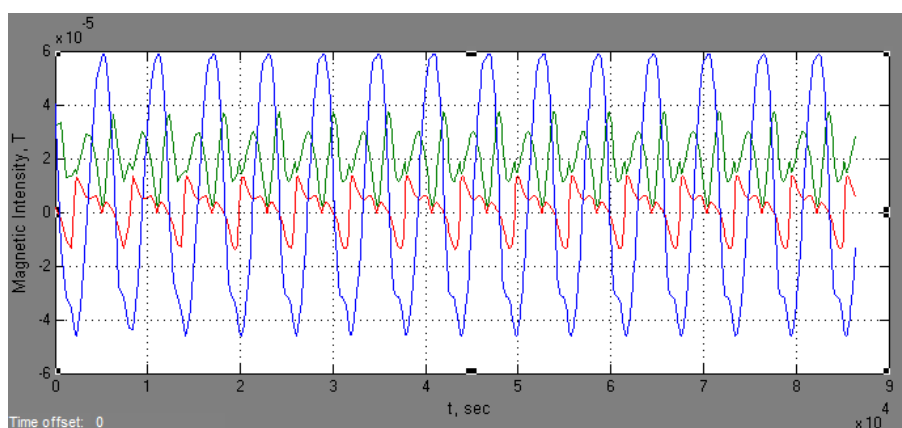


Рисунок 2.4 – Компоненты вектора магнитной индукции магнитного поля Земли

2.3.3 Маховик

В рамках данной работы в качестве исполнительных органов рассматривается три маховика, установленных вдоль главных осей инерции МКА. Маховики имеют относительно небольшие массы - габаритные

характеристики, не потребляют много энергии и с достаточно высокой скоростью и точностью позволяют ориентировать КА в пространстве.

Маховик приводится во вращение с помощью электродвигателя постоянного тока. Изменение угловой скорости маховика производится за счет управления напряжением питания электродвигателя [46]:

$$\begin{cases} R_m I_m + k_e \omega_a = U_m, \\ J_a \frac{d\omega_a}{dt} = k_e I_m, \end{cases} \quad (2.24)$$

где

J_a - приведенный к общему валу маховика суммарный момент инерции электродвигателя и маховика;

I_m - электрический ток якоря электродвигателя;

U_m - напряжение питания якоря электродвигателя;

R_m - сопротивление якоря электродвигателя;

ω_a - угловая скорость маховика;

k_e - константа противо-ЭДС.

Используя систему уравнений (2.24), можно перейти к одному уравнению относительно угловой скорости маховика ω_a :

$$\dot{\omega}_a + \frac{1}{T_a} \omega_a = k_a U_m, \quad (2.25)$$

где

$$T_a = \frac{J_a R_m}{k_e^2}, \quad k = \frac{k_e}{J_a R_m}.$$

3 УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ УСЛОВИЯХ НЕДОСТУПНОСТИ ПОЛНОГО ВЕКТОРА ИЗМЕРЕНИЙ

В данном разделе рассматривается подход к разработке управления ориентацией МКА в условиях отсутствия измерений угловой скорости. Для обеспечения управления ориентацией предлагается нелинейный закон управления с обратной связью по угловой скорости и угловому положению МКА. Для определения угловой скорости и углового положения МКА предлагается алгоритм на базе фильтра Калмана, использующий измерения солнечного и магнитного датчиков.

3.1 Управление угловым движением малого космического аппарата

Рассмотрим задачу построения системы управления ориентацией для поддержания орбитальной ориентации МКА.

Для описания вращательного движения МКА используем уравнения (2.3), (2.6). Так как управляющее воздействие исполнительных органов намного превосходит внешние возмущающие воздействия, мы пренебрежем ими для решения поставленной задачи. Т.е. примем, что $\overrightarrow{M}_e^b = 0$ в (2.3). Тогда дифференциальное уравнение, характеризующее изменение угловой скорости МКА в проекциях на оси связанной системы координат, примет вид:

$$\overrightarrow{\omega}_{bi}^b = J^{-1} \left[-\overrightarrow{\omega}_{bi}^b \times (J\overrightarrow{\omega}_{bi}^b + \overrightarrow{h}_a^b) + \overrightarrow{M}_c^b \right], \quad (3.1)$$

где управляющий момент \overrightarrow{M}_c^b представляет собой функцию координат, характеризующих угловое положение и угловую скорость МКА:

$$\overrightarrow{M}_c^b = M_c^b \left(\overrightarrow{\omega}_{bo}^b, \overrightarrow{Q}_{bo}, K_\omega, K_Q \right), \quad (3.2)$$

где

K_ω, K_Q - неизвестные параметры управления.

Конкретная задача построения системы управления при известном виде закона управления (3.2) будет сводиться к определению неизвестных параметров K_ω, K_Q закона управления, исходя из условий устойчивости и качества процессов управления.

Наиболее продуктивным при исследовании устойчивости процесса управления является метод функций Ляпунова, когда задача определения области устойчивости в пространстве параметров K_ω, K_Q сводится к построению функции Ляпунова, удовлетворяющей теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости движения системы управления.

3.2 Исследование устойчивости углового движения малого космического аппарата

Для удобства преобразуем уравнение (2.3). Подставим (2.7) в (2.3):

$$\overrightarrow{\dot{\omega}}_{bo}^b = J^{-1} \left[- \left(\overrightarrow{\omega}_{bo}^b + R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \right) \times \left(J \left(\overrightarrow{\omega}_{bo}^b + R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \right) + \overrightarrow{h}_a^b \right) + \overrightarrow{M}_c^b - J R_o^b \overrightarrow{\dot{\omega}}_{oi}^o - J \dot{R}_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \right]. \quad (3.3)$$

Раскрывая скобки в (3.3), получим:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\dot{\omega}}_{bo}^b = & J^{-1} \left[- \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times J \left(\overrightarrow{\omega}_{bo}^b + R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \right) - \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times \overrightarrow{h}_a^b - R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \times J \left(\overrightarrow{\omega}_{bo}^b + R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \right) - \right. \\ & - R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \times \overrightarrow{h}_a^b + \overrightarrow{M}_c^b - J R_o^b \overrightarrow{\dot{\omega}}_{oi}^o - J \dot{R}_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \left. \right] = J^{-1} \left[- \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times J \overrightarrow{\omega}_{bo}^b - \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times J R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o - \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times \overrightarrow{h}_a^b - \right. \\ & \left. - R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \times J \overrightarrow{\omega}_{bo}^b - R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \times J R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o - R_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \times \overrightarrow{h}_a^b + \overrightarrow{M}_c^b - J R_o^b \overrightarrow{\dot{\omega}}_{oi}^o - J \dot{R}_o^b \overrightarrow{\omega}_{oi}^o \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Так как $\overrightarrow{\omega}_{oi}^o = [0 - \omega_0 0]^T$, где $\omega_0 = \text{const}$, то $\overrightarrow{\dot{\omega}}_{oi}^o = 0$ в (3.4).

В связи с тем, что кинематические уравнения можно записать относительно матрицы направляющих косинусов в виде:

$$\dot{R}_o^b = \overrightarrow{\omega_{ob}^o} \times R_o^b, \quad (3.5)$$

то $J\dot{R}_o^b \overrightarrow{\omega_{oi}^o} = J\overrightarrow{\omega_{ob}^o} \times R_o^b \overrightarrow{\omega_{oi}^o}$ в уравнении (3.4).

С учетом того, что $\overrightarrow{\omega_{oi}^o} = [0 - \omega_0 0]^T$ и

$$R_o^b = [\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}] = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 2(q_1q_3 - q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 - q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 + q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 + q_0q_2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

выражение $R_o^b \overrightarrow{\omega_{oi}^o}$ преобразуется к виду:

$$R_o^b \overrightarrow{\omega_{oi}^o} = -\omega_0 \overrightarrow{a_2}. \quad (3.7)$$

В результате уравнение (3.4) приводится к виду:

$$\begin{aligned} J\dot{\overrightarrow{\omega}}_{bo}^b &= -\overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times J\overrightarrow{\omega}_{bo}^b + \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times J\omega_o \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times \overrightarrow{h}_a^b + \\ &+ \omega_o \overrightarrow{a_2} \times J\overrightarrow{\omega}_{bo}^b - \omega_o^2 \overrightarrow{a_2} \times J\overrightarrow{a_2} + \omega_o \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{h}_a^b + \overrightarrow{M}_c^b + J\overrightarrow{\omega}_{bo}^b \times \omega_o \overrightarrow{a_2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Обозначая в (3.8) и (2.6) $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega}_{bo}^b$, $\overrightarrow{h} = \overrightarrow{h}_a^b$, $\overrightarrow{Q}_{bo} = \overrightarrow{Q}$, получим:

$$\begin{aligned} J\dot{\overrightarrow{\omega}} &= -\overrightarrow{\omega} \times J\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\omega} \times J\omega_o \overrightarrow{a_2} - \overrightarrow{\omega} \times \overrightarrow{h} + \omega_o \overrightarrow{a_2} \times J\overrightarrow{\omega} - \omega_o^2 \overrightarrow{a_2} \times J\overrightarrow{a_2} + \\ &+ \omega_o \overrightarrow{a_2} \times \overrightarrow{h} + \overrightarrow{M}_c^b - \omega_o \overrightarrow{a_2} \times J\overrightarrow{\omega}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\overrightarrow{Q} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega} \otimes \overrightarrow{Q}, \quad (3.10)$$

где

$$\overrightarrow{Q} = [q_1, q_2, q_3, q_0].$$

Согласно теореме Ляпунова [47] для асимптотической устойчивости движения малого космического аппарата достаточно, чтобы полная производная по времени от положительно-определенной функции Ляпунова $V(\vec{\omega}, \vec{Q})$, составленная в силу уравнений движения (3.9) и (3.10), была отрицательно-определенной функцией, т.е. такой, что для всех $\vec{\omega}, \vec{Q} \neq 0$ $\dot{V}(\vec{\omega}, \vec{Q}) \leq 0$.

Построение функций Ляпунова для системы дифференциальных уравнений вида (3.9) и (3.10) рассмотрено в ряде работ [19, 48, 49] и др. Общим во всех этих работах является использование квадратичной функции Ляпунова. В данной работе функцию Ляпунова предлагается искать в виде:

$$V(\vec{\omega}, \vec{Q}) = \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \vec{\omega} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \vec{a}_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 J_y + 2(1 - q_0), \quad (3.11)$$

где \vec{a}_2 согласно (3.6) представляет собой единичный вектор:

$$\vec{a}_2 = [R_{o12}^b, R_{o22}^b, R_{o32}^b]^T = [2(q_1 q_2 + q_0 q_3), q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2, 2(q_2 q_3 - q_0 q_1)]^T. \quad (3.12)$$

Функция (3.11) является положительно-определенной, при условиях:

$$J_y > J_x, \quad J_y > J_z. \quad (3.13)$$

Для того, что доказать существование условий (3.13) приведем следующие выкладки:

$$2(1 - q_0) = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + (1 - q_0)^2. \quad (3.14)$$

$$-\frac{1}{2} \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \vec{a}_2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 J_y = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \left[J_x (R_{o12}^b)^2 + J_y \left((R_{o22}^b)^2 - 1 \right) + J_z (R_{o32}^b)^2 \right]. \quad (3.15)$$

Так как \vec{a}_2 представляет собой единичный вектор, то:

$$\left(R_{o12}^b\right)^2 + \left(R_{o22}^b\right)^2 + \left(R_{o32}^b\right)^2 = 1. \quad (3.16)$$

Учитывая выражение (3.15) в (3.14), получим:

$$-\frac{1}{2}\omega_0^2 \vec{a}_2^T J \vec{a}_2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 J_y = \frac{1}{2}\omega_0^2 \left[\left(R_{o12}^b\right)^2 (J_y - J_x) + \left(R_{o32}^b\right)^2 (J_y - J_z) \right]. \quad (3.17)$$

Таким образом, в силу выражений (3.14), (3.17) можно заключить, что функция (3.11) является положительно определенной для всех $\vec{\omega}, \vec{Q} \neq 0$ при условиях (3.13) и обращается в нуль в заданном ориентированном угловом положении МКА:

$$\vec{\omega} = [0, 0, 0]^T, \vec{Q} = [0, 0, 0, 1]^T \quad (3.18)$$

Производная по времени от функции (3.11) имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\vec{\omega}, \vec{Q}) &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \dot{\vec{a}}_2 + 2(1 - q_0) = \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \dot{\vec{a}}_2 - \frac{1}{2} \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \dot{\vec{a}}_2 - 2\dot{q}_0 = \\ &= \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} - \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \dot{\vec{a}}_2 - 2\dot{q}_0 = \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} - \omega_0^2 \vec{a}_2^T J \vec{\omega} \times \vec{a}_2 - 2\dot{q}_0 = \\ &= \vec{\omega}^T J \dot{\vec{\omega}} + \omega_0^2 \vec{\omega}^T \vec{a}_2 \times J \vec{a}_2 - 2\dot{q}_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

В силу уравнений (3.9), (3.10) производная от функции Ляпунова принимает вид:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\vec{\omega}, \vec{Q}) &= \vec{\omega}^T [-\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \vec{\omega} \times J \omega_o \vec{a}_2 - \vec{\omega} \times \vec{h} + \omega_o \vec{a}_2 \times J \vec{\omega} - \omega_o^2 \vec{a}_2 \times J \vec{a}_2 + \\
&+ \omega_o \vec{a}_2 \times \vec{h} + \vec{M}_c^b - \omega_o \vec{a}_2 \times J \vec{\omega}] + \omega_0^2 \vec{\omega}^T \vec{a}_2 \times J \vec{a}_2 + 2 \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{q} = \\
&= -\vec{\omega}^T \vec{\omega} \times J \vec{\omega} + \vec{\omega}^T \vec{\omega} \times J \omega_o \vec{a}_2 - \vec{\omega}^T \vec{\omega} \times \vec{h} + \vec{\omega}^T \omega_o \vec{a}_2 \times J \vec{\omega} - \vec{\omega}^T \omega_o^2 \vec{a}_2 \times J \vec{a}_2 + \\
&+ \vec{\omega}^T \omega_o \vec{a}_2 \times \vec{h} + \vec{\omega}^T \vec{M}_c^b - \vec{\omega}^T \omega_o \vec{a}_2 \times J \vec{\omega} + \omega_0^2 \vec{\omega}^T \vec{a}_2 \times J \vec{a}_2 + \vec{\omega}^T \vec{q}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Находя подобные члены в (3.20), а также учитывая, что $\vec{\omega}^T \vec{\omega} = 0$, получим:

$$\dot{V}(\vec{\omega}, \vec{Q}) = \vec{\omega}^T \omega_o \vec{a}_2 \times \vec{h} + \vec{\omega}^T \vec{M}_c^b + \vec{\omega}^T \vec{q} = \vec{\omega}^T \left(\omega_o \vec{a}_2 \times \vec{h} + \vec{M}_c^b + \vec{q} \right). \tag{3.21}$$

Примем, что закон управления или функция изменения управляющего момента имеет вид:

$$\vec{M}_c^b = -K_\omega \vec{\omega} - K_q \vec{q} - \omega_o \vec{a}_2 \times \vec{h}. \tag{3.22}$$

Тогда с учетом (3.22) выражение (3.21) примет вид:

$$\dot{V}(\vec{\omega}, \vec{Q}) = -\vec{\omega}^T K_\omega \vec{\omega} - \vec{\omega}^T K_q \vec{q} + \vec{\omega}^T \vec{q} = -K_\omega \vec{\omega}^T \vec{\omega} - \vec{\omega}^T \vec{q} (K_q - 1). \tag{3.23}$$

Допустим, что $K_q = 1$ тогда:

$$\dot{V}(\vec{\omega}, \vec{Q}) = -K_\omega \vec{\omega}^T \vec{\omega}. \tag{3.24}$$

Полученная функция будет отрицательна при $K_\omega > 0$.

Таким образом показано, что при выполнении условий $K_q = 1$, $K_\omega > 0$, $J_y > J_x$, $J_y > J_z$ существует функция $V(\vec{\omega}, \vec{Q})$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости при заданном законе управления в виде (3.22). Отсюда, в свою очередь, следует, что закон

управления (3.22) обеспечивает асимптотическую устойчивость углового движения МКА при условиях $K_q = 1$, $K_\omega > 0$, $J_y > J_x$, $J_y > J_z$.

Для практического применения закона управления (3.22) точное значение коэффициента K_ω можно определить, используя теорию синтеза линейных регуляторов, например, метод размещения полюсов или линейно - квадратичный регулятор.

3.3 Определение параметров углового движения малого космического аппарата

Закон управления (3.22) представляет собой закон управления с обратной связью по угловой скорости и угловому положению КА в ОСК. Для практического применения данного закона управления требуется знание текущего углового положения и угловой скорости МКА. Причем точность определения углового положения и угловой скорости МКА непосредственно влияет на качество процесса управления.

В соответствии с задачами, поставленными в рамках диссертационной работы, необходимо разработать алгоритм определения углового положения и угловой скорости МКА в условиях отсутствия измерений угловой скорости.

Наиболее известными алгоритмами определения параметров движения МКА при условиях зашумленности или отсутствия некоторых измерений являются алгоритмы, разработанные на базе фильтра Калмана. В качестве примера можно рассмотреть алгоритмы в работах [34, с. 60-67; 50] на базе фильтра Калмана, использующие измерения магнитных датчиков для оценки параметров углового движения МКА. Однако, несмотря на большую популярность фильтра Калмана как метода оценки параметров ориентации существует ряд факторов, которые серьезно влияют на его точность и сходимость [32, с. 4]:

1. проблема задания начальных приближений параметров углового движения.
2. проблема настройки ковариационных матриц ошибок.

В данной работе рассматривается алгоритм определения углового положения и угловой скорости МКА на базе показаний магнитного и солнечного датчиков. Для улучшения точности алгоритма предлагается метод начальной грубой оценки угловой скорости и углового положения МКА на базе измерений солнечного датчика, а также настройка матрицы шума системы и ковариационной матрицы ошибки.

Фильтр Калмана в основном используется для систем, описываемых линейными уравнениями. Но теория фильтра Калмана может быть расширена и для случая нелинейных систем, путем их линеаризации [51]. В нашем случае мы располагаем нелинейной непрерывной системой уравнений углового движения МКА с дискретными измерениями солнечного и магнитного датчиков, которые имеют общий вид:

$$\vec{\dot{x}} = f(\vec{x}, t) + \gamma(t), \quad (3.25)$$

$$\vec{z}_{k+1} = h(\vec{x}_{k+1}, k+1) + \mu_k, \quad (3.26)$$

где

\vec{x} - вектор состояния системы;

$\gamma(t)$ - шум системы, представляющий собой Гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием;

\vec{z}_{k+1} - вектор измерений;

$h(\vec{x}_{k+1}, k+1)$ - функция, представляющая собой модель измерений;

$\mu(t)$ - шум измерений, представляющий собой Гауссовский случайный процесс с нулевым математическим ожиданием.

