

BULLETIN OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ISSN 1991-3494

Volume 4, Number 356 (2015), 123 – 130

**INFLUENCE OF PARAMETERS AND CONTACT CONDITIONS
ON TWO-LAYER TUNNEL LINING OF A SMALL EMBEDDING
AT CRITICAL VELOCITY OF TRANSPORT LOAD**

V. N. Ukrainets¹, Zh. O. Otarbayev², S. R. Girnis¹

¹Pavlodar state university of S. Torajgyrova, Kazakhstan,

²Kazakh National Technical University after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: vitnikukr@mail.ru

Keywords: tunnel, layered shell, transport load, critical velocity of transport load.

Abstract. On base of task solution on effect of moving load on two-layer lining in elastic half-space is researched influence of geometric and physical-mechanical parameters of two-layer tunnel lining of a small embedding and its contact conditions at critical velocity of transport loadings (loadings from moving intra tunnel transport).

In constructing a mathematical model of the dynamics of the tunnel under the influence of the traffic load to describe the motion of the outer thick layer of the lining and surrounding massif uses dynamic equations of the theory of elasticity in the moving coordinate system associated with the load. Displacement vector points from the layer and the massif expressed in terms of Lame potentials. Fluctuations in the inner thin layer of the lining described in the moving coordinate system adopted by the approximate equations of the classical theory of thin shells, which greatly simplifies the solution of the problem, the authors obtained for the case of subsonic motion of the load (when the velocity of load is less than the velocity of shear wave in a thick layer of the lining and the surrounding massif).

When using the obtained solution of the problem and the numerical experiment in the paper we investigate the effect of conjugation conditions (rigid and sliding contacts) two-layer tunnel lining with a rockmass at critical velocity of transport loadings. The results of calculations are presented in tables and graphs, which are analyzed in detail. It was found that with increasing rigidity the outer layer lining the critical velocity is increased.

УДК 539.3 + 65.035(076.2)

**ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ И КОНТАКТНЫХ УСЛОВИЙ
ДВУХСЛОЙНОЙ ОБДЕЛКИ ТОННЕЛЯ МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ
НА КРИТИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ ТРАНСПОРТНОЙ НАГРУЗКИ**

V. N. Украинец¹, Ж. О. Отарбаев², С. Р. Гирнис¹

¹Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова, Казахстан,

²Казахского национального технического университета им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: тоннель, слоистая оболочка, транспортная нагрузка, критические скорости движения нагрузки.

Аннотация. На основе решения задачи о действии бегущей нагрузки на двухслойную оболочку в упругом полупространстве исследуется влияние геометрических и физико-механических параметров двухслойной обделки тоннеля мелкого заложения и ее контактных условий на критические скорости транспортной нагрузки (нагрузки от движущегося внутритоннельного транспорта).

Изучение динамики тоннелей при действии транспортных нагрузок методом математического моделирования приводит к краевым задачам механики деформируемого твердого тела. Как показывают расчеты [1] и экспериментальные исследования, с увеличением глубины заложения

тоннеля эффект динамического воздействия транспортной нагрузки на земную поверхность снижается, и при глубине около четырёх его характерных поперечных размеров становится несущественным. В этом случае при решении транспортной задачи земную поверхность можно не учитывать и рассматривать сооружение как тоннель глубокого заложения. С библиографий, касающейся математического моделирования тоннелей глубокого заложения при различных нагрузках и воздействиях, можно ознакомиться в монографии [1]. Для тоннелей неглубокого (мелкого) заложения постановка транспортной задачи значительно усложняется в силу ощутимой деформации земной поверхности и ее влияния на концентрацию напряжений в окрестности сооружения при дифракции отражённых и переотражённых волн. Решение такой задачи в случае подкрепления тоннеля тонкостенной обделкой приведено в [2]. В настоящей работе построена аналогичная [2] математическая модель динамики тоннеля мелкого заложения, подкрепленного двухслойной круговой обделкой с толстым наружным и тонким внутренним слоями.

