Казахский национальный педагогический университет имени Абая

УДК 373.1.02:372.8:517 На правах рукописи

НУРМУХАМЕДОВА ЖАНАРА МУРАТОВНА

Методическая система обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе

6D010900 – Математика

Диссертация на соискание степени
доктора философии (PhD)

Научные консультанты
Абылкасымова Алма Есимбековна,
доктор педагогических наук, профессор,
Булин-Соколова Елена Игоревна,
доктор педагогических наук, профессор МПГУ

Республика Казахстан
Алматы, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

Правила оформления диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD), доктора по профилю, составленные на основании следующих нормативных документов:

Закон Республики Казахстан «О науке» от 18.02.2011 г. № 407-IV ЗРК;

ГОСО РК 5.04.034-2011: Государственный общеобязательный стандарт образования Республики Казахстан. Послевузовское образование. Докторантура. Основные положения (изменения от 23 августа 2012 г. № 1080);

Правила присуждения ученых степеней от 31 марта 2011 года № 127;

Межгосударственные стандарты: ГОСТ 7.32-2001 (изменения от 2006 г.). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления;

ГОСТ 7.1-2003. Библиографическая запись. Библиографическое описание.
Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.1—84 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическое описание документа. Общие требования и правила составления.

ГОСТ 7.9—95 (ИСО 214—76) Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Реферат и аннотация. Общие требования.

ГОСТ 7.12—93 Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Библиографическая запись. Сокращение слов на русском языке. Общие требования и правила.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день в высших учебных заведениях Казахстана действует кредитная система обучения, которая дает студентам возможность самостоятельно выбирать специальные курсы по выбору для дальнейшего изучения предметов, но обязательные компоненты базовых дисциплин, к которым относится математический анализ, остаются запланированными и неизменными.

Дисциплина «Математический анализ» – это основной курс в системе математического образования студентов вуза, так как при исследовании и решении многих задач высшей математики используются методы, изучаемые в данном курсе. Одним из фундаментальных методов исследования переменных величин является теория пределов, на которой строятся такие важные разделы курса математического анализа, как дифференциальное и интегральное исчисления функции одной и многих переменных. А с помощью функций можно сформулировать не только законы природы, различные процессы в производстве, но и законы социального общества (например, подсчет прироста численности населения, миграции), разнообразные сферы жизнедеятельности человека.

Актуальность исследования. Математический анализ – это базовый курс в системе математического образования студентов вуза, так как при исследовании и решении многих задач высшей математики используются методы и правила, изучаемые в данном курсе. Курс математического анализа является важным предметом для студентов – будущих учителей математики, поскольку при его изучении у студентов развивается математическое мышление и стремление к познанию и творчеству в будущей профессиональной деятельности.

Курс математического анализа представляет особый интерес для исследователей, так как:

1. Начала анализа преподаются уже на старшей ступени школы.
2. Изучение курса математического анализа имеет продуктивную прикладную направленность в дальнейших научных исследованиях.
3. Прочные знания курса математического анализа позволяют достичь высокого уровня знаний по курсам, так или иначе связанных с теорией математического анализа.

За последние десятилетия общеобразовательная школа в Казахстане прошла как профильную, так и внутреннюю дифференциацию. В результате появились различные типы организации образования, в том числе международные - лицеи, гимназии, колледжи, специализированные школы с углубленным изучением отдельных предметов и другие. Изменения коснулись и методов преподавания и обучения дисциплинам. В нашей республике на старшей ступени школы обучение проходит по двум направлениям – естественно-научному и общественно-гуманитарному профилям. Эти новшества потребовали изменений в процессе подготовки учителей, в том числе целей, содержания образования, методов и организационных форм обучения.

В настоящее время квалифицированные специалисты должны не просто владеть основами наук, но и применять свои знания на практике, уметь педагогически грамотно передавать знания ученикам на любом уровне – от общеобразовательной школы до профильных школ с углубленным изучением математики.

Следует отметить, что совершенствование методической системы обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе по прежнему остается актуальной. Полученные учащимися знания по школьному курсу алгебры и началам математического анализа, безусловно, требуют преемственности, т.е. их расширения и углубления при обучении курсу математического анализа в вузе. Однако опыт работы с первокурсниками показывает, что существуют различия между уровнем знаний, полученными в школе, и требованиями к знаниям студентов для дальнейшего изучения математического анализа. В этой связи возникла необходимость пересмотра методических подходов обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе, что явилось **проблемой** данного исследования и определило его **актуальность**.

Цель исследования – разработка методической системы обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе.

Объектом исследования является подготовка будущих учителей математики в педагогическом вузе.

Предмет исследования – методические подходы к обучению курсу математического анализа будущих учителей математики.

В соответствии с целью и предметом поставлены следующие **задачи исследования**:

- проанализировать состояние методической системы обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе;

- определить место и роль математического анализа в подготовке будущего профессионального педагога, и проследить соблюдение преемственности в обучении курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе;

- выявить методы и организационные формы обучения курсу математического анализа будущих учителей математики;

- разработать методическую систему обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе;

- проверить эффективность разработанной методической системы обучения курсу математического анализа.

Для решения поставленных задач предполагается использовать такие **методы и методику исследования**, как изучение и анализ научной и научно-популярной литературы в исследуемой области, анализ программ, учебных пособий и методических рекомендаций по курсу математического анализа; изучение существующих методических систем обучения курсу математического анализа; проведение лекционных и практических учебных занятий; экспериментальная работа, направленная на выявление эффективности предложенной методики.

Новизна исследования заключается в том, что в нем разработана новая методическая система обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе.

Положения, выносимые на защиту

- результаты анализа состояния методической системы обучения алгебре и началам анализа в современной школе;
- анализ существующих методик обучения курсу математического анализа в педагогическом вузе;
- разработка методической системы обучения курсу математического анализа будущих учителей математики, основанной на принципе преемственности в обучении;
- экспериментальное обоснование эффективности созданной методической системы обучения курсу математического анализа в учебной практике школ и вузах Республики Казахстан.

Теоретическая значимость исследования заключается в следующем: проведенные исследования позволяют улучшить методику обучения математическому анализу, выяснить преимущества и недостатки методов, создать эффективную методическую систему обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе.

Практическая значимость исследования состоит в том, что предложена конкретная методическая система обучения курсу математического анализа, которая позволит повысить эффективность знаний и профессиональную подготовку будущих учителей математики. Предложенные методические разработки и результаты исследования могут быть использованы при разработке учебных программ, учебно-методических пособий, в педагогической деятельности учителей в школе, преподавателей в вузе, а также студентами, магистрантами и докторантами PhD.

Личный вклад автора в исследуемую проблему заключается в самостоятельном выполнении работы на основе изучения научной и учебно-методической литературы, в теоретическом и практическом обосновании основных идей и положений диссертационного исследования, а также в разработке методики преподавания математического анализа и в проведении опытно-экспериментальной работы.

Апробация практических результатов. Все результаты, полученные в диссертационной работе представлялись, докладывались и обсуждались на международных научно-практических конференциях «Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педвузе» (Москва, 2015 год), «Радиационно-термические явления и инновационные технологии» (Алматы, 2015 год), «Актуальные проблемы обучения математике в школе и вузе в свете идей Л.С. Выготского» (Москва, 2016 год), а также на заседаниях кафедры методики преподавания математики, физики и информатики института математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета имени Абая.

Публикации. По материалам диссертационной работы опубликовано 8 печатных работ, из которых 1 - в журнале, входящем в базу данных Scopus, 3 - в журналах, входящих в перечень, рекомендуемых Комитетом контроля в сфере образования и науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, 4 - в материалах международных конференций в стране и за рубежом.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 2 глав и заключения. Работа изложена на 101 страницах компьютерного набора, иллюстрируется 1 рисунком, 12 таблицами, 3 приложениями и содержит список использованных источников.

1 АНАЛИЗ СОСТОЯНИЯ МЕТОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОБУЧЕНИЯ КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ШКОЛЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

1.1 Методические аспекты содержания курса математического анализа на старшей ступени средней школы

В начале XXI века самым главным изменением в области образования является принятие решения о вхождении нашей страны в 2010 году в Болонский процесс, который является основой системы образования европейских стран, в целях построения общего образовательного пространства. В связи с этим, появилась необходимость изменить систему преподавания в школах и вузах в целом. Внедрение результатов математических научных достижений ученых Республики Казахстан в образование требует проведения исследований в области образовательной математики [1].

До сих пор проблема обучения курсу математического анализа не остается без внимания исследователей, которые продолжают поиск методических систем обучения, необходимого объема содержания курса, инноваций в обучении, не только в Казахстане, но и в странах СНГ. Этим вопросам были посвящены многие исследования ученых-методистов, таких как А.Е. Абылкасымова, Л.У. Жадраева, О.О. Князева, Т.И. Шахматова, Ф.Л. Осипов, А.А. Чугунова, М.Е. Ткаченко, Т.П. Куряченко, М.В. Шуркова, С.С. Тасмуратова и других. В работе Абылкасымовой А.Е. разработана модель формирования и развития познавательной самостоятельности студентов – будущих учителей, выявлены дидактические условия ее формирования и реализации, определены действенные современные пути совершенствования профессиональной подготовки будущего учителя, выделена «единица» анализа процесса формирования и развития исследуемого качества личности для определения степени ее сформированности. Разработанная система внедрена в практику работы высших учебных заведений и педагогических университетов.

На основе комплексного исследования Жадраевой Л.У. разработаны дидактико-методические основы создания учебно-методического комплекса по математике для общеобразовательных школ Республики Казахстан, а также выявлены принципы их реализации. В исследованиях О.О. Князевой описывается реализация когнитивно – визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа. В работе Т.И. Шахматовой предложено дифференцированное обучение математическому анализу студентов младших курсов педвуза. Дифференциация учебного процесса, на сегодняшний день, является одним из эффективных дидактических средств обучения не только в школе, но и в вузе, так как предполагает учет индивидуальных особенностей обучающихся.

Ф.Л. Осипов предложил интегрированную технологию организации учебной деятельности студентов, основанную на активизации самостоятельной работы студентов. В его работе описана система требований к базовым умениям и навыкам по основным модулям изучаемого курса. Также разработаны содержание занятий и методические рекомендации к ним, предложена методика формирования навыков самообразования студентов.

В работе Чугуновой А.А. разработана методика развития аналитико-синтетической деятельности студентов в процессе обучения математическому анализу. Предложены учебные средства, которые способствуют развитию аналитико-синтетической деятельности студентов при обучении математическому анализу. Для обеспечения связи теоретических знаний и практических умений студентов, автором разработан комплекс задач по основным разделам математического анализа.

В исследованиях М.Е. Ткаченко разработана новая технология обучения математическому анализу студентов колледжа, которая основывается на принципе ведущей роли теоретических знаний, элементах научно-исследовательского и педагогического профильного обучения. Такая технология обучения позволит обеспечить преемственность изучения математического анализа в системе колледж-вуз физико-математического профиля. В работе М.Е. Ткаченко рассматривает различные определения понятия преемственности в обучении, а также методологические основы преемственности. В исследовании описан комплекс методических и психологических приемов в преподавании математического анализа, разработанных на основе новой технологии.

В диссертации Куряченко Т.П. разработаны методика формирования приемов поисково-исследовательской деятельности будущих учителей математики в процессе обучения математическому анализу, учебные средства, способствующие формированию ведущих приемов поисково-исследовательской деятельности студентов, лабораторный практикум по основным разделам математического анализа, обеспечивающий связь теоретических знаний и практических умений студентов. Описаны особенности реализации поисково-исследовательской деятельности при обучении математическому анализу, представлена структурно-функциональная модель формирования навыков, в которой отражены основные компоненты рассматриваемого процесса. Также автор подчеркивает важность роли лабораторных практикумов при обучении математическому анализу.

Шуркова М.В. в своем исследовании формулирует и подробно раскрывает основные принципы составления системы упражнений по математическому анализу в педагогическом вузе. Во-первых, система упражнений, по мнению автора, должна обеспечивать усвоение студентами содержания курса, основных понятий, утверждений и теорем, а также методов решения практических задач. Во-вторых, данная система должна быть полной и сформирована в порядке возрастания сложности упражнений. В-третьих, вводный курс математического анализа должен обеспечивать плавную адаптацию вчерашнего школьника к методам математического анализа и особенностям использования математических терминов. В-четвертых, система упражнений должна поддерживать профессионально-педагогическую направленность обучения. Также на примере некоторых тем раздела «Введение в анализ» показана реализация выделенных принципов; там же приведены методические комментарии как к самим задачам, так и к их решению. Выбор указанного раздела объясняется автором, во-первых, трудностями его усвоения и его объективной сложностью, а во-вторых - тесной связью первого раздела курса математического анализа со школьным курсом математики.

В работе Тасмуратовой С.С. выявлена специфика и проблематика интенсификации обучения математике с позиций качественного обновления многоуровневой профессиональной подготовки будущего учителя. Под интенсификацией вузовского обучения понимается комплекс психолого-педагогических и методических воздействий, направленных на повышение качества профессиональной подготовки будущего специалиста. В целях повышения качества обучения и воспитания при ограничении времени, в работе исследована система дидактических факторов интенсификации и приведен анализ содержания и структуры курса математического анализа. Автор подробно изучает работу по организации и проведению теоретических семинаров для студентов. В работе предложена система заданий теоретической направленности по одномерному математическому анализу для семинаров в педвузе, которые содержат циклы теоретических вопросов и задач по теории линейных множеств, теории пределов, дифференциальному и интегральному исчислению для функций одной действительной переменной, а также по теории рядов (числовых и функциональных). Эти упражнения позволят более глубоко изучить каждое понятие, представить его содержательную и формально-логическую структуру.

Несмотря на огромное количество исследовательских работ, вопрос усовершенствования методической системы обучения курсу математического анализа остается открытым.

В последние годы было принято много новых документов – это и новый Государственный общеобязательный стандарт среднего образования, утвержденный постановлением Правительства Республики Казахстан от 23 августа 2012 года №1080, и типовые учебные программы, в соответствии с которыми необходимо менять методику обучения. За несколько лет средняя школа поменяла свой статус, то есть появилось много альтернативных учебных заведений, таких как лицеи, гимназии, колледжи, специализированные школы с углубленным изучением отдельных предметов.

Изменения коснулись всех сторон деятельности школы. Произошла смена общих принципов и стиля управления, рост разнообразия учебников и пособий, совмещение выпускных и вступительных экзаменов. Существенно меняются такие компоненты образовательного процесса, как требования к результатам образования и оценка качества подготовки обучающихся. Происходит интенсивное становление новых организационных форм образования, особенно на старшей ступени школы. Старшая школа может постепенно выделиться в отдельный тип образовательного учреждения (профильная школа). Развиваются сетевые формы получения образования, экстернат, дистанционные технологии [2].

Эти изменения приводят к новым требованиям к работе учителя, а также его профессиональной подготовке при обучении в вузе. Высококвалифицированный специалист должен не просто владеть основами наук, а применять свои знания на практике, уметь педагогически грамотно передавать знания ученикам. До сих пор актуальными остаются вопросы изменения целей и содержания образования, методов и организационных форм, а также вопрос о математической подготовке будущего учителя.

Изучением и совершенствованием методической системы обучения занимаются многие казахстанские и российские исследователи. Например, в диссертации Кисельникова И.В. разработана методика обучения единым комплексом фундаментальным понятиям математического анализа на основе использования графической, вербальной и знаково-символической форм для их представления и задач по переводу математического содержания понятий на различные языки представления при изучении алгебры и начал математического анализа в средней школе. В своем исследовании автор занимается поиском средств обучения фундаментальным понятиям математического анализа, которые позволяют задействовать логический и образный компоненты мышления школьников. В диссертации раскрыты возможности использования образного и логического компонентов мышления школьников при обучении началам математического анализа, на основе которых предлагается организация обучения с постепенным повышением уровня усвоения, при котором ученики будут последовательно проходить ряд этапов.

1. Этап «житейских» представлений. Предполагается, что на этом этапе учитель вместе учениками анализирует представления, возникающие при изучении терминов, используемых для обозначения понятий. К примеру, термин «непрерывность» ассоциируется у многих школьников с образом дороги или реки, что говорит о возможности перехода от «житейского» представления к графической форме его выражения. Если школьнику предложить изобразить образ непрерывности, то получим некоторую кривую линия, рисуемую без отрыва карандаша от бумаги.
2. Этап мономодальных математических представлений. На этом этапе изучаются более объемные понятия.
3. Этап комплексных представлений. Здесь ученикам предлагается проявить гибкость мышления, переходя от анализа одних свойств объекта к анализу других его свойств.
4. Понятийный этап. Здесь предлагаемые определения понятий отвечают уровню строгости целей обучения, отрабатывается умение оперировать изученными понятиями.
5. Концептуальный этап. На этом этапе формируется целостное содержание понятия, включающее в себя логический и интуитивный компоненты, что обеспечивает применение понятия для построения другой теории, решения «нестандартных» задач [3].

Данная работа интересна тем, что предполагает развитие у учащихся пространственного воображения и облегчения восприятия сложных понятий путем представления связанных с ними образов.

В исследовании Князевой О.О. разработана теоретически обоснованная методика обучения началам математического анализа, основанная на когнитивно-визуальном подходе, способствующая развитию визуального мышления учащихся, учитывающая индивидуальные особенности учащихся, в частности особенности работы левого и правого полушарий головного мозга, и экспериментально показана эффективность ее реализации; внедрена в обучение началам математического анализа методика применения компьютерных средств, в частности средств компьютерной графики, способствующая развитию визуального мышления; разработан комплекс визуализированных задач, направленный на предотвращение формализма в знаниях и формирования полноценных образов изучаемого учебного материала. Создание особых педагогических условий, которые обеспечивают осознанность в усвоении абстрактных понятий математического анализа, определяют роль когнитивно-визуального подхода к обучению началам математического анализа. Выделены общие правила использования учебной наглядности, проанализированы вопросы, связанные с использованием в современном педагогическом процессе компьютерной техники и специально разработанных электронных материалов [4].

В исследовании Васильевой М.В. на базе комплексного исследования проблемы дифференциации процесса обучения, были разработаны теоретические основы методического обеспечения повышения эффективности изучения начал математического анализа в условиях уровневой дифференциации в профильных классах на основе решения задач, включающие в себя: углубленное изучение математики, в частности начал математического анализа; создание условий для реализации дифференциации содержания обучения старшеклассников; обеспечение преемственности между общим и профессиональным образованием; обеспечение эффективности подготовки выпускников школы к освоению программ среднего и высшего профессионального образования. В работе проводится анализ современного состояния математического образования в России и истории дифференцированного обучения, рассмотрены цели профильного обучения и проблема дифференциации содержания образования, вопросы изучения понятий начал анализа в процессе решения задач, упорядочения задачного материала по началам математического анализа с учетом уровневой дифференциации в профильных классах. Автор предлагает модель разноуровневого изучения материала на примере изучения тем начал математического анализа:

1. Первый уровень содержит простые тренировочные задачи с постепенным нарастанием трудности. Задачи этого уровня отличаются друг от друга данными или незначительными усложнениями задания. Предполагается, что при решении задач применяется только один изученный факт.

Формулировки самих задач могут быть различны, но метод решения для всех сводится к применению и закреплению теоретического материала. Задачи данного уровня доступны всем учащимся и используются для закрепления теоретических знаний.

2. Второй уровень включает задачи, сложность которых возрастает в более высоком темпе. Для решения задач этого уровня требуется выполнение большего количества операций, но не используются новые, не изученные на уроке теоретические знания или методы решения.

3. Третий уровень содержит задачи, предназначенные для более заинтересованных предметом школьников. На этом уровне предлагаются комбинированные задачи, при решении которых требуется не только установить связь между отдельными темами курса, но и применить нестандартные приемы [5].

Также в диссертации разработаны требования к задачному материалу классов различных профилей. Если для классов гуманитарного направления особое значение отводится репродуктивным задачам, то для технических классов предлагаются задачи прикладного характера, позволяющие осуществлять внешнее математическое моделирование. В математических классах включены задачи на достаточно высоком уровне абстрагирования, работа ведется с внутри математическими моделями.

Данная работа представляет особый интерес ввиду того, что связана с изучением проблемы дифференциации учебного процесса, которая на сегодняшний день является наиболее актуальной.

В работе Максютина А.А. изложены основные положения системного подхода, обосновывается необходимость его применения к изучению систем задач, приводятся функции задач в учебной деятельности, в исторической перспективе рассмотрен задачный подход в обучении математике, различные методические реализации задачного подхода. Проведен анализ существующих принципов конструирования системы учебных задач, выбираются и обосновываются принципы формирования систем задач, позволяющей осуществлять качественную подготовку выпускников к итоговой аттестации в форме ЕГЭ (единого государственного экзамена). При этом решение учебной задачи направлено на усвоение школьниками обобщенных способов предметных действий и служит основой изменения субъекта учебной деятельности. На основе построенной системы задач, организованной контрольно-оценочной деятельности и результатов проведенного эксперимента, в исследовании представлены описания процессов проектирования и реализации обучения. Методика обучения заключается в поэтапном освоении блоков матрицы многоуровневой системы задач. Благодаря чему осуществляется заметное и гибко управляемое продвижение каждого обучающегося как в предметно-содержательном, так и в процессуально-деятельностном направлениях. Ведущим элементом предложенной методики автор считает работу с ключевыми задачами, которая выстраивается на постепенном переходе от совместных форм деятельности к индивидуальным. На первых этапах изучения курса предпочтение отдается фронтальному разбору отдельных ключевых задач, далее их сменяют уроки решения ключевых задач конкретной изучаемой темы, и, в заключении, учащиеся приступают к выполнению групповых или индивидуальных проектов по самостоятельному составлению орграфа ключевых задач темы. Такой подход, по мнению автора, наиболее полно отражает сущность не только сугубо математической, но и, в общем, познавательной деятельности. Постоянная систематизация изученного материала является составной частью используемой методики обучения [6].