Задача фильтра Калмана заключается в том, чтобы найти оценку вектора состояния системы \vec{x} , обозначаемую как $\hat{\vec{x}}$, которая минимизирует среднеквадратичную ошибку $E\{[\vec{x} - \hat{\vec{x}}][\vec{x} - \hat{\vec{x}}]^T\}$ [51, с.6].

Фильтр Калмана работает по принципу прогноз-коррекция. Допустим, что в момент времени t_k получена оценка вектора состояния системы $\hat{\vec{x}}_k^+$ и теперь

необходимо получить оценку в момент времени t_{k+1} . Для этого строим прогноз оценки $\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^-}$, базируясь на $\overrightarrow{\hat{x}_k^+}$. Получаем измерения $\overrightarrow{z_{k+1}}$ и далее корректируем оценку в момент t_{k+1} , базируясь на прогнозе и измерениях, и получаем окончательную оценку вектора состояния $\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^+}$. $\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^-}$ называется априори оценкой вектора состояния, а $\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^+}$ - апостериори оценкой вектора состояния [51, с. 6].

Для проведения линеаризации уравнений (2.3), (2.6) вектор состояния и вектор измерений записываются как:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\hat{x}} + \overrightarrow{\delta x}, \quad (3.27)$$

$$\overrightarrow{z_{k+1}} = h(\overrightarrow{x_{k+1}}, k+1) + \overrightarrow{\delta z_{k+1}}, \quad (3.28)$$

где

$\overrightarrow{\hat{x}}$ - оцениваемый вектор состояния;

$\overrightarrow{\delta x}$ - малое отклонение вектора состояния от оцениваемой траектории движения;

$\overrightarrow{\delta z_{k+1}}$ - малое отклонение вектора измерений.

Раскладывая функцию $h(\overrightarrow{x_{k+1}}, k+1)$ в ряд Тейлора в окрестности $\overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^-}$, получаем:

$$h(\overrightarrow{x_{k+1}}, k+1) = h(\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^-}, k+1) + \left. \frac{\partial h(\overrightarrow{x}, k)}{\partial \overrightarrow{x}} \right|_{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^-}} \overrightarrow{\delta x_{k+1}} \quad (3.29)$$

С учетом (3.29) из выражения (3.28) получим:

$$\overrightarrow{\delta z_k} = \left. \frac{\partial h(\overrightarrow{x}, k)}{\partial \overrightarrow{x}} \right|_{\overrightarrow{x}=\overrightarrow{\hat{x}_{k+1}^-}} \overrightarrow{\delta x_{k+1}} \quad (3.30)$$

Обозначая:

$$H_{k+1}^- = \left. \frac{\partial h(x, k+1)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k+1}^-}, \quad (3.31)$$

для выражения линеаризованного вектора измерений получим:

$$\overrightarrow{\delta z}_k = H_{k+1}^- \overrightarrow{\delta x}_{k+1} + \mu_k. \quad (3.32)$$

Матрица H_{k+1}^- называется матрицей чувствительности системы.

Разлагая функцию $f(\vec{x}, t)$ в окрестности $\vec{x} = \vec{\hat{x}}$ в ряд Тейлора:

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{\hat{x}}, t) + \left. \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \right|_{x=\hat{x}} \overrightarrow{\delta x}. \quad (3.33)$$

и обозначая

$$F = \left. \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \right|_{x=\hat{x}}. \quad (3.34)$$

с учетом (3.25) получим, что линеаризованные непрерывные уравнения состояния принимают вид:

$$\overrightarrow{\delta \dot{x}} = F \overrightarrow{\delta x} + \gamma \quad (3.35)$$

Предполагая, что матрица F является постоянной на интервале $(k, k+1)$, матрица перехода состояний может быть получена как экспоненциальная функция от $F\Delta T$, где ΔT - разница времени между двумя оценками вектора состояния [50, с. 112]:

$$\Phi_k = e^{F\Delta T} = 1 + F\Delta T + (F\Delta T)^2 / 2! + \dots \quad (3.36)$$

тогда в дискретном случае уравнения состояния примут вид:

$$\vec{\delta x}_{k+1}^- = \Phi_k \vec{\delta x}_k^+ + \gamma \quad (3.37)$$

Для получения априори оценки вектора состояния необходимо провести интегрирование линеаризованных уравнений вида (3.35) с начальным вектором состояния $\vec{\delta x}(t_0) = x_k^+$ или использовать уравнения (3.37).

На этапе априори оценки также производится определение текущего отклонения оцениваемого вектора состояния от его истинного значения, которое характеризуется ковариационной матрицей ошибки P [51, с.6]:

$$P = E\{[\vec{x} - \hat{\vec{x}}][\vec{x} - \hat{\vec{x}}]^T\}. \quad (3.38)$$

Определяя априори оценку вектора состояния \hat{x} путем интегрирования линеаризованных уравнений состояния типа (3.35), подставляя в (3.38) аналитическое выражение для ее математического ожидания $E\{\hat{x}\}$, проводя преобразования и вычисля первую производную \dot{P} , получим дифференциальное уравнение, характеризующее изменение ковариационной матрицы ошибки [51, с.7]:

$$\dot{P} = FP + PF^T + N, \quad (3.39)$$

где

P - матрица ковариации;

N - матрица ошибки системы.

В дискретном случае априори оценку матрицы ковариации находят из уравнения [50, с.122]:

$$P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + N. \quad (3.40)$$

Апостериори оценка вектора состояния строится как корректировка априори оценки $\vec{\hat{x}}_{k+1}^-$ после получения измерений \vec{z}_{k+1} . Таким образом, она является функцией априори оценки и измерений и может быть записана в следующем виде [51, с.8]:

$$\vec{\hat{x}}_{k+1}^+ = K_{k+1}^1 \vec{\hat{x}}_{k+1}^- + K_{k+1} \vec{z}_{k+1}, \quad (3.41)$$

где

K_{k+1}^1, K_{k+1} - корректирующие матрицы коэффициентов.

Введем $\vec{e}_{k+1}^- = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_{k+1}^-, \vec{e}_{k+1}^+ = \vec{x}_{k+1} - \vec{x}_{k+1}^+$, определяющие отклонения априори и апостериори оцениваемого вектора состояния от его истинного значения. Подставляя данные выражения в (3.41) с учетом того, что \vec{z}_{k+1} выражается через \vec{x}_{k+1}^- в соответствии с (3.32), и исследуя математическое ожидание от полученного выражения, определим K_{k+1}^1 [50, с.110]:

$$K_{k+1}^1 = I - K_{k+1} H_{k+1}^-. \quad (3.42)$$

Подставляя (3.42) в (3.41), получим выражение для определения апостериори оценки вектора состояния [51, с.8]:

$$\vec{\hat{x}}_{k+1}^+ = \vec{\hat{x}}_{k+1}^- + K_{k+1} (\vec{z}_{k+1} - H_{k+1}^- \vec{\hat{x}}_{k+1}^-), \quad (3.43)$$

где

H_{k+1}^- - матрица чувствительности.

Выражение $\vec{e}_{k+1} = z_{k+1} - H_{k+1}^- \hat{\vec{x}}_{k+1}^-$ характеризует отклонение измерений от ожидаемой величины.

Корректирующая матрица коэффициентов фильтра Калмана по сути является матрицей весовых коэффициентов для отклонения измерений от ожидаемой величины и находится в соответствии с формулой [50, с.113]:

$$K_{k+1} = P_{k+1}^- H_{k+1}^T [H_{k+1} P_{k+1}^- H_{k+1}^T + G]^{-1}, \quad (3.44)$$

где

$H_{k+1}^- = H_{k+1}^-$ - матрица чувствительности;

G - матрица, характеризующая шум измерений.

Переписывая матрицу ковариации (3.38) с учетом полученной апостериори оценки вектора состояния (3.43), в [50, с.111] получено выражение для определения апостериори оценки матрицы ковариации:

$$P_{k+1}^+ = (I - K_{k+1} H_{k+1}^-) P_{k+1}^-, \quad (3.45)$$

где

I - единичная матрица.

Рассмотрим вопрос применения приведенной выше теории фильтра Калмана для оценки углового положения и угловой скорости МКА на основе измерений солнечного и магнитного датчиков. Система определения и управления ориентацией МКА описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений (2.3), (2.6) с учетом (3.22). Для применения теории фильтра Калмана необходимо провести линеаризацию уравнений (2.3), (2.6).

Вектор состояния в данном случае имеет вид:

$$\vec{x} = [\vec{\omega}, \vec{Q}]^T. \quad (3.46)$$

Тогда согласно (3.27):

$$\vec{\omega} = \vec{\hat{\omega}} + \vec{\delta\omega}, \quad (3.47)$$

$$\vec{Q} = \vec{\delta Q} \otimes \vec{\hat{Q}}, \quad (3.48)$$

где

\otimes - оператор умножения кватернионов.

$$\vec{\delta Q} = \left[\cos \frac{\varphi}{2}, e_x \sin \frac{\varphi}{2}, e_y \sin \frac{\varphi}{2}, e_z \sin \frac{\varphi}{2} \right]^T \approx [1, \delta Q_1, \delta Q_2, \delta Q_3]^T = [1, \vec{\delta Q}]^T. \quad (3.49)$$

Подставляя (3.47) в (2.3) и обозначая $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{bi}^b$, $\vec{h} = \vec{h}_a^b$, $\vec{\omega}_{bo}^b = \vec{\omega}_{bo}$ и $\vec{Q} = \vec{Q}_{bi}$, получим:

$$\begin{aligned} \vec{\delta\omega} &= J^{-1} \left[-(\vec{\hat{\omega}} + \vec{\delta\omega}) \times J(\vec{\hat{\omega}} + \vec{\delta\omega}) - (\vec{\hat{\omega}} + \vec{\delta\omega}) \times \vec{h} - K_\omega \vec{\delta\omega}_{bo} - K_q \vec{\delta Q} - \omega_0 \vec{a}_2 \times \vec{h} \right] = \\ &= J^{-1} \left[-\vec{\hat{\omega}} \times J\vec{\hat{\omega}} - \vec{\hat{\omega}} \times J\vec{\delta\omega} - \vec{\delta\omega} \times J\vec{\hat{\omega}} - \vec{\delta\omega} \times J\vec{\delta\omega} - \vec{\hat{\omega}} \times \vec{h} - \vec{\delta\omega} \times \vec{h} - \right. \\ &\quad \left. - K_\omega \vec{\delta\omega}_{bo} - K_q \vec{\delta Q} - \omega_0 \vec{a}_2 \times \vec{h} \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Учитывая (2.7), получим:

$$\begin{aligned} \vec{\delta\omega}_{ob} &= \vec{\delta\omega} - \mathbf{R}_o^b(\vec{\delta Q}) \mathbf{R}_o^b(\vec{\delta Q}) \vec{\omega}_{oi}^o = \vec{\delta\omega} - \mathbf{R}_o^b(\vec{\delta Q}) \vec{\omega}_{oi}^b = \vec{\delta\omega} - (1 - 2[\vec{\delta Q} \times]) \vec{\omega}_{oi}^b = \\ &= \vec{\delta\omega} - \vec{\omega}_{oi}^b + 2[\vec{\delta Q} \times] \vec{\omega}_{oi}^b = \vec{\delta\omega} - \vec{\omega}_{oi}^b - 2[\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где

$$[\vec{Q} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Так как $\vec{\omega}_{oi}^b$ является константой на круговых орбитах, выражение (3.51) упрощается до следующего:

$$\delta \vec{\omega}_{ob} = \vec{\delta \omega} - 2[\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q}. \quad (3.52)$$

Напомним, что:

$$R_o^b \vec{\omega}_{oi}^o = -\omega_0 \vec{a}_2,$$

тогда

$$\begin{aligned} -\omega_0 \vec{a}_2 \times \vec{h} &= R_o^b(\vec{\delta Q}) R_o^b(\vec{\delta \dot{Q}}) \vec{\omega}_{oi}^o \times \vec{h} = R_o^b(\vec{\delta Q}) \vec{\omega}_{oi}^b \times \vec{h} = (1 - 2[\vec{\delta Q} \times]) \vec{\omega}_{oi}^b \times \vec{h} = \\ &= \vec{\omega}_{oi}^b \times \vec{h} - 2[\vec{\delta Q} \times] \vec{\omega}_{oi}^b \times \vec{h} = [\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{h} + 2[\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q} \times \vec{h} = \\ &= 2[\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q} \times \vec{h}. = -2[\vec{h} \times] [\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Учитывая (3.52) и (3.53) в (3.50) и отбрасывая в (3.50) члены второго порядка, получим линеаризованные динамические уравнения:

$$\begin{aligned} \vec{\delta \dot{\omega}} &= J^{-1} [-\vec{\hat{\omega}} \times J \vec{\delta \omega} - \vec{\delta \omega} \times J \vec{\hat{\omega}} - \vec{\delta \omega} \times \vec{h} - K_\omega \vec{\delta \omega} + 2K_\omega [\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q} - K_q \vec{\delta Q} - 2[\vec{h} \times] [\vec{\omega}_{oi}^b \times] \vec{\delta Q}] = \\ &= J^{-1} [(J \vec{\hat{\omega}} \times) - [\vec{\hat{\omega}} \times] J + [\vec{h} \times] - K_\omega) \vec{\delta \omega} - (K_q - 2K_\omega [\vec{\omega}_{oi}^b \times] + 2[\vec{h} \times] [\vec{\omega}_{oi}^b \times]) \vec{\delta Q} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Для линеаризации кинематических уравнений (2.6) проведем ряд преобразований. Представляя угловую скорость МКА в виде кватерниона $\vec{\omega} = [0, \omega_1, \omega_2, \omega_3]$ из (2.6) имеем:

$$\vec{Q} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \otimes \vec{Q}. \quad (3.55)$$

Дифференцируя выражение (3.48) по времени, получим:

$$\vec{Q} = \vec{\delta \dot{Q}} \otimes \vec{Q} + \vec{\delta Q} \otimes \vec{\dot{Q}}. \quad (3.56)$$

Приравнивая выражения (3.55) и (3.56), получим:

$$\overrightarrow{\delta Q} \otimes \vec{Q} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \otimes \vec{Q} - \overrightarrow{\delta Q} \otimes \vec{Q}. \quad (3.57)$$

Умножая выражение (3.57) справа на \vec{Q}^* , получим:

$$\overrightarrow{\delta Q} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \otimes \vec{Q} \otimes \vec{Q}^* - \overrightarrow{\delta Q} \otimes \vec{Q} \otimes \vec{Q}^*. \quad (3.58)$$

Учитывая, что $\vec{Q} \otimes \vec{Q}^* = \overrightarrow{\delta Q}$ (из (3.40)) и $\vec{Q}^* \otimes \vec{Q} = \frac{1}{2} \vec{\omega}$ (из (2.3)) (3.58) примет

вид:

$$\overrightarrow{\delta Q} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \otimes \overrightarrow{\delta Q} - \frac{1}{2} \overrightarrow{\delta Q} \otimes \vec{\omega}. \quad (3.59)$$

Принимая во внимание, что $\vec{\omega} = \vec{\hat{\omega}} + \overrightarrow{\delta \omega}$ в процессе линеаризации, уравнение (3.59) примет вид:

$$\overrightarrow{\delta Q} = \frac{1}{2} \vec{\hat{\omega}} \otimes \overrightarrow{\delta Q} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\delta \omega} \otimes \overrightarrow{\delta Q} - \frac{1}{2} \overrightarrow{\delta Q} \otimes \vec{\hat{\omega}}. \quad (3.60)$$

Введем выражение для оператора умножения кватернионов [48, с. 78]:

$$\vec{\hat{\omega}} \otimes \overrightarrow{\delta Q} = \Omega(\vec{\hat{\omega}}) \overrightarrow{\delta Q} = \begin{bmatrix} \hat{\omega}_0 & -\vec{\hat{\omega}}^T \\ \vec{\hat{\omega}} & \hat{\omega}_0 I_{3 \times 3} - [\vec{\hat{\omega}} \times] \end{bmatrix} \overrightarrow{\delta Q} = \Xi(\overrightarrow{\delta Q}) \vec{\hat{\omega}} = \begin{bmatrix} \delta q_0 & -\overrightarrow{\delta q}^T \\ \overrightarrow{\delta q} & \delta q_0 I_{3 \times 3} + [\overrightarrow{\delta q} \times] \end{bmatrix} \vec{\hat{\omega}}, \quad (3.61)$$

где

$\vec{\hat{\omega}} = [\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2, \hat{\omega}_3]$ - векторная часть кватерниона угловой скорости;

$\overrightarrow{\delta q} = [\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3]$ - векторная часть кватерниона углового положения.

Используя (3.61), уравнение (3.60) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{\delta\dot{Q}} &= \Omega(\overrightarrow{\hat{\omega}})\overrightarrow{\delta Q} + \Omega(\overrightarrow{\delta\omega})\overrightarrow{\delta Q} - \Xi(\overrightarrow{\hat{\omega}})\overrightarrow{\delta Q} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{\hat{\omega}}^T \\ \overrightarrow{\hat{\omega}} & -[\overrightarrow{\hat{\omega}}\times] \end{bmatrix} \overrightarrow{\delta Q} + \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{\delta\omega}^T \\ \overrightarrow{\delta\omega} & -[\overrightarrow{\delta\omega}\times] \end{bmatrix} \overrightarrow{\delta Q} - \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{\hat{\omega}}^T \\ \overrightarrow{\hat{\omega}} & [\overrightarrow{\hat{\omega}}\times] \end{bmatrix} \overrightarrow{\delta Q} = . \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & -\overrightarrow{\delta\omega}^T \\ \overrightarrow{\delta\omega} & -2[\overrightarrow{\hat{\omega}}\times] - [\overrightarrow{\delta\omega}\times] \end{bmatrix} \overrightarrow{\delta Q}
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Учитывая (3.49) в (3.62), получим:

$$2\overrightarrow{\delta\dot{Q}} = \begin{bmatrix} -\overrightarrow{\delta\omega}^T \overrightarrow{\delta Q} \\ \overrightarrow{\delta\omega} - (2[\overrightarrow{\hat{\omega}}\times] + [\overrightarrow{\delta\omega}\times])\overrightarrow{\delta Q} \end{bmatrix}. \tag{3.63}$$

Отбрасывая в (3.63) члены второго порядка, получим:

$$\overrightarrow{\delta\dot{Q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\omega} - [\overrightarrow{\hat{\omega}}\times]\overrightarrow{\delta Q} \end{bmatrix}. \tag{3.64}$$

Учитывая (2.7) в (3.64), получим линейризованные кинематические уравнения в виде:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{\delta\dot{Q}} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\omega} - [\overrightarrow{\hat{\omega}}\times]\overrightarrow{\delta Q} + [\overrightarrow{\omega_{oi}^b}\times]\overrightarrow{\delta Q} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\omega_{oi}^b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\omega} - [\overrightarrow{\hat{\omega}}\times]\overrightarrow{\delta Q} + [\overrightarrow{\omega_{oi}^b}\times]\overrightarrow{\delta Q} - \frac{1}{2}2[\overrightarrow{\omega_{oi}^b}\times]\overrightarrow{\delta Q} = \\
 &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\delta\omega} - [\overrightarrow{\hat{\omega}}\times]\overrightarrow{\delta Q},
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

где

$$\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\omega_{bi}^b} \text{ и } \overrightarrow{\delta Q} = \overrightarrow{\delta Q_{bo}}.$$

Основываясь на выражениях (3.54), (3.65), при векторе состояния для линейризованных уравнений $\vec{x} = [\overrightarrow{\delta\omega}, \overrightarrow{\delta Q}]^T$ матрица F может быть получена в виде:

$$F = \begin{bmatrix} [J \vec{\omega} \times] - [\vec{\omega} \times] J + [\vec{h} \times] - K_{\omega} & K_q - 2K_{\omega} [\vec{\omega}_{oi}^b \times] + 2[\vec{h} \times] [\vec{\omega}_{oi}^b \times] \\ \frac{1}{2} I_{3 \times 3} & -[\vec{\omega} \times] \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Рассмотрим другие основные матрицы, используемые для реализации фильтра Калмана. Матрица ошибки системы N должна учитывать все расхождения между моделируемым и реальным процессом:

$$N = \begin{bmatrix} N_{\omega} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & N_q \end{bmatrix}, \quad (3.67)$$

где

N_{ω} - отражает все шумы и неопределенности, воздействующие на изменение угловой скорости;

N_q - отражает все шумы и неопределенности, воздействующие на изменение углового положения.

