N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
SERIES OF AGRICULTURAL SCIENCES
ISSN 2224-526X
Volume 3, Number 33 (2016), 93 – 97

FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR THE LINEAR STATIONARY MODEL OF OCEAN

L. M. Tukenova, A. Skakova

T. Ryskulov New economic university, Almaty, Kazakhstan

Keywords: fictitious domain method, the linear problem, alternative forms and methods of teaching, cuboid, the integral identity, Young and Schwartz inequality, Galerkin method , the Holder inequality.

Abstract. The article deals with topical issues of the solution of linear problems of the method of fictitious domains for problems of mathematical physics, using Young and Schwarz inequality and the existence of a solution is proved by Galerkin method uniqueness.

МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО МОДЕЛИ ОКЕАНА

Л. М. Тукенова , А. Ж. Скакова

Новый экономический университет им. Т. Рыскулова, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: метод фиктивных областей, линейная задача, альтернативные формы и методы обучения, прямоугольный параллелепипед, интегральное тождество, неравенство Юнга и Шварца, метод Галеркина, неравенства Гельдера.

Аннотация. В статье рассматриваются актуальные вопросы решение линейных задач методом фиктивных областей для задачи математической физики, применяя неравенство Юнга и Шварца Существования решения доказывается методом Галеркина единственность.

Линейная задача, описывающая течение в океане, сводится к решению в области $\Omega = (0,H)\times\Omega_1, \quad \Omega_1 \subset R^2$ в следующих уравнениях

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} + \mu\Delta v_1 - \frac{\partial \xi}{\partial x_1} = f_1, \tag{1}$$

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2} + \mu\Delta v_2 - \frac{\partial \xi}{\partial x_2} = f_2, \tag{2}$$

$$\int_0^H \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right) dx_3 = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x_3} = 0, \tag{3}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0, \qquad при \qquad x_3 = 0 \quad и \quad x_3 = H, \tag{4}$$

$$v_1 = v_2 = 0, \qquad на \qquad \gamma = (0,H)\times\gamma_1. \tag{5}$$

Задачи (1)-(5) будем решать методом фиктивных областей. Дополним исходную область Ω до некоторый D, в качестве которой можно взять, например, прямоугольный параллелепипед.

Введем обозначения:

$$D=(0,H)\times\Omega_2,\quad \Omega_0=\Omega_2\setminus\Omega_1,\quad \Omega=(0,H)\times\Omega_1,\quad D_0=(0,H)\times\Omega_0,\quad D_0\cup\Omega=D.$$

Боковые границы D и Ω не пересекаются. В области D рассмотрим вспомогательную задачу

$$\mu_0\frac{\partial^2 v_1^\varepsilon}{\partial x_3^2}+\mu\Delta v_1^\varepsilon-\frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_1}=f_1, \tag{6}$$

$$\mu_0\frac{\partial^2 v_2^\varepsilon}{\partial x_3^2}+\mu\Delta v_2^\varepsilon-\frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_2}=f_2,\qquad \int\limits_0^H\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)dx_3=0, \tag{7}$$

в Ω.

$$\mu_0\frac{\partial^2 v_1^\varepsilon}{\partial x_3^2}-\frac{1}{\varepsilon}\mu\Delta v_1^\varepsilon-\frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_1}=0, \tag{8}$$

$$\mu_0\frac{\partial^2 v_2^\varepsilon}{\partial x_3^2}-\frac{1}{\varepsilon}\mu\Delta v_2^\varepsilon-\frac{\partial\xi^\varepsilon}{\partial x_2}=0,\qquad \int\limits_0^H\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)dx_3=0, \tag{9}$$

в D_0,

с граничными условиями

$$\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial x_3}=\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial x_3}\qquad \textit{при}\qquad x_3=H\quad \textit{и}\quad x_3=0, \tag{10}$$

$v_1^\varepsilon=v_2^\varepsilon=0$, на боковой границе $\gamma_2=[0,H]\times\gamma_0$ области D.