При обучении началам математического анализа возникает много вопросов, связанных с методикой преподавания данного курса. Мордкович А.Г. в своей статье «О некоторых проблемах школьного математического образования» исследует проблему преодоления методических трудностей при изучении элементов математического анализа в школе, соотнеся их с тремя ключевыми вопросами методики преподавания математики: *что* преподавать, *как* преподавать, *зачем* преподавать? Вопрос *зачем* что-то изучается в том или ином школьном предмете, считает автор, соотносится в первую очередь с социальным заказом, который общество делает образованию. Если в недавние годы социальный заказ нацеливал педагогическую общественность на то, что главное в образовании – *обучение*, передача информации, то сегодня главное в образовании – *развитие*, формирование общей культуры человека, способного, в частности, самостоятельно добывать и перерабатывать информацию. Поэтому если раньше учили *математике*, то сегодня учат *математикой* [7].

Одной из основных целей математического образования, сформулированных Мордковичем А.Г., должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира. Нужно научить школьников составлять математические модели реальных ситуаций, а для этого они должны владеть математическим языком, описывающим указанные модели. Для математического исследования явлений реального мира особенно важны понятия предела и производной. Выпускник средней школы должен иметь представления о производной, о ее применении для исследования реальных процессов [8]. При этом следует учесть, что, во-первых, определение производной, которое дается в школе, в точности соответствует формальному определению, принятому в математике, и, во-вторых, что значение производной в общем развитии школьника, достаточно велико (скорость, касательная, монотонность, экстремумы, задачи на оптимизацию и т.д.) [9].

Немаловажную роль в обучении, конечно же, играет школьный учебник. Многие ученые занимаются разработкой учебников, среди них Абылкасымова А.Е., Виленкин Н.Я., Мордкович Б.М., и другие. Необходимо, чтобы изложение материала фактически не противоречило математике как науке и было доступно школьникам. Не следует забывать, что в школе (в том числе и в профильной) учитель лишь знакомит учащихся с элементами математического анализа, составляющими существенную часть общечеловеческой культуры; формальное изучение этого предмета – прерогатива высшей математики, излагаемой в вузах, и переносить его в среднюю школу нецелесообразно [2, с. 5].

Одним из сложнейших для восприятия школьников является понятие предела. В учебнике для 10 класса Абылкасымовой А.Е. и др. по «Алгебре и началам анализа» сначала рассматривается пример на функции $f(x)=x^2$. Эта функция определена на множестве R, и выбирают любую точку из этого множества, например, $a=2$. Если значение аргумента x приближается к точке $a=2$, то соответствующие значения функции $f(x)=x^2$ приближаются к числу 4. Данные расчетов приведены в таблице:

Таблица 1

x	1,8	1,9	1,96	1,99	2	2,02	2,07	2,12
x^2	3,24	3,61	3,8416	3,9601	4	4,0804	4,2849	4,4944

Далее, следует вывод, что каким бы достаточно малым ни было число $\varepsilon>0$, можно найти значения x, для которых выполнялось бы неравенство $|x^2-4|<\varepsilon$. Для этого нужно взять значения x, расположенные как можно ближе к 2, т.е. из окрестности точки 2. В этом случае говорят, что число 4 является пределом функции $f(x)=x^2$, когда аргумент x стремится к 2 [10].

Только после рассмотрения примера формулируется определение понятия предела функции в точке.

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такая окрестность точки $x=a$, что для любых x ($x\neq a$) из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ и записывается: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Также дается формулировка на языке "$\varepsilon-\delta$".

Определение. Число b называется пределом функции $f(x)$ в точке $x=a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$, выполняется $|f(x)-b|<\varepsilon$ [10].

Такой методический подход облегчает сложность восприятия учащимися не простого понятия предела функции в точке, а далее на интервале, на котором в дальнейшем строится базовая часть теоретического курса математического анализа.

Школьный учебник среди большого количества учебных книг несет наибольшую функциональную нагрузку. Главными функциями учебника являются интеграция и программирование функций средств обучения, его система функций носит базовый характер [2, с. 74].

1.2 Роль курса математического анализа в подготовке будущего профессионального педагога

Математика дает людям возможность овладения методами изучения и понимания окружающего мира, учит методам исследования как теоретических, так и практических проблем. Во все времена математика играла важную роль в научном, техническом и экономическом развитиях. Владеющие математикой всегда составляли стратегический ресурс нации. В настоящее время, в связи с возросшей ролью математики, необычайно большое число будущих экономистов, программистов, организаторов современного производства нуждается в серьезной математической подготовке. Так как математическими методами можно исследовать широкий круг новых проблем, применять современную вычислительную технику, использовать теоретические достижения на практике [11].

Как известно, любую задачу экономическую, управленческую или транспортную можно «перевести» на математический язык, тем самым современный специалист получает возможность использовать для ее решения все разнообразие и богатство средств математики. Результаты, полученные с помощью методов математического анализа в экономике, позволяют подтвердить или опровергнуть выдвинутую гипотезу, построить прогноз, составить оптимальный план функционирования практически действующего объекта [12].

Общемировые интеграционные процессы в науке и производственно-экономической сфере привели к новым требованиям к работе руководителей производства, что, в свою очередь, вынудило провести критический анализ всей структуры подготовки кадров. Был провозглашен переход от подготовки "узких специалистов" к подготовке широко образованных личностей.

Важным качеством специалиста исследователи считают умение творчески подходить к решению возникающих перед ним задач. При всем многообразии смыслов термина «творческий подход», в математике он может означать построение нужной математической модели и ее изучение. Элементы обучения творческому подходу к решению задач, связанных, в первую очередь, с профилем будущей специальности студента, воспитание вообще творческой инициативы, должны занимать существенное место в процессе обучения математике. Однако обучение математике нельзя подменить обучением ряду приложений и методов, не разъясняя сущности математических понятий и не учитывая внутреннюю логику самой математики. Таким способом подготовленные специалисты могут оказаться беспомощными при исследовании новых конкретных явлений, поскольку будут лишены необходимой математической культуры и не приучены к рассмотрению абстрактных математических моделей. Следовательно, содержание общего курса математики не может быть определено с чисто прагматической точки зрения, основанной лишь на специфике будущей специальности студентов, без учета внутренней логики самой математики и разумной строгости изложения материала [12, с. 194].

Одной из сложных, но необходимых дисциплин, изучаемых на старшей ступени средней школы, является алгебра и начала анализа. Согласно типовой учебной программе для 10 – 11 классов общественно-гуманитарного направления общеобразовательной школы, задачами обучения алгебре и началам анализа являются:

1) воспитание отношения к математике как части общечеловеческой культуры, играющей особую роль в общественном развитии; расширение представления учащихся о сферах применения математики;

2) формирование представлений о математике как универсальном языке науки, как форме описания и методе познания действительности, средстве моделирования явлений и процессов; роли математической модели в научном познании реальных процессов;

3) формирование качеств личности, которые необходимы в современном обществе, свойственных математической деятельности: умение ясно и точно выражать свои мысли, обладать алгоритмической культурой, критическим и логическим мышлением, интуицией, способностью преодолевать трудности;

4) овладение системой математических знаний, развитие вычислительных алгебраических умений, необходимых для применения в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования;

5) систематическое изучение функций как важнейшего математического объекта средствами алгебры и математического анализа, раскрытие прикладного значения общих методов математики, связанных с исследованием функций;

6) развитие комбинаторного и вероятностного мышления; совершенствование интеллектуальных и речевых умений путем обогащения словарного запаса математической терминологией [13].

Знания, полученные при изучении курса алгебры и начал анализа, являются основополагающими для абитуриентов, поступающих в вузы по различным направлениям, так как много задач данного курса входит в задания ЕНТ. Поэтому важно, чтобы учащиеся научились не просто, например, находить производные или вычислять интегралы по известным формулам, а с самого начала понимали значимость раздела начал анализа для математики и жизни, могли оперировать основными терминами и формулами, умели применять полученные знания на практике.

Более практические задачи обучения сформулированы для естественно-математического направления:

1) обеспечение качественного усвоения базисных основ алгебры и начал анализа, направленного на развитие интеллектуальных качеств личности;

2) формирование представлений о математике как форме описания и методе познания действительности, роли математической модели в научном познании реальных процессов;

3) развитие представлений о математике как части общечеловеческой культуры, о значимости математики в истории цивилизации и современном обществе; расширение общего кругозора обучающихся представлением о вкладе ученых на различных этапах развития математической науки; расширение представлений учащихся о сферах применения математики;

4) усвоение новых подходов к решению задач по математике, овладение математическими знаниями, нужными для изучения смежных дисциплин на современном уровне; применение математических знаний в повседневной жизни; развитие умений использовать математические знания в практической деятельности;

5) формирование качеств мышления, необходимых человеку для жизни в современном обществе, для общей социальной ориентации и решения практических проблем; интеллектуальное развитие учащихся; развитие логического мышления; потенциальных творческих способностей каждого учащегося; интереса к предмету;

6) воспитание качеств личности, обеспечивающих социальную мобильность, способность принимать самостоятельные решения; развитие навыков самостоятельной работы, самооценки при выполнении индивидуальных заданий и работе в группе; предоставление учащимся возможности самостоятельного конструирования задач по данной теме, их решения, подготовке презентаций к занятиям; развитие умения ориентироваться в потоке поступающей информации;

7) вовлечение учащихся в игровую, коммуникативную, практическую, исследовательскую деятельность как фактор личностного развития (слушать и понимать других, выражать себя, находить компромисс, взаимодействовать внутри группы, находить консенсус, работать в группе, объективно оценивать результаты своей деятельности и деятельности своих товарищей);

8) создание условий для дальнейшего изучения предметов естественно-математического цикла; формирование умений применять изученные понятия, свойства, правила, алгоритмы и т.п., полученные результаты и математические методы для решения задач прикладного характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера [13, с. 15].

Абитуриенты, окончившие 11 класс естественно-математического направления, чаще выбирают технические специальности, а также специальности, непосредственно связанные с дальнейшим, более глубоким изучением математических дисциплин.

Математический анализ – это основной курс в системе математического образования студентов вуза, так как при исследовании и решении многих задач высшей математики используются методы и правила, изучаемые в данном курсе. Одним из фундаментальных методов исследования переменных величин является теория пределов, на которой строятся такие важные разделы курса математического анализа, как дифференциальное и интегральное исчисления функций одной и многих переменных. С помощью функций можно сформулировать не только законы природы, различные процессы в производстве, но и законы социального общества (например, подсчет прироста численности населения, миграции), разнообразные сферы жизнедеятельности человека. Знания, полученные при изучении математического анализа, используются при изучении таких приоритетных направлений, как функциональный анализ, теория функций, а также современное, относительно новое направление, как теория всплесков.

Теория всплесков является современным интенсивно-разрабатываемым на протяжении последних двух десятилетий разделом прикладного и вычислительного гармонического анализа, имеющим важные приложения в современных высоких информационных технологиях (цифровая обработка сигналов и изображений, телевидение высокой четкости, сейсморазведка и т. д.), а также в задачах теории фильтрации. Теория всплесков лежит на пересечении чистой математики, вычислительной математики, преобразования сигналов и изображений. Всплесковый анализ находит все более широкое применение в различных областях науки, так как он дает более подробную информацию о сигнале, изображении или операторе, чем стандартный анализ Фурье. Перечисленные особенности всплесков делают их очень популярными в самых различных приложениях: при анализе свойств сейсмических и акустических сигналов; при обработке и синтезе различных сигналов, например речевых; при анализе изображений; для изучения турбулентных полей; для сжатия больших объемов информации и т.д. [14].

То есть качественное обучение математическому анализу дает возможность выбора дальнейшей специализации из широкого спектра научных направлений.

Математический анализ является обязательным предметом для изучения при подготовке студентов по специальности 5В010900 – Математика. Для будущего учителя важно понимать что такое математика, это надо объяснять, этому надо учить. Школьный уровень недостаточен для дальнейшего обучения высшей математике, потому что учащиеся не осознают необходимости изучения более углубленных разделов, у них нет мотивации к изучению высшей математики. Обучение курсу математического анализа без осознания необходимости снижает эффективность обучения. То есть проблема мотивации очень важна при обучении.

В высших учебных заведениях Казахстана, согласно классификации специальностей вузовского и послевузовского образования, предложенной Министерством образования и науки, осуществляется обучение по двум направлениям: общеобразовательное и естественно-научное. Чем отличается преподавание курса математического анализа на общеобразовательном направлении специальности «Математика» от естественно-научного направления? Должны быть разные уровни преподавания: уровень «знакомства» с математическим анализом и углубленный уровень изучения математического анализа соответственно. Общий курс математического анализа должен охватывать наиболее важные аспекты, а углубленные вопросы можно включить в курсы дисциплин по выбору. Имеются «классические» учебники по математическому анализу – Кудрявцев Л.Д. «Курс математического анализа» в трех томах, Никольский С.М. «Курс математического анализа» в двух томах, Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл. Х. «Математический анализ» в двух томах, на изучение которых в полном объеме требуется много времени. На сегодняшний день, в связи с сокращением часов некоторые разделы математического анализа изучаются поверхностно [18].

Контингент студентов, поступающих на педагогические специальности, отличается от учащихся по другим более «популярным» направлениям. Если раньше сильные в математике выпускники поступали именно на физико-математические специальности, то на сегодняшний день они стремятся поступить на экономические или юридические специальности. Ведь в связи с переходом общества на рыночную экономику, с начала 1990 г. прошлого века, престижными стали юридические, экономические специальности, появилась практическая потребность в гуманитаризации системы образования, что привело к увеличению часов на изучение предметов гуманитарного цикла (прежде всего на изучение языков) и снижению количества часов на изучение естественно – научных дисциплин и математики по учебному плану. Вместе с тем, математика и сейчас занимает важное место в системе школьных учебных дисциплин [19].

Математика изучает пространственные формы и количественные отношения объективной действительности. Следовательно, математика исследует абстрактные объекты и эта абстрактность придает ей универсальность и формально логическую выводимость.

Универсальность математических знаний проявляется в проникновении ее методов, прежде всего метода математического моделирования, в другие области научного знания, как естественно – научного (физика, химия, биология и др.), так и гуманитарного (экономика, лингвистика, психология и др.).

Сегодня в повседневной речи часто можно услышать такие выражения, как «количество людей, заболевших гриппом, растет в геометрической прогрессии» или «ассигнования увеличились на порядок». Эти примеры доказывают, что все более широкий спектр математических знаний становится сегодня обязательным элементом общей культуры современного человека [19, с. 107].

Знания, полученные при изучении математического анализа, являются основой для обучения таким дисциплинам, как дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория функций, которые имеют более узкую специализацию, но являются важными курсами прикладного значения. Как преподавать математический анализ в сегодняшних условиях при ограничении во времени, при том, что студенты по другому мотивированы, это есть важная проблема на современном этапе научно-методических исследований. Также существуют проблемы сокращения часов аудиторных занятий и организации самостоятельной работы студентов в новых условиях. Большой плюс современного преподавания – возможность использования ИКТ и электронное обучение [1, p. 3487].

Хорошее педагогическое образование нужно всем, потому что вопросы психологии, педагогики необходимо изучить каждому для воспитания своих детей, для работы в коллективе. Именно при обучении математическим дисциплинам учат умению анализировать, делать выводы, логически мыслить. Поэтому роль математического анализа, как базового курса высшей математики, неоспоримо очень велика.

1.3 Преемственность в обучении курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе

Преемственность в обучении – установление необходимой связи и правильного соотношения между частями учебного предмета на разных ступенях его изучения. Преемственность свойственна учебным планам общеобразовательной школы, что обеспечивает одинаковый объем знаний в соответствующих классах и равные возможности для продолжения образования; в расположении материала учебного предмета и в выборе способов деятельности по овладению этим содержанием осуществляется с учетом содержания и логики соответствующей науки и закономерностей процесса усвоения знаний. Преемственность должна охватывать не только отдельные учебные предметы, но и отношения между ними, осуществляться между видами деятельности учащихся при усвоении учебного материала. Учащиеся должны выступать не как объект обучения, а становиться субъектами учебной деятельности [20].

Имея базовую теоретическую подготовку, на практике учитель встречается с необходимостью личностного осмысления проблемы преемственности в разных аспектах, на разном содержательном материале. Интерес многих ученых направлен на решение этой проблемы. Например, в методическом пособии Комаровой Е.А. «Преемственность в обучении математике» предлагается продолжить осмысление проблемы преемственности в обучении, начало которому положено в вузовских курсах педагогики и методики обучения математике. В первом разделе пособия предложены краткие теоретические сведения, раскрывающие педагогические и методические аспекты преемственности в обучении. В основном разделе раскрыты методические способы решения проблемы преемственности на материале арифметики и алгебры. В конце каждого пункта предложены вопросы и задания для самостоятельной работы по осмыслению теоретического материала и формированию практических умений. При выполнении практических заданий творческого характера в рамках курсов повышения квалификации или на заседаниях методических объединений рекомендовано объединение учителей в группы с учетом наличия у них позитивного опыта или, наоборот, затруднений при решении обозначенных проблем. Линейно-концентрическое построение школьного курса математики позволяет выделить два направления реализации преемственности в обучении предмету:

1) преемственность между смежными ступенями обучения;

2) преемственность внутри каждой ступени обучения:

а) преемственность внутри каждого курса математического характера (арифметики, алгебры, алгебры и начал анализа, геометрии);

б) преемственность между курсами математического характера, в частности, между пропедевтическими и систематическими курсами (например, алгеброй и геометрией, арифметикой и алгеброй, арифметикой и геометрией и др.) [21].

Если говорить о преемственности в обучении математики в целом, то она должна в первую очередь прослеживаться при переходе из начальной школы в среднюю (4 – 5 классы), затем следует выделить переход из 6 класса в 7 класс, так как изучение математики «разделяется» на два отдельных предмета – алгебру и геометрию, далее, это ступень старшей школы, т.е. изучение в 10 – 11 классах курса алгебры и начал анализа. На этих этапах очень важно обеспечить непрерывность линий в содержании, повторении, в разработке единых курсов для обучения отдельным программам, а также создать на каждом этапе базы для дальнейшего изучения учебного материала на более углубленном уровне. Ведь математический анализ продолжают изучать студенты, поступившие на технические специальности, специальности физико-математических факультетов. Первокурсники, окончившие общеобразовательную школу, не готовы к обучению дальнейшему курсу математического анализа, поэтому сначала преподают такие вводные курсы высшей математики, как «Элементарная математика» и «Научные основы школьного курса математики», которые предполагают адаптировать к обучению в вузе в целом, а также к обучению математическому анализу.

Курс математического анализа является самым сложным предметом для студентов-первокурсников – будущих учителей математики, потому что подразумевает умение мыслить, стремление к познанию и творчеству в профессиональной деятельности. Заложенное в школе аналитическое мышление при изучении начал анализа нужно продолжать более объемно и глубоко при обучении вузовского курса математического анализа. Однако, исходя из опыта работы с первокурсниками, можно сказать, что существует различие между знаниями, закрепленными в школе и начальными требованиями к знаниям студентов для дальнейшего изучения математического анализа [22].

Математический анализ – трудный предмет, содержит сложные конструкции определений, которые тяжело воспринимаются студентами первого курса. Например, определения предела, верхней и нижней граней, производной и т.д. В школе учащиеся часто воспринимают функцию как формулу, что приводит к непониманию ее поведения при приращении аргумента, свойств четности и нечетности функции.

При обучении курсам алгебры и начал анализа в школе и математического анализа в педагогическом вузе существует некоторая несогласованность в методах и организации обучения, а также в содержании. Процесс обучения в школе не стимулирует учащихся к познавательной самостоятельности, так как при выполнении домашнего задания и при подготовке к контрольным работам, они ориентируются только по записям классных работ и одному учебнику. Другими словами, ученики самостоятельно не привыкли изучать дополнительную литературу, что приводит к неспособности изложения изученного материала, что является нормой совершенствования вузовского образования. Специально организованное развитие познавательной самостоятельности студентов – одно из основных условий успешной организации учебного процесса. Его реализация обуславливает актуальность поиска приемов, методов и форм организации учебного процесса в вузе, способствующих стимулированию познавательной активности и самостоятельности студентов [23].

Проблема познавательной самостоятельности занимает одно из ведущих мест в педагогической науке. Эта проблема теоретически глубоко исследована в педагогике средней школы, а в педагогике высшей школы она изучена весьма поверхностно, причем на методическом уровне вообще не изучалась (речь идет о комплексном подходе к изучению, а не об отдельных ее сторонах).

Состояние разработки проблемы познавательной самостоятельности в педагогике высшей школы отличается и рядом особенностей: во – первых, тем, что познавательная самостоятельность не рассматривается как многоаспектное личностное образование студента, во – вторых, крайней недостаточностью специальных глубоких исследований, в – третьих, отсутствием в большинстве случаев преемственности в разработке данной проблемы между высшей и средней школами.

Для практики обучения в высшей школе эта проблема приобретает особую актуальность, так как неразвитость познавательной самостоятельности отрицательно влияет на успеваемость студента. Также актуальна и проблема формирования познавательной самостоятельности будущих учителей, потому что от их подготовки во многом зависит обеспечение морального облика членов общества, их образованность, умение ориентироваться в различных ситуациях с выбором оптимальных решений, возникающих перед ними задач [23, с. 3].

Также школьники не могут одновременно записывать и усваивать лекционный материал, отсюда – неумение правильно вести содержательный по смыслу и аргументированный конспект, будучи студентами первого курса вуза. Большой объем лекционного материала для первокурсников сложен для восприятия, и как следствие возникает трудность связать его с практическим применением при решении различных задач.

Все это является следствием того, что учебно-воспитательный процесс в школе и вузе существенно отличается. Учащиеся, поступив в вуз, попадают в иную обстановку, здесь другое отношение преподаватель – студент. К примеру, в школе учитель проверяет знание теоретического материала (определения, теоремы, формулы и т.п.) и выполнение домашнего задания учеником каждый урок, а в вузе – в определенный срок на промежуточном контроле. Также в школе педагог часто сам напоминает ученику о необходимости, например, «отработки» пропусков или решения дополнительных задач при слабой усваиваемости материала, а в вузе студент сам должен позаботиться об этом. То есть осуществляется «резкий переход» к самостоятельности в обучении, что иногда приводит к снижению успеваемости учащегося.