Матрица чувствительности H_{k+1} и матрица шума измерений G могут быть определены при известном составе компонентов вектора измерений и известной модели измерений.

В случае, когда являются известными показания солнечного и магнитного датчиков, вектор реальных измерений на момент времени t_{k+1} имеет вид:

$$\vec{z}_{k+1} = [\vec{S}_{cb}^*, \vec{B}_{mb}^*]^T, \quad (3.68)$$

где

\vec{S}_{cb}^* - измерения вектора направления на Солнце, получаемые с солнечного датчика (и определяемые по формуле 2.18);

\vec{B}_{mb}^* - измерения вектора магнитной индукции, получаемые с магнитного датчика (и определяемые по формуле 2.23).

В общем случае модель измерений представляет собой некоторую функцию вектора состояния $h(\vec{x}_{k+1}, k+1)$ (в соответствии с формулой 3.26). В нашем случае модель измерений можно представить в виде:

$$h(\vec{x}_{k+1}, k+1) = \left[0_{3 \times 3} \quad R_o^b(\vec{Q}_{k+1})\vec{S}_o \quad R_o^b(\vec{Q}_{k+1})\vec{B}_o \right]^T, \quad (3.69)$$

где

\vec{S}_o - вектор направления на Солнце в ОСК;

\vec{B}_o - вектор магнитной индукции магнитного поля Земли в ОСК.

Таким образом, для формирования модели измерений фильтр Калмана должен располагать моделью движения Солнца и моделью магнитного поля Земли, позволяющими получать вектор направления на Солнце и вектор магнитной индукции в орбитальной системе координат в требуемый момент времени. В данной работе для получения вектора направления на Солнце в ОСК используется формула (1.7), а для получения вектора магнитной индукции - формула (1.14).

Матрица чувствительности, соответствующая модели измерений (3.69), может быть определена в соответствии с формулой (3.31):

$$H_{k+1} = \left. \frac{\partial h(\vec{x}_{k+1}, k+1)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k+1}} = \begin{bmatrix} H_{k+1}^c \\ H_{k+1}^M \end{bmatrix}, \quad (3.70)$$

$$H_{k+1}^c = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & h_1 \vec{S}_o & h_2 \vec{S}_o & h_3 \vec{S}_o \end{bmatrix}, \quad (3.71)$$

$$H_{k+1}^M = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & h_1 \vec{B}_o & h_2 \vec{B}_o & h_3 \vec{B}_o \end{bmatrix}, \quad (3.72)$$

где

$$h_1 = \frac{\partial R_o^b(\vec{Q}_{bo})}{\partial q_1}, \quad h_2 = \frac{\partial R_o^b(\vec{Q}_{bo})}{\partial q_2}, \quad h_3 = \frac{\partial R_o^b(\vec{Q}_{bo})}{\partial q_3}. \quad (3.73)$$

Матрица ошибки измерений, соответствующая вектору измерений (3.68), определяется как диагональная матрица:

$$G = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} G^c & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} G^m \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

где

G^c - погрешность солнечного датчика;

G^m - погрешность магнитного датчика.

Основной проблемой реализации фильтра Калмана является выбор начальных значений вектора состояния и матрицы ковариации для определения их априорной оценки. От успешности выбора начальных условий зависит скорость сходимости фильтра Калмана.

В данной работе для выбора начального вектора состояния проведена грубая оценка вектора состояния МКА с помощью солнечного датчика.

Как видно из формул (2.9) - (2.18), солнечный датчик дает в качестве выходных параметров компоненты вектора направления на Солнце. Таким образом, выходные параметры солнечного датчика позволяют определить положение Солнца относительно МКА.

Обладая знанием о положении Солнца относительно ОСК и знанием положения Солнца относительно МКА, выраженных в угловых координатах или в матрицах поворотов, можно определить угловое положение МКА относительно ОСК, т.е.:

$$R_o^b = R_b^s \cdot R_o^s^{-1}, \quad (3.75)$$

где

R_o^b - матрица аффинного преобразования между ОСК и ССК;

R_b^s - матрица аффинного преобразования, характеризующая положение Солнца относительно МКА;

R_0^s - матрица аффинного преобразования, характеризующая положение Солнца относительно ОСК.

Перейдем к получению матрицы R_b^s . Для удобства построения матрицы углы θ и φ переведем в углы α, γ (рисунок 3.1), используя выражения, определяющие связь между данными углами:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \sin \alpha \cos \gamma, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \sin \alpha \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Зная углы α, γ , представляющие собой угловые сферические координаты Солнца в системе координат прибора, определим матрицу сначала аффинного преобразования R_{sen}^s , характеризующую положение Солнца относительно солнечного датчика:

$$R_{\text{sen}}^s = R_{\gamma_z} \cdot R_{\alpha_x}, \quad (3.77)$$

где

$$R_{\varphi_z} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{\alpha_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

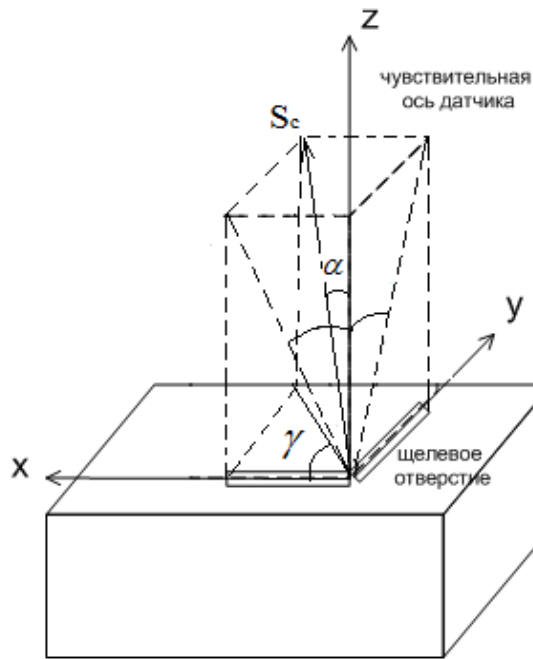


Рисунок 3.1 – Схема солнечного датчика

Для определения матрицы R_b^s умножим матрицу R_{sen}^s на матрицу, характеризующую положение системы координат датчика относительно связанной системы координат МКА R_b^{sen} :

$$R_b^s = R_{sen}^s \cdot R_b^{sen}. \quad (3.78)$$

Теперь получим матрицу R_s^o . Для этого перемножим матрицы, входящие в (1.6), (1.7) между собой:

$$R_s^o = R_i^o R_{\lambda_s^z} R_{\epsilon_s^y}. \quad (3.79)$$

После того, как все матрицы R_b^s и R_s^o определены, текущее угловое положение МКА, характеризуемое матрицей R_o^b , можно определить по формуле (3.75).

Как видно из (3.40) прогнозируемое значение ковариационной матрицы ошибки зависит от ее скорректированного значения, полученного на предыдущем шаге по времени и матрицы ошибки системы. Определение начальной ковариационной матрицы ошибки P и матрицы ошибки системы N , способствующей получению наименьшего времени сходимости фильтра Калмана и более высокой точности определения параметров ориентации МКА, проведено в результате нескольких "прогонов" фильтра Калмана при различных начальных значениях матриц P , N и анализа полученных результатов, которые приведены в разделе 5.

4 РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПРИ УЧЕТЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ, ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ И ПОГРЕШНОСТЕЙ В РАБОТЕ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ - МАХОВИКОВ

4.1 Методы разработки робастного управления

Робастность является одной из важнейших характеристик в разработке систем управления. При разработке оптимального управления "степень его оптимальности" зависит от того, насколько хорошо модель системы приближена к реальности. К сожалению, добиться максимального приближения модели системы практически невозможно из-за различных нелинейностей, отсутствии информации об изменении различных параметров системы и т.д. В связи с этим наиболее практичным является представление физической системы как системы с неопределенностью. Задачей робастного управления является разработка управления, позволяющего достичь требуемого уровня поведения системы при наличии неопределенностей [13, с.208].

Теория робастного управления начала развиваться относительно недавно. Для разработки робастного управления используются различные методики, в частности теория H_∞ - управления [14, с.835], теория управления со скользящим режимом [15, с.1382], адаптивное управление [16 с.1022].

Для разработки управления со скользящим режимом требуется подобрать такую скользящую поверхность, где ориентация космического аппарата достигает требуемого характера. Разработка адаптивного управления сопряжена с большим количеством вычислений и в некоторых случаях адаптивное управление может быть реализовано в системах с высокопроизводительными вычислительными устройствами [17, с.162]. При разработке H_∞ - управления не возникает подобных сложностей, по этой причине оно может быть успешно использовано и реализовано на вычислительных устройствах систем управления космических аппаратов.

В данной работе разработка робастного управления ориентацией малого космического аппарата с учетом неопределенностей моментов инерции МКА, внешних возмущений и погрешностей работы исполнительных органов производится на базе теории H_∞ - управления.

В теории синтеза H_∞ - управления неопределенность обычно выражается как (рисунок 4.1):

1) аддитивное возмущение [13, с.215]:

$$\Omega = \{P(s) | P(s) = P_0(s) + W(s)\Delta(s), \|\Delta\|_\infty \leq 1\}. \quad (4.1)$$

2) мультипликативное возмущение [13, с.216]:

$$\Omega = \{P(s) | P(s) = P_0(s)(I + W(s)\Delta(s)), \|\Delta\|_\infty \leq 1\}. \quad (4.2)$$

3) возмущение по обратной связи [13, с.218]:

$$\Omega = \{P(s) | P(s) = P_0(s)(I + W(s)\Delta(s))^{-1}, \|\Delta\|_\infty \leq 1\}, \quad (4.3)$$

где

$\Delta(s)$ - произвольная устойчивая передаточная матрица с L_2 - нормой не более чем 1;

$W(s)$ - передаточная матрица для отображения частотных характеристик неопределенности.

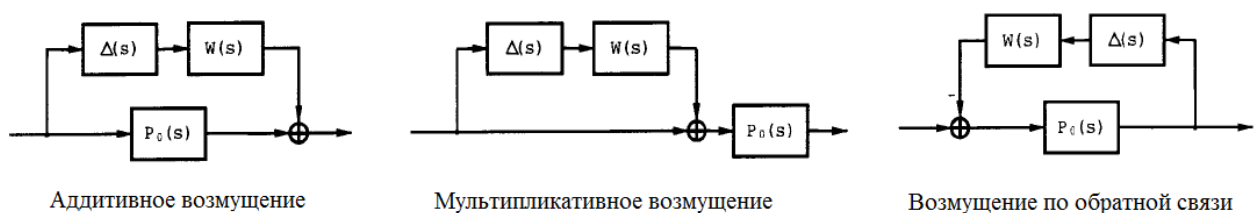


Рисунок 4.1 - Различные представления неопределенности

Система с неопределенностями может быть представлена как дробно - линейная модель:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(s) \\ \psi_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(s) \\ \phi_2(s) \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

где

$G_{11}(s), G_{12}(s), G_{21}(s), G_{22}(s)$ - устойчивы.

Тогда замкнутую систему $G_{\psi_2\phi_2}$ можно получить в виде:

$$G_{\psi_2\phi_2}(s) = G_{22}(s) + G_{21}(s)\Delta(s)(I - G_{11}(s)\Delta(s))^{-1}G_{12}(s). \quad (4.5)$$

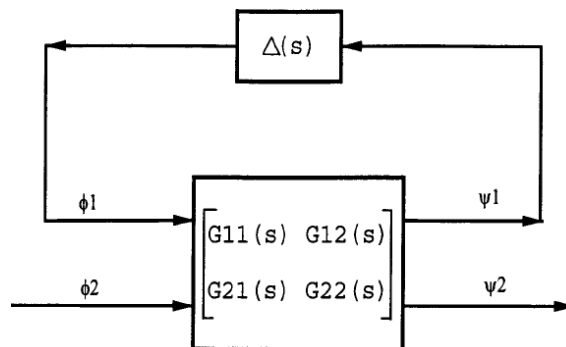


Рисунок 4.2 - Стандартная модель системы с неопределенностями

Таким образом, устойчивость замкнутой системы будет зависеть от $(I - G_{11}(s)\Delta(s))^{-1}$. Если $\|G_{11}\Delta\|_\infty < 1$, тогда $(I - G_{11}(s)\Delta(s))^{-1}$ не будет иметь полюсов, и тогда мы можем достичь робастной устойчивости для замкнутой системы при наличии неопределенности $\Delta(s)$. Это утверждение характеризует теорему о малом коэффициенте.

Теорема 4.1 (Теорема о малом коэффициенте) [13, с.212]. Зададим множество устойчивых матриц неопределенности $\{\Delta(s) \mid \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$. Если $M(s)$ устойчива, то $(I - M(s)\Delta(s))^{-1}$ и $\Delta(s)(I - M(s))^{-1}$ устойчивы тогда и только тогда, когда $\|M\|_\infty < 1$.

Синтез H_∞ - управления может быть произведен на основе одного из двух подходов: линейный и нелинейный подход. В первом случае для синтеза управления используются линейные или линеаризованные уравнения системы [13, с.406]. Во втором случае синтез управления производится на базе нелинейных уравнений системы [52, 53].

В данной работе мы рассмотрим проблему синтеза H_∞ - управления для линейных систем вида:

$$\begin{aligned}\vec{\dot{x}} &= A\vec{x} + B_1\vec{w} + B_2\vec{u}, \\ \vec{z} &= C_1\vec{x} + D_{11}\vec{w} + D_{12}\vec{u}, \\ \vec{y} &= C_2\vec{x} + D_{12}\vec{w}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

где

\vec{x} - вектор состояния системы;

A - матрица состояния;

B_1 - матрица возмущений;

\vec{w} - вектор входных параметров системы;

B_2 - матрица управления;

\vec{u} - вектор управления системы;

\vec{z} - вектор выходных параметров системы;

\vec{y} - вектор наблюдаемых параметров системы.

с передаточной матрицей:

$$H_{zw}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.\tag{4.7}$$

Задачей суб-оптимального H_∞ - синтеза является синтез стабилизирующего контроллера таким образом, чтобы норма $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ при $\gamma > 0$.

Суб-оптимальной задача называется по той причине, что заранее неизвестно при каком γ выполняется условие $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$.

Задачей оптимального H_∞ - синтеза является синтез стабилизирующего контроллера, при котором минимизируется $\|H_{zw}\|_\infty$.

Здесь норма $\|H_{zw}\|_\infty$ при существовании (4.7) может быть задана как [54]:

$$\|H_{zw}\|_\infty = \sup \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} : w \neq 0 \right\}. \quad (4.8)$$

Откуда следует, что для любого $\gamma > 0$ $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ если:

$$J_\infty(H_{zw}, \gamma) = \max_w \left[\|z\|_2^2 - \gamma^2 \|w\|_2^2 \right] = \max_w \int_0^\infty [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt < \infty. \quad (4.9)$$

4.1.1 Синтез H_∞ - управления с обратной связью по вектору состояния

Для синтеза H_∞ - управления используется в основном два подхода: 1) синтез H_∞ - управления на базе уравнений Рикатти; 2) синтез H_∞ - управления на базе линейных матричных неравенств. В данном разделе мы рассмотрим задачи синтеза H_∞ - управления, в основе которых лежат результаты работ [14, с.835; 55].

Для синтеза H_∞ - управления система:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{x}} &= A\vec{x} + B_1\vec{w} + B_2\vec{u}, \\ \vec{z} &= C_1\vec{x} + D_{12}\vec{u}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

должна удовлетворять следующим требованиям [54, с.38]:

- 1) (C_1, A) является определимой;
- 2) (A, B_2) является стабилизируемой;
- 3) $D_{12}^T [C_1, D_{12}] = [0, I]$.

С учетом перечисленных требований введем симметричную матрицу X :

$$\begin{aligned}
\|\vec{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\vec{w}\|_2^2 &= \int_0^\infty \left[(C_1 \vec{x} + D_{12} \vec{u})^T (C_1 \vec{x} + D_{12} \vec{u}) - \gamma^2 \vec{w}^T \vec{w} \right] dt = \\
&= \int_0^\infty \left[\frac{d}{dt} (\vec{x}^T X \vec{x}) + \|C_1 \vec{x} + D_{12} \vec{u}\|^2 - \gamma^2 \vec{w}^T \vec{w} \right] dt - \int_0^\infty \frac{d}{dt} (\vec{x}^T X \vec{x}) dt = \\
&= \int_0^\infty \left[2\vec{x}^T X (A\vec{x} + B_1 \vec{u} + B_2 \vec{w}) + \|C_1 \vec{x} + D_{12} \vec{u}\|^2 - \gamma^2 \vec{w}^T \vec{w} \right] dt - \vec{x}^T(\infty) X \vec{x}(\infty) + \vec{x}^T(0) X \vec{x}(0) = (4.11) \\
&= \int_0^\infty \vec{x}^T \left(A^T X + X A + C_1^T C_1 + X \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X \right) \vec{x} dt + \int_0^\infty \left\| \vec{u} + B_2^T X \vec{x} \right\|^2 dt - \\
&- \int_0^\infty \gamma^2 \left\| \vec{w} - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T X \vec{x} \right\|^2 dt - \vec{x}^T(\infty) X \vec{x}(\infty) + \vec{x}^T(0) X \vec{x}(0).
\end{aligned}$$

Таким образом, при начальном состоянии $\vec{x}(0)=0$ и стабилизирующем контроллере:

$$\vec{u} = -B_2^T X \vec{x}, \tag{4.12}$$

где X удовлетворяет уравнению Рикатти:

$$X A + A^T X + X \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X + C_1^T C_1 = 0. \tag{4.13}$$

можно получить, что:

$$\|\vec{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\vec{w}\|_2^2 = - \int_0^\infty \gamma^2 \left\| \vec{w} - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T X \vec{x} \right\|^2 dt < 0. \tag{4.14}$$

Отсюда мы получаем теорему для определения субоптимального H_∞ - управления с обратной связью по вектору состояния на базе уравнения Рикатти [54, с.40]:

Теорема 4.2: при выполнении требований (1) - (3) H_∞ - управление с обратной связью по вектору состояния обеспечивает $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ тогда и только тогда, когда существует некоторая симметричная матрица $X \geq 0$ такая что:

$$XA + A^T X + X \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X + C_1 C_1^T = 0. \quad (4.15)$$

Для определения оптимального H_∞ -управления, которое минимизирует норму $\|H_{zw}\|_\infty$, можно применить метод γ - итераций [54, с.49].