На границе γ исходной области предполагаем выполненными следующие условия согласования

$$\begin{gathered}\left\{\frac{\mu}{\varepsilon}\left[\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial x_1}\cos(\hat{n}x_1)+\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial x_2}\cos(\hat{n}x_2)\right]-\xi^\varepsilon\cos(\hat{n}x_1)\right\}\Bigg|_{\gamma^-}=\\ =\left\{\mu\left[\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial x_1}\cos(\hat{n}x_1)+\frac{\partial v_1^\varepsilon}{\partial x_2}\cos(\hat{n}x_2)\right]-\xi^\varepsilon\cos(\hat{n}x_1)\right\}\Bigg|_{\gamma^+},\\ \left\{\frac{1}{\varepsilon}\mu\left[\frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial x_1}\cos(\hat{n}x_1)+\frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial x_2}\cos(\hat{n}x_2)\right]-\xi^\varepsilon\cos(\hat{n}x_2)\right\}\Bigg|_{\gamma^-}=\\ =\left\{\mu\left[\frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial x_1}\cos(\hat{n}x_1)+\frac{\partial v_2^\varepsilon}{\partial x_2}\cos(\hat{n}x_2)\right]-\xi^\varepsilon\cos(\hat{n}x_2)\right\}\Bigg|_{\gamma^+},\ v^\varepsilon\Big|_{\gamma^-}=v^\varepsilon\Big|_{\gamma^+},\end{gathered} \tag{11}$$

где n – нормаль к боковой границе области Ω, знаки «+», «–» означают, что предельные значения функции на границе γ берутся соответственно изнутри и извне.

Введем множества

$$\hat{C}^2=\left\{v=(v_1,v_2)\in C^2(D),\quad v\big|_{\gamma_2}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x_3}=0\quad \textit{при}\quad x_3=H\quad \textit{и}\quad x_3=0,\quad \int\limits_0^H d\hat{i}vvdx_3=0\right\}.$$

$V_2(D)$, $\overset{0}{V}{}^1_2(D), \overset{0}{V}{}^2_2(D)$ – замыкание $\hat{C}^2$ в норме пространств $L_2(D)$ и $W_2^1(D), W_2^2(D)$ соответственно.

Определение 1. Обобщенным решением задач (6)-(11) называется вектор функции $v^\varepsilon = (v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon) \in \overset{0}{V}{}^1_2(D)$, удовлетворяющий следующему тождеству

$$\int_0^H dx_3 \int_{\Omega_1} (\mu_0 \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \mu \hat{\nabla} v^\varepsilon \hat{\nabla}\varphi) dx_1 dx_2 + \int_0^H dx_3 \int_{\Omega_0} (\mu_0 \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_3}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\mu}{\varepsilon} \hat{\nabla} v^\varepsilon \hat{\nabla}\varphi) dx_1 dx_2 = \int_D f\varphi dx, \tag{12}$$

где $\forall \varphi \in \overset{0}{V}{}^1_2(D)$, $f = (f_1, f_2)$.

Лемма 1. Пусть $f \in \overset{0}{V}{}^{-1}_2(D)$. Тогда существует единственное обобщенное решение задач (1.6)-(1.12), и для него имеет место оценка

$$\left\| \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial x_3} \right\|_{L_2(D)} + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \hat{\nabla} v^\varepsilon \right\|^2_{L_2(D_0)} \le C \|f\|^2_{\overset{0}{V}{}^{-1}_2(D))}. \tag{13}$$

Доказательство. Выводим оценку (13). Для этого умножим уравнения (6)-(9) на v^ε скалярно в $L_2(D)$, используя граничные условия и условия согласования, применяя неравенство Юнга и Шварца, выведем (13). Существование решения доказывается методом Галеркина, единственность следует из (13).

Определение 2. Сильным решением задач (6)-(11) называются функции $v^\varepsilon \in \overset{0}{V}{}^1_2(D) \cap W_2^2(D_0), v^\varepsilon \in W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющие (6)-(11) почти всюду в соответствующей мере.

Теорема 1. Пусть γ и γ_2 дважды непрерывно дифференцируемы и $f \in L_2(D)$. Тогда существует сильное решение задач (6)-(11) и для решения справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial x_3^2} \right\|_{L_2(D)} + \left\| v^\varepsilon \right\|_{L_2(0,H;W_2^2(\Omega_1))} + \frac{1}{\varepsilon} \left\| v^\varepsilon \right\|_{L_2(0,H;W_2^2(\Omega_0))} + \|\xi\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|\xi\|_{W_2^1(\Omega_0)} \le C\|f\|_{L_2(D)}. \tag{14}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\tilde{v}^\varepsilon = \int_0^H v^\varepsilon dx_3 = (\tilde{v}^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon) = (\int_0^H v_1 dx_3, \int_0^H v_2 dx_3).$$