Если говорить конкретно о преемственности в обучении курсам алгебры и начал анализа в школе и математического анализа в педагогическом вузе, то возникает много проблем, связанных с содержанием этих курсов. До перехода на новую систему подготовки учителей математики на изучение курса математического анализа в разные годы отводилось 5 – 6 семестров, причем методическая подготовка начиналась уже на 5 семестре, параллельно с изучением данного курса. Сейчас же на обучение курсу математического анализа отводится всего 3 семестра, поэтому важно грамотно спланировать и сбалансировать как математическую, так и методическую подготовку будущего учителя математики. Это можно осуществить путем совершенствования методической системы его преподавания. На первом семестре обучения первокурсники изучают курс «Элементарной математики», в который входят основные разделы школьного курса математики. Этот курс является немаловажным, так как подготавливает студентов к дальнейшему обучению более сложному курсу математического анализа. Основные разделы, традиционно входящие в курс математического анализа, это «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной», «Интегральное исчисление функций одной переменной», «Ряды», «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных». Каждый из перечисленных разделов делится на несколько глав, которые содержат несколько модулей [22, с. 59].

Особо важным разделом для дальнейшего качественного изучения математического анализа, без сомнений является раздел «Введение в анализ», где вводятся такие основополагающие понятия, как последовательность, функция, предел, непрерывность и другие. И здесь возникает проблема нарушения преемственности при входе в вузовскую систему обучения между школьным курсом алгебры и начал анализа и курсом математического анализа в вузе, так как в школе понятие предела вводится на интуитивном уровне, а в вузе формулируется на языке «$\varepsilon - \delta$» для предела функции. В дальнейшем это порождает несогласованность во введении таких понятий, как непрерывность, производная, неопределенный и определенный интегралы. Также существует проблема разного объема содержания некоторых понятий с соответствующими терминами и способами решения задач школьного курса математики. Например, при изучении в вузе числовых последовательностей особое внимание уделяется способам их задания, пределу последовательности, вопросам сходимости последовательности и выделение подпоследовательности. В школьном же курсе эти разделы не затрагиваются, а рекуррентный способ задания последовательности вообще ассоциируется у школьников с набором каких-то стандартных формул [24].

На сегодняшний день, разнообразие учебной литературы стало одной из характерных черт современной школы. Появилась возможность выбора учебников из вариантов, отражающих различные педагогические подходы и вкусы, отвечающих разнонаправленным педагогическим технологиям и учительским стилям. Однако в обилии новых учебников стало трудно ориентироваться. Оказались утраченными такие привычные достоинства, как преемственность учебников «по вертикали» и взаимосвязанность учебников «по горизонтали». В то же время сократилась обеспеченность школ дополнительной учебной и методической литературой, вместе с которой учебники образуют учебно-методический комплект. Качество многих учебников стало «дежурной темой» средств массовой информации, а реальная возможность выбора учебника часто оказывается отнюдь не в руках учителя, что в принципе дискредитировало идею параллельных учебников [2, с. 79].

В казахстанских школах в 10 – 11 классах курсу алгебры и началам анализа обучают по учебникам авторов А.Е. Абылкасымовой, З.А. Жумагуловой, К.Д. Шойынбековой и В.Е. Корчевским. Рассмотрим, к примеру, учебник по «Алгебре и началам анализа» для 10 класса общественно – гуманитарного направления общеобразовательных школ. Учебник состоит из 6 глав и 22 параграфов. Учитывая профильное направление данного учебника, в каждом параграфе даны опорные понятия, алгоритмы решения задач, упражнения и задания для самостоятельного выполнения, вопросы на закрепление, тестовые задания для проверки знаний, упражнения для совместного решения, задания на составление формулировок правил и на доказательство формул.

Упражнения каждого параграфа разделены на две группы:

А – обязательные задания для всех учащихся;

В – задания определенной сложности, носящие поисковый характер.

После овладения навыками решения упражнений группы А, в зависимости от возможностей и способностей учащихся переходят к решению упражнений группы В. В конце каждой главы приведены краткие исторические сведения, дающие представление о происхождении различных математических понятий [25].

Правильно выстроенная структура данного учебника, при изучении курса алгебры и начал анализа, способствует дальнейшему развитию логического мышления учащихся, выработке грамотной речи, умению точно и лаконично выражать свои мысли.

Методическая система, воплощенная в конкретный учебник, ввиду основательной проработки, может внести существенные изменения в структуру соответствующего изучаемого предмета. Ведь давно известно, что с появлением учебников связаны возникновение и становление частных методик. Также установлено, что учебник влияет на методику обучения, на профессиональную подготовку преподавателей и даже на стиль их работы [2, С. 81].

Необходимость обеспечения преемственности в методике обучения алгебре и началам анализа и организации учебно-познавательной деятельности учащихся на уроке остается актуальной. В школе рассмотренные проблемы частично можно решить внедрением учебников единого авторского состава с 7 по 11 классы, так как, проследив содержание материала учебников, очевидно соблюдение преемственности всей линии курса алгебры и начал анализа в школе, что способствует целостности полученных знаний и облегчению дальнейшего обучения курсу математического анализа в педагогическом вузе.

Чтобы соблюсти преемственность в обучении курсу математического анализа в школе и вузе, необходимо ввести на первом курсе новые дисциплины, позволяющие «уравнять» знания учащихся, полученные в школе и адаптировать их к дальнейшему изучению математического анализа на более глубоком уровне. Ведь студенты первого курса, окончив разные типы школ, имеют различный уровень знаний по математическому анализу. Например, программы общественно-гуманитарного и естественно-математического направлений общеобразовательной школы имеют различия, также отличаются программы школ-гимназий, лицеев и школ с углубленным изучением математики. И только после вводных курсов возможно дальнейшее качественное обучение математическому анализу в вузе.

Решив, таким образом, вопрос преемственности в обучении в школе и педагогическом вузе, можно усовершенствовать учебно-воспитательный процесс в целом, свести к минимуму различия в подготовке учащихся старшей ступени средней школы и студентов первых курсов вуза.

1.4 Содержание учебной программы по алгебре и началам анализа в старшей школе и типовой учебной программы по математическому анализу специальности 5В010900 – математика педагогического вуза

Типовая учебная программа по алгебре и началам анализа для 10 – 11 класса содержит довольно сложные и объемные темы, изучение которых продолжают в вузе. Содержание курса алгебры и начал анализа 10-11 классов и первого курса математического анализа в педагогическом вузе можно отобразить в следующей таблице:

Таблица 2

Содержание программы (базисной) по алгебре и началам анализа в общеобразовательной школе		Содержание программы по математическому анализу в педагогическом вузе	
1	2	3	4
Темы	Класс	Темы	Курс
1) «Повторение курса алгебры 7-9 классов (6 ч.)». Выполнение действий над действительными числами. Свойства степени с целым показателем. Тождественные преобразования рациональных выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Доказательство	10	1) Действительные числа и их свойства. Принцип вложенных отрезков. Множества. Точные грани числовых множеств (3 ч.). 2)Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей (3 ч.).	1 (1сем.)

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
тождеств. Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения. Линейные, квадратные и дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов. Системы линейных неравенств с одной переменной. Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств с двумя переменными. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Решение текстовых задач. Числовые последовательности. Преобразования тригонометрических выражений. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), $y = \sqrt{x}$, их свойства и графики;		3) Подпоследовательности. Теорема Больцано - Вейерштрасса. Верхний и нижний пределы последовательностей. Бесконечно малые и большие последовательности и их свойства. Арифметические операции над сходящимися последовательностями (3 ч.).	
2) «Функция, ее свойства и график (15 ч.)». Функция. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции. График функции. Свойства функции: возрастание и убывание, ограниченность, четность и нечетность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Окрестность точки. Точки экстремума и экстремумы функции. Неубывающая функция. Невозрастающая		4) Функции. Обратные функции, сложные функции, неявные функции. График функции (3 ч.). 5) Предел функции по Коши и по Гейне. Свойства пределов функции. Односторонние пределы. Первый и второй замечательные пределы. Предел сложной функции. Бесконечно малые и большие функции. Сравнение функций (6 ч.). 6) Непрерывность функции. Точки разрыва и их	

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
функция. Обратная функция. Простейшие преобразования графиков функций. Исследование функции и построение её графика; 3) «Тригонометрические функции (10 ч.)». Свойства и графики тригонометрических функций. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Преобразования выражений, содержащих арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Обратные тригонометрические функции; 4) «Тригонометрические уравнения и неравенства (15ч.)». Тригонометрическое уравнение. Простейшие тригонометрические уравнения вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\ x = a$, $ctg\ x = a$ и их решения. Способы решения тригонометрических уравнений (Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразования тригонометрическими формулами. Тригонометрические уравнения, решаемые способом понижения степени уравнения. Однородные тригонометрические		классификация. Равномерная непрерывность функции. Теорема Кантора (6 ч.).	

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
уравнения). Системы тригонометрических уравнений и их решение. Тригонометрическое неравенство. Решение прсотейших тригонометрических неравенств и их систем;			
5) «Производная (22 ч.)». Предел функции в точке. Непрерывностьфункции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Асимптота. Производная. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производных. Дифференцирование. Производная степенной функции. Физический и геометрический смысл производной. Касательная к графику функции. Уравнение касательной к графику функции. Сложная функция. Производная сложной функции. Производная тригонометрических функций. Дифференциал. Приближённые вычисления;		7) Производная функции. Дифференцируемость функции, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Дифференцирование сложной и обратной функции. Параметрически заданные функции и их дифференцирование (6 ч.). 8) Инвариантность формы первого дифференциала. Основные теоремы дифференциального исчисления. Основные свойства дифференцируемых функций (3 ч.). 9) Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница (3 ч.).	
6) «Применение производной (16 ч.)». Признаки монотонности (возрастания и убывания) функции. Критические точки. Достаточные условия существования экстремума. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее		10)Формула Тейлора. Формула Маклорена, разложение основных элементарных функций. Правило Лопиталя (3 ч.). 11) Исследование функций с помощью производных. Условия постоянства и монотонности функций. Экстремум функции. Необходимое условие	

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
значения функции на промежутке; 7) «Комбинаторика и бином Ньютона (6 ч.)». Основные понятия и формулы комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания). Бином Ньютона; 8) «Повторение курса алгебры и начал анализа 10 класса (12 ч.)». Свойства функции: возрастание и убывание, экстремумы, ограниченность, чётность и нёчетность, непрерывность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики тригонометрических функций. Тригонометрические уравнения и их системы. Тригонометрические неравенства и их системы. Вычисления производных. Признаки возрастания и убывания функции. Критические точки. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной к решению практических задач. Формулы приближённых вычислений.		экстремума, достаточные условия экстремума. Наибольшие и наименьшие значения функции. Выпуклость. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графиков функций (3 ч.). 12) Вектор – функция. Предел, непрерывность, дифференцируемость вектора – функции (3 ч.).	
Итого: 102 ч.		Итого: 45 ауд.ч. (без учета СРС, СРСП)	

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
1) «Повторение курса алгебры и начала анализа 10 класса (6 ч.)». Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики тригонометрических функций. Тригонометрические уравнения и их системы. Тригонометрические неравенства. Вычисления производных. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; 2) «Первообразная и интеграл (17ч.)». Первообразная функции. Неопределённый интеграл. Основное свойство первообразной. Правила нахождения первообразных. Криволинейная трапеция. Площадь криволинейной трапеции. Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование. Применение определенного интеграла к решению геометрических и физических задач;	11	1) Неопределенные интегралы. Первообразная. Неопределенный интеграл (3 ч.). Методы интегрирования. Интегрирование рациональных функций (6 ч.). Интегрирование иррациональных выражений. Различные методы интегрирования тригонометрических и гиперболических выражений (3 ч.). 2) Определенные интегралы. Определение интеграла Римана (3 ч.). Классы функций интегрируемых по Риману. Свойства определенного интеграла (3 ч.).	1 (2сем.)

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
		Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования (3 ч.). Формула Ньютона – Лейбница. Методы вычисления определенных интегралов(3 ч.). Приложения определенного интеграла. Вычисление площади плоской фигуры и вычисление объема тела вращения. Кривая, спрямляемая кривая, вычисление длины дуги кривой (3 ч.). 3) Несобственные интегралы. Несобственные интегралы. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов (3 ч.).	
3) «Степени и корни. Степенная функция (23 ч.)». Корень *n*-ой степени и его свойства. Арифметический корень *n*-ой степени. Степень с рациональным показателем и её свойства. Иррациональные выражения. Преобразование иррациональных выражений. Иррациональные уравнения. Решение иррациональных уравнений и их систем. Степенная функция, её свойства и графики. Дифференцирование и интегрирование степенной функции с действительным показателем;		4) Дифференциальное исчисление функций многих переменных. Функции многих переменных. Предел, непрерывность, равномерная непрерывность (3 ч.). Частные производные и дифференциал. Производные и дифференциалы высших порядков (6 ч.). Формула Тейлора и ряд Тейлора. Неявные функции. Экстремум функции многих переменных(6 ч.).	

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
4) «Показательная и логарифмическая функции (10ч.)». Показательная функция, ее свойства и график. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Десятичный логарифм. Натуральный логарифм. Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Интегрирование показательной функции; 5) «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства (20 ч.)». Показательные уравнения. Решение показательных уравнений и их систем. Логарифмические уравнения. Решение логарифмических уравнений и их систем. Показательные неравенства. Решение показательных неравенстви их систем. Логарифмические неравенства. Решение логарифмических неравенств и их систем; 6) «Вероятность (8 ч.)». Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности события. Случайная величина. Дискретная случайная			

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
величина. Непрерывная случайная величина. Закон распределения случайной величины. Числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение); 7) «Повторение курса алгебры и начала анализа 10-11 классов (18ч.)». Преобразования выражений, содержащих корень n-ой степени, степень с рациональным показателем, логарифм. Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики степенной функции, тригонометрических, показательных и логарифмических функций. Тригонометрические, показательные, логарифмические, иррациональные уравнения и их системы. Тригонометрические, показательные, логарифмические неравенства и их системы. Вычисления производных. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке.			

Продолжение таблицы 2

1	2	3	4
Применение производной и интеграла при решении практических задач [13].			
Итого: 102 ч.		Итого: 45 ауд.ч. (без учета СРС, СРСП)	

По таблице видно, что необходимые фундаментальные знания по началам анализа закладываются уже в школьном курсе, но количество отводимых часов на их изучение очень мало. В университете, при обучении курсу математического анализа, используются базовые знания из школы, но для их повторения снова наблюдается малочисленность часов. Так, например, на изучение раздела «Производная», который включает в себя изучение таких фундаментальных понятий как предел функции в точке, непрерывность функции в точке и на множестве, асимптота, производная функции, дифференцируемость функции, правила нахождения производных, производная степенной функции, физический и геометрический смысл производной, и т.д. предусмотрено всего 22 часа. На повторение этого материала в курсе математического анализа в вузе – 6 часов. Это приводит к недопониманию школьниками, а затем и студентами основных понятий математического анализа и ведет к слабой усваиваемости материала.

2 МЕТОДИКА И ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ШКОЛЕ И ПЕДАГОГИЧЕСКОМ ВУЗЕ

2.1 Методика обучения курсу алгебры и начал анализа в современной школе

Курс математического анализа представляет особый интерес для исследователей, так как:

1) начала анализа преподаются уже на старшей ступени школы;
2) изучение курса математического анализа имеет продуктивную прикладную направленность в дальнейших научных исследованиях;
3) прочные знания курса математического анализа позволяют достичь высокого уровня знаний по курсам, так или иначе связанных с теорией математического анализа.

За последние десятилетия общеобразовательная школа в Казахстане прошла как профильную, так и внутреннюю дифференциацию. В результате появились различные типы организации образования, в том числе международные - лицеи, гимназии, колледжи, специализированные школы с углубленным изучением отдельных предметов и другие. Изменения коснулись и методов преподавания и обучения дисциплинам. В нашей республике на старшей ступени школы обучение проходит по двум направлениям – естественно-научному и общественно-гуманитарному профилям. Эти новшества потребовали изменений в процессе подготовки учителей, в том числе целей, содержания образования, методов и организационных форм обучения.

В настоящее время квалифицированные специалисты должны не просто владеть основами наук, но и применять свои знания на практике, уметь педагогически грамотно передавать знания ученикам на любом уровне – от общеобразовательной школы до профильных школ с углубленным изучением математики.

На старшей ступени средней школы предмет «Алгебра и начала анализа» часто преподается обособленно, не подчеркивается прикладная направленность этого предмета, что приводит к непониманию учащимися необходимости его изучения. Насыщенная математическая теория, методы обучения, малочисленность часов на изучение основных разделов начал математического анализа усложняют восприятие учениками данного предмета.

Поэтому требуется новый предмет в системе вузовского образования, главной функцией которого являлась бы адаптация вчерашних школьников к дальнейшему изучению математического анализа. Есть необходимость поменять методическую систему обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе.

Существует несколько определений и понятий методической системы. Приведем некоторые из них. Сильченкова Т.Н. в своей статье «Что такое методическая система?» дает следующее определение: методическая система обучения – это упорядоченная совокупность взаимосвязанных и взаимообусловленных методов, форм и средств планирования и проведения, контроля, анализа, корректирования учебного процесса, направленных на повышение эффективности обучения учащихся. Исходя из этого определения, обучение считается тогда эффективным, когда оно строится как методическая система. Автор статьи выделяет следующие характерные черты современной методической системы обучения:

- научно обоснованное планирование процесса обучения;
- единство и взаимопроникновение теоретической и практической подготовки школьников;
- высокий уровень трудностей и быстрый темп изучения учебного материала;
- максимальная активность и достаточная самостоятельность обучения;
- сочетание индивидуальной и коллективной работы школьников;
- насыщенность учебного процесса техническими средствами обучения;
- комплексирование различных предметов обучения.

Методическая система будет функционировать только тогда, если она определяется целями, задачами и содержанием обучения, а также включает планирование, контроль, анализ и корректировку учебного процесса. Цели обучения преподавателями определяются по каждому учебному предмету и учебному занятию. Содержание обучения же определяется учебными программами по каждому учебному предмету, но корректируется учителями в зависимости от целей учебных занятий. Планирование учебного процесса – сложная совокупность действий органов образования и преподавателей, предполагающая расстановку занятий школьников по предметам, времени и месту проведения. Контроль, анализ и корректировка учебного процесса осуществляются учителями и представителями органов образования по управлению, регулированию и повышению эффективности учебных занятий [26].

В статье Фещенко Ф.С. «К вопросу о понятии методическая система» приводится определение понятия методической системы разными учеными. Так, например, данное понятие трактуется в науке по-разному: как концепция (М.В. Рыжаков), образовательная модель взаимосвязанных компонентов (В.М. Жучков), совокупность взаимосвязанных компонентов (С.И. Архангельский, Н.В. Кузьмина, А.М. Пышкало), сложное динамическое образование (Г.Г. Хамов), система обучения какому-либо предмету (Н.Н. Лобанова) и.т.д.

Автор приводит таблицу основных подходов к определению понятия методической системы.

Таблица 3

№	Авторы	Варианты определений (фрагменты)
1	2	3
Дидактический подход		
1	Л.В. Занков	Методическая система, суть которой заключается

Продолжение таблицы 3

1	2	3
		в том, что в организации образовательной системы направляющую и регулирующую роль выполняют дидактические принципы. Уровень действенности этих принципов отвлечен от каждодневной деятельности учителя и является довольно абстрактным. Цель системы и ее дидактические принципы реализуются в повседневной деятельности учителя при обучении школьников. Типические свойства методической системы связаны с дидактическими принципами и их реализацией. Выделяя важнейшие принципы можно указать системность, функциональный подход, многогранность, вариантность и процессуальность.
Модельный подход		
2	В.М. Жучков	Методическая система представляет собой информационную модель, в которой перечислены необходимые требования к организации процесса обучения, а также представлены все взаимосвязанные элементы с их описанием.
Функциональный подход		
3	А.М. Пышкало, Н.В. Кузьмина, А.И. Архангельский	Методическая система представляет собой структуру, которая состоит из таких компонентов, как цели обучения, методы обучения, содержание обучения, формы и средства обучения. Перечисленные компоненты методической системы обучения находятся в довольно тесной взаимосвязи. Изменение одного из составляющих приведет к изменению остальных, а как следствие и всей системы в целом.
Подход, ориентированный на результат		
4	В.Г. Крысько	Методической системой называется совокупность взаимосвязанных и взаимообусловленных методов, форм и средств обучения, планирования и организации учебного процесса, его контроля, анализа и, при необходимости, корректирования, направленных на повышение эффективности обучения.
Деятельностный подход		
5	В.И. Загвязинский	Методической называют определенную, достаточно вариативную и гибкую систему, которая требуется для реализации любых образовательных концепций. Иначе, такая система приобретает форму

Продолжение таблицы 3

1	2	3
		педагогической технологии.
Личностно-ориентированный подход		
6	Г.И. Саранцев	Такие исходные положения, как саморазвитие и концентрирование внимания на ученике, определяют специфику методической системы обучения, к которой относят структуру личности и закономерности ее развития. Другими словами, к основным элементам функциональной модели методической системы добавляются результаты обучения и индивидуальность каждого учащегося.
Функционально-деятельностный подход		
7	А.М. Новиков	Функционально-деятельностный подход, основанный на глубоком анализе составляющей части учебного процесса в методической системе и на определении основных требований к следующим характеристикам этого процесса: - представление содержательных и деятельностных характеристик обучения как одно целое; - одновременное отражение деятельности преподавателя и учащихся в их динамическом взаимодействии; - представление совместного процесса взаимодействия преподавателя и учащихся как управления со стороны преподавателя непосредственно или, может быть опосредовано деятельностью учащихся.
Концептуальный подход		
8	М.В. Рыжаков	Модель методической системы обучения объединяет целевой, содержательный и процессуальный компоненты с учетом интеграции фундаментальных, профессионально направленных и информационных знаний и умений в различных областях профессиональной деятельности. Рассмотрение информационной безопасности, как нового теоретического знания, которое обеспечивает разрешение возникающих в ходе развития современного образования противоречий, лежит в основе концепции. Методическая система обучения при данном подходе может быть доведена до уровня методик и методических рекомендаций, и в дальнейшем реализована при построении учебного процесса.