Приведенный подход к синтезу H_∞ -управления на базе уравнений Рикатти применяется довольно часто, однако в некоторых случаях, при наложении дополнительных условий, данный подход является практически неприменимым ввиду сложности реализации получаемого математического аппарата. В связи с этим получила развитие методика синтеза H_∞ - управления на базе линейных матричных неравенств, которая является более гибкой.

Линейное матричное неравенство представляет собой условие в форме:

$$A(x) = A_0 + x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_N A_N < 0, \quad (4.16)$$

где

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ - скалярные переменные;

A_0, \dots, A_N - симметричные матрицы, $A(x) < 0$.

Линейное матричное неравенство (4.16) представляет собой условие, налагаемое на x и выпуклое множество x . Таким образом, если целевая функция (например $c^T x$) является выпуклой, тогда имеет место выпуклая оптимизация в полиномиальном времени. Множество ЛМН может быть рассмотрено как одно ЛМН:

$$A^{(1)}(x) < 0, \dots, A^{(k)}(x) < 0 \Leftrightarrow \text{diag}(A^{(1)}(x), \dots, A^{(k)}(x)) < 0.$$

Это свойство является удобным для описания различных условий в форме ЛМН, не нарушая выпуклость.

В теории управления многие условия рассматриваются в виде матричных неравенств $A(X) < 0$, например, неравенство Ляпунова $A^T X + XA < 0$, где X является симметричной. Неравенства такого типа также могут быть записаны в стандартной форме (4.16) - ЛМН в матричных переменных X .

Существуют три типа основных задач, записанных в ЛМН:

1. Определить решение такое, чтобы $A(X) < 0$;
2. Минимизация выпуклой целевой функции при связях, налагаемых ЛМН.

В частности, $\min_x c^T x$ при $A(X) < 0$;

3. Задача минимизации собственных значений: $\min_x \lambda$ при $\begin{cases} A(x) < \lambda B(x) \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases}$

Для решения рассмотренных выше задач на текущий момент используется множество методик, приведенных например в [56].

В качестве примера использования ЛМН рассмотрим расчет H_∞ - нормы. В [57] показано, что система имеет конечную норму $L_2 \rightarrow L_2$, если существует такая постоянная γ , что:

$$\|z\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^T z(t) dt \leq \text{const} + \gamma^2 \|w\|_2^2 = \text{const} + \gamma^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt. \quad (4.17)$$

В [58] показано, что $L_2 \rightarrow L_2$ - норма устойчивой системы является H_∞ - нормой передаточной матрицы (4.7), которая задается выражением (4.8).

Тогда постановка задачи вычисления H_∞ - нормы с использованием матричных неравенств может быть сформулирована как: $\min_x \gamma^2$ при условиях (4.17), (4.18).

Теорема 4.3 [59]: непрерывная система (A, B, C, D) является устойчивой и L_2 - норма менее чем γ тогда и только тогда, когда существует некоторая симметричная матрица X такая что:

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma^2 I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.18)$$

$$X > 0,$$

или эквивалентно существует некоторая симметричная матрица Y такая что:

$$\begin{bmatrix} AY + YA^T & B & YC^T \\ B^T & -I & D^T \\ CY & D & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.19)$$

$$Y > 0.$$

Используя теорему 4.3, можно получить подход для синтеза H_∞ - управления с обратной связью по вектору состояния, основанный на ЛМН. Данный подход представляет собой прямую процедуру оптимизации, в сравнении с подходом на базе уравнений Рикатти.

Рассмотрим линейную систему, заданную уравнениями (4.10) с обратной связью по полному вектору состояния $\vec{u} = K\vec{x}$. Тогда замкнутая система будет иметь вид:

$$\left[\begin{array}{c|c} A + B_2 K & B_1 \\ \hline C_1 + D_{12} K & D_{11} \end{array} \right]. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в ЛМН (4.19), получаем необходимое и достаточное условие существования H_∞ - управления с обратной связью по вектору состояния:

$$\begin{bmatrix} (A+B_2K)Y+Y(A+B_2K)^T & B_1 & Y(C_1+D_{12}K)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ (C_1+D_{12}K)Y & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.21)$$

$Y > 0.$

Матрица коэффициентов K и симметричная матрица Y являются неизвестными в неравенстве (4.21). Как видно из (4.21), данное неравенство не является ЛМН. Однако, вводя замену $\hat{Y} = KY$, мы получим условия в форме ЛМН с матрицами \hat{Y}, Y и скалярной величиной γ^2 . Таким образом, приведенная задача синтеза H_∞ - управления представляет собой задачу выпуклой минимизации, которая может быть эффективно решена с помощью различных методик [55, с.6], [60], [61].

Как следствие, задача синтеза оптимального H_∞ - управления с обратной связью по вектору состояния является эквивалентной следующей задаче минимизации с учетом условий, выраженных ЛМН:

$$\min_{Y, \hat{Y}, \gamma^2} \begin{bmatrix} AY + YA^T + B_2\hat{Y} + \hat{Y}^T B_2^T & B_1 & YC_1^T + \hat{Y}^T D_{12}^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1Y + D_{12}\hat{Y} & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.22)$$

$$Y = Y^T > 0,$$

и матрицей коэффициентов $K = \hat{Y}^{-1}$.

4.1.2 H_∞ - управление с обратной связью по вектору наблюдаемых параметров

Для синтеза H_∞ - управления с обратной связью по вектору наблюдаемых параметров также можно использовать два подхода: на базе уравнений Рикатти, на базе линейных матричных неравенств. В данном разделе мы рассмотрим

задачи синтеза H_∞ - управления, в основе которых лежат результаты работ [54, с. 45; 55, с.10-11; 62].

Будем рассматривать синтез H_∞ - управления с обратной связью по вектору наблюдаемых параметров для системы вида:

$$\begin{aligned}\vec{\dot{x}} &= A\vec{x} + B_1\vec{w} + B_2\vec{u}, \\ \vec{z} &= C_1\vec{x} + D_{11}\vec{w} + D_{12}\vec{u}, \\ \vec{y} &= C_2\vec{x} + D_{21}\vec{w}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Синтез H_∞ - управления на базе уравнений Рикатти основывается на следующей теореме:

Теорема 4.4: предположим, что для системы вида (4.23) существует наблюдатель вида [54, с. 45]:

$$\begin{aligned}\vec{\dot{\hat{x}}} &= A\vec{\hat{x}} + B\vec{u} - H(\vec{y} - C_2\vec{\hat{x}}), \\ \vec{z} &= C_1\vec{\hat{x}} + D_{12}\vec{u}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

и удовлетворяются условия:

- 1) (A, B_1) - стабилизируема и (C_1, A) - определима;
- 2) (A, B_2) - стабилизируема и (C_1, A) - определима;
- 3) $D_{12}^T[C_1, D_{12}] = [0, I]$;
- 4) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$.

Тогда для системы (4.23) можно определить закон управления, обеспечивающий $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ тогда и только тогда, когда существуют симметричные матрицы $X \geq 0$ и $Y \geq 0$, удовлетворяющие уравнениям Рикатти:

$$XA + A^T X + X \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) X + C_1 C_1^T = 0,\tag{4.25}$$

$$AY + YA^T + Y \left(\frac{1}{\gamma^2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \right) Y + B_1 B_1^T = 0, \quad (4.26)$$

$$\rho(XY) < \gamma^2, \quad (4.27)$$

где

$\rho(XY)$ представляет собой максимальное собственное значение XY .

Данный стабилизирующий контроллер имеет вид:

$$\vec{u} = Kz, \quad (4.28)$$

$$H = -YC_2^T, \quad (4.29)$$

где

$$K = -B_2^T X.$$

Синтез H_∞ - управления с обратной связью по вектору наблюдаемых параметров также может быть проведен на базе ЛМН.

Теорема 4.5 [62, с.1010]: Пусть задана постоянная $\gamma > 0$ и линейная система вида (4.23). Для системы (4.23) существует управление вида:

$$u = K_{sub}(s)y, \quad (4.30)$$

обеспечивающее $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ тогда и только тогда, когда существуют симметричные матрицы R и S , удовлетворяющие условиям, налагаемым ЛМН:

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\mathcal{A} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + SA & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\mathcal{A} & D_{11} \\ C_1 & D_{11}^T & -\mathcal{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.32)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.33)$$

где

N_R, N_S представляют собой базисы нуль-пространств матриц (B_2^T, D_{12}^T) и (C_2, D_{21}) соответственно.

R, S связаны с N_R, N_S с помощью одного линейного уравнения, решаемого относительно $X_\infty > 0$ [62, с.1011]:

$$\begin{pmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{pmatrix} = X_\infty \begin{pmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

в котором матрицы M, N связаны соотношением:

$$MN^T = I - RS. \quad (4.35)$$

$K_{sub}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right]$ и X_∞ в свою очередь связаны ЛМН [62, с.1011]:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T X_\infty + X_\infty A_{cl} & X_\infty B_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T X_\infty & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (4.36)$$

где

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{pmatrix}, B_{cl} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k D_{21} \end{pmatrix}, \quad (4.37)$$

$$C_{cl} = (C_1 + D_{12} D_k C_2, D_{12} C_k), D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_k D_{21}.$$

ЛМН (4.36) также может быть переписано в виде:

$$Z + QK_{sub} P^T + PK_{sub}^T Q^T < 0, \quad (4.38)$$

где матрицы Z, Q, P зависят только от $X_\infty, A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$.

Таким образом, алгоритм синтеза H_∞ - управления с обратной связью по наблюдаемым параметрам с помощью ЛМН заключается в следующем: при существовании пары (R, S) определяем X_∞ с помощью (4.34). После этого неизвестные параметры контроллера A_K, B_K, C_K и D_K могут быть определены путем решения неравенства (4.38).

Получению H_∞ - контроллера при существовании пары (R, S) посвящено несколько работ: [61, с.671; 62, с.1011; 63, с.1311].

Таким образом, задача синтеза H_∞ - управления с обратной связью по вектору наблюдаемых параметров представляет собой задачу линейной выпуклой минимизации при ограничениях, выраженных с помощью линейных матричных неравенств.

4.2 Робастное управление ориентацией малого космического аппарата на базе H_∞ - управления

Как известно, малые космические аппараты в большей степени подвержены внешним возмущениям по причине их небольшого веса и размеров. Одним из примеров является японский МКА дистанционного зондирования Земли PRISM, который благодаря малой массе можно отнести к классу наноспутников [64]. Для PRISM с моментами инерции порядка $10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ расчетные гравитационные возмущения имеют порядок 10^{-7} Нм , аэродинамические возмущения - порядок 10^{-8} Нм , солнечные возмущения - порядок 10^{-8} Нм , магнитные возмущения - порядок 10^{-6} Нм [64, с.2040] и соответственно суммарное возмущающее ускорение, воздействующее на МКА, будет иметь порядок $10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Для спутника, имеющего меньшие габаритные размеры и массу, возмущающие ускорения будут иметь больший порядок.

В данном разделе мы рассмотрим разработку робастного управления ориентацией МКА для решения задачи поддержания орбитальной ориентации при воздействии внешних возмущений, а также при условиях погрешностей работы исполнительных органов и неопределенностей моментов инерции МКА.

В качестве исполнительных органов МКА будем рассматривать маховики, в качестве внешних возмущений - гравитационные возмущения Земли и остаточные магнитные возмущения, возникающие вследствие функционирования электрических цепей различных электронных компонентов космического аппарата и солнечных батарей на освещенной стороне орбиты, изменения электрического сопротивления материалов конструкции космического аппарата, наличия на борту космического аппарата аккумуляторных батарей и антенных модулей. Солнечные и аэродинамические возмущения в работе не рассматриваются в виду малости миделевого сечения МКА. Неопределенность моментов инерции имеет место благодаря наличию движущихся частей в конструкции МКА, например, выдвинутого телескопа (рисунок 4.3). Погрешности в работе исполнительных органов - маховиков обусловлены естественным износом вращающихся деталей (подшипников).

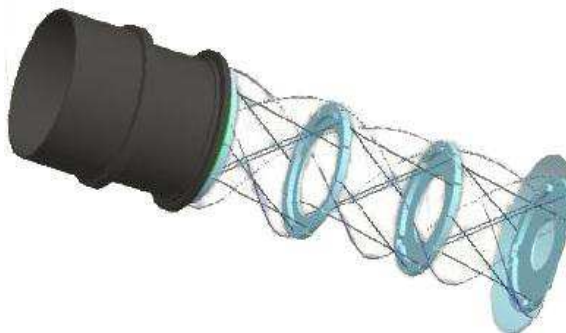


Рисунок 4.3 - Подвижный телескоп МКА

Для разработки робастного управления используем теорию H_∞ - управления, приведенную в предыдущем разделе для синтеза систем управления с обратной связью по наблюдаемым параметрам. В качестве уравнений вращательного движения МКА рассмотрим уравнения (2.3), (2.6).

Согласно постановке задачи момент внешних сил в правой части уравнений (2.3) примет вид:

$$\vec{M}_e^b = \vec{M}_g + \vec{M}_m, \quad (4.39)$$

где

\vec{M}_g - гравитационный момент;

\vec{M}_m - магнитный момент.

Гравитационный момент вычисляется по формуле [27, с. 249]:

$$\vec{M}_g = 3\omega_0^2 \begin{bmatrix} (J_z - J_y)R_{o23}^b R_{o33}^b \\ (J_x - J_z)R_{o13}^b R_{o33}^b \\ (J_y - J_x)R_{o13}^b R_{o23}^b \end{bmatrix}. \quad (4.40)$$

Возмущающий магнитный крутящий момент, возникающий вследствие взаимодействия остаточного магнитного момента МКА \vec{m} с магнитным полем Земли, рассчитывается по формуле [65]:

$$\begin{aligned} \vec{M}_m &= \vec{m} \times \vec{B}^b, \\ \vec{m} &= \text{diag}\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\tau}\right) \vec{m} + \eta, \end{aligned} \quad (4.41)$$

где

\vec{B}^b - вектор магнитной индукции магнитного поля Земли в ССК;

τ - постоянная времени, равная длительности одного витка МКА по орбите;

η - функция, определяющая белый гауссовский шум.

В связи с тем, что теория H_∞ - управления, приведенная в данной работе, рассматривается для линейных систем, проведем линеаризацию уравнений (2.3), (2.6) около положения $\vec{Q}_{ob} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\vec{\omega}_{bo}^b = [0 \ 0 \ 0]^T$, которое соответствует случаю, когда оси ССК совпадают с осями ОСК.

На первом этапе проведем линеаризацию кинематических уравнений.

Подставляя в уравнения (2.6) $\vec{Q}_{ob} = \vec{\delta Q}_{ob} \otimes \vec{Q}_{ob}$, $\vec{\omega}_{bo}^b = \vec{\delta \omega}_{bo}^b + \vec{\tilde{\omega}}_{bo}^b$ и учитывая, что

$\vec{Q}_{ob} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\vec{\omega}_{bo}^b = [0 \ 0 \ 0]^T$, получим линеаризованные кинематические уравнения в виде:

$$\begin{cases} \delta \dot{q}_1^{bo} = \frac{1}{2} \delta \omega_{bo\ x}^b, \\ \delta \dot{q}_2^{bo} = \frac{1}{2} \delta \omega_{bo\ y}^b, \\ \delta \dot{q}_3^{bo} = \frac{1}{2} \delta \omega_{bo\ z}^b. \end{cases} \quad (4.42)$$

Далее перейдем к линеаризации динамических уравнений (2.3). С учетом (2.7), $\vec{\omega}_{bi}^b$ в уравнениях (2.3) имеет вид:

$$\vec{\omega}_{bi}^b = \vec{\omega}_{bo}^b + R_b^o \vec{\omega}_{oi}^o. \quad (4.43)$$

Проводя линеаризацию матрицы R_b^o , получим:

$$R_b^o = \begin{bmatrix} 1 & 2\delta q_3^{bo} & -2\delta q_2^{bo} \\ -2\delta q_3^{bo} & 1 & 2\delta q_1^{bo} \\ 2\delta q_2^{bo} & -2\delta q_1^{bo} & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Так как в (2.7) $\vec{\omega}_{oi}^o = [0 \ -\omega_0 \ 0]^T$, то:

$$R_b^o \vec{\omega}_{oi}^o = \begin{bmatrix} -2\omega_0 \delta q_3^{bo} \\ -\omega_0 \\ 2\delta q_1^{bo} \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

Тогда с учетом (4.42) и (4.45) из выражения (4.43) получим:

$$\vec{\omega}_{bi}^b = \begin{bmatrix} 2\delta q_1^{bo} - 2\omega_0 \delta q_3^{bo} \\ 2\delta q_2^{bo} - \omega_0 \\ 2\delta q_3^{bo} - 2\delta q_1^{bo} \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Введем для удобства обозначения $\overrightarrow{\delta Q_{b0}} = \overrightarrow{\delta Q}$, тогда выражение (4.46) примет вид:

$$\overrightarrow{\omega_{bi}^b} = \begin{bmatrix} 2\delta q_1 - 2\omega_0 \delta q_3 \\ 2\delta q_2 - \omega_0 \\ 2\delta q_3 - 2\delta q_1 \omega_0 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

Подставляя (4.47) и производную по времени от (4.47) в уравнения (2.3), получим:

$$\begin{cases} J_x(2\delta \ddot{q}_1 - 2\omega_0 \delta \ddot{q}_3) = -(J_z - J_y)(-2\omega_0 \delta \dot{q}_3 - 2\delta q_1 \omega_0^2) + \omega_0 h_z + \delta M_{c_x} + \delta M_{g_x} + \delta M_{m_x}, \\ 2J_y \delta \ddot{q}_2 = \delta M_{c_y} + \delta M_{g_y} + \delta M_{m_y}, \\ J_x(2\delta \ddot{q}_3 - 2\omega_0 \delta \dot{q}_1) = -(J_y - J_x)(-2\omega_0 \delta \dot{q}_1 + 2\delta q_3 \omega_0^2) - \omega_0 h_x + \delta M_{c_z} + \delta M_{g_z} + \delta M_{m_z}, \end{cases} \quad (4.48)$$

где

$\overrightarrow{\hat{M}_a} = [\omega_0 h_z \ 0 \ -\omega_0 h_x]^T$ представляет собой линеаризованный гироскопический момент, возникающий вследствие наличия на борту МКА вращающихся исполнительных органов - маховиков.