1. Постановка и аналитическое решение задачи. В качестве расчетной схемы тоннеля рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую полость радиусом R_1 , расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве $x \leq h$ ($h > R_1$) параллельно его ненагруженной горизонтальной границе $x = h$, подкрепленную двухслойной оболочкой, внутренним слоем которой является тонкостенная упругая оболочка толщиной h_0 и радиусом срединной поверхности R_2 , а наружным – толстая упругая оболочка (в силу малости h_0 принимаем, что тонкостенная оболочка контактирует с толстой оболочкой вдоль своей срединной поверхности). Условимся внутренний слой двухслойной оболочки называть несущим слоем, а наружный – ограждающим слоем. Контакт между слоями оболочки, а также контакт между ограждающим слоем и массивом будем полагать либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении. Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует нагрузка интенсивностью P , движущаяся с постоянной скоростью c в направлении оси z (совпадающей с осью оболочки) декартовой системы координат xyz . Скорость движения нагрузки принимаем дозвуковой, т.е. меньше скоростей распространения волн сдвига в ограждающем слое и массиве, – характерной для современных транспортных средств. Физико-механические свойства полупространства (массива) и ограждающего слоя характеризуются следующими постоянными: $v_1, \mu_1, \rho_1; v_2, \mu_2, \rho_2$, где v_k – коэффициент Пуассона, μ_k – модуль сдвига, ρ_k – плотность ($k = 1, 2$). Здесь и в дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2$ – к ограждающему слою.

Поскольку рассматривается установившийся процесс, можно перейти к подвижной декартовой ($x, y, \eta = z - ct$) или цилиндрической ($r, \theta, \eta = z - ct$) системе координат. Для описания движения массива и ограждающего слоя используем динамические уравнения теории упругости

$$\left(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2} \right) \text{grad div } \mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 \mathbf{u}_k = \partial^2 \mathbf{u}_k / \partial \eta^2, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения-скатия и сдвига в массиве и ограждающем слое, $\lambda_k = 2\mu_k v_k / (1 - 2v_k)$; \mathbf{u}_k – векторы смещений точек массива и ограждающего слоя, ∇^2 – оператор Лапласа.

Для описания движения несущего слоя воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек, которые в подвижной системе координат имеют подобный [2] вид

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{(1-v_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-v_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{1+v_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{v_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} = \frac{1-v_0}{2\mu_0 h_0} (P_\eta - q_{\eta 2}), \\ & \frac{1+v_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-v_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} = \frac{1-v_0}{2\mu_0 h_0} (P_\theta - q_{\theta 2}), \\ & \frac{v_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \frac{(1-v_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} = -\frac{1-v_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_{r 2}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $R = R_2$; $u_{0\eta}$, $u_{0\theta}$, u_{0r} – перемещения точек срединной поверхности несущего слоя; v_0 , μ_0 , ρ_0 – коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность его материала; $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности нагрузки $P(\theta, \eta)$; $q_{j2} = \sigma_{rj2}|_{r=R_2}$ – составляющие реакции ограждающего слоя,

σ_{rj2} – компоненты тензоров напряжений в ограждающем слое, $j = \eta, \theta, r$.

Выразим векторы \mathbf{u}_k через потенциалы Ламе

$$\mathbf{u}_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

которые, как следует из (1) и (3), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \partial^2 \varphi_{jk} / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где \mathbf{e}_η – орт оси η , $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Через эти же потенциалы можно выразить компоненты тензоров напряжений в массиве и ограждающем слое σ_{lmk} , связанные с компонентами векторов перемещений u_{lk} законом Гука ($l, m = r, \theta, \eta, k = 1, 2; l, m = x, y, \eta, k = 1$).

Рассмотрим вначале подвижную нагрузку с произвольной зависимостью от угловой координаты и изменяющуюся вдоль оси η синусоидально

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \quad P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta, \quad (5)$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

Потенциалы Ламе представим в аналогичном виде: $\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}$. Подставляя последнее выражение в (4), получим

$$\nabla^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

где $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$, $m_{1k} \equiv m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$, ∇^2 – двумерный оператор Лапласа.