Интегрируем (6)-(9) по $x_3 \in (0, H)$, получим уравнение

$$\begin{gathered} \mu \Delta \tilde{v}_1^\varepsilon - \frac{\partial \tilde{\zeta}^\varepsilon}{\partial x_1} = \tilde{f}_1, \\ \mu \Delta \tilde{v}_2^\varepsilon - \frac{\partial \tilde{\zeta}^\varepsilon}{\partial x_2} = \tilde{f}_2, \quad \tilde{\xi}^\varepsilon = H\xi^\varepsilon, \\ \frac{\partial \tilde{v}_1^\varepsilon}{\partial x_1} + \frac{\partial \tilde{v}_2^\varepsilon}{\partial x_2} = 0, \quad \tilde{f} = \int_0^H f dx_3, \end{gathered} \tag{15}$$

в Ω_1,

$$\frac{\mu}{\varepsilon}\Delta\widetilde{v}_1^{\varepsilon}-\frac{\partial\widetilde{\varsigma}^{\varepsilon}}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\mu}{\varepsilon}\Delta\widetilde{v}_2^{\varepsilon}-\frac{\partial\widetilde{\varsigma}^{\varepsilon}}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\widetilde{v}_1^{\varepsilon}}{\partial x_1}+\frac{\partial\widetilde{v}_2^{\varepsilon}}{\partial x_2}=0, \tag{16}$$

в Ω_0,

на γ выполняются условия согласования

$$\widetilde{v}^{\varepsilon}\Big|_{\gamma_1^-}=\widetilde{v}^{\varepsilon}\Big|_{\gamma_1^+},$$
$$\mu\frac{\partial\widetilde{v}^{\varepsilon}}{\partial n}-\xi\delta\Big|_{\gamma_1^-}=\frac{\mu}{\varepsilon}\frac{\partial v^{\varepsilon}}{\partial n}-\xi\delta\Big|_{\gamma_1^+}, \tag{17}$$

δ – метрический тензор.

$$\widetilde{v}^{\varepsilon}\Big|_{\gamma_0}=0. \tag{18}$$

Для решения задач (15)-(18) справедлива следующая оценка [2]

$$\left\|\widetilde{v}^{\varepsilon}\right\|_{W_2^2(\Omega_1)}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\widetilde{v}^{\varepsilon}\right\|_{W_2^2(\Omega_0)}+\left\|\xi^{\varepsilon}\right\|_{W_2^1(\Omega_1)}+\left\|\xi^{\varepsilon}\right\|_{W_2^1(\Omega_0)}\le C\left\|\widetilde{f}\right\|_{L_2(\Omega_1)}. \tag{19}$$

Теперь снова, обращая (15), (18), выводим оценку

$$\left\|\frac{\partial^2 v^{\varepsilon}}{\partial x_3^2}\right\|_{L_2)D)}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|v^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,H;W_2^2(\Omega_0))}+\left\|v^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,H;W_2^2(\Omega_1)}\le C<\infty. \tag{20}$$

Неравенство (19), (15) гарантирует оценку (16). Теорема доказана.

Замечание 11. Оценка (13) позволяет перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$ в интегральном тождестве (12). Из (13) следует, что из последовательности $\{v^{\varepsilon}\}$ можно выделить подпоследовательности слабосходящихся в $\overset{0}{V}{}^{1}_{2}(D)$. Обозначим ее предел v. Переходя к пределу в (1.13) получим, что v является обобщенным решением задач (1.)-(5). Из оценки (14) следует, что сильное решение задач (6)-(11) сходится к сильному решению задач (1)-(5) при $\varepsilon\to 0$. Пусть v^{ε_1}, v^{ε_2} – решение задач (6)-(11) соответствующим параметрам ε_1, ε_2 имеет место следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения задач (6)-(11) справедлива оценка

$$\left\|v^{\varepsilon_1}-v^{\varepsilon_2}\right\|^2_{W_2^1(\Omega}\le C_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2),$$