Ввиду малости значений ω_0, h_x, h_y, h_z в дальнейшем $\overrightarrow{\hat{M}_a}$ можно пренебречь в уравнениях (4.48).

Перейдем к линеаризации гравитационного и магнитного моментов. Учитывая (4.44), выражение для линеаризованного гравитационного момента примет вид:

$$\overrightarrow{\delta M_g} = 6\omega_0^2 \begin{bmatrix} (J_z - J_y)\delta q_1 \\ (J_x - J_z)\delta q_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Для линеаризации магнитного момента перепишем выражение (4.41):

$$\overrightarrow{M}_m = [\vec{m} \times] R_o^b B^o, \quad (4.50)$$

где

B^o - вектор магнитной индукции в проекции на ОСК;

$$[\vec{m} \times] = \begin{bmatrix} 0 & -m_z & m_y \\ m_z & 0 & -m_x \\ -m_y & m_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Учитывая (4.44), выражение для линеаризованного магнитного момента примет вид:

$$\overrightarrow{\delta M}_m = \begin{bmatrix} -m_z B_y^0 + m_y B_z^0 \\ m_z B_x^0 - m_x B_z^0 \\ -m_y B_x^0 + m_x B_y^0 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

С учетом (4.49), (4.51) линеаризованные уравнения (4.48) примут вид:

$$\begin{cases} J_x \delta \ddot{q}_1 - (J_x + J_z - J_y) \omega_0 \delta \dot{q}_3 + 4(J_y - J_z) \delta q_1 \omega_0^2 = \frac{1}{2} u_x + \frac{1}{2} (B_z^o d_y - B_y^o d_z), \\ J_y \delta \ddot{q}_2 + 3\omega_0^2 (J_x - J_z) \delta q_2 = \frac{1}{2} u_y + \frac{1}{2} (B_x^o d_z - B_z^o d_x), \\ J_z \delta \ddot{q}_3 - (J_x + J_z - J_y) \omega_0 \delta \dot{q}_1 + (J_y - J_x) \delta q_3 \omega_0^2 = \frac{1}{2} u_z + \frac{1}{2} (B_y^o d_x - B_x^o d_y), \end{cases} \quad (4.52)$$

где

$\vec{u} = [\delta M_{c_x}, \delta M_{c_y}, \delta M_{c_z}]^T$ - вектор управляющих моментов маховиков;

$\vec{d} = [m_x, m_y, m_z]^T$ - вектор внешних возмущений.

Для синтеза закона управления приведем систему (4.52) к более удобному виду:

$$F_a \vec{\ddot{p}} + H_v \vec{\dot{p}} + Q_p \vec{p} = G_d \vec{d} + G_u \vec{u}, \quad (4.53)$$

где $p = [\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3]$;

$$\begin{aligned}
 F_a &= \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}, \quad H_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_0(J_x + J_z - J_y) \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(J_x + J_z - J_y) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 Q_p &= \begin{bmatrix} 4\omega_0^2(J_y - J_z) & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2(J_z - J_x) & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2(J_y - J_x) \end{bmatrix}, \quad G_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \\
 G_d &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}B_z^o & -\frac{1}{2}B_y^o \\ -\frac{1}{2}B_z^o & 0 & \frac{1}{2}B_x^o \\ \frac{1}{2}B_y^o & -\frac{1}{2}B_x^o & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

Для моделирования неопределенностей моментов инерции МКА примем, что преобразованное значение моментов инерции МКА можно рассматривать как сумму их номинальных значений $\tilde{J}_x, \tilde{J}_y, \tilde{J}_z$ и возмущений:

$$J_x = \tilde{J}_x + \Delta J_x \delta_x, \quad J_y = \tilde{J}_y + \Delta J_y \delta_y, \quad J_z = \tilde{J}_z + \Delta J_z \delta_z, \tag{4.55}$$

где

$\Delta J_x, \Delta J_y, \Delta J_z$ - значение вариации моментов инерции МКА;

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ - нормализованные параметрические неопределенности моментов инерции МКА, $\delta_x, \delta_y, \delta_z \leq 1$.

Тогда матрицы F_a, H_v, Q_p в (4.53) примут вид:

$$F_a = F_a^0 + L_F \Delta_F P_F, \tag{4.56}$$

$$H_v = H_v^0 + L_H \Delta_H P_H, \tag{4.57}$$

$$Q_p = Q_p^0 + L_Q \Delta_Q P_Q, \tag{4.58}$$

где

F_a^0, H_v^0, Q_p^0 представляют собой номинальные матрицы, заданные формулами (4.54);

$\Delta_F, \Delta_H, \Delta_Q$ - диагональные матрицы нормализованных неопределенностей $\delta_x, \delta_y, \delta_z$.

Вводя матрицу:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_F & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_H & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_Q \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

получим:

$$\vec{d} = -\vec{z}, \quad (4.60)$$

$$\vec{z} = [P_F \ddot{p}, P_H \dot{p}, P_Q p], \quad (4.61)$$

$$\tilde{G}_d = [L_F \ L_H \ L_Q]. \quad (4.62)$$

При подстановке (4.56) - (4.62) в (4.53) в правой части уравнений появляется дополнительный член $\tilde{G}_d \vec{d}$, представляющий собой возмущения, обусловленные неопределенностями моментов инерции МКА:

$$F_a \vec{p} + H_v \dot{\vec{p}} + Q_p \vec{p} = G_d \vec{d} + \tilde{G}_d \vec{d} + G_u \vec{u}. \quad (4.63)$$

Для моделирования погрешностей работы исполнительных органов, обусловленных изменением их эффективности или различными неисправностями, в данной работе предлагается дополнить уравнения (4.63) следующим образом:

$$F_a \vec{p} + H_v \vec{p} + Q_p \vec{p} = G_d \vec{d} + \tilde{G}_d \vec{d} + G_u L_u (I + P_u \Delta_u) \vec{u} \quad (4.64)$$

где

L_u - матрица параметров, характеризующих изменение эффективности исполнительных органов;

Δ_u - матрица, представляющая нормализованные параметрические неопределенности;

P_u - матрица, задающая ограничения на Δ_u .

Т.е. в уравнениях (4.63) в правой части появился дополнительный член $G_u L_u P_u \Delta_u \vec{u}$, характеризующий возмущения, обусловленные погрешностями исполнительных органов. Обозначая далее $\vec{d} = \Delta_u \vec{u}$, $\hat{G}_d = G_u L_u P_u$ из (4.64) получим:

$$F_a \vec{p} + H_v \vec{p} + Q_p \vec{p} = G_d \vec{d} + \tilde{G}_d \vec{d} + \hat{G}_d \vec{d} + \hat{G}_u \vec{u}, \quad (4.65)$$

где

$$\hat{G}_u = G_u L_u.$$

Приведем матрицы $L_F, P_F, L_H, P_H, L_Q, P_Q, L_u, P_u$, входящие в уравнение (4.65):

$$L_F = \begin{bmatrix} \Delta J_x & 0 & 0 \\ 0 & \Delta J_y & 0 \\ 0 & 0 & \Delta J_z \end{bmatrix},$$

$$P_F = I_{3 \times 3},$$

$$\Delta_F = \begin{bmatrix} \delta_x & 0 & 0 \\ 0 & \delta_y & 0 \\ 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix},$$

$$L_H = \begin{bmatrix} 0 & -\Delta J_x \omega_0 & 0 & -\Delta J_y \omega_0 & 0 & -\Delta J_z \omega_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Delta J_x \omega_0 & 0 & \Delta J_y \omega_0 & 0 & \Delta J_z \omega_0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_H = \begin{bmatrix} \delta_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_z \end{bmatrix},$$

$$P_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_Q = \begin{bmatrix} \Delta J_y \omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & -4\Delta J_z \omega_0^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\Delta J_x \omega_0^2 & 3\Delta J_z \omega_0^2 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta J_y \omega_0^2 & 0 & 0 & 0 & -\Delta J_x \omega_0^2 \end{bmatrix},$$

$$\Delta_Q = \begin{bmatrix} \delta_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_x \end{bmatrix},$$

$$P_Q = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$L_u = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix},$$

$$P_u = I_{3 \times 3},$$

$$\Delta_u = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{bmatrix},$$

$$\sigma_e = \text{const.}$$

Путем следующих матричных преобразований полученное уравнение (4.65) может быть преобразовано к виду (4.23), где:

$$\vec{w} = [\vec{d} \quad \vec{\hat{d}} \quad \vec{d}], \quad \vec{z} = [\vec{z} \quad \vec{u} \quad \vec{z}],$$

$$A = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -(F_a^0)^{-1} Q_p & -(F_a^0)^{-1} H_v^0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 15} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ (F_a^0)^{-1} \tilde{G}_d & (F_a^0)^{-1} \hat{G}_d & (F_a^0)^{-1} G_d \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ (F_a^0)^{-1} \hat{G}_u \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -P_F (F_a^0)^{-1} Q_p - P_M (F_a^0)^{-1} H_v^0 & \\ 0_{6 \times 3} & P_H \\ P_Q & 0_{6 \times 3} \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} P_F (F_a^0)^{-1} \tilde{G}_d & P_F (F_a^0)^{-1} \hat{G}_d & P_F (F_a^0)^{-1} G_d \\ 0_{6 \times 15} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \\ 0_{6 \times 15} & 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \\ P_F (F_a^0)^{-1} \hat{G}_u \\ 0_{6 \times 3} \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \rho_e I_{6 \times 6},$$

$$D_{21} = 0_{6 \times 21},$$

$$\rho_e = \text{const}.$$

Далее, используя подход, описанный в разделе 4.1.2, может быть проведен синтез H_∞ -контроллера в виде:

$$K_{sub}(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right]$$

4.3 Методы разработки управления, устойчивого к погрешностям в работе исполнительных органов

Для разработки управления, устойчивого к погрешностям в работе исполнительных органов, многими авторами предлагаются алгоритмы оценки величины возмущающего воздействия от рассмотренных погрешностей и учета этой величины в функции управления. В качестве основных погрешностей рассматриваются: задержки сигнала управления, заклинивание механической конструкции исполнительных органов, деградация эффективности исполнительных органов, насыщение исполнительных органов и т.д. Для оценки величины возмущающего воздействия предлагаются различные подходы, например разработка наблюдателей [66], [67], алгоритмы на базе нейронных сетей [68] и т.д.

Также встречаются методики разработки управления, в которых не требуется предварительная оценка возмущающих воздействий от погрешностей исполнительных органов, например управление со скользящим режимом [69], [70], адаптивное управление [71], алгоритмы с переменной структурой управления [72].

В данной работе для разработки управления, устойчивого к погрешностям исполнительных органов, предлагается использовать теорию H_∞ - управления с учетом ограничений на расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы управления в комплексной полуплоскости.

Как известно, для обеспечения устойчивости замкнутой системы управления ее корни характеристического уравнения должны быть расположены в левой комплексной полуплоскости. Однако в некоторых случаях расположение корней ХУ замкнутой системы в определенных областях левой полуплоскости позволяет достичь лучшего эффекта. Развитием теории H_∞ - управления при ограничении на расположение корней ХУ занимались лишь немногие авторы в связи со сложностью внедрения данных ограничений в процедуру синтеза H_∞ - управления.

В данном разделе мы рассмотрим процедуру введения ограничений на размещение корней ХУ в математическую модель синтеза H_∞ - управления на базе уравнений Рикатти и линейных матричных неравенств.

Рассмотрим линейную систему в виде (4.23) и зададим область расположения корней ХУ замкнутой системы на комплексной плоскости, которую назовем D - областью. Примем, что замкнутая система $A+B_2K$ является D - устойчивой, если все ее корни ХУ принадлежат D . В случае, когда D представляет собой левую полуплоскость это понятие сводится к асимптотической устойчивости, которая определяется в соответствии с теоремой Ляпунова: A является устойчивой тогда и только тогда, когда существует симметричная матрица X , удовлетворяющая:

$$AX + XA^T < 0, X > 0. \quad (4.66)$$

Данное понятие устойчивости по Ляпунову было расширено для определения устойчивости в различных областях комплексной полуплоскости в [73]. Рассматриваемые области представляют собой полиномиальные области в виде:

$$D = \left\{ z \in C : \sum_{0 \leq k, l \leq m} c_{kl} z^{k-l} z < 0 \right\}, \quad (4.67)$$

где c_{kl} - является вещественным и $c_{kl} = c_{lk}$.

На практике применяются области размещения корней ХУ в виде конических областей, круговых областей, пересечения нескольких областей и т.д.

Рассмотрим области размещения корней ХУ, задаваемые неравенствами:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x, y) : k_0 + k_1 x < 0\}, \\ \Omega_2 &= \{(x, y) : k_0 + k_1 x + k_2 y^2 + k_3 x^2 < 0\} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Обобщенное неравенство Ляпунова для таких областей было определено в [73, с.856]:

$$\sum_{p,q} c_{pq} A^{Tp} P A^q < 0, \quad X > 0, \quad (4.69)$$

где c_{pq} являются коэффициентами при $\varphi^p \psi^q$ в полиноме $\eta(\varphi, \psi)$.

Для того, чтобы собственные значения матрицы A принадлежали Ω_2 необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная симметричная матрица P , удовлетворяющая (4.69).

Например, для круговой области: $D_{cir} = \{(x, y) : k_0 + k_1 x + x^2 + y^2 < 0\}$, $c_{00} = k_0$, $c_{10} = 0.5k_1$, $c_{11} = 1$, $c_{02} = 0$ обобщенное уравнение Ляпунова принимает вид:

$$c_{00}P + c_{01}(A^T P + P A) + A^T P A = -Q. \quad (4.70)$$

Понятие D - устойчивости вводится в теорию H_∞ - управления следующим образом: замкнутая система с матрицей коэффициентов обратной связи K обеспечивает $\|H_{zw}\|_\infty < \gamma$ и размещение корней ХУ внутри Ω_2 тогда и только тогда, когда уравнения Рикатти и обобщенное уравнение Ляпунова [74]:

$$(A + BK)^T P + P(A + BK) + \gamma^2 P E E^T P + C^T C + K^T K = 0, \quad (4.71)$$

$$\sum_{p,q} c_{pq} (A + BK)^{Tp} Q (A + BK)^q + I = 0 \quad (4.72)$$

имеют решения $P > 0$, $Q > 0$ при заданных K , γ и c_{pq} .

Задача синтеза H_∞ - управления с ограничением на размещение корней ХУ в Ω_2 - области может рассматриваться как задача оптимизации с ограничением. Пусть $\mu = \gamma^{-2}$, тогда Лагранжиан для системы будет иметь вид [74, с.612]:

$$L(\mu, P, Q, K, X, Y) = \mu + \text{trace} \left\{ \begin{array}{l} \left[(A+BK)^T P + P(A+BK) + \mu P E E^T P + C^T C + K^T K \right] X + \\ + \left[\sum_{p,q} c_{p,q} (A+BK)^{Tp} Q (A+BK)^q + I \right] Y \end{array} \right\}, \quad (4.73)$$

где X, Y - множители Лагранжа.

Тогда в дополнение к (4.71) и (4.72) необходимыми условиями оптимальности будут [74, с.612]:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0, \frac{\partial L}{\partial P} = 0, \frac{\partial L}{\partial Q} = 0, \frac{\partial L}{\partial K} = 0. \quad (4.74)$$

Таким образом, мы рассмотрели задачу синтеза H_∞ - управления с ограничением на размещение корней ХУ в случае использования уравнений Рикатти. Большое практическое применение имеет синтез H_∞ - управления с ограничением на размещение корней ХУ на базе ЛМН. В данном случае задача синтеза управления сводится к задаче выпуклой оптимизации.

Напомним, что основные матрицы, характеризующие систему (4.23), аффинно зависят от состояния системы. Для применения подхода, основанного на ЛМН, необходимо задать область размещения корней ХУ таким образом, чтобы оно не нарушало данную аффинную зависимость. Иными словами необходимо использовать такие условия, как например условия устойчивости Ляпунова (4.66). Не считая некоторых случаев, на данный момент не существует каких либо подходов для преобразования (4.69) в ЛМН.

Полиномиальные области фактически не являются выпуклыми. В связи с этим, появилась необходимость определить области D - устойчивости с помощью ЛМН. Это было проделано в работе [75], где разработан класс областей D - устойчивости, математическая формулировка которых может быть использована при синтезе H_∞ - управления с помощью ЛМН.

D - область комплексной плоскости называется ЛМН - областью, если существуют симметричные матрицы $\alpha = [\alpha_{kl}]$, $\beta = [\beta_{kl}]$ такие что [75, с.359]:

$$D = \{z \in C : f_D(z) < 0\}, \quad (4.75)$$

$$f_D(z) = \alpha + z\beta + \bar{z}\beta^T = [\alpha_{kl} + \beta_{kl}z + \beta_{lk}\bar{z}]_{1 \leq k, l \leq m}. \quad (4.76)$$

В частности, размещение корней ХУ в заданной ЛМН - области может быть охарактеризовано блочной матрицей $m \times m$:

$$M_D(A, X) = [\alpha_{kl}X + \beta_{kl}AX + \beta_{lk}XA^T]_{1 \leq k, l \leq m}. \quad (4.77)$$

Матрица A является D - устойчивой тогда и только тогда, когда существует матрица X , такая что [75, с.360]:

$$M_D(A, X) < 0, \quad X > 0. \quad (4.78)$$

Рассмотрим в качестве примера ЛМН - область, задаваемую в виде диска с радиусом r и центром $(-q, 0)$. Характеристическое уравнение данной области будет иметь вид:

$$f_D(z) = \begin{pmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{pmatrix}. \quad (4.79)$$

В этом случае (4.78) сводится к:

$$\begin{pmatrix} -rX & qX+AX \\ qX+XA^T & -rX \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0. \quad (4.80)$$

H_∞ - норма представляет собой естественный инструмент для моделирования различных неопределенностей, в связи с этим, теория H_∞ - управления является наиболее подходящей для разработки робастного управления в сравнении, например, с теорией H_2 - управления. Далее в данном разделе мы рассмотрим H_∞ - управление с ограничением на размещение корней ХУ на базе ЛМН.

Рассмотрим линейную систему (4.23) с D - областью устойчивости. При предопределенном $\gamma > 0$ задача построения H_∞ - управления состоит в построении закона управления $y = K(s)u$, который:

- позволяет разместить корни ХУ замкнутой системы внутри D - области устойчивости, заданной с помощью характеристического уравнения (4.76);
- гарантирует выполнение условия $\|T_{wz\infty}\|_\infty < \gamma$, где T_{wz} обозначается передаточная функция от w к z .