В дозвуковом случае $M_{sk} < 1$ ($m_{sk} > 0$, $k = 1, 2$), и решения уравнений (6) можно представить в виде

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (7)$$

где:

- для массива

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1} r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\xi + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta;$$

- для ограждающего слоя

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2} r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2} r) e^{in\theta}.$$

Здесь $I_n(k_j r)$, $K_n(k_j r)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$, $j = 1, 2, 3$; $g_j(\xi, \zeta)$, a_{n1}, \dots, a_{n9} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [2], представление потенциалов для полупространства в форме (7) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xyf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\xi} d\zeta, \quad (8)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\Phi_{nj} = [(\zeta + f_j)/k_{j1}]^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся с учётом (8) граничными условиями на свободной от нагрузок поверхности полупространства:

$$\text{при } x = h \quad \sigma_{xxl} = \sigma_{xyl} = \sigma_{x\eta l} = 0.$$

Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнивая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi, \zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}. \quad (9)$$

Вид определителя Δ_* и алгебраических дополнений Δ_{jl}^* совпадает с аналогичными определителями для неподкрепленной полости в упругом полупространстве и определён в [1]. Там же показано, что $\Delta_*(\xi, \zeta)$ не обращается в ноль при любых ζ , если скорость c бегущей нагрузки меньше скорости c_R рэлеевской волны в полупространстве.

Скорость $c = c_R$ является точкой бифуркации решения задачи. При $c \geq c_R$ нарушается единственность решения. Если отказаться от условия затухания решения на бесконечности позади транспортной нагрузки, то можно выделить единственное решение, затухающее на бесконечности впереди транспортной нагрузки, что соответствует физическим представлениям. В этом случае в тоннеле возникают свободные поверхностные волны, описывающие незатухающие колебания его обделки. Следует отметить, что в реальных средах рэлеевская скорость c_R несколько ниже (на 5÷10%) скорости волн сдвига.

Пусть $c < c_R$. В этом случае все подынтегральные функции в (8) непрерывны и экспоненциально стремятся к нулю на бесконечности. С учетом (9), формулы (8) имеют вид

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta.$$

Используя известное при $x < h$ соотношение

$$\exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2})/k_j \right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}}$$

представим Φ_{j1} (7) с учетом (9) в цилиндрической системе координат для $c < c_R$

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r)) e^{in\theta},$$

$$\text{где } b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}, \quad A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta.$$

Подставив найденные для потенциалов соотношения в выражения для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) массива и ограждающего слоя, можно получить выражения для перемещений u_{lk}^* и напряжений σ_{lmk}^* (* означает, что данные компоненты соответствуют случаю действия на оболочку синусоидальной подвижной нагрузки), где неизвестными будут только коэффициенты a_{n1}, \dots, a_{n9} ($l, m = r, \theta, \eta, k = 1, 2; l, m = x, y, \eta, k = 1$).

Так как при действии на оболочку бегущей синусоидальной нагрузки в установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (5), то

$$u_{0j}(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta} e^{i\xi\eta}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (2), для n -го члена разложения получим

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_1^2 u_{0m} + v_{02} n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i v_0 \xi_0 u_{0nr} = G_0 (P_m - q_{m2}), \\
 & v_{02} n \xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2i n u_{0nr} = G_0 (P_{n\theta} - q_{n\theta2}), \\
 & 2i v_0 \xi_0 u_{0m} + 2i n u_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} = G_0 (P_{nr} - q_{nr2}),
 \end{aligned} \tag{11}$$

где $\varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\xi_0 = \xi R$,
 $\alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + v_{01} n^2$, $\beta_0^2 = v_{01} \xi_0^2 + 2n^2$, $\gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2$, $\varepsilon_0^2 = v_{01} \xi_0^2 M_{s0}^2$,
 $v_{01} = 1 - v_0$, $v_{02} = 1 + v_0$, $M_{s0} = c/c_{s0}$, $c_{s0} = (\mu_0/\rho_0)^{1/2}$, $\chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}$, $G_0 = -(v_{01} R^2)/(\mu_0 h_0)$;

при $r = R_1$: $q_{nj2} = (\sigma_{nj2}^*)_n, j = \eta, \theta, r$.