Продолжение таблицы 3

1	2	3
9	Г.Г. Хамов	Сложное динамическое образование.
Социальный подход		
10	А.В. Могилев	Методическая система, которая должна учитывать социальный контекст развития образования, а именно его информатизацию, с соответствующей коррекцией и кардинальным переосмыслением таких составляющих системы, как целей, содержания, форм и методов обучения на современном уровне.
Предметный подход		
11	Е.Н. Лобанова	Методическая система – это система обучения какому-либо конкретному предмету.

Из таблицы следует, что определение понятия методической системы многообразно. В связи с этим, проектируя методическую систему, должны обязательно учитывать ее открытость, динамичное развитие, она должна реагировать на все происходящие изменения в образовании и адекватно отражать эти изменения при подготовки будущего учителя к работе в современных постоянно меняющихся условиях [27].

Исходя из вышесказанного, можно сказать, что методическая система обучения состоит из пяти основных компонентов: целей, содержания, методов, форм и средств.

Саранцев Г.И. писал, что начало процесса становления предметных методик как самостоятельных научных областей следует связывать с работами Песталоцци И.Г. «Наглядное учение о числе» и «Наглядное учение об измерении» (1803 г.). Здесь, нужно отметить, что методические рекомендации по изучению арифметики были даны в «Арифметике» Магницкого Л.Ф. в 1703 году, которая использовалась, как основной школьный учебник в течение полувека. Предложения по использованию приемов обучения встречались в работах Платона, положившего начало логической теории понятий, Коменского Я.А., который внес огромный вклад в разработку дидактических принципов и теории организации учебного процесса. Во второй половине XVIII – первой половине XIX веков вышли методические работы, которые становятся основой методики обучения алгебре, тригонометрии и началам анализа. Позже, во второй половине XIX века складывается общая методика преподавания математики, в которой рассматриваются цели, методы, формы обучения, вопросы формирования понятий и работы с теоремой. Период времени, охватывающий конец XIX и начало XX веков, ознаменовался обсуждением идей о необходимости изменения содержания математического образования. Но до начала крупной реформы математического образования (60-е годы XX века) эти идеи так и не были реализованы. На тот момент педагоги видели основную задачу методики в поиске дидактических приемов учителя и способов их рационального сочетания. Многие из этих приемов носят достаточно универсальный характер и используются при обучении различным предметам. В связи с этим, возникает необходимость их систематизации и обобщения. Дидактика «берет на себя» решение этой задачи, что способствует ее формированию как самостоятельной научной области, а предметные методики рассматриваются как ее приложения, то есть методические исследования начали проводится в русле дидактических концепций и затрагивали в основном методы и формы обучения предмету.

Уже к середине XX века исследователи стали заниматься научным обоснованием реформы содержания математического образования. Как следствие, методики обучения из прикладных дидактик трансформируются в самостоятельные научные области, которые должны ответить на вопросы: кого учить? Зачем учить? Чему учить? Как учить? [28].

Понятие методической системы обучения предмету ввел Пышкало А.М. Составляющими методической системы обучения предмету являются цели образования, структура личности и закономерности ее развития, предмет специальной научной области, ее место в науке, жизни, производстве, гуманитаризация и гуманизация образования, результаты исследований в психологии, дидактике, логике, информатике. Внешняя среда имеет безусловное влияние на методическую систему обучения предмету, поэтому цели можно конкретизировать и представить в более технологическом виде [28].

В методической системе обучения курсу математического анализа цели могут быть следующими:

1. Овладение системой знаний, умений и навыков, дающей представление о предмете математического анализа, ее языке и символике, математическом моделировании, специальных приемах, об алгоритме, периодах развития данной науки.
2. Овладение основными общенаучными методами познания и специальными эвристиками, используемыми в курсе математического анализа.
3. Формирование мировоззрения учащихся, логической и эвристической составляющих мышления, алгоритмического мышления, способностей анализировать.
4. Воспитание нравственности, культуры общения, самостоятельности, активности, трудолюбия, ответственности за принятие решений, стремления к самореализации, эстетическое воспитание школьников.
5. Формирование умений строить и исследовать заданные математические модели, конструировать приложения к ним.
6. Ознакомление с ролью математического анализа в научно-техническом прогрессе, современном производстве.

На современном этапе научных исследований некоторые ученые предлагают расширить номенклатуру компонентов методической системы обучения предмету: одни рекомендуют ввести результаты обучения, другие – структуру личности, третьи – индивидуальность учащихся и т.д. Методическую систему обучения необходимо исследовать на различных уровнях. На практике, в учебном процессе цели обучения на уроке ориентируются на группы учащихся, а иногда даже на каждого из них, то есть при изучении конкретного содержания учитывается индивидуальность школьника.

Имеющийся опыт исследования различных педагогических категорий приводит к следующей иерархии уровней анализа предметной методической системы обучения:

1) методологического анализа системы;
2) теоретического исследования;
3) учебных материалов;
4) реального учебного процесса.

На первом уровне строится методическая система и формируется ее внешняя среда, далее выделяют составляющие системы и внешней среды, устанавливаются связи между компонентами методической системы и внешней средой. На втором уровне изучаются связи между компонентами системы, выделяется основной из них – цели обучения, которые являются главной составляющей основы отбора содержания образования. Например, такие цели обучения математике определяют линии расширения понятия числа, уравнений и неравенств, функций, элементов математического анализа, теории вероятностей и статистики, приложений математики, геометрических преобразований, векторов, координат, элементов математической логики, аксиоматического действия. В содержание должны быть включены общенаучные методы познания, специальные эвристические приемы и различные эвристики, а также действия, адекватные математическим понятиям. На данном уровне анализ методической системы обучения предполагает раскрытие содержания понятий метода, формы, средств обучения предмету, которое может не совпадать с их содержанием в дидактике. В методике метод обучения рассматривается как способ организации учебного материала и взаимодействия педагога и учащихся, направленного на решение образовательных и воспитательных задач. Сам учебный процесс характеризуется взаимосвязью «преподавание – предметное содержание – учение», а структурной единицей процесса обучения является объект, в котором отражено взаимодействие познавательной задачи, действий учащихся по ее решению и приемов учителя. Результатом проецирования второго уровня на конкретное содержание предмета являются учебные материалы. На этом уровне анализ методической системы призван ответить на вопросы: какова структура учебника? Каково содержание обучения? Какова методика изучения учебного материала? Какой должна быть система упражнений? Ответы на перечисленные вопросы составляют содержание частной методики. Здесь, содержание обучения состоит из системы предметных знаний, умений и навыков, действий, соответствующих понятиям и фактам, эвристик. На этом уровне цели обучения приобретают более конкретную форму, задаются в форме знаний и умений или в форме требований к подготовке учащихся, определяемых стандартом среднего образования [28] .

Что касается содержания методической системы обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе, то оно включает в себя школьный курс алгебры и начал анализа, согласно утвержденной типовой учебной программе. Затем, для соблюдения преемственности, на 1 семестре обучения в вузе введен новый предмет «Основы математического анализа», одной из задач которого является подготовка обучающихся к дальнейшему изучению курса математического анализа. И только после этого, на 2 семестре начинается более углубленное обучение курсу математического анализа.

Дисциплина «Основы математического анализа» является вводным курсом для дальнейшего изучения математического анализа в вузе. Данная дисциплина дает полное представление об основных определениях и понятиях математического анализа, изучаемых в школьном курсе алгебры и начал анализа. Также более углубленно изучаются такие важные понятия, как: пределы функций, замечательные пределы; применение производной функции, ее физический смысл и геометрический смысл; неопределенный интеграл, некоторые методы нахождения неопределенных интегралов; определенный интеграл и его геометрический смысл.

Целями данного курса являются закрепление знаний студентов школьного курса алгебры и начал анализа, а также более углубленное изучение применения производной и методов нахождения неопределенных интегралов, не входящих в школьную программу.

Задачи дисциплины – дать полное представление о таких необходимых понятиях, как:

- множества и действия над ними;
- абсолютная величина действительного числа и окрестность точки;
- числовая последовательность, предел числовой последовательности;
- функция, предел функции, замечательные пределы;
- непрерывность функции и точки разрыва функций;
- производная функции, физический и геометрический смыслы производной;
- производные сложной и параметрически заданной функций;
- дифференциал функции; теоремы о дифференцируемых функциях;
- первообразная, неопределенный интеграл, методы нахождения неопределенных интегралов.

Предполагаемые результаты изучения дисциплины:

- понимать основные определения;
- знать таблицы основных производных и интегралов;
- уметь применять свойства производной функции, интегрировать функции, используя различные методы нахождения интегралов.

Знания, полученные в результате изучения данного курса, используются для дальнейшего обучения курсу математического анализа в педагогическом вузе. Содержание дисциплины «Основы математического анализа» описано в приложении А.

2.2 Методические особенности обучения курсу математического анализа будущих учителей математики

При обучении математическому анализу в педагогическом вузе важно для начала закрепить базовые знания по предмету. Контингент студентов, поступающих в вуз, различный, ввиду того, что они окончили разные типы школ (общеобразовательные школы, лицеи, гимназии, профильные школы). Поэтому, в первую очередь, следует «уравнять» знания учащихся по математическому анализу, данные им в школе. Имея пробелы в школьном курсе алгебры и начал анализа, первокурснику сложно будет воспринимать программу.

Покажем методику преподавания курса математического анализа на примере обучения студентов педагогического вуза нахождению неопределенных интегралов.

В первую очередь, даются определения первообразной функции, неопределенного интеграла и основные правила интегрирования функций.

Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства.

Действием обратным к дифференцированию является интегрирование.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на интервале (a,b), если для любого $x \in (a,b)$ выполняется следующее равенство $F'(x) = f(x)$ [31].

К примеру, первообразной функции $y = x^2, где\ x \in R,$ является функция

$F(x) = \dfrac{x^3}{3},$ что легко проверить: $F'(x) = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$

Но также можно утверждать, что первообразными будут также любые функции

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + C,$ где C – постоянная, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in R).$$

Теорема. Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на (a,b), то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где C – постоянное число.

Определение. Множество всех первообразных функций $F(x)+C$ для $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)\,dx.$

Здесь $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, $\int$ - знаком неопределенного интеграла.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства (рис.1). График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой*.

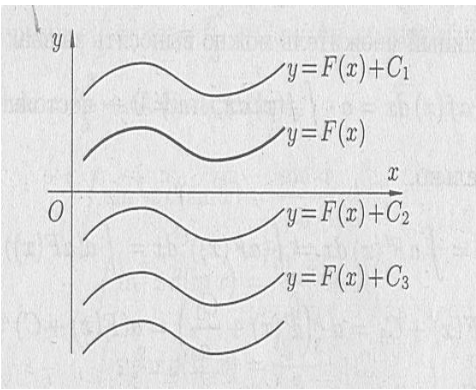

Рисунок 1

Свойства неопределенного интеграла:

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx\,.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a \neq 0 \text{ - постоянная.}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int \left(f(x) \pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx\,.$$

5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)\,du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ - произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таким образом, формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную (инвариантность формулы интегрирования).

Приведем таблицу основных интегралов.

Таблица 4 (таблица основных интегралов).

1. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right)$;

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C;$ 3. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C;$

4. $\int e^u du = e^u + C;$

5. $\int \sin u \, du = -\cos u + C \quad \left(\int sh u \; du = ch\, u + C\right);$

6. $\int \cos u \, du = \sin u + C \quad \left(\int ch u \; du = sh u + C\right);$

7. $\int tg\, u \, du = -\ln|\cos u| + C$; 8. $\int ctg\, u \, du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C \quad \left(\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + C\right);$

10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C \quad \left(\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + C\right);$

11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\,\dfrac{u}{2}\right| + C;$ 12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\Pi}{4}\right)\right| + C$;

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C;$

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \dfrac{u}{a} + C;$

15. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a} arctg\, \dfrac{u}{a} + C$;

16. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \dfrac{a^2}{2} \arcsin \dfrac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2} du = \dfrac{u}{2} \cdot \sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2} \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

Далее перейдем к методам интегрирования функций.

1. Метод непосредственного интегрирования.

Метод хорошо знакомый из школьного курса начал математического анализа – метод непосредственного интегрирования. Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

Пример 1. $\int \left(3 - x^2\right)^3 dx = \int \left(27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6\right) dx = 27x - 9x^3 + \dfrac{9}{5}x^5 - \dfrac{1}{7}x^7 + C$.

Пример 2. $\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C$.

Пример 3. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{(2)^2 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}\,x}{2} + C$.

Пример 4. $\int tg\, u\, du = \int \frac{\sin u\, du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C$ (занесение функции под знак дифференциала) [29].

2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной).

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)\, dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)\, dt$ и на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt$$

Формула также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x, выразив для этого переменную t через x.

Пример 1. Найти $\int e^{\frac{x}{4}} dx$.

Решение: Введем следующую замену $x = 4t$, тогда дифференциал $dx = 4dt$.

Следовательно, $\int e^{\frac{x}{4}} dx = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{x/4} + C$.

Пример 2. Найти $\int x\sqrt{x-3}\, dx$ [29].

Решение: Положим $\sqrt{x-3} = t$, тогда выразим $x = t^2 + 3,\ dx = 2t\, dt$.

Поэтому

$$\int x\sqrt{x-3}dx = \int (t^2+3)\, t\, 2t\, dt = 2\int (t^4 + 3t^2)\, dt = 2\int t^4 dt + 6\int t^2 dt = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C =$$

$$= \frac{2}{5}(x-3)^{\frac{5}{2}} + 2(x-3)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Но не все интегралы можно найти с помощью замены переменной и табличных интегралов. Для нахождения интегралов, содержащих более сложные подынтегральные функции, существуют следующие методы.

3. Метод интегрирования по частям.

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv)=udv+vdu$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int d(uv)=\int udv+\int vdu \quad \text{или} \quad \int udv=uv-\int vdu.$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям.* Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kx,$ где $P(x)$ - многочлен, k - коэффициент (действительное число). Положим $u=P(x)$, а за dv обозначим все остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P(x)\arcsin xdx, \int P(x)\arccos xdx, \int P(x)\ln xdx,$ $\int P(x)arctgx\,dx, \int P(x)arcctgx\,dx$. Здесь, наоборот, удобнее положить $P(x)\,dx=dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\sin bx\,dx, \int e^{ax}\cos bx\,dx,$ где a и b - действительные числа. За u можно принять функцию $u=e^{ax}$, соответственно за dv остальные сомножители.

Пример 1. Найти $\int (2x+1)e^{3x}dx$.

Решение: Положим $\left[\begin{array}{l} u=2x+1 \Rightarrow du=2dx \\ dv=e^{3x}\,dx \Rightarrow v=\int e^{3x}dx=\dfrac{1}{3}e^{3x} \end{array}\right]$

Тогда

$$\int (2x+1)e^{3x}dx=(2x+1)\frac{1}{3}e^{3x}-\int \frac{1}{3}e^{3x}\,2dx=\frac{1}{3}(2x+1)e^{3x}-\frac{2}{9}e^{3x}+C$$

Пример 2. Найти $\int \ln x\,dx$.

Пусть $\left[\begin{array}{l} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \Rightarrow v=x \end{array}\right]$

Получим $\int \ln x\,dx=x\ln x-\int x\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C$.

4. *Интегрирование рациональных функций путём разложения на простейшие дроби (метод неопределенных коэффициентов).*

Рассмотрим для начала простейшие рациональные дроби и их интегрирование.

Всякую рациональную функцию можно представить в виде рациональной дроби, т.е. в виде отношения двух многочленов:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=\frac{B_0x^m+B_1x^{m-1}+\ldots+B_m}{A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n}$$

Предположим, что данные многочлены не имеют общих корней.

Как известно, дроби по своему виду делятся на правильные и неправильные дроби. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то дробь называется правильной, иначе дробь называется неправильной. Если дробь неправильная, то по правилу деления многочленов разделим числитель на знаменатель, тем самым можно представить данную дробь в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби:

$$\frac{Q(x)}{f(x)}=M(x)+\frac{F(x)}{f(x)};$$

здесь $M(x)$ - многочлен, а $\frac{F(x)}{f(x)}$ - правильная дробь.

Пример 1. Пусть дана неправильная дробь

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}.$$

Разделим по правилу деления многочленов числитель на знаменатель, тогда

$$\frac{x^4-3}{x^2+2x+1}=x^2-2x+3-\frac{4x+6}{x^2+2x+1}.$$

В результате получили сумму многочлена и правильной рациональной дроби. Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений (интегрируем с помощью таблицы основных интегралов), то основная трудность возникает при интегрировании правильных рациональных дробей.

Определение. Правильные рациональные дроби можно разделить на следующие виды

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^k}$ (где k - целое положительное ≥ 2);

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0$);

IV. $\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ (k -целое положительное ≥ 2; корни знаменателя комплексные);

и соответственно будем называть простейшими дробями I, II, III и IV типов.

Интегрирование простейших дробей типа I, II и III не составляет большой трудности, так как используются методы непосредственного интегрирования и интегрирование с помощью замены переменной. Поэтому мы проведем их интегрирование без каких-либо дополнительных пояснений:

I. $$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c.$$

II. $$\int \frac{A}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k}dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$

III. $$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| +$$

$$+\left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\, acrtg\, \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Четвертый же вид требует следующих действий.

Разложение рациональной дроби на простейшие.

Покажем, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить на сумму простейших дробей. Пусть нам дана правильная рациональная дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$. Будем предполагать, что коэффициенты входящих в нее многочленов – действительные числа и что данная дробь несократима.

Теорема 1. Пусть $x = a$ есть корень знаменателя кратности k, т.е. $f(x) = (x-a)^k f_1(x)$, где $f_1(a) \neq 0$, тогда данную правильную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующими образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}; \tag{1}$$

где A- постоянная, не равная нулю, $F_1(x)$ - многочлен, степень которого ниже степени знаменателя $(x-a)^{k-1} f_1(x)$.

Также следует рассмотреть случай комплексных корней знаменателя. Мы знаем, что комплексные корни многочлена с действительными коэффициентами всегда попарно сопряжены. В разложении многочлена на действительные множители каждой паре комплексных корней многочлена соответствует выражение $x^2 + px + q$. Если же комплексные корни имеют кратность μ, то им соответствует выражение $\left(x^2 + px + q\right)^\mu$.

Теорема 2. Если $f(x) = \left(x^2 + px + q\right)^\mu \varphi_1(x)$, где многочлен $\varphi_1(x)$ не делится на $x^2 + px + q$, то правильную рациональную дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ можно представить в виде суммы двух других правильных дробей следующим образом:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^\mu} + \frac{\Phi_1(x)}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)}, \tag{2}$$

где $\Phi_1(x)$ - многочлен, степень которого ниже степени многочлена $\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}\varphi_1(x)$.

Применяя теперь к правильной дроби $\frac{F(x)}{f(x)}$ результаты теорем 1 и 2, мы можем выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя $f(x)$. Таким образом, из выше сказанного следует результат:

если $f(x)=(x-a)^{\alpha}\ldots(x-b)^{\beta}\left(x^2+px+q\right)^{\mu}\ldots\left(x^2+lk+s\right)^{\nu}$,

то дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ может быть представлена в виде

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{n-1}}{x-a}+\ldots\frac{B}{(x-в)^{\beta}}+\frac{B_1}{(x-в)^{\beta-1}}+\ldots\frac{B_{\beta-1}}{x-в}+$$
$$+\frac{M\,x+N}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu}}+\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)^{\mu-1}}+\ldots+\frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{Px+Q}{\left(x^2+lx+s\right)^{\nu}}+ \qquad (3)$$
$$+\frac{P_1x+Q_1}{\left(x^2+px+s\right)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{P_{\nu-1}x+Q_{\nu-1}}{x^2+lx+s}.$$

Коэффициенты $A, A_1,\ldots,B,B_1\ldots$ можно найти следующим образом. Записанное равенство есть тождество, поэтому, приводя дроби к общему знаменателю, в числителях правой и левой частях равенства получим тождественные многочлены. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A, A_1,\ldots,B,B_1\ldots$ Этот метод нахождения коэффициентов называется методом неопределенных коэффициентов. То есть для нахождения неопределенных коэффициентов можно воспользоваться следующим правилом: так как после приведения к общему знаменателю многочлены, получившиеся в правой и левой частях равенства, должны быть тождественны равны, то их значения равны при любых частных значениях x. Придавая x частные значения, получим уравнения для определения коэффициентов [32].

Таким образом, делаем вывод, что всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших рациональных дробей.

Пример 2. Пусть требуется разложить дробь $\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}$ на простейшие.

На основании (3) имеем

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}=\frac{A}{(x+1)^3}+\frac{A_1}{(x+1)^2}+\frac{A_2}{x+1}+\frac{B}{x-2}$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю. Далее приравниваем числители правой и левой частей равенства, тем самым получим

$$x^2+2=A(x-2)+A_1(x+1)(x-2)+A_2(x+1)^2(x-2)+B(x+1)^3. \qquad (4)$$

Соберем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой части равенства

$$x^2+2=(A_2+B)x^3+(A_1+3B)x^2+(A-A_1-3A_2+3B)x+(-2A-2A_1-2A_2+B).$$

Теперь, приравнивая коэффициенты при x^3, x^2, x^1, x^0 (свободный член), получим систему уравнений для определения коэффициентов:

$$0=A_2+B,\ \ 1=A_1+3B,\ \ 0=A-A_1-3A_2+3B,\qquad 2=-2A-2A_1-2A_2+B.$$

Решив систему, находим коэффициенты: $A=-1,\ A_1=\dfrac{1}{3},\ A_2=-\dfrac{2}{9},\ B=\dfrac{2}{9}$

Также можно определить некоторые коэффициенты из уравнений, подставляя вместо x частные значения из равенства (4), которое является тождеством относительно x.