Линейный контроллер $K(s)$ может быть представлен в форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= A_k x_k + B_k u, \\ u &= C_k x_k + D_k u. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Тогда $T_{wz}(s) = D_{cl} + C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1}B_{cl}$ при обозначениях:

$$\begin{aligned} A_{cl} &= \begin{pmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{pmatrix}, B_{cl} = \begin{pmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k D_{21} \end{pmatrix}, \\ C_{cl} &= (C_1 + D_{12} D_k C_2, D_{12} C_k), D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_k D_{21}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

В соответствии с (4.76) условие на ограничение размещения корней ХУ удовлетворяется тогда и только тогда, когда существует $X_D > 0$, такое что:

$$[\alpha_{kl} X_D + \beta_{kl} A_{cl} X_D + \beta_{lk} X_D A_{cl}^T]_{1 \leq k, l \leq m} < 0. \tag{4.83}$$

В то же время основные условия существования H_∞ - управления эквивалентны условию существования решения $X_\infty > 0$ следующего ЛМН:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_\infty + X_\infty A_{cl}^T & B_{cl} & X_\infty C_{cbo}^T \\ B_{cl}^T & -I & D_{cbo}^T \\ C_{cbo}X_\infty & D_{cbo} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.84)$$

Таким образом, приведенные выше условия существования управления удовлетворяются тогда и только тогда, когда (4.81), (4.82) позволяют найти некоторые положительно определенные матрицы X_D, X_∞ , и матрицу $\Omega_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix}$. Для удобства заменим (4.84) эквивалентным условием:

$$\begin{bmatrix} A_{cl}X_\infty + X_\infty A_{cl}^T & B_{cl} & X_\infty C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -\mathcal{H} & D_{cl}^T \\ C_{cl}X_\infty & D_{cl} & -\mathcal{H} \end{bmatrix} < 0. \quad (4.85)$$

Как и ранее, данная задача не является определенной, если матрица Ляпунова $X > 0$ не удовлетворяют условиям (4.83) и (4.85). Поэтому мы ограничимся рассмотрением следующей задачи синтеза H_∞ - управления с ограничением на размещение корней ХУ [75, с.363]:

$$\begin{aligned} & \text{Определить } X > 0 \text{ и управление } K(s) = \Omega_k, \\ & \text{удовлетворяющее (4.83) и с } X = X_D = X_\infty \end{aligned} \quad (4.86)$$

Дополнительной сложностью синтеза H_∞ - управления в данном случае является то, что (4.83) и (4.85) теперь содержат нелинейный член $v\Omega_k cX$. Однако эта нелинейность может быть устранена соответствующей заменой переменных рассмотренной например в [62. с.1012].

Как и в случае синтеза H_∞ - управления без ограничений на размещение корней ХУ, замена переменных производится с помощью матрицы Ляпунова x . В частности, x и ее обратная составляющая имеют вид [75, с.363]:

$$X = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & U \end{pmatrix}, X^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & V \end{pmatrix}, R \in R^{n \times n}, S \in R^{n \times n}. \quad (4.87)$$

Определим новые переменные закона управления как:

$$\begin{aligned} B_k &= NB_k + SB_2 D_k, \\ C_k &= C_k M^T + D_k C_2 R, \\ A_k &= NA_k M^T + NB_k C_2 R + SB_2 C_k M^T + S(A + B_2 D_k C_2)R. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Зададим теперь необходимые и достаточные условия разрешимости (4.86). Теорема 4.6 [75, с.364]: Пусть D - произвольная ЛМН - область в левой полуплоскости и пусть (4.76) представляет собой ее характеристическую функцию. Задача (4.86) разрешима тогда и только тогда, когда осуществима следующая система ЛМН:

Определить $R = R^T \in R^{n \times n}, S = S^T \in R^{n \times n}$ и матрицы A_k, B_k, C_k, D_k такие, что:

$$\begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} > 0, \quad (4.89)$$

$$\left[\alpha_{kl} \begin{pmatrix} R & I \\ I & S \end{pmatrix} + \beta_{kl} \Phi + \beta_{lk} \Phi^T \right]_{k,l} < 0, \quad (4.90)$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{21}^T \\ \Psi_{21} & \Psi_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad (4.91)$$

где

$$\begin{aligned}
\Phi &= \begin{bmatrix} AR + B_2 C_k & A + B_2 D_k C_2 \\ A_k & SA + B_k C_2 \end{bmatrix}, \\
\Psi_{11} &= \begin{bmatrix} AR + RA^T + B_2 C_k + C_k^T B_2^T & B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ (B_1 + B_2 D_k D_{21})^T & -\gamma I \end{bmatrix}, \\
\Psi_{21} &= \begin{bmatrix} A_k + (A + B_2 D_k C_2)^T & SB_1 + B_k D_{21} \\ C_1 R + D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{bmatrix}, \\
\Psi_{22} &= \begin{bmatrix} A^T S + SA + B_k C_2 + C_2^T B_k^T & (C_1 + D_{12} D_k C_2)^T \\ C_1 + D_{12} D_k C_2 & -\gamma I \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.92}$$

В случае существования решения заданной системы неравенств для нахождения контроллера $K(s)$, обеспечивающего размещение корней ХУ в заданной области и ограниченность нормы $\|T_{wz\infty}\|_{\infty} < \gamma$ необходимо [75, с.364]:

- определить матрицы M и N на основе выражения $MN^T = I - RS$;
- решить систему линейных уравнений (4.88) относительно B_k, C_k, A_k ;
- задать $K(s) = D_k + C_k (sI - A_k)^{-1} B_k$.

4.4 Управление ориентацией малого космического аппарата, устойчивое к погрешностям в работе исполнительных органов

Для разработки робастного управления, устойчивого к погрешностям работы исполнительных органов МКА, в данной работе предлагается использовать H_{∞} - управление, надежность которого будет обеспечиваться за счет расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы управления в определенной области комплексной полуплоскости.

Наложение при синтезе управления дополнительных условий на расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы управления обеспечит выполнение условий существования H_{∞} - управления и ограничение величин управляющих воздействий в определенном диапазоне.

В качестве уравнений, описывающих угловое движение МКА рассмотрим уравнение (4.65) с небольшими изменениями:

$$F_a \vec{\ddot{p}} + H_v \vec{\dot{p}} + Q_p \vec{p} = G_d \vec{d} + \hat{G}_d \vec{\tilde{d}} + \hat{G}_u \vec{u}, \tag{4.93}$$

где

$\vec{\hat{d}}$ - возмущения, обусловленные погрешностями работы исполнительных органов;

\vec{d} - внешние возмущения.

При этом основные матрицы, входящие в уравнение (4.93), имеют вид:

$$F_a = \begin{bmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix},$$

$$H_v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\omega_0(J_x + J_z - J_y) \\ 0 & 0 & 0 \\ \omega_0(J_x + J_z - J_y) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$Q_p = \begin{bmatrix} 4\omega_0^2(J_y - J_z) & 0 & 0 \\ 0 & 3\omega_0^2(J_z - J_x) & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega_0^2(J_y - J_x) \end{bmatrix},$$

$$G_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad G_d = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}B_z^o & -\frac{1}{2}B_y^o \\ -\frac{1}{2}B_z^o & 0 & \frac{1}{2}B_x^o \\ \frac{1}{2}B_y^o & -\frac{1}{2}B_x^o & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{G}_d = G_u L_u P_u,$$

$$\hat{G}_u = G_u L_u,$$

$$L_u = \begin{bmatrix} \sigma_e & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_e & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{bmatrix},$$

$$P_u = I_{3 \times 3}.$$

Путем следующих матричных преобразований полученное уравнение (4.93) может быть преобразовано к виду (4.23), где:

$$\vec{w} = [\vec{\hat{d}} \quad \vec{d}], \quad \vec{z} = [\vec{u} \quad \vec{z}],$$

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ -(F_a^0)^{-1} Q_p^0 & -(F_a^0)^{-1} H_v^0 \end{bmatrix}, \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ (F_a^0)^{-1} \hat{G}_d & (F_a^0)^{-1} G_d \end{bmatrix}, \\
B_2 &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ (F_a^0)^{-1} \hat{G}_u \end{bmatrix}, \\
C_1 &= \begin{bmatrix} -P_F (F_a^0)^{-1} Q_p^0 - P_M (F_a^0)^{-1} H_v^0 \\ 0_{6 \times 3} & P_H \\ P_Q & 0_{6 \times 3} \end{bmatrix} \\
D_{11} &= \begin{bmatrix} P_F (F_a^0)^{-1} \hat{G}_d & P_F (F_a^0)^{-1} G_d \\ 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \\ 0_{6 \times 3} & 0_{6 \times 3} \end{bmatrix}, \\
D_{12} &= \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \\ P_F (F_a^0)^{-1} \hat{G}_u \\ 0_{6 \times 3} \end{bmatrix}, \\
C_2 &= \rho_e I_{6 \times 6}, \\
D_{21} &= 0_{6 \times 21}, \\
\rho_e &= \text{const}.
\end{aligned}$$

В качестве области расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы рассматривается область $f_D(q, r)$ в виде диска с началом в точке q и радиусом r . Условия на расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы внутри области $f_D(q, r)$ определяются в виде неравенства:

$$\begin{pmatrix} -rX & qX + A_{cl}X \\ qX + XA_{cl}^T & -rX \end{pmatrix} < 0, \quad X > 0, \quad (4.94)$$

где

$$A_{cl} = \begin{pmatrix} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{pmatrix};$$

A_k, B_k, C_k, D_k - матрицы, формирующие H_∞ - контроллер в виде

$$K(s) = D_k + C_k (sI - A_k)^{-1} B_k.$$

Основываясь на постановке задачи синтеза H_∞ -управления для систем, описываемых уравнениями (4.23), определим постановку задачи синтеза H_∞ -управления для системы, описываемой уравнением (4.93): определить $X > 0$ и управление $K(s)$, удовлетворяющее (4.94), (4.85) и с $X = X_D = X_\infty$.

Используя данную постановку задачи, H_∞ -контроллер $K(s)$, обеспечивающий устойчивость к погрешностям работы исполнительных органов может быть определен на основе подхода, приведенного в главе 4.3.

5 РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ОРИЕНТАЦИЕЙ МАЛОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

5.1 Результаты численного моделирования управляемого углового движения малого космического аппарата при условиях недоступности полного вектора измерений

В данном разделе приводятся результаты численного моделирования определения параметров ориентации МКА и результаты численного моделирования управления ориентацией МКА при условиях недоступности полного вектора измерений. В основе численных расчетов использована имитационная модель системы определения и управления ориентацией малого космического аппарата, представленная в [76].

Моделирование вращательного движения проведено с шагом по времени $dt = 0.01 \text{sec}$ для МКА с моментами инерции $J = [0.04088 \ 0.04390 \ 0.01116] \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Начальное угловое положение и угловая скорость МКА приняты равными $\overrightarrow{Q}_{bo} = [0.9169; 0.1179; -0.2339; 0.301]^T$, $\overrightarrow{\omega}_{bi}^b = [0.09; -0.01; 0.03]^T \text{рад/сек}$.

На рисунках 5.1 - 5.2 приведены результаты определения угловой скорости и углового положения МКА на базе фильтра Калмана с использованием измерений солнечного и магнитного датчиков.

В качестве начального углового положения МКА в фильтре Калмана использовано угловое положение, полученное в результате его грубой оценки на основе показаний солнечного датчика по формулам (3.75) - (3.79):

$$\overrightarrow{Q}_{bo}(t_0) = [0.9109; 0.1578; -0.2678; 0.2712]^T. \quad (5.1)$$

А начальная угловая скорость МКА определена на основе полученного кватерниона с использованием кинематических уравнений (2.6).

Начальная матрица ковариационной ошибки определена, исходя из знания о величинах максимальных отклонений задания параметров ориентации МКА - угловой скорости и углового положения:

$$P(t_0) = \begin{bmatrix} P_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_q \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

где

$$P_\omega = 0.001, P_q = 10.$$

Матрица ошибки системы определена в ходе проведения нескольких численных экспериментов расчета параметров ориентации МКА (таблица 5.1), как матрица, при которой достигается наименьшая погрешность определения параметров ориентации.

Таблица 5.1 - Оценка точности определения параметров ориентации МКА

	Q_ω	Q_q	P_ω	P_q	Точность определения углового положения, рад	Точность определения угловой скорости, рад/сек
1	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$7.1 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$
2	$1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$1.1 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$
3	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$2.7 \cdot 10^{-8}$
4	$2 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$1.8 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
5	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$2.2 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
6	$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$8.6 \cdot 10^{-8}$	$2.5 \cdot 10^{-8}$
7	$4 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$8.7 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
8	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$8.7 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
9	$2 \cdot 10^{-6}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$7.8 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
10	$4 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-7}$	$1 \cdot 10^{-2}$	10	$7.8 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$

$$N = \begin{bmatrix} Q_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_q \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

где

$$Q_\omega = 0.00001 \quad Q_q = 0.000001.$$

Матрица ошибки измерений построена на основе формулы (3.74) с учетом реальных погрешностей работы магнитного и солнечного датчиков.

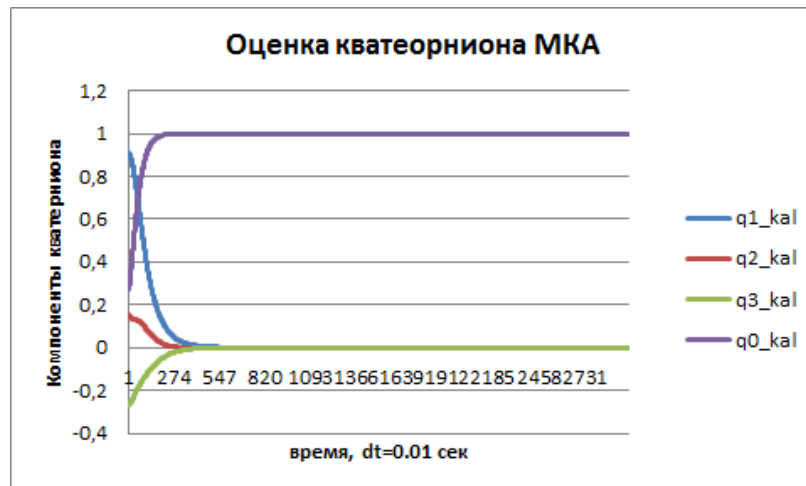


Рисунок 5.1 – Оценка кватерниона МКА с помощью фильтра Калмана

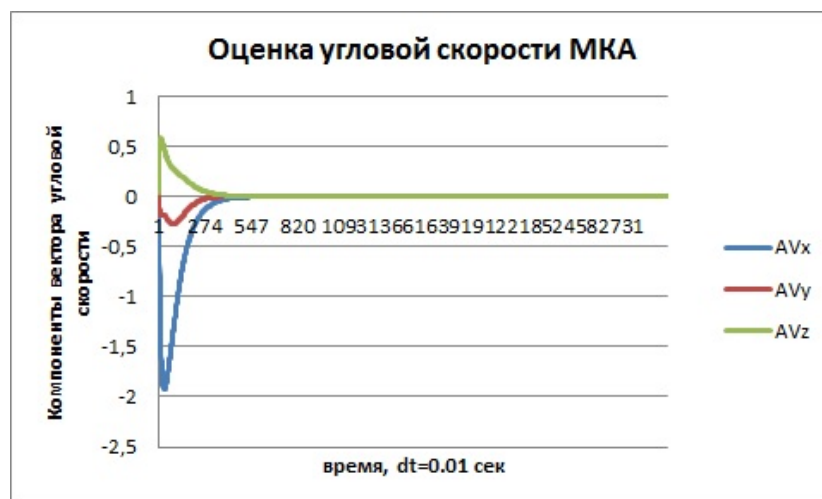


Рисунок 5.2 – Оценка угловой скорости МКА с помощью фильтра Калмана

На рисунках 5.3 - 5.4 приведены результаты сравнения оцениваемых параметров ориентации МКА с их истинными значениями. Пунктирной линией обозначены расчетные значения параметров ориентации, сплошной линией - истинные значения параметров ориентации. Как видно из рисунков, оцениваемые с помощью фильтра Калмана угловая скорость и угловое положение МКА, имеют малое отклонение от их истинных значений. Это также подтверждается конечными значениями компонент матрицы ковариации, которые близки к нулю:

$$P(t_k) = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0.1018 & 0.0 & 0.0 & -0.0001 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.1018 & 0.0 & 0.0 & -0.0001 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.1270 & 0.0 & 0.0 & -0.0005 \\ -0.0001 & 0.0 & 0.0 & 0.0100 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.0001 & 0.0 & 0.0 & 0.0100 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -0.0005 & 0.0 & 0.0 & 0.0100 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

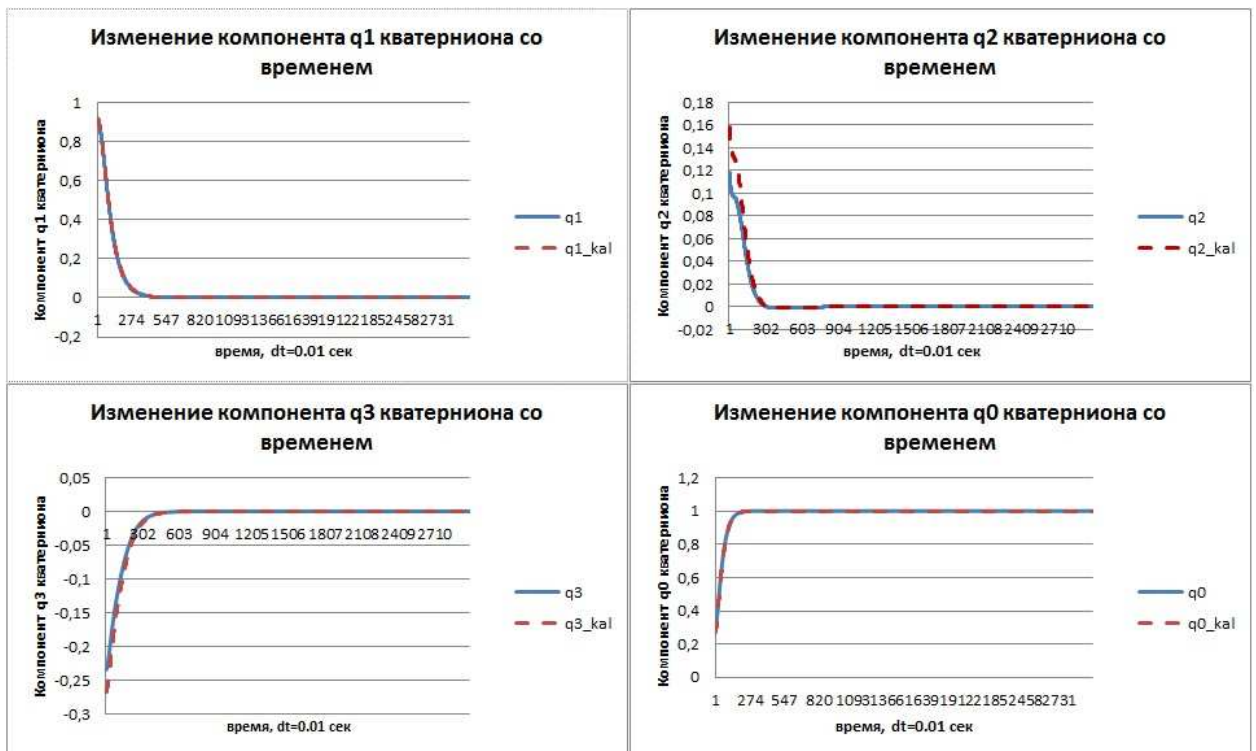


Рисунок 5.3 – Результаты сравнения оцениваемого углового положения МКА с его истинным значением