Разрешая (11) относительно $u_{0m}, u_{0n\theta}, u_{0nr}$, находим

$$u_{0m} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{nj} (P_{nj} - q_{nj2}), \quad u_{0n\theta} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{nj} (P_{nj} - q_{nj2}), \quad u_{0nr} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{nj} (P_{nj} - q_{nj2}).$$

Здесь $\delta_n = \delta_{|n|} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2 \xi_1 \xi_2 \xi_3$,

$$\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \xi_3^2, \quad \delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3),$$

$$\delta_{\theta 1} = \delta_{\eta 2}, \quad \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3),$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta 3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}, \quad \delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2, \quad \xi_1 = 2n, \quad \xi_2 = 2v_0 \xi_0, \quad \xi_3 = v_{02} \xi_0 n;$$

для q_{nj1} и q_{nj2} индекс $j = 1$ соответствует индексу $\eta, j = 2 - \theta, j = 3 - r$.

Для определения коэффициентов a_{n1}, \dots, a_{n9} воспользуемся следующими граничными условиями.

При скользящем контакте слоёв оболочки:

- для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1}^* = u_{r2}^*, \quad \sigma_{rr1}^* = \sigma_{rr2}^*, \quad \sigma_{r\eta 1}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 1}^* = 0, \quad \sigma_{m1}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 2}^* = 0,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{r2}^* = u_{0r}, \quad \sigma_{r\eta 2}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 2}^* = 0, \quad j = r, \theta, \eta, \tag{12}$$

- для жесткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{j1}^* = u_{j2}^*, \quad \sigma_{nj1}^* = \sigma_{nj2}^*,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{r2}^* = u_{0r}, \quad \sigma_{r\eta 2}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 2}^* = 0, \quad j = r, \theta, \eta. \tag{13}$$

При жестком сопряжении слоёв оболочки:

- для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1}^* = u_{r2}^*, \quad \sigma_{rr1}^* = \sigma_{rr2}^*, \quad \sigma_{m1}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 1}^* = 0, \quad \sigma_{m2}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 2}^* = 0,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{j2}^* = u_{0j}, \quad j = r, \theta, \eta, \tag{14}$$

- для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{j1}^* = u_{j2}^*, \quad \sigma_{nj1}^* = \sigma_{nj2}^*,$$

(15)

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{j2}^* = u_{0j}, \quad j = r, \theta, \eta.$$

Подставляя в (12)-(15) соответствующие выражения и приравнивая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, для определенных граничных условий получим бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального типа с матрицами (9×9) вдоль главной диагонали, для решения которой рекомендуется использовать метод последовательных отражений (приближений) [1].

Зная решение задачи для синусоидальной нагрузки (5), реакцию оболочки и окружающей ее среды на движущуюся с постоянной скоростью апериодическую (локальную) нагрузку характерного для транспортных средств вида $P(\theta, \eta) = p(\theta)p(\eta)$ можно найти при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС массива и ограждающего слоя в виде интегралов Фурье

$$\begin{aligned} P(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, \\ P_m(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^*(\theta, \xi) e^{i\xi\eta} d\xi = p_m(\theta)p(\eta) = p_m(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) e^{i\xi\eta} d\xi, \quad m = r, \theta, \eta; \\ u_{lk}(r, \theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{lk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \quad \sigma_{lmk}(r, \theta, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lmk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \\ l &= r, \theta, \eta, \quad m = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$.

Для вычислений перемещений и напряжений (16) можно использовать любой численный метод интегрирования, если определители $\Delta_n(\xi, c)$ разрешающей системы линейных алгебраических уравнений отличны от нуля, т.е. когда скорость движения нагрузки с меньше ее критических скоростей $c_{(n)*}$, которые могут оказаться меньше, чем скорость волн Рэлея в окружающем упругом массиве. Значения $c_{(n)*}$ зависят от числа n и определяются из дисперсионных уравнений $\Delta_n(\xi, c) = 0$ как минимумы соответствующих этим уравнениям дисперсионных кривых $c \sim \xi$. Причём, минимальная критическая скорость, как показывают расчёты, имеет место при $n = 0$ ($\min c_{(n)*} = c_{(0)*}$) [2].