Например, полагая $x=-1,$ получим $3=-3A\Rightarrow A=-1;$

$x=2,$ получим $6=27B\Rightarrow B=2/9.$

Объединив в систему эти имеющиеся два уравнения и два уравнения, получающиеся приравниванием соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях x, получаем четыре уравнения для определения четырех неизвестных коэффициентов. В результате записываем разложение:

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^2(x-2)}=-\frac{1}{(x+1)^3}+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{2}{9(x+1)}+\frac{2}{9(x-2)}.$$

Интегрирование рациональных дробей.

Пусть требуется вычислить интеграл от рациональной дроби $\int\frac{F(x)}{f(x)}dx.$

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочлена и нескольких простейших дробей. Рассмотрим возможные случаи:

I случай. Корни знаменателя действительны и различны, т.е.

$$f(x)=(x-a)(x-в)\ldots(x-d).$$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I типа:

$$\frac{F(x)}{f(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-в}+\ldots+\frac{D}{x-d}\Rightarrow\int\frac{F(x)}{f(x)}dx=\int\frac{A}{x-a}dx+\int\frac{B}{x-в}dx+\ldots+\int\frac{D}{x-d}=$$

$$=A\ln|x-a|+B\ln|x-в|+\ldots+D|x-d|+c.$$

II случай. Корни знаменателя действительны, причем некоторые из них кратные: $f(x)=(x-a)^{\alpha}(x-в)^{\beta}\ldots(x-d)^{\delta}.$

В этом случае дробь $\dfrac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I и II типов.

Пример 3. (в примере 2 уже получено разложение дроби).

$$\int\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx=-\int\frac{dx}{(x+1)^3}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x+1)^2}-\frac{2}{9}\int\frac{dx}{(x+1)}+\frac{2}{9}\frac{dx}{(x-2)}=$$

$$=\frac{1}{2(x+1)^2}-\frac{1}{3(x+1)}-\frac{2}{9}\ln|x+1|+\frac{2}{9}\ln|x-2|+c.$$

III случай. Среди корней знаменателя есть комплексные, причем различные корни:

$f(x)=(x^2+px+q)...(x^2+lx+s)(x-a)^{\alpha}...(x-d)^{\delta}.$

В этом случае дробь $\frac{F(x)}{f(x)}$ разлагается на простейшие дроби I, II и III типов.

Пример 4. Требуется вычислить интеграл

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$$

Выписав подынтегральное выражение, разложим данную дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{x-1}\Rightarrow x=(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)$$

$$x=1:\quad 1=2c\Rightarrow C=\frac{1}{2}$$

$$x=0:\quad 0=-B+C\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, получим $0=A+C\Rightarrow A=-\frac{1}{2}\Rightarrow$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}=-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}=--\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}+$$

$$+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}=-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}arctgx+\frac{1}{2}\ln|x-1|+c.$$

Из всего выше изложенного следует, что интеграл от любой рациональной функции может быть выражен через элементарные функции в конечном виде, а именно:

1) через логарифмы – в случае простейших дробей I типа;
2) через рациональные функции – в случае простейших дробей II типа;
3) через логарифмы и арктангенсы – в случае III типа.

5. *Интегрирование иррациональных функций.*

Рассмотрим некоторые типы интегралов, содержащих иррациональные функции. Интегралы типа $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ называют неопределенными интегралами от квадратичных иррациональностей. Их можно найти следующим образом: сначала под радикалом выделить полный квадрат $ax^2+xb+c=$

$$=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right),$$

а затем сделать подстановку $x+\frac{b}{2a}=t$. При этом первые указанные два типа интегралов приводятся к табличным, а третий – к сумме двух табличных интегралов.

Интегралы типа $\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $P_n(x)$ - многочлен степени n можно вычислять, используя следующую формулу

$$\int \frac{P_n(x)\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \qquad (5)$$

где $Q_{n-1}(x)$ – многочлен степени (n -1) с неопределенными коэффициентами, λ - также неопределенный коэффициент.

Все неопределенные коэффициенты находятся из тождества, получаемого дифференцированием обеих частей равенства (5):

$$\frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \equiv \left(Q_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}\right)' + \frac{\lambda}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

после чего необходимо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях переменной *x*.

6. *Дробно-линейная подстановка.*

Интегралы типа $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha/\beta}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\delta/\gamma}\right)dx,$ где a, b, c, d – действительные числа, $\alpha, \beta, ..., \delta, \gamma$ - натуральные числа, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k- наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{\alpha}{\beta}, ..., \frac{\delta}{\gamma}$.

Действительно из подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$ следует, что $x = \frac{b - dt^k}{ct^k - a}$ и $dx = \frac{-dkt^{k-1}(ct^k - a) - (b - dt^k)ckt^{k-1}}{(ct^k - a)^2}dt$, т.е. x и dx выражаются через рациональные функции от t. При этом и каждая степень дроби $\frac{ax+b}{cx+d}$ выражается через рациональную функцию t.

Пример 1. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}}$ [30].

Решение: Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{2}{3}$ *и* $\frac{1}{2}$ есть 6. Поэтому полагаем $x+2 = t^6,\ x = t^6 - 2,\ dx = 6t^5dt,\ t = \sqrt[6]{x+2}$. Следовательно,

$$I = \int \frac{6t^5dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^2dt}{t-1} = 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 6\int\left(t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C = 3\cdot\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} + \ln\left|\sqrt[6]{x+2} - 1\right| + C.$$

7. Метод интегрирования биномиальных дифференциалов.

С помощью этого метода можно найти интегралы вида

$\int x^m\left(a + bx^n\right)^p dx$, где $a, b \in R$ (вещественные коэффициенты),

$m, n, p \in Q$ (рациональные степени).

В этом случае возможны 3 вида замены в зависимости от степеней:

1. Если $p \in Z$ (т.е. целое), то вводим замену $x=t^N$, где N – наименьший общий знаменатель дробей m и n. Тогда $dx=Nt^{N-1}\,dt$.

2. Если $p \notin Z$, но $\frac{m+1}{n} \in Z$, то вводим замену $a+bx^n=t^N$, где N – знаменатель дроби p. Тогда $x=\left(\frac{t^N-a}{b}\right)^{1/n}$.

3. Если $p \notin Z$, $\frac{m+1}{n} \notin Z$, но $\left(\frac{m+1}{n}+p\right) \in Z$, то вводим замену $\frac{a}{x^n}+b=t^N$, где N – знаменатель дроби p. Тогда $x=\left(\frac{a}{t^N-b}\right)^{1/n}$.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$ [29, с. 178].

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx= \left| \text{ здесь } \begin{matrix} a=1 \\ b=1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} m=\frac{1}{2} \\ n=\frac{1}{3} \\ p=-2 \end{matrix} \right.$$

, т.к. $p=-2 \in Z$, то введем замену $x=t^6$, где 6 – наименьший общий знаменатель дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Тогда

$$dx=6t^5\,dt, \qquad t=x^{1/6} \quad \text{или} \quad t=\sqrt[6]{x} \quad \Bigg|$$

$$=6\int t^3\left(1+t^2\right)^{-2}t^5\,dt=6\int\frac{t^8}{t^4+2t^2+1}dt=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}\right)dt= \Bigg|$$

далее, используя метод неопределенных коэффициентов, который показан выше, получим следующий интеграл $\Big| =$

$$=6\int\left(t^4-2t^2+3+\frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}-\frac{4}{t^2+1}\right)dt=6\left(\frac{t^5}{5}-2\frac{t^3}{3}+3t+\frac{t}{2(t^2+1)}+\frac{1}{2}arctg\,t-4arctg\,t\right)+C=$$

$$=\frac{6}{5}x^{5/6}-4x^{1/2}+18x^{1/6}+\frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}}-21arctg\,x^{1/6}+C=\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-4\sqrt{x}+18\sqrt[6]{x}+\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}-21arctg\,\sqrt[6]{x}+C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$ [29, с. 188].

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}} = \int x\left(1+x^{2/3}\right)^{-\frac{1}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} a=b=1 \\ m=1,\ n=\frac{2}{3} \\ p=-\frac{1}{2}\notin Z \end{array} \right., \quad \text{проверим} \quad \frac{m+1}{n}=\frac{1+1}{2/3}=3\in Z, \text{ тогда}$$

введем следующую замену $1+x^{2/3}=t^2$. Отсюда $\begin{array}{l} x=\left(t^2-1\right)^{3/2} \\ dx=\frac{3}{2}\left(t^2-1\right)^{1/2}\cdot 2t\,dt=3t\left(t^2-1\right)^{1/2}dt \end{array}.$

Здесь $t=\left(1+x^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}} \Bigg| =$

$$=\int\left(t^2-1\right)^{3/2}\cdot t^{-1}\cdot 3t\left(t^2-1\right)^{1/2}dt=3\int\left(t^2-1\right)^2dt=3\int\left(t^4-2t^2+1\right)dt=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C=$$

$$\frac{3}{5}\left(1+x^{2/3}\right)^{\frac{5}{2}}-2\left(1+x^{2/3}\right)^{\frac{3}{2}}+3\left(1+x^{2/3}\right)^{\frac{1}{2}}+C.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ [29, с. 189].

Преобразуем подынтегральное выражение

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\left(1+x^4\right)^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\ \text{здесь}\ \begin{array}{c} m=0 \\ n=4 \\ a=b=1 \end{array} \quad \begin{array}{c} p=-\frac{1}{4}\notin Z \\ \frac{m+1}{n}=\frac{0+1}{4}=\frac{1}{4}\notin Z \\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in Z \end{array}\right. . \text{ Тогда введем}$$

замену $\frac{1}{x^4}+1=t^4$. Отсюда $\begin{array}{l} x=\left(t^4-1\right)^{-\frac{1}{4}} \\ dx=-\frac{1}{4}\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot 4t^3\,dt \end{array}, \quad t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}. \Bigg| =$

$$=-\int\left(1+\frac{1}{t^4-1}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(t^4-1\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot t^3\,dt=-\int\frac{\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}}{t}\cdot\frac{1}{\left(t^4-1\right)\left(t^4-1\right)^{\frac{1}{4}}}\cdot t^3\,dt=-\int\frac{t^2\,dt}{t^4-1}=$$

$$=-\int\frac{t^2\,dt}{(t-1)(t+1)\left(t^2+1\right)}=\left|\begin{array}{c}\textit{далее, с помощью метода неопределенных коэффициентов,}\\ \textit{преобразуем подынтегральное выражение}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-\frac{1}{2}arctg\,t+C, \text{ где } t=\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$$

8. Метод интегрирования рациональных функций с помощью подстановки Эйлера.

Используя указанный метод находятся интегралы следующего вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, где $a, b, c\in R$ (вещественные коэффициенты), причем $c\neq 0$.

В зависимости от коэффициентов, возможны следующие замены:

1. Если $a>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=\pm\sqrt{a}\,x+t$
2. Если $a<0$, но $c>0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$
3. Если подкоренная функция ax^2+bx+c имеет вещественные корни x_1 и x_2, то есть представима в виде $a(x-x_1)(x-x_2)$, то

$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t(x-x_1)$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$ [29, с. 190].

$$\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\begin{array}{ll} & \sqrt{x^2+x+1}=-x+t \qquad dx=\frac{2t(2t+1)-2(t^2-1)}{(2t+1)^2}dt \\ a>0\text{, тогда} & x^2+x+1=x^2-2xt+t^2 \\ & x=\frac{t^2-1}{2t+1} \qquad dx=\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt\end{array}\right|=$$

$$=2\int\frac{t^2+t+1}{(2t+1)^2\left(\frac{t^2-1}{2t+1}+t-\frac{t^2-1}{2t+1}\right)}dt=2\int\frac{t^2+t+1}{t(2t+1)^2}dt=\left|\begin{array}{l}\textit{преобразуем подынтегральное выражение,}\\ \textit{используя метод неопред. коэффициентов}\end{array}\right|$$

$$=2\int\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{(2t+1)^2}\right)dt=2\ln|t|-\frac{3}{2}\ln|2t+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t+1}+C=$$

$$=\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t^4}{(2t+1)^3}\right|+C\text{, где } t=x+\sqrt{x^2+x+1}.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$ [29, с. 190].

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}=\left|\begin{array}{lll} a<0,\ \textit{но} & & \sqrt{1-2x-x^2}=xt-1 \\ c>0 & \text{, тогда} & 1-2x-x^2=x^2t^2-2xt+1 \\ & & x=\frac{2(t-1)}{t^2+1}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} dx=\frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2(t-1)}{(t^2+1)^2}dt \\ dx=-\frac{2t^2-4t-2}{(t^2+1)^2}dt\end{array}\right|=$$

$$=-2\int\frac{t^2-2t-1}{\frac{2(t-1)}{t^2+1}\cdot t\cdot(t^2+1)^2}dt=-\int\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}dt=\left|\begin{array}{l}\textit{преобразуем подынтегральное выражение,}\\ \textit{используя метод неопред. коэффициентов}\end{array}\right|=$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t-1}+\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\,arctg\,t,\text{ где } t=\frac{1+\sqrt{1-2x-x^2}}{x}.$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx$ [29].

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\,dx = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+3x+2}=\sqrt{(x+1)(x+2)}=t(x+1) \\ (x+1)(x+2)=t^2(x+1)^2 \\ x=\frac{t^2-2}{1-t^2} \\ dx=\frac{2t\left(1-t^2\right)+2t\left(t^2-2\right)}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt \\ dx=-2\frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt \end{array} \right| =$$

$$=-2\int \frac{\frac{t^2-2}{1-t^2}-t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)}{\frac{t^2-2}{1-t^2}+t\left(\frac{t^2-2}{1-t^2}+1\right)}\cdot\frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt=-2\int\frac{t^2+t-2}{t^2-t-2}\cdot\frac{t}{\left(1-t^2\right)^2}\,dt=$$

$$=-2\int\frac{(t+2)(t-1)t}{(t-2)(t+1)(t-1)^2(t+1)^2}\,dt=-2\int\frac{t^2+2t}{(t-2)(t+1)^3}\,dt=$$

$$\left|\begin{array}{l}\textit{преобразуем подынтегральное выражение,}\\ \textit{используя метод неопред. коэффициентов}\end{array}\right|$$

$$=-2\int\left(\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{t-2}-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{t+1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(t+1)^2}-\frac{7}{27}\cdot\frac{1}{(t+1)^3}\right)dt=\frac{16}{27}\ln\left|\frac{t+1}{t-2}\right|+\frac{2}{9(t+1)}-\frac{14}{9(t+1)^2}+C,$$

где $t=\frac{\sqrt{x^2+3x+2}}{x+1}$.

9. *Интегрирование некоторых тригонометрических функций.*

В этом пункте мы рассмотрим нахождение интегралов вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$, где $R(u,v)$- рациональная функция относительно $R_1(t)$.

Проверим, что такие интегралы с помощью универсальной замены переменной $tg\frac{x}{2}=t$, всегда сводятся к интегралам от рациональных функций. В самом деле

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\left|\text{ разделим числитель и знаменатель дроби на } \cos^2\frac{x}{2}\right|=$$

$$=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Так как $x = 2arctgt$, то $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$.

В результате получаем, что

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

где $R_1(t)$ - рациональная функция.

Пример 1. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| tg\,\frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln\left| tg\,\frac{x}{2}\right| + C \cdot$$

Хотя данный метод формально может быть применен к любым указанным интегралам, в случаях, когда функция содержит переменные $\sin x$ или $\cos x$ в степени выше первой, часто получаются достаточно громоздкие выражения. В этих случаях разумнее применять следующие методы:

1^0. Если подынтегральная функция является нечетной по косинусу, т.е. если $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$, то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(\sin x)\cdot \cos x$, после чего в интеграле делается замена переменной $\sin x = t$ и он сводится к интегралу от рациональной функции $R_1(t)$:

$$\int R_1(\sin x)\cos x dx = |\sin x = t| = \int R_1(t)dt.$$

Пример 2.

$$\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cdot coxdx = \int (1-\sin^2 x)\cos x dx = \int (1-\sin^2 x) d\sin x =$$

$$= |\sin x = t| = \int (1-t^2)dx = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

2^0. Если подынтегральная функция является нечетной по синусу, т.е. $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$, то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(\cos x)\sin x$ и после замены переменной $\cos x = t$ интеграл сводится к интегралу от рациональной функции $R_1(t)$:

$$\int R_1(\cos x)\sin x dx = |\cos x = t| = -\int R_1(t)dt.$$

3^0. Если подынтегральная функция удовлетворяет условию $R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$, то она может быть преобразована к виду $R(\sin x, \cos x) = R_1(tgx)$, после чего в интеграле делается замена

$$tgx = t, \quad x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

и он сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 3.

$$\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \quad tg^3 x dx = \left| tgx = t, dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt \right| = \quad \frac{t^3}{1+t^2}dt = \quad \frac{t^2 \cdot t}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2}{1+t^2}dt^2 = |t^2 = z| = \frac{1}{2}\int \frac{(z+1)-1}{z+1}dz = \frac{1}{2}\left(\int dz - \int \frac{dz}{z+1}\right) = \frac{1}{2}(z - \ln|z+1|) + C =$$

$$= \left| z = t^2 = tg^2 x \right| = \frac{1}{2}(tg^2 x - \ln(tg^2 x + 1)) + C \,.$$

4^0. Интегралы типа

$\int \sin mx \cos nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx, \int \sin mx \sin nx\, dx$, где m, n – постоянные числа.

Подынтегральные функции приводятся к сумме первых степеней синусов и косинусов с помощью формул:

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)).$$

Пример 4.

$$\int \sin 3x \sin 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - \cos 8x)\, dx = \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 8x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C$$

5^0. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$, где m, n – любые целые показатели.

1) Пусть хоть один из показателей m или n будет нечетным целым положительным, например, $n = 2k+1$.

Полагая $\sin x = t$, получим:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x\, dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k\, d\sin x = \int t^m (1-t^2)^k\, dt \,.$$

Пример 5.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x\,(1-\sin^2 x) d\sin x = \int t^2(1-t^2)dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C =$$

$$= \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

2) Пусть оба показателя m, n – четные, положительные, целые числа. Тогда рекомендуется применить формулы

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \,.$$

Пример 6.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{4} dx = \frac{1}{4}\int (1 - \cos^2 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1 - \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C \,.$$

После объяснения каждого метода интегрирования функции необходимо дать самостоятельную работу для закрепления изученного материала.

Используя данную методику преподавания курса математического анализа, показанную на теме «Нахождение неопределенных интегралов», а именно, переходя от простых методов к более сложным, постоянно поддерживая теоретические высказывания конкретными примерами и соблюдая преемственность между новыми знаниями и ранее изученным материалом, можно говорить о качественном усвоении студентами довольно сложного раздела математического анализа.

2.3 Организация обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе в условиях дифференциации учебного процесса

«Дифференциация» (от лат. differentia – различие) – выделение различающих моментов по единому принципу, исходя из одной отправной точки [33].

Под дифференциацией в обучении предполагается форма организации учебной деятельности, учитывающая склонности, интересы и способности учащихся. Использование дифференциации в процессе обучения создает возможности для развития творческой целенаправленной личности, осознающей конечную цель и задачи обучения; для повышения активности и усиления мотивации учения; формирует прогрессивные педагогические мышления.

Дифференцированное обучение - это:

1) форма организации учебного процесса, при которой учитель работает с группой учащихся, составленной с учетом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств;

2) часть общей дидактической системы, которая обеспечивает специализацию учебного процесса для различных групп обучаемых. Дифференциация обучения (дифференцированный подход) - это:

1) создание разнообразных условий обучения для различных школ, классов групп с целью учета особенностей их контингента;

2) комплекс методических, психологических организационно-управленческих мероприятий [34].

Организация обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе в условиях дифференциации учебного процесса остается сложной, но актуальной проблемой. Многие исследователи свои работы посвятили изучению именно этого вопроса. Так, например, диссертация Терешиной Т.Н. посвящена исследованию проблемы выявления эффективности применения методического обеспечения по курсу начал математического анализа в профильных классах, основанного на их общеобразовательной и специальной значимости в условиях уровневой дифференциации. В работе описано поэтапное применение дифференцированного подхода на уроке: при объяснении нового материала, на этапе самостоятельной работы учащихся в теории и на практике, при работе с учебником, контроль выполнения дифференцированного домашнего задания, а также использование дифференцированного подхода при выставлении оценок. При дифференциации учебного процесса, а именно деление классов по направлениям, предложена соответствующая методика обучения. Так, например, в классах гуманитарного профиля Терешина Т.Н. предлагает уделять внимание содержательной стороне изучаемых понятий и фактов. В классах технического направления научить умению моделировать реальные процессы, развивать образное мышление и акцентировать внимание на межпредметных связях. В математических же классах – уделить больше внимания самостоятельной работе, излагать новый материал, используя формальные доказательства. Немаловажная роль отводится и дифференциации предлагаемых задач, так как обучение решению задач является неотъемлемой частью формирования у учащихся основных математических знаний, умений и навыков. От выбора и правильной постановки задач зависит эффективность обучения решению задач и, соответственно, успешное усвоение учащимися школьного курса математики [35].

В диссертационном исследовании Шахматовой Т.И. теоретически обоснована целесообразность дифференцированного обучения студентов младших курсов педвуза; разработаны требования к совершенствованию математической подготовки студентов младших курсов педвуза на основе дифференцированного обучения. Особое внимание в работе уделяется изучению различных подходов к дифференцированному обучению, а именно в планировании результатов обучения, то есть выделении уровня обязательной подготовки и формирования повышенного уровня знания материала. В связи с этим, студент имеет возможность выбора объема усвоения материала, глубину познания, учитывая свои индивидуальные способности и потребности в изучении. Данный подход способствует формированию познавательной самостоятельности студентов с первых курсов обучения, способности достижения обязательных результатов обучения и овладения материалом на более высоком уровне. В работе представлена реализация сформулированных требований к совершенствованию математической подготовки студентов младших курсов педвуза и методической подготовки студентов-старшекурсников, а также описана организация учебного процесса, иллюстрированная примерами [36].