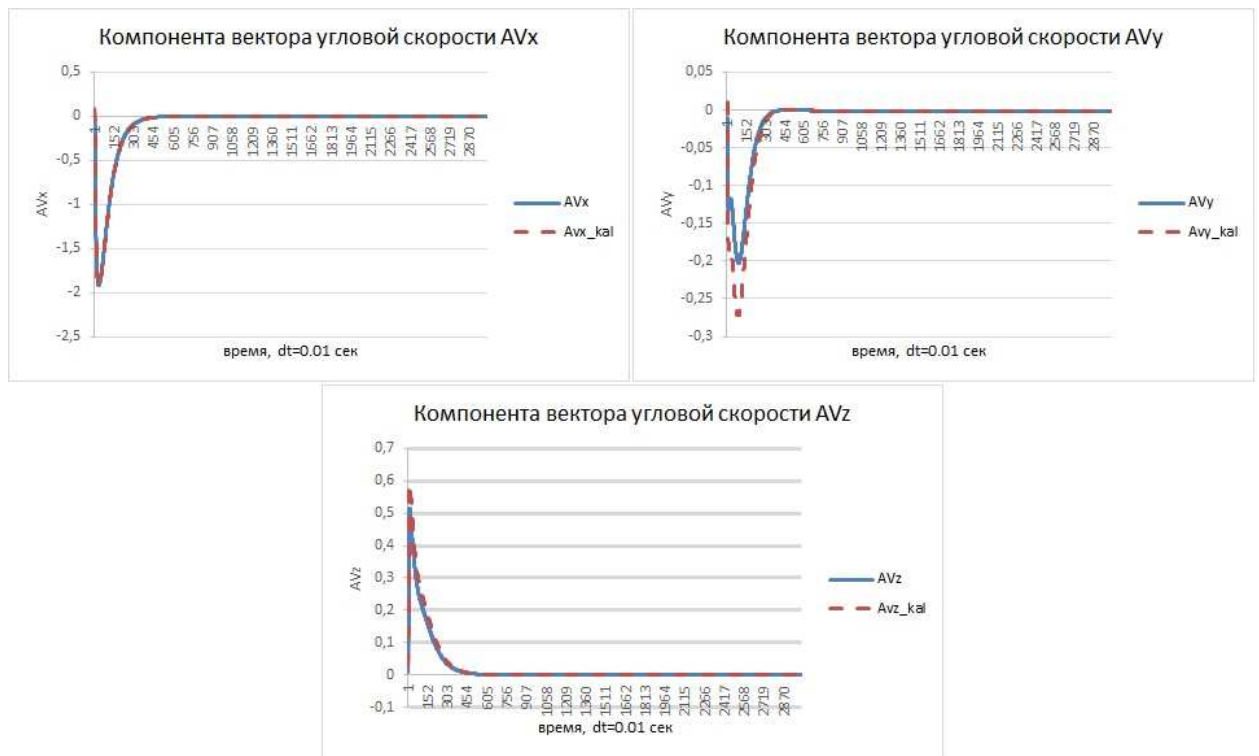


Рисунок 5.4 - Результаты сравнения оцениваемой угловой скорости МКА с ее истинным значением

На рисунках 5.5 - 5.6 приведено изменение углового положения и угловой скорости МКА со временем, полученные в результате использования нелинейного закона управления (3.22), где угловая скорость и угловое положение МКА определены на основе фильтра Калмана. При этом один из коэффициентов обратной связи K_Q определен в ходе исследований устойчивости движения МКА, а второй коэффициент обратной связи K_ω доопределен в результате использования теории синтеза H_2 - управления для рассматриваемой задачи, $K_\omega = 0.4347$.

Сравнивая рисунки 5.2 и 5.6 можно заметить небольшое отклонение конечной угловой скорости МКА, значение которой составляет порядок 10^{-6} . Но в целом, можно заключить, что использование разработанного нелинейного управления и алгоритма определения параметров ориентации МКА позволяет решить задачу поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях недоступности полного вектора измерений (недоступность измерений гироскопического датчика).

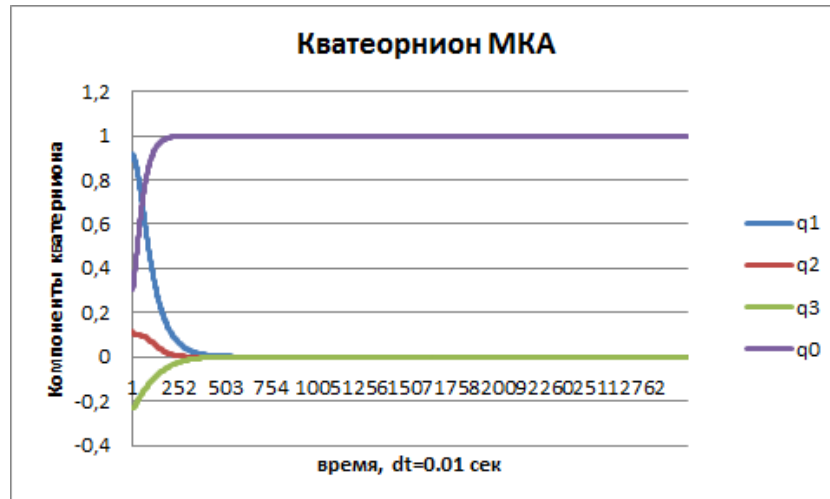


Рисунок 5.5 - Изменение углового положения МКА со временем, полученного в результате использования закона управления (3.22)



Рисунок 5.6 - Изменение угловой скорости МКА со временем, полученной в результате использования закона управления (3.22)

5.2 Результаты численного моделирования управляемого углового движения малого космического аппарата при учете неопределенностей моментов инерции, внешних возмущений и погрешностей в работе исполнительных органов - маховиков

Моделирование вращательного движения МКА под действием H_{∞} -управления, обеспечивающего устойчивость его орбитальной ориентации к

внешним возмущениям, неопределенностям моментов инерции МКА и изменению эффективности исполнительных органов, проведено с шагом по времени $dt = 0.01 \text{sec}$ для МКА с моментами инерции $J = [0.04088; 0.04088; 0.01116] \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Начальное угловое положение и угловая скорость МКА приняты равными $\vec{Q}_{bo} = [0.9169; 0.1179; -0.2339; 0.301]^T$, $\vec{\omega}_{bi} = [0.09; -0.01; 0.03]^T \text{рад/сек}$.

На рисунке 5.7 приведено изменение кватерниона со временем, полученное в результате применения H_∞ -управления.



Рисунок 5.7 – Изменение углового положения МКА со временем, полученного в результате использования H_∞ -управления

Оценка эффективности разработанного H_∞ -управления проведена в ходе решения нескольких задач управления ориентацией МКА при воздействии возмущений различного характера и сравнения полученных результатов управляемого движения МКА с результатами H_2 -управления (управления на базе квадратичного критерия качества), при синтезе которого не учитываются неопределенности.

В качестве первой задачи рассмотрен случай воздействия внешних гравитационных и магнитных возмущений, обусловленных влиянием постоянного остаточного магнитного момента величиной $\vec{m} = [0.2; -0.06; 0.01] \text{А} \cdot \text{м}^2$.

На рисунке 5.8 приведены графики изменения некоторых компонент кватерниона со временем под действием H_2 -управления (зеленая линия) и робастного H_∞ -управления (красная линия)

Из рисунков видно, что эффективность H_∞ -управления касательно компенсации внешних возмущений значительно выше в сравнении с H_2 -управлением. Кроме того, использование H_∞ -управления позволяет достигнуть требуемой ориентации МКА с точностью порядка 10^{-4} в течение 12 секунд, в то время как при использовании H_2 -управления на это требуется 17 секунд.

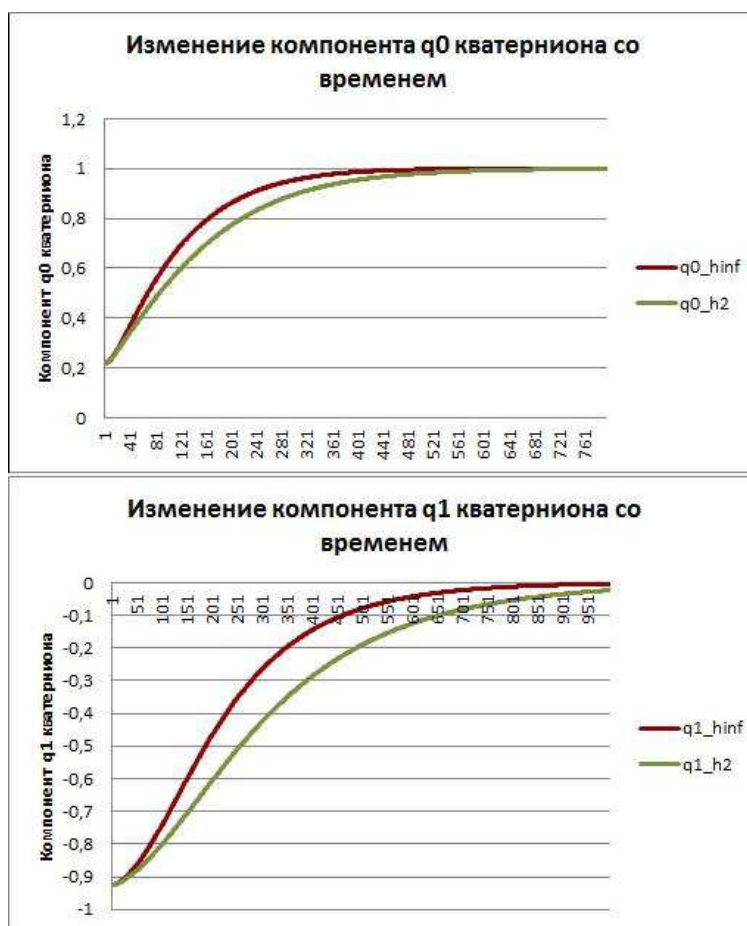


Рисунок 5.8 – Изменение компонент кватерниона при использовании H_2 - и H_∞ -управления

В качестве второй задачи рассмотрен случай воздействия внешних возмущений и возмущений, возникающих вследствие неопределенности моментов инерции МКА. Для вычислений принято, что значение вариации

моментов инерции от их номинальных значений составляет $\Delta J = [-10\%J_x; -10\%J_y; 10\%J_z]$, чего вполне достаточно для описания влияния разворачивания телескопа МКА или солнечных панелей.

На рисунке 5.9а красным цветом представлено изменение с течением времени компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_∞ -управления с учетом неопределенностей моментов инерции МКА при синтезе управления, а синим цветом - изменение с течением времени компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_∞ -управления с учетом неопределенностей моментов инерции МКА при синтезе управления. На рисунке 5.9б представлено изменение компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_2 -управления.

Из рисунков видно, что изменение моментов инерции МКА практически не влияет на эффективность работы H_∞ -управления в сравнении с H_2 -управлением. К тому же в случае H_∞ -управления разница во времени достижения МКА требуемой ориентации между возмущенным и невозмущенным случаем значительно больше.

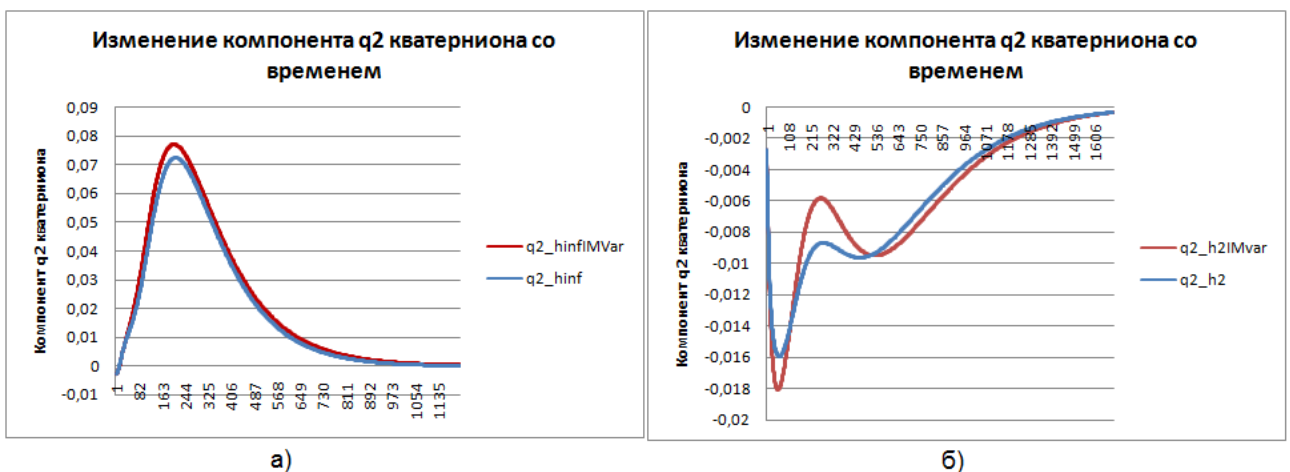


Рисунок 5.9 - Изменение компоненты q_2 кватерниона при использовании H_2 - и H_∞ -управления

В качестве третьей задачи рассмотрен случай воздействия внешних возмущений, возникающих вследствие неопределенности

моментов инерции МКА и возмущений, возникающих вследствие снижения эффективности работы маховиков МКА на 40%, так как при большей степени снижения эффективности вероятность достижения требуемой точности ориентации, используя данный набор исполнительных органов, довольно мала. На рисунке 5.10а синим цветом представлено изменение компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_∞ -управления с учетом изменения эффективности исполнительных органов при синтезе управления, а красным цветом - изменение компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_∞ -управления без учета изменения эффективности исполнительных органов при синтезе управления. На рисунке 5.10б представлено изменение компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_2 -управления.

Из рисунков видно, что деградация эффективности работы маховиков практически не влияет на эффективность работы H_∞ -управления в сравнении с H_2 -управлением, что говорит об устойчивости H_∞ -управления к изменению значений управляющих сигналов.

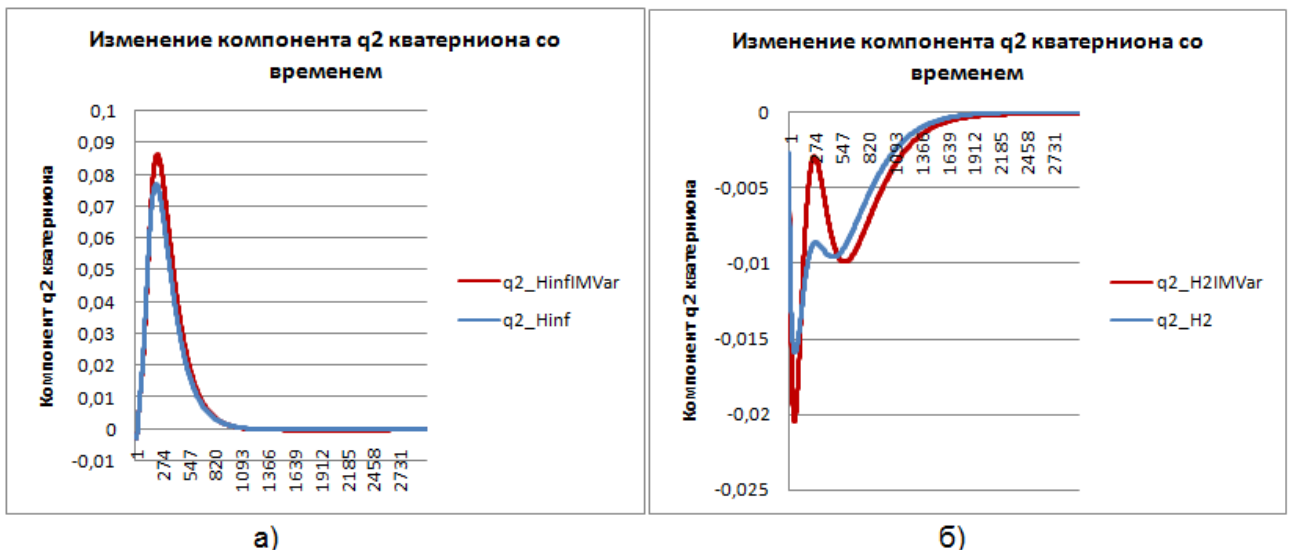


Рисунок 5.10 - Изменение компоненты q_2 кватерниона со временем при использовании H_2 - и H_∞ -управления

Моделирование вращательного движения МКА под действием управления, обеспечивающего устойчивость его орбитальной ориентации к воздействию внешних возмущений и возмущений, обусловленных деградацией эффективности исполнительных органов на 40%, при учете ограничений на размещение корней характеристического уравнения проведено с шагом по времени $dt = 0.01 \text{sec}$ для МКА с моментами инерции $J = [0.04088; 0.04088; 0.01116] \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Начальное угловое положение и угловая скорость МКА приняты равными $\overrightarrow{Q_{bo}} = [0.9169; 0.1179; -0.2339; 0.301]^T$, $\overrightarrow{\omega_{bi}} = [0.09; -0.01; 0.03]^T \text{рад/сек}$. В качестве области размещения корней характеристического уравнения замкнутой системы используется область левой комплексной полуплоскости в виде диска с началом в точке $[-1.0; 0.0]$ и радиусом равным 1, задаваемая с помощью неравенства (4.94).

На рисунке 5.11 красным цветом представлено изменение с течением времени компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_∞ -управления без учета условий на размещение корней ХУ при синтезе управления, а фиолетовым цветом - изменение с течением времени компоненты q_2 кватерниона, полученное в результате использования H_∞ -управления с учетом условий на размещение корней ХУ. На рисунке 5.12 проведено сравнение управляющих моментов маховиков, полученных на основе применения H_∞ -управления (график, окрашенный синим цветом) и H_∞ -управления с учетом условий на размещение корней ХУ (график, окрашенный красным цветом).

Как видно из рисунков 5.11, 5.12 полученное робастное H_∞ -управление с условиями на размещение корней ХУ позволяет успешно компенсировать внешние возмущения, а также возмущения обусловленные изменением эффективности его исполнительных органов. Также необходимо отметить, что при использовании H_∞ -управления с условиями на размещение корней ХУ вырабатываемый управляющий момент маховиков меньше по модулю, чем управляющий момент, полученный на основе H_∞ -управления. Это говорит о

том, что применение условий на размещение корней ХУ при синтезе закона управления ориентацией МКА позволит избежать насыщения маховиков, результатом которого является неспособность маховиков вырабатывать требуемый управляющий момент, и как следствие, потеря требуемой точности ориентирования МКА.