где C_1 – не зависит от ε_1, ε_2. Введем обозначения $v^{\varepsilon_1}-v^{\varepsilon_2}=\omega$. В силу (6)-(11) функция ω удовлетворяет соотношения

$$\mu_0\int_0^H dx_3\int_{\Omega_2}\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_1dx_2+\mu\int_0^H dx_3\int_{\Omega_1}\hat{\nabla}\omega\hat{\nabla}\varphi dx_1dx_2+$$
$$+\frac{\mu}{\varepsilon_1}\int_0^H dx_3\int_{\Omega_0}\hat{\nabla}v^{\varepsilon_1}\hat{\nabla}\varphi dx_1dx_2-\frac{\mu}{\varepsilon_2}\int_0^H dx_3\int_{\Omega_0}\hat{\nabla}v^{\varepsilon_2}\hat{\nabla}\varphi dx_1dx_2=0.$$

Положим $\varphi=\omega$,

$$\mu_0\int_0^H\left\|\frac{\partial\omega}{\partial x_3}\right\|^2_{L_2(\Omega_2)}dx_3+\mu\|\hat\nabla\omega\|^2_{L_2(0,H;L_2(\Omega_1))}+\mu\int_0^H dx_3\int_{\Omega_0}\hat\nabla\omega\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\hat\nabla v^{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\hat\nabla v^{\varepsilon_2}\right)dx_1dx_2)=0$$

Оценим третье слагаемое с помощью неравенства Гельдера и с учетом оценки (14) имеем

$$\left|\int_0^H dx_3\int_{\Omega_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\hat\nabla v^{\varepsilon_1}-\frac{1}{\varepsilon_2}\hat\nabla v^{\varepsilon_2}\right)\hat\nabla\omega dx_2dx_1\right|\le\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\int_0^H\|\hat\nabla v^{\varepsilon_1}\|_{L_2(\Omega_0)}dx_3+\frac{1}{\varepsilon_2}\int_0^H\|\hat\nabla v^{\varepsilon_2}\|_{L_2(\Omega_0)}dx_3\right)$$

$$\int_0^H\|\hat\nabla\omega\|_{L_2(\Omega_0)}dx_3\le C\left(\int_0^H\|\hat\nabla v^{\varepsilon_1}\|^2_{l_2(\Omega_0)}+\|\hat\nabla v^{\varepsilon_2}\|^2_{l_2(\Omega_0)}dx_3\right)^{1/2}\le c(\varepsilon_1+\varepsilon_2).$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

[2] Антонцев С.А., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: СО РАН Наука, 1983. – 305 с.

[3] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей для задачи математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 156 с.

[4] Бугров А.Н., Смагулов Ш. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье-Стокса // Математические модели жидкости. СО АН СССР ИТПМ. – Новосибирск, 1978. – С. 79-89.

[5] Смагулов Ш. Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье-Стокса: Препринт. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР № 68. – 20 с.

REFERENCES

[1] Ladyzhenskaya O.A. The mathematical theory of viscous incompressible fluid. Moscow: Nauka, 1970. 288 p.

[2] Antontsev S.A., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. Boundary value problems in the mechanics of inhomogeneous liquids. Novosibirsk. Russian Academy of Sciences: Science, 1983. 305 p.

[3] Vabishchevich P.N. The method of fictitious domains for problems of mathematical physics. Moscow: Vol. Moscow State University, 1991. 156 p.

[4] Bugrov A.N., Smagulov Sh. fictitious domain method for the boundary value problem of the Navier-Stokes equations // Mathematical models of fluid. ITAM SB RAS. Novosibirsk, 1978. P. 79-89.

[5] Smagulov Sh. fictitious domain method for the boundary value problem of the Navier-Stokes equations, Preprint. Novosibirsk: Computing Center of the USSR Academy of Sciences N 68. 20 p.

СЫЗЫҚТЫҚ СТАЦИОНАРЛЫ МОДЕЛІНІҢ МҰХИТҚА АРНАЛҒАН ЖАЛҒАН ДОМЕН ӘДІСІ

Л. М. Тукенова, А. Ж. Скакова

Т. Рысқұлов атындағы Жаңа экономикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: жалған домен әдісі, сызықтық есеп, оқытудың альтернативті түрлері мен әдістері, тікбұрышты параллелепипед, интегралды теңдеу, Юнғ және Шварц теңсіздігі, Галеркин әдісі, Гельдер теңсіздігі.

Аннотация. Мақалада жалған домен әдісі бойынша математикалық физиканың теңдеулерін шешуде Юнғ және Шварц теңсіздігін қолдана отырып шешудің өзекті мәселелері қарастырылған.

Поступила 25.04.2016г.