В современной образовательной практике принято выделять два основных вида дифференцированного обучения:

1. Внешняя (или профильная) дифференциация, которая предполагает создание особых типов школ и классов, ориентированные на учащихся, имеющих специальные способности. Это школы-гимназии, лицеи, школы разных типов. Внешняя дифференциация проявляется и в создании особых классов (например, классы общественно-гуманитарного и естественно-математического направлений общеобразовательной школы).

2. Внутренняя (или уровневая) дифференциация, предполагающая организацию работы внутри класса соответственно группам учащихся, отличающихся одними и теми же более или менее устойчивыми особенностями. Внутреннюю дифференциацию считают важнейшим средством реализации индивидуального подхода к учащимся в процессе обучения [37].

Процесс организации учителем внутриклассной дифференциации можно поделить на несколько этапов:

1) проведение диагностики;
2) распределение учащихся по группам с учетом диагностики;
3) определение способов дифференциации, разработка дифференцированных заданий;
4) реализация дифференцированного подхода к учащимся на различных этапах урока;
5) диагностический контроль за результатами [37].

В статье «Индивидуализация и дифференциация в обучении» Кондратьевой Л.Г. предложено следующее выделение групп учащихся по уровню усвоения материала:

Таблица 5

I группа	**II группа**	**III группа**	**IV группа**
1	2	3	4
Ученики с очень низким уровнем усвоения знаний, умений: - неправильно выполняют выбор действий в задачах; - низкий уровень сформированности вычислительных навыков; - не выделяют взаимосвязи между изученными вопросами; - низкий уровень выполнения мыслительных операций; - дети отличаются низким показателем памяти и отрицательным	**Ученики с низким уровнем усвоения знаний, умений:** - затрудняются в правильном выборе действий при решении задач; - средний уровень сформированности вычислительных навыков; - затрудняются в выделении взаимосвязи между изученными вопросами; - низкий уровень выполнения мыслительных операций; - математические рассуждения выстраивают	**Ученики со средним уровнем усвоения знаний, умений:** - правильно выполняют выбор действий при решении задач в привычной форме, но затрудняются в творческих видах работы над задачей; -вычислительные навыки сформированы хорошо; - средний уровень мыслительных операций; - имеют хороший показатель памяти; - развита тонкость наблюдений;	**Ученики с высоким уровнем усвоения знаний, умений:** - правильно выполняют выбор действий при решении задач, успешно выполняют виды творческой работы над задачей; - высокий уровень сформированности вычислительных навыков; - высокий уровень выполнения мыслительных операций; - высокий показатель памяти;

Продолжение таблицы 5

1	2	3	4
отношением к предмету; - математические рассуждения выстраивать не могут; - математическая речь не развита.	лишь при постановке вопросов; - математическая речь достаточно не развита.	- математическая речь развита; - выполнение обобщений только элементарных понятий.	- высокий уровень развития математической речи.
Типы заданий			
Опосредующие учебную информацию		**Направляющие работу ученика с учебным материалом**	**Требующие от учеников творческой деятельности**
1.Задания на узнавание математических объектов.	1.Задания на описание математических объектов по плану.	1.Задания на сравнения математических объектов.	1.Задания на установление связей между объектами, признаками.
2.Задания, требующие анализа признаков понятий.	2.Задания на дополнение незаконченных предложений с использованием слов для справок.	2.Задания на составление подобных математических объектов.	2.Задания на самостоятельный подбор примеров.
3.Задания на классификацию объектов.		3.Задания, включающие вопросы, на которые готовый ответ в учебнике отсутствует, требуют самостоятельных мыслительных операций.	3.Задания творческого характера.
Самостоятельная работа			
Воспроизведение по образцу.	Реконструктивно-вариативная.	Частично-поисковая.	Частично-поисковая, творческая.

Но такое деление на группы имеет свои плюсы и минусы.
Положительные аспекты данного разделения:

1) исключение неоправданных и нецелесообразных для общества "уравниловки" и "усреднения" детей;
2) появление у учителя возможности помогать слабому, уделять внимание сильному;
3) отсутствие в классе «отстающих» снимает необходимость снижения общего уровня преподавания;
4) повышение уровня «Я – концепции»: сильные утверждаются в своих способностях, слабые получают возможность испытывать учебный успех, избавиться от комплекса неполноценности;
5) повышение уровня мотивации учения в сильных группах;
6) в группах, где собраны одинаковые дети, ребенку легче учиться;
7) выступает как средство развития самостоятельности учащихся.

Отрицательные аспекты данного разделения:

1) деление детей по уровню развития не гуманно;
2) высвечивание социально-экономического неравенства;
3) лишение слабых возможности тянуться за более сильными, получать от них помощь, соревноваться с ними;
4) перевод в "слабые" группы воспринимается детьми как снижение их достоинства;
5) несовершенство диагностики приводит порой к тому, что в разряд слабых переводятся "неординарные дети"[38].

Таким образом, можно сделать вывод, что одной из важнейших основ дифференциации в обучении является учет психологических особенностей учащихся. А основной целью дифференциации является сохранение и дальнейшее развитие индивидуальности ребенка, воспитание такого человека, который представлял бы собой неповторимую, уникальную личность[39]. Необходимость дифференциации воспринимается всеми учителями как необходимое условие дальнейшего развития школы, но на пути реализации этой идеи возникает ряд трудностей, которые необходимо преодолеть [40].

При уровневой дифференциации важной проблемой является выявление математических способностей учащихся. В качестве средств, которые позволяют выявить способности, часто используют занимательные задачи, так как они в большинстве случаев содержат сюжет, доступный и понятный учащимся на начальных стадиях изучения математики. Именно в структуре таких задач заложено проявление таких параметров математических способностей, как догадка, смекалка, сообразительность, любопытство, любознательность и т.п. [41]. Например, Рубинштейн С.Л. в своих исследованиях пишет о том, что «так называемые задачи-головоломки это не особый курьез, стоящий особняком от общих закономерностей мышления… Они своеобразным неразрывным образом связаны с общими закономерностями мышления» [42]. В число занимательных задач входят логические задачи, наиболее распространенные при обучении математике, которые лежат в основе выявления параметров математических способностей. Также логические задачи можно использовать не только для выявления, но и для дальнейшего развития математических способностей.

Обычно задачи делятся на арифметические, алгебраические, геометрические в зависимости от материала, которым мы оперируем – числа, алгебраические выражения или фигуры. Решения логических задач чаще строятся на рассуждениях, без привлечения каких-либо специальных математических теорий. Поэтому такие задачи можно использовать для работы с учащимися различных классов без явной связи с материалом, изучаемым по школьной программе. Задач, подобного рода практически нет в школьных учебниках. Их можно найти в дополнительной литературе – сборниках и книгах занимательного характера [41, с. 184].

Для определения параметров математических способностей учащегося, учитель ставит перед собой следующие задачи:

1. Обнаружить умение учащихся делать выводы из условия задачи. Эту деятельность иногда называют «слепым синтезом».
2. Проследить деятельность типа «синтез через анализ». Учащиеся, делая выводы, ориентируются на конечную цель, но этот процесс идет хаотично, он не подчинен общей идее, использование приема «анализ» имеет достаточно стандартные формы.
3. Выяснить, умеет ли учащийся с самого начала наметить стратегию решения – выдвинуть идею и применять при решении нестандартные методы и приемы.
4. Довольно часто, намечая стратегию решения, учащиеся выбирают идею уже известную, часто используемую. Интересно проследить за рождением нестандартной идеи (анализ через синтез).
5. Умение проводить аналогию [41, с. 189].

Необходимость учитывать индивидуальные особенности ребенка в процессе обучения очевидна, ведь учащиеся по разным показателям в значительной мере отличаются друг от друга. Эти различия могут быть довольно большими, поэтому в первую очередь следует отметить, что необходим учет индивидуальных различий тех качеств учащихся, от которых зависит результат учения. Таким образом, можно сформулировать специфическую обучающую цель – усовершенствование знаний, умений и навыков учащихся, содействие реализации учебных программ повышения уровня знаний, умений и навыков каждого учащегося в отдельности и таким образом уменьшение его относительного отставания. Развивающая цель – формирование и развитие логического мышления, креативности и умений учебного труда учащегося. Также, "разделение" детей на группы с учётом индивидуальных различий создаёт предпосылки для развития интересов и способностей учащегося.

На сегодняшний день, в современной педагогике исследования в области учета индивидуальных особенностей учащихся ограничиваются в основном лишь внутриклассной индивидуализацией учебной работы. Проблема дифференциации многие годы вообще не подвергалась комплексному изучению, дифференциация учебной работы стала объектом исследования не так давно. Но несмотря на сравнительно недолгое существование, в вопросах дифференциации уже существует немало проблем [43]. Наиболее важной проблемой, возникающей при организации дифференцированного обучения, является проблема определения возраста учащихся, в котором целесообразно проводить как профильную, так и уровневую дифференциацию. Для ее решения необходимо определить специфические черты личности, являющиеся основанием для дифференциации, и степень их развития в том или ином возрасте. При этом следует учитывать, что в основе дифференцированного обучения лежит, прежде всего, учёт тех психологических особенностей учащихся, которые влияют на их учебную деятельность и от которых зависят результаты обучения [44].

Унт И.Э. под дифференциацией обучения понимает "учёт индивидуальных особенностей учащихся в той форме, когда учащиеся группируются на основании каких-либо особенностей для отдельного обучения; обычно обучение в этом случае происходит по несколько различным учебным планам и программам".

Анализ исследований, посвященных дифференциации и индивидуализации учебной работы, показывает, что на основании того, какие особенности личности учитываются, можно различить два вида подхода:

1) учёт комплекса различных особенностей ученика (уровневая дифференциация);
2) учёт какой-либо отдельной особенности (профильная дифференциация).

В большинстве исследовательских работ по этой проблеме авторы исходят из комплекса, где доминирует уровень знаний, умений, навыков и познавательных способностей, при этом подчеркивая необходимость учитывать личность ученика в целом – его интересы, отношение к учебе, эмоциональные и волевые качества.

При организации дифференцированного обучения, особенно в форме профильной дифференциации, необходимо учитывать такие особенности детей, как способности и интересы к изучению определенных предметов, выполнению тех или иных видов деятельности. В различных исследованиях позиции авторов по этому вопросу в некоторой степени различаются. Поэтому, имеет смысл остановиться на тех особенностях учащихся, которые в большей степени отмечаются всеми авторами как наиболее важные для организации дифференцированного обучения. В число таких особенностей входят:

1) способности и высшие психические функции;
2) мотивация и интересы;
3) проектируемая профессия [44, с. 78].

Для успешной организации обучения наиболее значимым является такое свойство учащихся, как способности, в частности уровень умственного развития учащегося. У многих исследователей это понятие охватывает как предпосылки к учению (обучаемость), так и приобретённые знания (обученность). Понятие «обучаемость» можно трактовать как способность к учению, характеризующая умственные способности учащегося. Уровень и специфика обучаемости определяются такими качествами ума как: скорость усвоения материала, гибкость мышления, связь конкретных и отвлеченных компонентов; глубина ума, гибкость ума, устойчивость ума, осознанность мыслительной деятельности, самостоятельность ума, экономичность мышления. Также исследования показывают, что на обучаемость влияют и особенности психики учащихся: внимание, память, черты характера и др.

Кроме умственных способностей и учебных умений уровень умственного развития учащегося определяют приобретенные знания, умения и навыки, или обученность. Если умственные способности представляют собой потенциальные возможности, предпосылки для учения, то знания являются содержательной базой для реализации способностей. Обученность проявляется, как умение применять полученные знания, умения и навыки на практике. Уровень знаний учащихся определяется не только знаниями, которые они усвоили в школе, но и предварительными знаниями – дополнительная литература, средства массовой информации, личный опыт и т.д. [43, с. 154].

Одним из средств проверки, а также формой контроля знаний учащихся может быть тестирование. Имея множество недостатков, таких как: вероятность выбора ответа наугад, невозможность проследить ход мысли тестируемого, проверка только последнего действия, тесты не должны быть основной формой проверки знаний. Но на практике в вузе и в школе тест имеет и положительные характеристики: экономия времени (за небольшой промежуток времени – контроль множества учеников или студентов); проверка знаний по большому объему учебного материала; простота проверки выполненной работы; объективность в оценивании выполненной работы. При составлении теста очень важно, чтобы он был составлен правильно, то есть так, чтобы им можно было проверить не только знание определений, умение решать практические задания, но и умение анализировать, способствовать развитию творческого подхода учащегося [45].

Новизна проблемы дифференциального обучения заключается в создании наиболее благоприятных условий для развития личности ученика как индивидуальности. Ведь знание индивидуальности каждого учащегося с присущими только ему личностными особенностями обеспечивает правильное построение личностно-ориентированной системы обучения.

Школа должна создавать не изолированную, а разностороннюю учебную среду, дающую возможность каждому ученику проявить себя. После этого, педагог может рекомендовать наиболее благоприятные для развития ребенка дифференцированные формы обучения. Если следовать цели развития индивидуальности, то стоит отметить, что наиболее важной является не профильная, а уровневая дифференциация. Здесь в распоряжении педагога должны быть различные дидактические материалы, позволяющие ученику выбирать более приемлемые для него типы заданий. Педагогическое наблюдение за каждым учеником в процессе его повседневной учебной работы должно помочь выявлению его индивидуального познавательного «стиля», который проявляется, по данным психологов, к 8-9 классам. Именно к 14-15 – летнему возрасту у большинства учащихся формируются способности, познавательные интересы и профессиональные намерения, что служит началом селективной дифференциации, другими словами, профильного обучения. В общем, можно сказать, что к индивидуальным особенностям учащихся относятся их способности, познавательные интересы и проектируемая профессия. У старшеклассников они, как правило, тесно связаны между собой.

Только через уровневую дифференциацию можно переходить к профильной. Для проведения такой работы необходимы: разные варианты учебных программ, учебников, дидактических материалов, что позволит на едином базовом содержании знаний индивидуализировать процесс обучения; создание условий для самостоятельного выбора способов работы, типов заданий, вида и форм учебного материала; использование разнообразных форм занятий таких, как тренинги, ролевые игры, диалоги и т.п. Требуется специальная профессиональная подготовка учителя, которая будет включать не только знание своего предмета, но и умение выбирать нужные методические приемы и средства, в том числе элементы проблемного и программированного обучения. Также для осуществления уровневой дифференциации требуется небольшая наполняемость классов (не более 20 человек) [46].

В казахстанских общеобразовательных школах, после окончания 9 класса, формируют 10 классы по двум направлениям: общественно-гуманитарное и естественно-математическое. Программы по алгебре и началам анализа имеют различия. Сравним содержания программ по указанным направлениям для 10 и 11 классов.

Содержание курса алгебры и начала анализа 10 класса общественно-гуманитарного направления включает следующие разделы:

1) «Повторение курса алгебры 7-9 классов (6 ч.)». Выполнение действий над действительными числами. Свойства степени с целым показателем. Тождественные преобразования рациональных выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Доказательство тождеств. Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения. Линейные, квадратные и дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов. Системы линейных неравенств с одной переменной. Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств с двумя переменными. Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Решение текстовых задач. Числовые последовательности. Преобразования тригонометрических выражений. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$, $y = \sqrt{x}$, их свойства и графики;

2) «Функция, ее свойства и график (15 ч.)». Функция. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции.

График функции. Свойства функции: возрастание и убывание, ограниченность, чётность и нёчетность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Окрестность точки. Точки экстремума и экстремумы функции. Неубывающая функция. Невозрастающая функция. Обратная функция. Простейшие преобразования графиков функций. Исследование функции и построение её графика;

3) «Тригонометрические функции (10 ч.)». Свойства и графики тригонометрических функций. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Преобразования выражений, содержащих арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Обратные тригонометрические функции;

4) «Тригонометрические уравнения и неравенства (15ч.)». Тригонометрическое уравнение. Простейшие тригонометрические уравнения вида $sinx = a$, $cosx = a$, $tgx = a$, $ctgx = a$ и их решения. Способы решения тригонометрических уравнений (Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразования тригонометрическими формулами. Тригонометрические уравнения, решаемые способом понижения степени уравнения. Однородные тригонометрические уравнения.). Системы тригонометрических уравнений и их решение. Тригонометрическое неравенство. Решение простейших тригонометрических неравенств и их систем;

5) «Производная (22 ч.)». Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Асимптота. Производная. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производных. Дифференцирование. Производная степенной функции. Физический и геометрический смысл производной. Касательная к графику функции. Уравнение касательной к графику функции.Сложная функция. Производная сложной функции. Производная тригонометрических функций. Дифференциал. Приближённые вычисления;

6) «Применение производной (16 ч.)». Признаки монотонности (возрастания и убывания) функции. Критические точки. Достаточные условия существования экстремума. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке;

7) «Комбинаторика и бином Ньютона (6 ч.)». Основные понятия и формулы комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания). Бином Ньютона;

8) «Повторение курса алгебры и начал анализа 10 класса (12 ч.)». Свойства функции: возрастание и убывание, экстремумы, ограниченность, чётность и нёчетность, непрерывность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики тригонометрических функций. Тригонометрические уравнения и их системы. Тригонометрические неравенства и их системы. Вычисления производных. Признаки возрастания и убывания функции. Критические точки.

Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной к решению практических задач. Формулы приближённых вычислений [13, с. 6].

Содержание курса алгебры и начала анализа 10 класса естественно-математического направления включает следующие разделы:

1) «Повторение курса алгебры 7-9 классов (6 ч.)». Выполнение действий над действительными числами. Свойства степени с целым показателем. Тождественные преобразования рациональных выражений. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни. Доказательство тождеств. Линейные, квадратные и дробно-рациональные уравнения. Линейные, квадратные и дробно-рациональные неравенства. Метод интервалов. Системы линейных неравенств с одной переменной. Системы линейных и нелинейных уравнений и неравенств с двумя переменными. Дробно-рациональные уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Решение текстовых задач. Числовые последовательности. Преобразования тригонометрических выражений. Функции вида $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$, $y = ax^3$, $y = \frac{k}{x}(k \neq 0)$, $y = \sqrt{x}$, их свойства и графики;

2) «Функция, ее свойства и график (15 ч.)». Функция. Область определения и множество значений функции. Способы задания функции. График функции. Свойства функции: возрастание и убывание, ограниченность, чётность и нёчетность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Окрестность точки. Точки экстремума и экстремумы функции. Неубывающая функция. Невозрастающая функция. Обратная функция. Простейшие преобразования графиков функций. Исследование функции и построение её графика;

3) «Тригонометрические функции (10 ч.)». Свойства и графики тригонометрических функций. Арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Преобразования выражений, содержащих арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Обратные тригонометрические функции;

4) «Тригонометрические уравнения и неравенства (15 ч.)». Тригонометрическое уравнение. Простейшие тригонометрические уравнения вида *sinx = a, cosx= a, tgx = a, ctgx = a* и их решения. Способы решения тригонометрических уравнений (Тригонометрические уравнения, приводимые к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции. Тригонометрические уравнения, решаемые путем преобразования тригонометрическими формулами. Тригонометрические уравнения, решаемые способом понижения степени уравнения. Однородные тригонометрические уравнения. Тригонометрические уравнения, решаемые способом введения дополнительного угла). Системы тригонометрических уравнений и их решение. Тригонометрическое неравенство. Решение тригонометрических неравенств и их систем;

5) «Производная (22 ч.)». Предел функции в точке. Непрерывность функции в точке и на множестве. Точки разрыва функции. Асимптота. Производная. Дифференцируемость функции. Правила нахождения производных. Дифференцирование. Производная степенной функции. Физический и геометрический смысл производной. Касательная к графику функции. Уравнение касательной к графику функции. Сложная функция. Производная сложной функции. Производная тригонометрических функций. Приближённые вычисления;

6) «Применение производной (16 ч.)». Признаки монотонности (возрастания и убывания) функции. Критические точки. Достаточные условия существования экстремума. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной при решении практических задач;

7) «Комбинаторика и бином Ньютона (6 ч.)». Основные понятия и формулы комбинаторики (перестановки, размещения, сочетания). Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности события. Бином Ньютона;

8) «Повторение курса алгебры и начал анализа 10 класса (12 ч.)». Свойства функции: возрастание и убывание, экстремумы, ограниченность, чётность и нёчетность, непрерывность, периодичность, промежутки знакопостоянства. Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики тригонометрических функций. Тригонометрические уравнения и их системы. Тригонометрические неравенства и их системы. Вычисления производных. Признаки возрастания и убывания функции. Критические точки. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной к решению практических задач. Формулы приближённых вычислений [13, с. 18].

На изучение каждого раздела по двум программам отводится одинаковое количество часов, но содержание некоторых разделов естественно-математического направления носит более прикладной характер. Например, в отличие от программы общественно-гуманитарного направления, в программе естественно-математического направления учтено решение не только уравнений и неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, но и решение более сложных дробно-рациональных уравнений и неравенств. Программой естественно-математического направления предусмотрено решение тригонометрических уравнений, решаемых способом введения дополнительного угла, что не изучают на общественно-гуманитарном направлении. Учитывая прикладную значимость естественно-математического направления, при изучении раздела «Применение производной», в программу дополнительно включена тема «Применение производной при решении практических задач». По программе общественно-гуманитарного направления раздел «Комбинаторика и бином Ньютона» изучается на теоретическом уровне, в отличие от программы естественно-математического направления, в которой обязательно изучается «Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности события».

Проанализируем программы по двум направлениям для 11 классов.