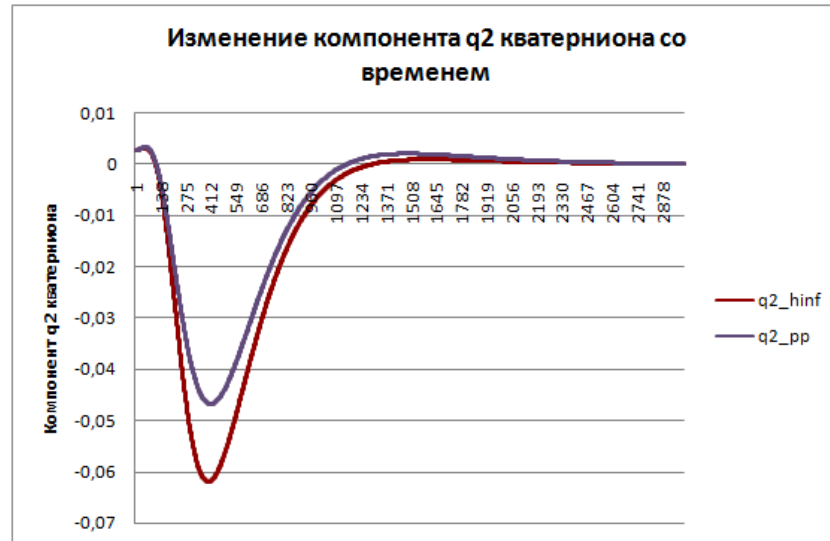


Рисунок 5.11 - Изменение компоненты q_2 кватерниона при использовании H_2 - и H_∞ -управления

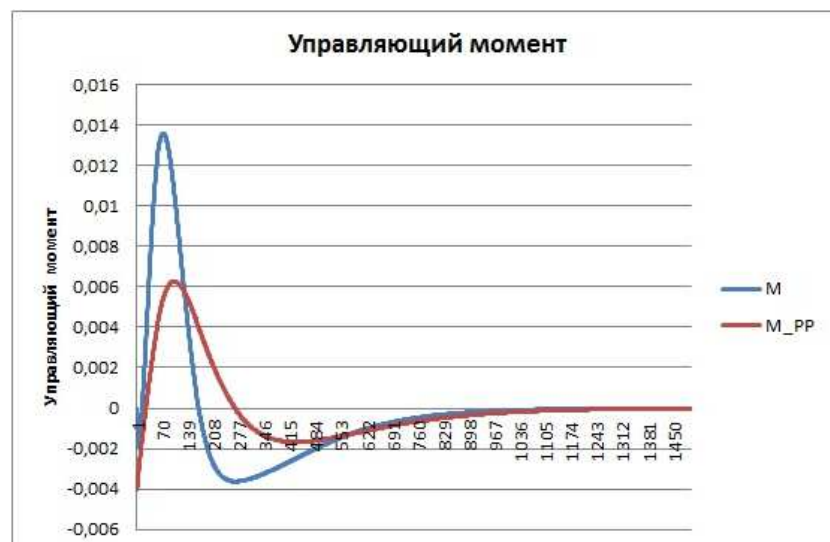


Рисунок 5.12 – Изменение управляющих моментов маховиков, полученных с помощью H_∞ -управления и H_∞ -управления с ограничением на размещение корней ХУ

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения диссертационной работы получены следующие результаты:

- разработан закон управления для поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях недоступности полного вектора измерений (недоступность измерений гироскопического датчика). Для точного определения угловой скорости и углового положения МКА, используемых в качестве обратной связи закона управления, разработан алгоритм на базе фильтра Калмана, использующий измерения датчиков углового положения (солнечного и магнитного датчиков);

- разработано робастное управление для поддержания орбитальной ориентации МКА в условиях воздействия внешних гравитационных, магнитных возмущений, возмущений, обусловленных неопределенностями моментов инерции МКА и возмущений, обусловленных деградацией эффективности исполнительных органов;

- разработано робастное управление, устойчивое к погрешностям в работе исполнительных органов маховиков, на основе применения теории синтеза H_∞ - управления и введения условий на размещение корней характеристического уравнения замкнутой системы управления.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Wertz J.R., Larson W.J. Space mission analysis and design. – Torrance, California: Microcosm Inc., 1992. – 827 p.
- 2 Wertz J.R. Spacecraft Attitude determination and control. - Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990. - 882 p.
- 3 Markley F.L. Attitude determination using two vector measurements [Электронный ресурс]. URL: <http://www.researchgate.net/publication/4706531>
- 4 Shuster M.D., Oh S.D. Three axis attitude determination from vector observations // Journal of guidance and control. – 1981. – Vol.4, №1. – P. 70-77.
- 5 Han K., Wang H., Binjie T., Zhonghe J. Pico-satellite autonomous navigation with magnetometer and sun sensor data // Chinese journal of aeronautics. - 2011. - Vol.24, №1. - P. 46 - 54.
- 6 Larsen J.A., Vinther K. Inexpensive CubeSat attitude estimation using COTS components and unscented Kalman filtering // Proc. of 5-th International conference on recent advances in space technologies. - Istanbul, 2015. - P. 341 - 346.
- 7 Ракишева З.Б., Сухенко А.С. Применение механизмов управления ориентацией твердого тела в ньютоновском поле сил // Материалы Международной конференции по механике и баллистике «VIII Окуневские чтения». - Санкт-Петербург, 2013. – С. 331 – 333.
- 8 Tisa P., Vergez P. Performance analysis of control algorithms for FalconSat-3 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.learningace.com/doc/1823864/31/performance-analysis-of-control-algorithms-for-falconsat-3-vergez>
- 9 Grassi M., Pastena M. Minimum power optimum control of microsatellite attitude dynamics // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. - 2000. - Vol. 23, № 5. - P. 789–804.
- 10 Bai X., Junkins J.L. New Results for Time-Optimal Three-Axis Reorientation of a Rigid Spacecraft // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. - 2009. - Vol.32, N.4. - P. 1071-1076.

11 Parlos A.G., Sunkel J.W. Adaptive attitude control and momentum management for large - angle spacecraft maneuvers // The Journal of guidance, control and dynamics. - 1992. - Vol.15, №4. - P. 1018-1028.

12 Xiao B., Hu Q., Ma G. Adaptive quaternion-based output feedback control for flexible spacecraft attitude tracking with input constraints // Proc. of the Institution of mechanical engineers, Part I: Journal of systems and control engineering. - 2012. - P. 226 - 240.

13 Zhou K., Doyle J., Glover K. Robust and optimal control. – New Jersey: Prentice Hall, 1995. – 603 p.

14 Doyle J. C., Glover K., Khargonekar P., Francis B. State space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions of automatic control. – 1989. - Vol.34, № 8. - P. 831-847.

15 Crassidis J.L., Markley F.L. Sliding mode control using modified Rodriguez parameters // The Journal of guidance, control and dynamics. - 1996. - Vol.19, № 6. - P. 1381-1383.

16 Parlos A.G., Sunkel J.W. Adaptive attitude control and momentum management for large - angle spacecraft maneuvers // The Journal of guidance, control and dynamics. - 1992. - Vol.15, № 4. - P. 1018-1028.

17 Han C., Guo J., Pechev A. Nonlinear H_∞ based underactuated attitude control for small satellites with two reaction wheels // Acta Astronautica. – 2014. - Vol.104, №1. – P. 159-172.

18 Амелькин Н.И. Кинематика и динамика твердого тела (кватернионное изложение). – М: Московский физико-технический институт, 2000. – 61 с.

19 Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.

20 Shuster M. D. A survey of attitude representations // The Journal of the astronautical science. – 1993. – Vol.4, № 4. –P. 439-517.

21 Zahran M., Aly M. A Solar Cell Based Coarse Sun Sensor for a Small LEO Satellite Attitude Determination // Journal of Power Electronics. - Vol.9, №4. - P. 631-642.

22 The US/UK World Magnetic Model for 2005-2010: NOAA Technical Report NESDIS/NGDC-1 / McLean S., Macmillan S., Maus S., Lesur V., Thomson A., and Dater D. – December 2004. [Электронный ресурс] URL: http://www.ngdc.noaa.gov/geomag/WMM/data/WMMReports/TRWMM_2005.pdf.

23 Алипбаев К. Разработка системы управления движением микроспутника: дис. ... док. философ. PhD. - Алматы: КазНУ имени аль - Фараби, 2012. – 137 с.

24 CubeSat missions: XI, CUTE-I, CanX-1, DTUSat etc. [Электронный ресурс] URL: <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/c-missions/cubesat-launch-1>

25 Молдабеков М.М., Алипбаев К.А., Елубаев С.А., Сухенко А.С., Бопеев Т.М. Математическая модель системы управления вращением космического аппарата вокруг заданной оси // Вестник НИА РК. – Алматы, 2014. – №2(52). – С. 32-38.

26 Молдабеков М.М., Алипбаев К.А., Елубаев С.А., Бопеев Т.М. Проблема определения параметров закона управления вращением космического аппарата // Сборник статей по мат. XLII Межд. науч.-практ. конф. «Технические науки – от теории к практике». – Новосибирск, 2015. - №1(38). – С. 49 – 58.

27 Маркеев А.П. Теоретическая механика. - М.: ЧеРо, 1999. - 572 с.

28 Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов. – М.: Наука, 1974. – 600 с.

29 Ахмедов Д.Ш., Елубаев С.А., Алипбаев К.А., Сухенко А.С., Бопеев Т.М., Комекбаев А.Е. Разработка системы управления движением и навигации и ее компонентов для научно-технологического наноспутника // Мат. Межд. конф. "Научные и технологические эксперименты на автоматических космических аппаратах и малых спутниках". - Самара, 2014. – С. 268 – 269.

30 Елубаев С.А., Джамалов Н.К., Сухенко А.С., Алипбаев К.А., Бопеев Т.М., Каратаев А.А., Поветкин Р.Д. Разработка программно-математического обеспечения фильтрации данных датчиков ориентации космического аппарата

// Тр. II-межд. науч. конф. «Высокие технологии – залог устойчивого развития».
- Алматы, 2013. - Т.2. - С. 274-277.

31 Yelubayev S.A., Jamalov N.K., Alipbayev K.A., Boreyev T.M., Sukhenko A.S. Gyro sensor signal processing software // Тр. III-ей межд. науч. практ. конф. «ИКТ: образование, наука, инновации». - Алматы, 2013. - С. 221 – 222.

32 Иванов Д.С., Карпенко С.О., Овчинников М.Ю. Алгоритм оценки параметров ориентации малого космического аппарата с использованием фильтра Калмана [Электронный ресурс]. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-48>

33 Steyn W.H. Magnetic Attitude Determination and Control for Low Earth Orbiting Small Satellites. [Электронный ресурс] URL: <http://staff.ee.sun.ac.za/whsteyn/Papers/Magsat.pdf>.

34 Bak T. Spacecraft Attitude Determination – a Magnetometer Approach: Thesis... Philosophy Doctor. - Aalborg: Aalborg University, 1999. – 192 p.

35 Enright J., Sinclair D. Algorithm enhancements for the SS-411 digital sun sensor // Proc. of Small satellite conference. – Utah, 2007. – P. 54-67.

36 Ruffino G., Grassi M. Multi-aperture CMOS sun sensor for microsatellite attitude determination // Sensors (14248220). – 2009. - № 9(6). – P. 4503-4524.

37 Дроздова Т.Ю., Катасонов И.Ю., Никитин А.В. Программно-алгоритмическое обеспечение оптического солнечного датчика // Тр. Всероссийской научно-технической конференции. – Таруса, 2008. – С. 90-104.

38 Бопеев Т.М., Сухенко А.С. Байсеркенов М.Н., Михайленко Д.Л., Рахметова П.М. Разработка экспериментального образца солнечного датчика для микроспутника // Мат. межд. форума «Инженерное образование и наука в XXI веке: проблемы и перспективы». – Алматы, 2014. - Т.2.– С. 527 – 531.

39 Hales J.H., Pedersen M. Two axis MOEMS sun sensor for pico satellites [Электронный ресурс]. URL: http://hvig.dk/files/Hales-and-Pedersen-2002-Two-Axis-MOEMS-Sun-Sensor-for-Pico-Satellites-AIAA.USU_.16.pdf

40 Ali A., Tanveer F. Low-Cost Design and Development of 2-Axis Digital Sun Sensor // Journal of Space Technology. – 2011. – Vol.1, № 1. – P.83-87.

41 Fine sun sensor datasheet [Электронный ресурс]. URL: <http://www.ssbv.com/ProductDatasheets/page39/page25/index.html>.

42 Ракишева З.Б., Сухенко А.С. Моделирование датчиков определения ориентации малых космических аппаратов // Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева. Совместный выпуск: "Вычислительные технологии" СО РАН. - Усть-Каменогорск, 2013. – Т.18, № 4, часть 2. - С. 164-168.

43 Rakisheva Z., Sukhenko A., Povetkin R. Computer simulation model of sun sensor and magnetic sensor for attitude determination of a small satellite // Applied mathematical science. –Bulgaria, 2014. - Vol.8, №148. - P. 7359-7366.

44 Кобус А., Тушинский Я. Датчики Холла и магниторезисторы. - М.: Энергия, 1971. – 352 с.

45 Феррозондовый магнитометр [Электронный ресурс]. URL: <http://www.detect-ufo.narod.ru/pribor/magnitometr/index.html#fero>

46 Hoevenaars T., Engelen S. and Bouwmeester J. Model-Based Discrete PID Controller for CubeSat Reaction Wheels Based on COTS Brushless DC Motors // Materials of First IAA Conference on dynamics and control of space systems. – 2012. – Vol. 145 Advances in the astronautical science. – P. 379–395.

47 Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. – 560 с.

48 Dando A.J. Robust adaptive control of rigid spacecraft attitude maneuvers: Thesis...Philosophy Doctor. – Queensland: Queensland University of Technology, 2008. – 282 p.

49 Севастьянов Н.Н. Концепция построения системы ориентации и управления движением спутника связи "ЯМАЛ". Штатная схема функционирования // Вестник ТГУ. - 2013. - №2(22). - С. 85-96.

50 Marques S. Small Satellites Attitude Determination Methods. – Thesis...Master. - Lisboa, Universidade tecnica de Lisboa, 2000. – 137 p.

51 Использование фильтра Калмана в задаче определения ориентации тела, подвешенного на струне: руководство по лабораторной работе / сост.: Д.С. Иванов, М.Ю. Овчинников, С.С. Ткачев. — М.: МФТИ, 2008. — 29 с.

52 Kang W. Nonlinear H_∞ control and its application to rigid spacecraft // IEEE Transactions on automatic control. - Vol.40, №7. - P. 1281 - 1285.

53 Dalsmo M., Egeland O. State feedback H_∞ -suboptimal control of a rigid spacecraft // IEEE Transactions on Automatic Control. - 1997. - Vol. 42, № 8. - P. 1186-1191.

54 Lecture Course on theory of robust control [Электронный ресурс] URL: <http://users.abo.fi/htoivone/courses/robust/>.

55 Gahinet P., Apkarian P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control // Int J. Robust and Nonlinear Control. - 1994. - Vol.4. – P. 421-448.

56 Van Antwerp J.G., Braatz R.D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities // Journal of Process Control. – 2000. – Vol.10. – P. 363-385.

57 Megretski A. Multivariable control system. Lecture notes [Электронный ресурс]. URL: <http://web.mit.edu/6.245/www/>

58 Dehleh M., Dehleh M.A., Verghese G. Dynamic systems and control. Lecture notes [Электронный ресурс]. URL: <http://web.mit.edu/6.241/www/>

59 Zuo L. Optimal control with structure constraints and its application to the design of passive mechanical systems. – Thesis...Master. - Massachusetts, Massachusetts institute of technology, 2002. – 213 p.

60 Gahinet P., Nemirovski A., Laub A.J., Chilali M. LMI Control Toolbox for Use with MATLAB. – Natick:The Mathworks inc, 1995. - 356 p.

61 Masubuchi I., Ohara A., Suda N. LMI-based controller synthesis: a unified formulation and solution // Int J. Robust and Nonlinear Control. – 1998. – Vol.8. – P. 669-686.

62 Gahinet P. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ Synthesis // Automatica. – 1996. – Vol.32, №7. – P. 1007-1014.

63 Iwasaki T., Skelton R.E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas // Automatica. – 1994. – Vol.30, № 8. – P. 1307-1317.

64 Inamori T., Sako N., Nakasuka S. Magnetic dipole moment estimation and compensation for an accurate attitude control in nano-satellite missions // *Acta Astronautica*. - 2011. - №68. - P. 2038 - 2046.

65 Inamori T. In-orbit magnetic disturbance estimation and compensation using UKF in nano-satellite mission // *Proc. of AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. - Chicago, 2009. - P. 1 - 15.

66 Qiao J., Guo L. Antidisturbance fault tolerant control of attitude control systems for microsatellite with unknown input delay [Электронный ресурс]. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2013/804754>

67 Xiao B., Hu Q. Fault-tolerant tracking control of spacecraft with attitude-only measurement under actuator failures // *Journal of guidance, control, and dynamics*. - 2014. - Vol.37, № 3. - P. 838 - 849.

68 Zhang A., Wang Y., Zhang Z., Reza Karimi H. Robust control allocation for spacecraft attitude stabilization under actuator faults and uncertainty [Электронный ресурс]. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/789327>

69 Shin M., Kang C.W., Lim J., Park C.G. Fault tolerant sliding mode control for a nano-satellite // *Proc. of 12-th Int. conference on control, automation and systems*. - Jeju Island, 2012. - P. 44 - 48.

70 Hu Q, Huo X., Xiao B. Reaction wheel fault tolerant control for spacecraft attitude stabilization with finite-time convergence [Электронный ресурс]. URL: DOI: 10.1002/rnc.2924

71 Zhang M., Yin L., Qiao L. Adaptive fault tolerant attitude control for cube satellite in low orbit based on dynamic neural network // *International journal of innovating computing, information and control*. - 2014. - Vol.10, №5. - P. 1843-1852.

72 Hu Q., Xiao B., Friswell M. Robust fault-tolerant control for spacecraft attitude stabilisation subject to input saturation // *IET Control theory and applications*. - 2011. - Vol.5, №2. - P. 271–282.

73 S. Gutman I., Jury E. A general theory for matrix root clustering in subregions of the complex plain // *IEEE Trans. Automat. Contr.* - 1981. - Vol. AC-26. - P. 853-863.

74 Yedavalli R., Liu Y. H_∞ control with regional stability constraints // Automatica. - 1995. - Vol.31, №4. - P. 611 - 615.

75 Chilali M., Gahinet P. H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach // IEEE transactions on automatic control. – 1996. – Vol.41, №3. - P. 358 - 367.

76 Елубаев С.А., Джамалов Н.К., Алипбаев К.А., Сухенко А.С., Бопеев Т.М. Имитационное моделирование основных компонентов системы управления движением космического аппарата // Вестник СибГАУ. - Красноярск, 2013. - №2(48). - С. 14 – 18.