Содержание курса алгебры и начала анализа 11 класса общественно-гуманитарного направления включает следующие разделы:

1) «Повторение курса алгебры и начала анализа 10 класса (6 ч.)». Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики тригонометрических функций. Тригонометрические уравнения и их системы. Тригонометрические неравенства. Вычисления производных. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке;

2) «Первообразная и интеграл (17ч.)». Первообразная функции. Неопределённый интеграл. Основное свойство первообразной. Правила нахождения первообразных. Криволинейная трапеция. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование. Применение определённого интеграла к решению геометрических и физических задач;

3) «Степени и корни. Степенная функция (23 ч.)». Корень n-ой степени и его свойства. Арифметический корень n-ой степени. Степень с рациональным показателем и её свойства. Иррациональные выражения. Преобразование иррациональных выражений. Иррациональные уравнения. Решение иррациональных уравнений и их систем. Степенная функция, её свойства и графики. Дифференцирование и интегрирование степенной функции с действительным показателем;

4) «Показательная и логарифмическая функции (10ч.)». Показательная функция, ее свойства и график. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Десятичный логарифм. Натуральный логарифм. Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Интегрирование показательной функции;

5) «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства (20 ч.)». Показательные уравнения. Решение показательных уравнений и их систем. Логарифмические уравнения. Решение логарифмических уравнений и их систем. Показательные неравенства. Решение показательных неравенстви их систем. Логарифмические неравенства. Решение логарифмических неравенств и их систем;

6) «Вероятность (8 ч.)». Применение формул комбинаторики для вычисления вероятности события. Случайная величина. Дискретная случайная величина. Непрерывная случайная величина. Закон распределения случайной величины. Числовые характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение);

7) «Повторение курса алгебры и начала анализа 10-11 классов (18 ч.)».

Преобразования выражений, содержащих корень n-ой степени, степень с рациональным показателем, логарифм. Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики степенной функции, тригонометрических, показательных и логарифмических функций. Тригонометрические, показательные, логарифмические, иррациональные уравнения и их системы. Тригонометрические, показательные, логарифмические неравенства и их системы. Вычисления производных. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной и интеграла при решении практических задач [13, с. 8].

Содержание курса алгебры и начала анализа 11 класса естественно-математического направления включает следующие разделы:

1) «Повторение курса алгебры и начала анализа 10 класса (6 ч.)». Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики тригонометрических функций. Тригонометрические уравнения и их системы. Тригонометрические неравенства и их системы. Вычисления производных. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной при решении практических задач;

2) «Первообразная и интеграл (13 ч.)». Первообразная функции. Неопределённый интеграл. Основное свойство первообразной. Правила нахождения первообразных. Криволинейная трапеция. Площадь криволинейной трапеции. Определённый интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интегрирование. Применение определённого интеграла к решению геометрических и физических задач;

3) «Степени и корни. Степенная функция (23 ч.)». Корень n-ой степени и его свойства. Арифметический корень n-ой степени. Степень с рациональным показателем и её свойства. Степень с иррациональным показателем. Иррациональное выражение. Преобразования иррациональных выражений. Иррациональное уравнение. Решение иррациональных уравнений и их систем. Иррациональное неравенство. Решение иррациональных неравенств и их систем. Степенная функция, её свойства и графики. Дифференцирование и интегрирование степенной функции с действительным показателем;

4) «Показательная и логарифмическая функции (9 ч.)». Показательная функция, ее свойства и график. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Свойства логарифмов. Десятичный логарифм. Натуральный логарифм. Тождественные преобразования выражений, содержащих логарифмы. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Дифференцирование показательной и логарифмической функций. Интегрирование показательной функции;

5) «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства (19 ч.)». Показательные уравнения. Решение показательных уравнений и их систем.

Логарифмические уравнения. Решение логарифмических уравнений и их систем. Показательно-логарифмические уравнения. Показательные неравенства. Решение показательных неравенств и их систем. Логарифмические неравенства. Решение логарифмических неравенств и их систем;

6) «Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств (14 ч.)». Основные методы решения уравнений и их систем. Уравнение-следствие. Основные методы решения неравенств и их систем. Система равносильных неравенств. Уравнения и неравенства, содержащие переменные под знаком модуля. Уравнения с параметром. Неравенства с параметром;

7) «Вероятность (6 ч.)». Независимое событие. Зависимое событие. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Условная вероятность. Случайная величина. Дискретная случайная величина. Непрерывная случайная величина. Закон распределения случайной величины. Числовые характеристики случайной величины (математические ожидание, дисперсия, среднее квадратичное отклонение). Элементы выборочного метода (частота, относительная частота, полигон);

8) «Повторение курса алгебры и начала анализа 10-11 классов (12 ч.)». Преобразования выражений, содержащих корень n-ой степени, степень с рациональным и иррациональным показателем, логарифм. Простейшие преобразования графиков функций. Свойства и графики степенной функции, тригонометрических, показательных и логарифмических функций. Тригонометрические, показательные, логарифмические, иррациональные уравнения и неравенства и их системы. Уравнения и неравенства, содержащие переменные под знаком модуля. Уравнения и неравенства с параметром. Вычисления производных. Уравнение касательной к графику функции. Исследование функции с помощью производной и построение её графика. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке. Применение производной и определенного интеграла при решении практических задач [13, с. 20].

В программах 11 класса двух направлений на изучение одних и тех же разделов отводится различное количество часов. Так, например, на изучение первообразной и интеграла, учитывая сложность данного раздела, по программе общественно-гуманитарного направления отводится 17 часов, а по программе естественно-математического направления – 13 часов. На изучение раздела «Степени и корни. Степенная функция» по обоим направлениям отведено одинаковое количество часов (по 23 ч.), но в программу естественно-математического направления включены дополнительные темы – «Степень с иррациональным показателем», «Иррациональное неравенство», «Решение иррациональных неравенств и их систем», что подчеркивает прикладное значение указанного направления.

На изучение разделов «Показательная и логарифмическая функции» и «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства» по программе общественно-гуманитарного направления выделено на 1 час больше для каждого раздела, ввиду их сложности. Также, согласно программе естественно-математического направления предусмотрено рассмотрение темы «Показательно-логарифмические уравнения», не входящей в программу общественно-гуманитарного направления. Исходя из прикладного характера естественно-математического направления, его программа дополнена разделом «Уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств», на изучение которого отводится 14 часов. Этот раздел включает в себя следующие темы: основные методы решения уравнений и их систем; уравнение-следствие; основные методы решения неравенств и их систем; система равносильных неравенств; уравнения и неравенства, содержащие переменные под знаком модуля; уравнения с параметром; неравенства с параметром.

Несмотря на меньшее количество часов (6 ч., по программе общественно-гуманитарного направления – 8 часов) на изучение «Вероятности», по программе естественно-математического направления предусмотрены дополнительные темы для изучения: независимое событие; зависимое событие; теоремы сложения и умножения вероятностей; условная вероятность; элементы выборочного метода (частота, относительная частота, полигон). На повторение курса 10-11 классов для двух направлений отводится различное количество часов, если для общественно-гуманитарного выделено 18 часов, то для естественно-математического – 12 часов, учитывая включение дополнительного раздела, рассматренного выше.

Соответственно утвержденным программам, в общеобразовательных школах Казахстана, при обучении алгебре и началам анализа используют учебники по двум направлениям: общественно-гуманитарное и естественно-математическое.

Исходя из проведенного анализа, можно сделать вывод, что правильно выбрав направление, учащиеся, начиная со школы готовятся к обучению будущей специальности. В 10-11 классе закладываются необходимые базовые знания по математическому анализу. Те учащиеся, которые поступают на технические и физико-математические специальности, куда входит специальность 5В010900 – Математика (будущие учителя математики), должны выбрать именно естественно-математическое направление.

2.4 Проведение педагогического эксперимента и анализ его результатов

В процессе экспериментальной работы нами были проведены: беседы со студентами первого курса обучения специальности 5В010900 – математика, посещение лекционных и практических занятий преподавателей по математическому анализу института математики, физики и информатики, и проведены контрольные срезы по математическому анализу.

В результате проведенных исследований были установлены недостаточное владение студентами профессионально-педагогическими умениями и навыками, невысокий уровень знаний школьного курса алгебры и начал анализа, причем этот уровень различный ввиду того, что студенты окончили классы разных направлений (общественно-гуманитарное и естественно-математическое) в школах, а также разный тип школ – от общественно-образовательных до лицеев и гимназий. А как известно, в зависимости от направления класса выбирается специальная рабочая учебная программа.

После проведения контрольных срезов на первом курсе, уровень знаний по математическому анализу оказался следующим:

Таблица 6

Уровни	Показатель знаний студентов 1 курса
Низкий	45%
Средний	37%
Высокий	18%

По приведенным в таблице 6 данным видно, что у 45% студентов низкий уровень знаний по математическому анализу, 37% студентов имеют средний уровень знаний, и лишь 18% усвоили школьный материал на достаточно высоком уровне.

На основе результатов проведенного контрольного среза был организован формирующий эксперимент на материале преподавания математического анализа в педагогическом вузе. Эксперимент проводился в двух группах по специальности 5В010900 – математика, начиная с первого курса (экспериментальная группа – 23 человека, контрольная группа – 22 человека).

Занятия по математическому анализу проводились по специально разработанной методике. В первую очередь, предстояло «уравнять» уровень знаний студентов, полученных в процессе обучения началам анализа в школе. Был разработан вводный курс по математическому анализу. Также в цели занятий входила организация самостоятельной работы студентов, ориентированная на подготовку их к обучению математике школьников в дальнейшей профессионально-педагогической деятельности. В процессе обучения математическому анализу использовались методы дифференциации учебного процесса. Действительно, работая микрогруппами, выполняя обязанности консультантов для более «слабых», студенты убеждались в том, что необходимо уметь организовывать познавательную деятельность, научиться правильно определять уровень сложности заданий и выбирать нужные методы решения задач. Студенты на собственном опыте осознавали, что пробел в знаниях хотя бы по одной теме отражается на изучении дальнейшего курса математического анализа. Поэтому систематически на самостоятельную работу студентов выносились дополнительные задания, как теоретического характера, так и практического содержания (см. Приложения Б и В).

В результате формирующего эксперимента у студентов экспериментальной группы повысилось качество успеваемости, которое было установлено нами по срезовым контрольным работам и результатам текущих экзаменов по математическому анализу по сравнению с контрольной группой.

Таблица 7 – Динамика изменения успеваемости студентов по результатам контрольных срезов

Группы	Оценки									Процентное соотношение положительных оценок
	A	A-	B+	B	B-	C+	C	C-	D	
1 срез										
ЭГ	1	2	1	2	2	4	3	4	4	35%
КГ	2	-	1	3	2	4	2	3	5	36%
2 срез										
ЭГ	1	2	3	2	4	6	3	1	1	52%
КГ	1	1	2	3	2	3	2	5	3	41%
3 срез										
ЭГ	2	3	4	3	3	4	2	2	-	65%
КГ	1	1	2	2	2	5	5	3	1	36%

По данным, приведенным в таблице, видно, что значительно повышается качество успеваемости в экспериментальной группе, а в контрольной группе – незначительное повышение, затем снижение.

Таблица 8

Семестр	Группы	Качество успеваемости
2	ЭГ	33%
	КГ	35%
3	ЭГ	53%
	КГ	42%
4	ЭГ	68%
	КГ	45%

Результаты экзаменов, приведенные в таблице 8 также отображают значительное повышение качества успеваимости в экспериментальной группе от 33% до 68%.

Итоги опытно-педагогической работы показали, что разработанная методика эффективна и способствует более полному овладению знаниями по математическому анализу. В дальнейшем полученные студентами знания применялись при прохождении педагогической практики в школе. На занятиях они чувствовали себя более уверенно, применяя различные методы изложения учебного материала по алгебре и началам анализа.

Выводы.

Во второй главе разработана методическая система обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе. Поставлены цели и сформулированы основные задачи курса, отобрано необходимое содержание, формы и методы проведения занятий со студентами, в которых отображаются соответствующие формы организации учебно-воспитательного процесса в школе. Предложены специально разработанные задания для самостоятельной работы студентов в целях закрепления полученных знаний, умений и навыков, а также осознания роли курса математического анализа в их дальнейшей профессиональной деятельности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена поиску эффективной методической системы обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе.

В ходе выполнения работы, поставленные задачи исследования выполнены. Дан подробный анализ состояния методической системы обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе. Определено место и роль математического анализа в подготовке будущего профессионального педагога, приведены рекомендации для соблюдения преемственности в обучении курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе. Выявлены методы и организационные формы обучения курсу математического анализа будущих учителей математики. Разработана методическая система обучения курсу математического анализа в школе и педагогическом вузе.

В экспериментальной части работы на занятиях проверена эффективность разработанной нами методики обучения курсу математического анализа. Итоги опытно-педагогической работы показали, что предложенная нами методика обучения математическому анализу в школе и вузе эффективна и способствует повышению качества знаний обучающихся. В дальнейшем, полученные студентами знания применялись при прохождении педагогической практики в школах г. Алматы и Алматинской области. На занятиях они чувствовали себя более уверенно, применяя различные методы изложения учебного материала по алгебре и началам анализа.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Alma E. Abylkasymova, Zhanara M. Nurmukhamedova, Dilara M. Nurbaeva, Lyazzat D. Zhumalieva. «The Turkish Vector» Influence on Teaching the Exact Disciplines in Modern Educational System of Kazakhstan: on the Example of Teaching Algebra and Mathematics// Global Journal of Pure and Applied Mathematics. -2016. – Vol. 12, № 4. – p. 3481-3491.
2. Абылкасымова А.Е., Рыжаков М.В. Содержание образования и школьный учебник. – Москва: Арсенал образования, 2012. – 224 с.
3. Кисельников И. В. Обучение началам математического анализа в средней школе с использованием различных форм представления его фундаментальных понятий: автореф. …канд. пед. наук: 13.00.02. – Санкт-Петербург: РГПУ им. А.И. Герцена, 1997. -17 с.
4. Князева О. О. Реализация когнитивно – визуального подхода в обучении старшеклассников началам математического анализа: автореф. …канд. пед. наук: 13.00.02. – Омск: ОГПУ, 2003. -24 с.
5. Васильева М. В. Методические особенности обучения элементам математического анализа учащихся профильной школы: автореф. …канд. пед. наук: 13.00.02. – Орел: ОГУ, 2004. -19 с.
6. Максютин А. А. Многоуровневая система задач как средство обучения учащихся средней школы алгебре и началам математического анализа: автореф. …канд. пед. наук: 13.00.02. – Саранск: ГОУ ВПО МГПИ им. М. Е. Евсевьева, 2007. -20 с.
7. Мордкович А.Г. О некоторых проблемах школьного математического образования // «Практика развивающего обучения» htpp://ziimag.narod.ru 2014.
8. Архангельский С.И. Лекции по теории обучения в высшей школе. – М.: Высшая школа, 1974 – 384 с.
9. Башмаков М.И. Определение основных понятий анализа в школьном курсе математики // Математика в школе. -1986.- № 5.- с.41- 42
10. Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А., Шойынбеков К.Д., Корчевский В.Е. Алгебра и начала анализа: учебник для 10 класса естественно-математического направления общеобразовательных школ. – Алматы: Мектеп, 2014. – 184 с.
11. Нурмухамедова Ж.М. О роли начал анализа в курсе математики общеобразовательной школы // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «физико-математические науки». Алматы, – 2016. - № 2 (54). - с. 51-56
12. Зимановская А.А., Бердибеков А.Б. Роль математического образования в экономике// Вестник КАСУ. - 2005. - №4. – с. 192-197
13. Абылкасымова А.Е. и др. Типовые учебные программы для 10–11 классов общественно-гуманитарного и естественно-математического направлений общеобразовательной школы. – Астана, 2013. –27с.
14. Нурмухамедова Ж.М., Балгимбаева Ш.А. Приближение всплесками классов периодических функций многих переменных смешанной гладкости //

Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики и естественнонаучного знания», Коряжма. – 2014. - с. 14 – 17

15. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа . – М.: Высшая школа, 1981. – Т.1. – 688 с.

16. Никольский С.М. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 464 с.

17. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ (начальный курс). – М.: Издательство Московского университета, 1985. – 600 с.

18. Жадраева Л.У., Искакова М.Т., Нурмухамедова Ж.М. О проблемах подготовки будущих учителей математики при обучении курсу математического анализа в педвузе // Материалы Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы преподавания математики в школе и педвузе», М. – 2015. – с. 250-254

19. Абылкасымова А.Е. Теория и методика обучения математике: дидактико – методические основы. – Алматы: Мектеп, 2013. – 224 с.

20. Бим-Бад Б.М. Педагогический энциклопедический словарь. – М., 2002. – 213 с.

21. Комарова Е.А. Преемственность в обучении математике / Методическое пособие. – Вологда, 2007. – 108 с.

22. Нурмухамедова Ж.М. О проблеме преемственности курсов «Алгебра и и начала анализа» в школе и «Математический анализ» в педагогическом вузе // Вестник КазНПУ им. Абая, серия «физико-математические науки». Алматы, – 2016. № 2 (54). - с. 56-61

23. Абылкасымова А.Е. Познавательная самостоятельность в учебной деятельности студента / Учебное пособие. – Алматы, «Санат», 1998. – 160 с.

24. Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А. Методические подходы к изучению ряда вопросов вводных тем математического анализа // «Электронное научное издание (научно – педагогический интернет-журнал, ART 2188)» http://www.TheEmissia. OfflineLetters, 2014.

25. Абылкасымова А.Е., Жумагулова З.А., Шойынбеков К.Д., Есенова М.И. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10 класса общественно-гуманитарного направления общеобразовательных школ. – Алматы: Мектеп, 2014. – 160 с.

26. Сильченкова Т.Н. Что такое методическая система? // «Образовательный сайт Сильченковой Т.Н.» http://www.silchenkova.ru, 2015.

27. Фещенко Т. С. К вопросу о понятии методическая система // Молодой ученый. – 2013. – №7. – с. 432-435

28. Саранцев Г.И. Методическая система обучения предмету как объект исследования // «Научная онлайн-библиотека ПОРТАЛУС» http://www.portalus.ru, 2007.

29. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Издательство Московского университета, 1997. – 624 с.

30. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. – М.: Издательство Московского университета, 1988. – 416 с.

31. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.

32. Ландау Э. Основы анализа. – М.: Государственное издательство иностранной литературы, 1947. – 183 с.

33. Философский энциклопедический словарь, 2010.

34. Капиносов А.Н., Уровневая дифференциация при обучении математике в 5-9 классах // МШ, 1990. – № 5. – с. 11-14

35. Терешина Т. Н. Изучение начал математического анализа в условиях дифференциации учебного процесса в средней школе: автореф. …канд. пед. наук: 13.00.02. – М.: МПГУ им. В. И. Ленина, 1997. – 19 с.

36. Шахматова Т. И. Дифференцированное обучение математическому анализу студентов младших курсов педвуза: автореф. …канд. пед. наук: 13.00.02. – Саранск: МГПИ им. М. Е. Евсевьева, 2004. – 19 с.

37. Гусев В.А. Индивидуализация учебной деятельности учащихся как основа дифференцированного обучения математике в средней школе // Математика в школе. 1990. – № 4. – с. 27-31

38. Кондратьева Л.Г. Индивидуализация и дифференциация в обучении // «Наша сеть» http://www.nsportal.ru, 15.01.2013.

39. Кирсанов А.А. Индивидуализация учебной деятельности как педагогическая проблема. Казань.: КГУ, 1982. – 105 с.

40. Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе. 1990. – № 4. – с. 21-27

41. Гусев В.А. Психолого-педагогические основы обучения математике. – М.: Вербум-М, 2003. – 429 с.

42. Рубинштейн С.Л. О мышлении и путях его исследования. – М.: Изд-во АН СССР,1958.

43. Унт И.Э. Индивидуализация и дифференциация обучения. – М.: "Педагогика", 1990.

44. Пурышева Н.С. Дифференцированное обучение физике в средней школе. – М.: "Прометей", 1993.

45. Нурбаева Д.М., Нурмухамедова Ж.М., Жадраева Л.У. Тест как промежуточный контроль знаний // Материалы Международной научно-практической конференции «Радиационно-термические явления и инновационные технологии», посвященной 70-летию юбилея и 50-летию научно-педагогической деятельности доктора физико-математических наук, профессора А.И. Купчишина. – Алматы, 2015. – с. 156-159.

46. Нурмухамедова Ж.М. Об организации обучения математике в школе в условиях дифференциации учебного процесса // Педагогика и психология, КазНПУ имени Абая. – Алматы, 2016. – № 1 (26). – С. 191-195.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

1 Цели и задачи дисциплины «Основы математического анализа»

Дисциплина «Основы математического анализа» является вводным курсом для дальнейшего изучения математического анализа в вузе. Так как первокурсники окончили разные типы школ (общеобразовательные школы, лицеи, гимназии, школы с углубленным изучением математики) и классы с различным направлением (общественно-гуманитарное или естественно-математическое), то в первую очередь предстоит уравнять их уровень знаний. Данная дисциплина дает полное представление об основных определениях и понятиях математического анализа, изучаемых в школьном курсе алгебры и начал анализа. Также более углубленно изучаются такие важные понятия, как: пределы функций, замечательные пределы; применение производной функции, ее физический смысл и геометрический смысл; неопределенный интеграл и методы нахождения неопределенных интегралов.

Цели дисциплины. Основные цели данного курса – закрепить знания студентов школьного курса алгебры и начал анализа, а также более глубоко изучить применение производной и методы нахождения неопределенных интегралов, не входящих в школьную программу.

Задачи дисциплины. Дать полное представление о таких необходимых понятиях, как:

- множества и действия над ними;
- абсолютная величина действительного числа и окрестность точки;
- числовая последовательность, предел числовой последовательности;
- функция, предел функции, замечательные пределы;
- непрерывность функции и точки разрыва функций;
- производная функции, физический и геометрический смыслы производной;
- производные сложной и параметрически заданной функций;
- дифференциал функции; теоремы о дифференцируемых функциях;
- первообразная, неопределенный интеграл, методы нахождения неопределенных интегралов.

Предполагаемые результаты изучения дисциплины:

- понимать основные определения;
- знать таблицы основных производных и интегралов;
- уметь применять свойства производной функции, интегрировать функции, используя различные методы нахождения интегралов.

Пререквизиты. Для успешного изучения курса необходимо знание школьного курса алгебры и начал анализа.

Постреквизиты. Знания, полученные в результате изучения данного курса, используются для дальнейшего изучения курса математического анализа в вузе, а также при изучении курсов: дифференциальные уравнения, уравнения математической физики, теория функций комплексного переменного, теория функций действительного переменного, функциональный анализ и т.д.

2 Содержание дисциплины «Основы математического анализа»

Таблица А1 – лекционный курс

№ темы	Наименование тем лекций	Содержание тем	Объем в часах	Неделя семестра
1	2	3	4	5
1	Множества. Действия над ними. Аксиоматика вещественных чисел.	Понятие множества. Действия над множествами (объединение, пересечение и разность множеств). Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки. Аксиоматика вещественных чисел. Отношение порядка.	1	1
2	Числовая последовательность.	Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Критерии сходимости последовательности.	1	2
3	Функция. Предел функции.	Понятие функции. Классификация функций. Способы задания функции. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции. Сложная функция (суперпозиция функций). Предел функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.	2	3, 4
4	Непрерывность функции.	Понятие о непрерывности функции. Основные теоремы о непрерывных функциях. Классификация точек разрыва функции.	1	5
5	Производная функции.	Понятие производной функции. Таблица производных. Основные теоремы. Физический смысл производной. Геометрический смысл производной.	2	6, 7
6	Дифференциал функции.	Понятие дифференциала функции. Уравнение касательной. Геометрический смысл дифференциала функции.	1	8
7	Производные сложных функций. Производные высших	Правила нахождения производной сложной функции. Производная обратной функции. Производные высших порядков.	2	9, 10

Продолжение таблицы А1

1	2	3	4	5
	порядков.			
8	Исследование функции и построение графика.	Исследование функций с помощью производных. Экстремумы функции. Промежутки возрастания и убывания функции. Выпуклость и вогнутость функции. Асимптоты. Изображение графика функции.	1	11
9	Первообразная функции, неопределенный интеграл.	Понятие первообразной функции, неопределенного интеграла. Методы интегрирования с помощью табличных интегралов и замены переменной. Интегрирование по частям.	2	12, 13
10	Определенный интеграл.	Определение определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрический смысл определенного интеграла.	2	14, 15
	Всего часов		15	

Таблица А2 – семинарские, практические занятия

№ темы	Наименование тем лекций	Содержание тем	Объем в часах	Неделя семестра
1	2	3	4	5
1	Множества. Действия над ними. Аксиоматика вещественных чисел.	Понятие множества. Действия на множествами (объединение, пересечение и разность множеств). Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки. Аксиоматика вещественных чисел. Отношение порядка.	2	1
2	Числовая последователь-ность.	Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Критерии сходимости последовательности.	2	2
3	Функция. Предел функции.	Понятие функции. Классификация функций. Способы задания функции. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции. Сложная функция (суперпозиция функций). Предел функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.	4	3, 4

Продолжение таблицы А2

1	2	3	4	5
4	Непрерывность функции.	Понятие о непрерывности функции. Основные теоремы о непрерывных функциях. Классификация точек разрыва функции.	2	5
5	Производная функции.	Понятие производной функции. Таблица производных. Основные теоремы. Физический смысл производной. Геометрический смысл производной.	4	6, 7
6	Дифференциал функции.	Понятие дифференциала функции. Уравнение касательной. Геометрический смысл дифференциала функции.	2	8
7	Производные сложных функций. Производные высших порядков.	Правила нахождения производной от сложной функции. Производная от обратной функции. Производные высших порядков.	4	9, 10
8	Исследование функции и построение графика.	Исследование функций с помощью производных. Экстремумы функции. Промежутки возрастания и убывания функции. Выпуклость и вогнутость функции. Асимптоты. Изображение графика функции.	2	11
9	Первообразная функции, неопределенный интеграл.	Понятие первообразной функции, неопределенного интеграла. Методы интегрирования с помощью табличных интегралов и замены переменной. Интегрирование по частям.	4	12, 13
10	Определенный интеграл.	Определение определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрический смысл определенного интеграла.	4	14, 15
	Всего часов		30	

Таблица А3 – Самостоятельная работа студентов под руководством преподавателя

№№ п. п.	Наименование тем и содержание заданий для СРСП	Формы проведения	Объем в часах	Неделя семестра
1	2	3	4	5
1	Понятие множества. Действия над множествами (объединение, пересечение и разность множеств). Абсолютная величина действительного числа. Окрестность точки. Аксиоматика вещественных чисел. Отношение порядка.	Контрольная работа №1. Коллоквиум.	3	1
2	Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Критерии сходимости последовательности.	Работа по индивидуальным карточкам. Контрольная Работа №2	3	2
3	Понятие функции. Классификация функций. Способы задания функции. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции. Сложная функция (суперпозиция функций). Предел функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.	Проверочная работа. Контрольная работа №3	6	3, 4
4	Понятие о непрерывности функции. Основные теоремы о непрерывных функциях. Классификация точек разрыва функции.	Контрольная работа №4	3	5
5	Понятие производной функции. Таблица производных. Основные теоремы. Физический смысл производной. Геометрический смысл производной.	Индивидуальные карточки. Контрольная работа №5	6	6, 7
6	Понятие дифференциала функции. Уравнение касательной. Геометрический смысл дифференциала функции.	Проверочная работа. Контрольная работа № 6-7	3	8
7	Производная от обратной функции. Производная от сложной функции. Производные высших порядков.	Работа у доски	6	9, 10
8	Исследование функций с помощью производных. Экстремумы функции. Промежутки возрастания и убывания	Контрольная работа №8	3	11

Продолжение таблицы А3

1	2	3	4	5
9	Понятие первообразной функции, неопределенного интеграла. Методы интегрирования с помощью табличных интегралов и замены переменной.	Индивидуальные карточки. Контрольная Работа №9	6	12, 13
	Интегрирование по частям.			
10	Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрический смысл определенного интеграла.	Работа у доски. Контрольная работа №10	6	14, 15
		Всего:	45	

Таблица А4 – самостоятельная работа студентов

№№ п.п	Наименование тем и содержание заданий для СРС	Формы контроля	Объем в часах	Неделя семестра
1	2	3	4	5
1	Решение ИДЗ по темам: действия над множествами (объединение, пересечение и разность множеств); абсолютная величина действительного числа; окрестность точки. Аксиоматика вещественных чисел; отношение порядка.	Проверка тетрадей	3	1
2	Решение ИДЗ по темам: Понятие числовой последовательности. Предел числовой последовательности. Критерии сходимости последовательности.	Проверка тетрадей	3	2
3	Решение ИДЗ по темам: Понятие функции. Классификация функций. Способы задания функции. Понятие элементарной функции. Основные элементарные функции. Сложная функция (суперпозиция функций). Предел функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.	Проверка тетрадей	6	3, 4
4	Решение ИДЗ по темам: Понятие о непрерывности функции. Основные теоремы о непрерывных функциях. Классификация точек разрыва функции.	Проверка тетрадей	3	5
5	Решение ИДЗ по темам: Понятие производной функции. Таблица	Проверка тетрадей	6	6, 7

Продолжение таблицы А4

1	2	3	4	5
6	Решение ИДЗ по темам: Понятие дифференциала функции. Уравнение	Проверка тетрадей	3	8
	касательной. Геометрический смысл дифференциала функции.			
7	Решение ИДЗ по темам: Производная от обратной функции. Производная от сложной функции. Производные высших порядков.	Проверка тетрадей	6	9, 10
8	Решение ИДЗ по темам: Исследование функций с помощью производных. Экстремумы функции. Промежутки возрастания и убывания функции. Выпуклость и вогнутость функции. Асимптоты. Изображение графика функции.	Проверка тетрадей	3	11
9	Решение ИДЗ по темам: Понятие первообразной функции, неопределенного интеграла. Методы интегрирования с помощью табличных интегралов и замены переменной. Интегрирование по частям.	Проверка тетрадей	6	12, 13
10	Решение ИДЗ по темам: Определенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Геометрический смысл определенного интеграла.	Проверка тетрадей	6	14, 15
		Всего:	45	
Итого: 135 часов (3 кредита)				

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Теоретические вопросы

1. Что называется числовой последовательностью?
2. Что называется пределом числовой последовательности?
3. Сколько пределов может быть у сходящейся числовой последовательности?
4. Какая последовательность называется ограниченной?
5. Какая последовательность называется бесконечно малой?
6. Какая последовательность называется бесконечно большой?
7. Какая последовательность называется неограниченной?
8. Будет ли неограниченная последовательность бесконечно большой?
9. Является ли ограниченная последовательность сходящейся?
10. Сформулируйте теорему о произведении ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность.
11. Какая последовательность называется суммой (разностью) двух последовательностей?
12. Какая последовательность называется произведением двух последовательностей?
13. Какая последовательность называется частным двух последовательностей?
14. Чему равен предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей?
15. Чему равен предел произведения двух сходящихся последовательностей?
16. Чему равен предел частного двух сходящихся последовательностей?
17. Сходится ли сумма двух расходящихся последовательностей?
18. Будет ли произведение сходящейся и расходящейся последовательностей сходится?
19. Сходится ли произведение двух расходящихся последовательностей?
20. Какая последовательность называется невозрастающей?
21. Какая последовательность называется неубывающей?
22. Какая последовательность называется убывающей?
23. Какая последовательность называется возрастающей?
24. Какая последовательность называется монотонной?
25. Сформулируйте теорему о сходимости невозрастающей и ограниченной снизу числовой последовательности.
26. Сформулируйте теорему о сходимости неубывающей и ограниченной сверху числовой последовательности.
27. Что называется последовательностью вложенных отрезков?
28. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках.
29. Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса.
30. Что называется окрестностью точки из расширенной действительной оси?
31. Что называется частичным пределом числовой последовательности?

32. Что называется верхним пределом числовой последовательности?
33. Что называется нижним пределом числовой последовательности?
34. Дайте определение фундаментальной последовательности.
35. Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности.
36. Сформулируйте теоремы, связанные с нижним и верхним пределами.
37. Сформулируйте критерии сходимости числовой последовательности.
38. Дайте определение предельной точки множества.
39. Дайте определение предела функции по Гейне.
40. Дайте определение предела функции по Коши.
41. Докажите теорему об эквивалентности двух определений предела функции.
42. Дайте определение функции, удовлетворяющей условию Коши.
43. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции.
44. Сформулируйте теорему о пределе суммы, произведения, частного двух функций (с доказательством).
45. Дайте определение ограниченной функции.
46. Сформулируйте все свойства (теоремы) предела функции.
47. Сформулируйте теорему о трех функциях (с доказательством).
48. Первый замечательный предел.
49. Второй замечательный предел.
50. Дайте определение монотонной функции.
51. Сформулируйте теорему о пределе монотонной функции (с доказательством).
52. Приведите определение односторонних пределов функции в точке.
53. Сформулируйте критерий существования предела функции в точке на основе существования односторонних пределов (с доказательством).
54. Сформулируйте определения асимптотического сравнения величин.
55. Свойства о-символики.
56. Дайте определение функции непрерывной в точке (все три эквивалентных определения).
57. Что называется колебанием функции на множестве?
58. Сформулируйте критерий Коши непрерывности функции в точке (с доказательством).
59. Что называется колебанием функции в точке?
60. Сформулируйте критерий непрерывности функции в точке?
61. Локальные свойства непрерывных функций.
62. Сформулируйте определение непрерывности функции на множестве.
63. Теорема Коши о промежуточных значениях.
64. Теорема Вейерштрасса.
65. Дайте определение точек разрыва функции.
66. Сформулируйте определения точек разрыва первого рода, второго рода, устранимого разрыва.
67. Дайте определение равномерной непрерывности функции.

68. Теорема Кантора (с доказательством).
69. Достаточное условие равномерной непрерывности.
70. Монотонные функции: непрерывность, точки разрыва.
71. Обратная функция: существование, непрерывность.
72. Определение дифференцируемости функции в точке.
73. Что называется нижней и верхней суммами Дарбу функции $f(x)$ для разбиения Р отрезка $[a,b]$?
74. Что называется неопределенным интегралом?
75. Какие методы нахождения неопределенного интеграла вы знаете?
76. Что называется определенным интегралом?
77. Что называется числовым рядом?
78. Что называется частичной суммой ряда?
79. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.
80. Сформулируйте критерий Коши сходимости числового ряда.
81. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
82. Какой ряд называется условно сходящимся числовым рядом?
83. Монотонный признак Коши сходимости числового ряда.
84. Сформулируйте монотонный признак Вейерштрасса сходимости числового ряда.
85. Радикальный признак Коши.
86. Достаточное условие Даламбера сходимости числового ряда.
87. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
88. Признак Дирихле сходимости знакопеременных рядов.
89. Признак Абеля сходимости знакопеременных рядов.
90. Определение сходимости функциональной последовательности.
91. Область сходимости функциональной последовательности.
92. Что такое поточечная сходимость функциональной последовательности?
93. Что называется семейством функций, зависящих от параметра?
94. Равномерная сходимость функциональной последовательности.
95. Критерий Коши равномерной сходимости семейства функций, зависящих от параметра.
96. Что называется функциональным рядом?
97. Что называется частичной сумой ряда?
98. Сформулируйте необходимое условие сходимости функционального ряда.
99. Сформулируйте критерий Коши сходимости функционального ряда.
100. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?
101. Какой ряд называется условно сходящимся функциональным рядом?
102. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.
103. Сформулируйте признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

104. Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

105. Теорема о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

106. Теорема о интегрируемости суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

107. Теорема о дифференцируемости суммы равномерно сходящегося функционального ряда.

108. Дайте определение степенного ряда.

109. Что называется интервалом сходимости степенного ряда?

110. Что называется радиусом сходимости степенного ряда?

111. Первая теорема Абеля.

112. Вторая теорема Абеля.

113. Равномерная сходимость степенного ряда.

114. Теорема Коши –Адамара.

115. Разложение основных функций в ряд Тейлора.

116. Что называется собственным интегралом, зависящим от параметра?

117. Достаточное условие непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.

118. Достаточное условие дифференцируемости собственного интеграла, зависящего от параметра.

119. Формула для вычисления производной от собственного интеграла, зависящего от параметра.

120. Что называется несобственным интегралом, зависящим от параметра?

121. Дайте определение равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

122. Критерий равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

123. Критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

124. Признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной несобственного интеграла, зависящего от параметра.

125. Достаточное условие Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

126. Достаточное условие Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

127. Условие перестановочности двух повторных пределов для семейства функций, зависящих от параметра.

128. Условие предельного перехода под знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.

129. Теорема о непрерывности несобственного интеграла, зависящего от параметра.

130. Условие дифференцируемости знаком несобственного интеграла, зависящего от параметра.

131. Условие интегрируемости несобственного интеграла, зависящего от параметра.

132. Бета -функция (интеграл Эйлера первого рода).

133. Свойства Бета –функции.

134. Гамма-функция (интеграл Эйлера второго рода).

135. Свойства гамма-функции.

136. Формула Стокса.

137. Формула Гаусса-Остроградского.

138. Что называется криволинейным интегралом 1-го рода по кривой C, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_0, T]$, от непрерывной на кривой функции $f(x, y, z)$?

139. Что называется криволинейным интегралом 2-го рода по кривой C, заданной параметрически $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_0, T]$, от непрерывной на кривой вектор-функции $(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$?

140. Формула Грина.

141. Что называется поверхностным интегралом 1-го рода по поверхности S заданной параметрически $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, от непрерывной на поверхности функции $f(x, y, z)$?

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Практические задания для самостоятельной работы студентов

1. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2-2}\right)$

2. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n(n-1)}-\sqrt{n^2+2}\right)$

3. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt[3]{n^3-4}\right)\cdot n\sqrt{n}$

4. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-5n+6}-n\right)$

5. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{(n^2+2)(n^2-3)}-\sqrt{n^4-8}\right)$.

6. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+2}{3n^2+1}\right)^{n^2}$

7. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+3}{5n+1}\right)^{n+2}$

8. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{n-2}$

9. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+3}{2n^2+2n+1}\right)^{-n+1}$

10. Вычислить предел числовой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2+5}{7n^2+2}\right)^{-2n^2}$

11. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{e^{x^2}-1}$

12. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1-2\sin x)}{\sin 3x}$

13. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\cos x-1}$

14. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x^2+\pi x}$

15. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}\pi x}{\ln(1+2x)}$

16. Найдите производную заданной функци $y=\ln\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)+x\left(5x^2+3\right)\sqrt{4x^2+1}$

17. Найдите производную заданной функции $y=\frac{x\arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}+\ln\sqrt{1-9x^2}$

18. Найдите производную заданной функции $y=\frac{\sqrt{1-4x^2}}{x}-2\arcsin 2x$

19. Найдите производную заданной функции $y=\ln\frac{\cos x+\sqrt{\cos 2x}}{\sin x}$

20. Найдите производную заданной функции $y = \operatorname{arctg}\sqrt{9x^2-1} - \ln\frac{3x}{\sqrt{9x^2-1}}$

21. Найдите производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \sin t + \cos t, \\ y = \cos 2t \end{cases}$$

22. Найдите производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = t\sin t + \cos t, \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$$

23. Найдите производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh} t, \\ y = \operatorname{ch}^{2/3} t \end{cases}$$

24. Найдите производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \ln\cos 2t \end{cases}$$

25. Найдите производную y''_{xx} от функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = \arccos t \end{cases}$$

26. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{x^3+2}{x^2-1}$

27. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{3}{x^2+3x}$

28. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{2x}{4-x^2}$

29. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{2+x^3}{x^2-9}$

30. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{x^2}{(x+1)^2}$

31. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{1}{16x^4-1}$

32. Исследуйте функцию $y(x)$ и изобразите ее график $y = \frac{x^2-x+4}{x-1}$

33. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$

34. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{(1+\sqrt{x})^3dx}{\sqrt{x}}$

35. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{(1+\cos^2 x-\sin^2 x)dx}{\cos^2 x}$

36. Найти неопределенный интеграл $\int tg^2 x dx$

37. Найти неопределенный интеграл $\int\frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}}$

38. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$

39. Найти неопределенный интеграл $\int tgxdx$

40. Найти неопределенный интеграл $\int 3^{5x^2} xdx$

41. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{10x-5}{x^2-x+1}dx$

42. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

43. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{8-6x-9x^2}}$

44. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$

45. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^7}{x^8+7}dx$

46. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx$

47. Найти неопределенный интеграл $\int x\cos xdx$

48. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

49. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}dx$

50. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

51. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^4+1}$

52. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx$

53. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$

54. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{2\pi} \cos 5x \cdot \cos 2xdx$

55. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{\pi} \sin\frac{x}{3}dx$

56. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$

57. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{0}^{1} x^3 arctgxdx$

58. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=-x^2,\ y=x-2,\ \ y=0$

59. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = x+1,\ y = \cos x,\ \ y = 0$

60. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $x = y^2,\ y = 1,\ \ x = 8$

61. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми
$2x + 3y + 6 = 0,\ y = 0,\ \ x = 4$

62. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми
$y = \sin x,\ y = 0,\ \ x = -\dfrac{\pi}{2},\ \ x = \pi$

63. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = e^x,\ y = e^{-x},\ \ \ x = 1$

64. Найдите длину дуги кривой $y = 1 - \ln\cos x,\ \ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{4}$

65. Найдите длину дуги кривой $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t,\ \ \ 0 \le t \le 2\pi$

66. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох области, ограниченной кривыми $y^2 = x^3,\ y = 0,\ \ x = 1$

67. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох области, ограниченной кривыми $y = \sin^2 x,\ x = 0,\ \ x = \pi$

68. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох области, ограниченной кривыми $x = a(t - \sin t),\ \ y = a(1 - \cos t)$

69. Найдите разложения функции e^x по формуле Маклорена

70. Найдите разложения функции $\sin x$ по формуле Маклорена

71. Дана функция $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$

72. Дана функция $z = arctg\,\dfrac{x}{y}$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

73. Дана функция: $z = \dfrac{x}{x^4 + y^2}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

74. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

75. Найти разложение в ряд Тейлора функции e^{-x^2} в окрестности точки x=0

76. Найти разложение в ряд Тейлора функции $(x-2)^4$ в окрестности точки x=1

77. Найти разложение в ряд Тейлора функции e^x в окрестности точки x=1

78. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{3^n}\right)$

79. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$

80. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$

81. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^n}$

82. Найти радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{3^n}$

83. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

84. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$

85. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

86. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

87. С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$

88. С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

89. С помощью интегралов Эйлера вычислить $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx, a>0$

90. Вычислить $\iint_S dS$,

где S – верхняя полусфера $\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$

91. Вычислить $\iint_S (x+y+z)dS$, S – круг $\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2\leq 1, z=0\}$

92. Вычислить $\int_\gamma (x+y)ds$, γ –ломаная OAB , O(0,0), A(1,0), B(1,1)

93. Вычислить $\int_\gamma xdx-ydy$, γ –единичная окружность с центром O(0,0)

94. Вычислить $\int_{OA}(1+y)dx+xdy$, где OA-кривая $y=x^3$, O(0;0), A(2;8) пробегаемая против хода часовой стрелки

95. Вычислить $\int_{AB}(x^4-1)dx+4x^3ydy$, где AB- отрезок прямой между точками A(1;1) и B(2;2)

96. Вычислить двойной интеграл $\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x} x^2ydy$

97. Вычислить двойной интеграл $\iint_G xydxdy$, если G-треугольник с вершинами 0(0;0), A(1;1), B(0;1)

98. Изменить порядок интегрирования в следующем интеграле $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$

99. В двойном интеграле $\int_{-a}^{a}dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(x^2+y^2)\,dy$ перейти к полярным координатам r и φ, полагая $\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{cases}$

100. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_V (1-x)dxdydz$, где область V ограничена поверхностями $x+y+z=1,\ \ x=0,\ \ \ y=0,\ \ z=0$