2. Численные эксперименты. Рассмотрим подкрепленный двухслойной обделкой тоннель мелкого заложения ($h = 2R_2$) в массиве со следующими характеристиками: $v_1 = 0,25$, $\mu_1 = 4,0 \cdot 10^3$ МПа, $\rho_1 = 2,6 \cdot 10^3$ кг/м³ [3]; $c_{s1} = 1240,35$ м/с, $c_R = 1140,42$ м/с. Параметры внутреннего (несущего) слоя: $R_2 = R = 1$ м, $h_0/R = 0,02$; $v_0 = 0,3$, $\mu_0 = 8,08 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_0 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³ (сталь). Параметры наружного (ограждающего) слоя толщиной $h_c = R_1 - R_2$: $v_2 = 0,25$, $\mu_2 = 2,8 \cdot 10^3$ МПа, $\rho_2 = 2,65 \cdot 10^3$ кг/м³ [3]; $c_{s2} = 1028$ м/с. Этот слой является менее жестким, чем окружающий его массив ($\mu_2 < \mu_1$). Контакт между слоями обделки и последней с массивом полагаем жестким.

В таблицы 1, 2 помещены значения критических скоростей нагрузки $c_{(n)*}$ для рассматриваемого тоннеля, и для этого же тоннеля без ограждающего слоя.

Таблица 1 – Критические скорости нагрузки для тоннеля, подкрепленного двухслойной обделкой, м/с

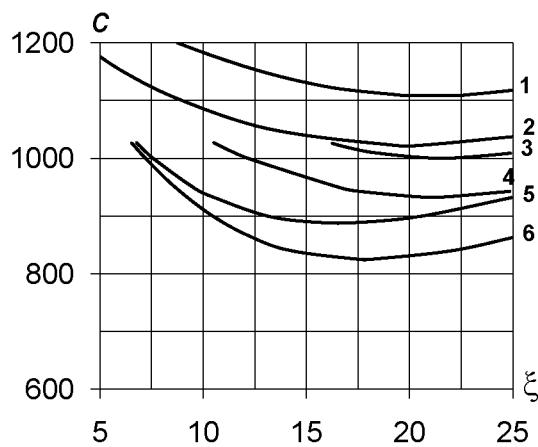
h_c/R	$c_{(0)*}$	$c_{(1)*}$	$c_{(2)*}$	$c_{(3)*}$	$c_{(4)*}$	$c_{(5)*}$
0,1	1001	1002	1005	–	–	–
0,2	964	965	968	983	1012	–
0,3	955	956	959	974	1000	–
0,4	953	954	957	972	997	–
0,5	952	953	956	971	996	–
0,6	952	953	956	971	996	–
0,7	952	953	956	971	996	–
0,8	952	953	956	971	996	–
0,9	952	953	956	971	996	–
1,0	952	953	956	971	996	–

Таблица 2 – Критические скорости нагрузки для тоннеля без ограждающего слоя, м/с

h_{02}/R	$c_{(0)*}$	$c_{(1)*}$	$c_{(2)*}$	$c_{(3)*}$	$c_{(4)*}$	$c_{(5)*}$
0,02	1109	1110	1113	1127	1157	1177

Из таблиц следует, что в случае ограждения стальной оболочки слоем, жёсткость которого меньше жесткости окружающей среды, происходит снижение значений критических скоростей нагрузки. При $h_c/R = 0,1$ критические скорости $c_{(n)*}$ поникаются на 10%. С увеличением толщины слоя h_c происходит дальнейшее уменьшение $c_{(n)*}$, которое прекращается при $h_c/R = 0,5$. Как показали расчёты, значения критических скоростей нагрузки при $h_c/R \geq 0,5$ совпадают со значениями критических скоростей, найденных для стальной оболочки, окружённой массивом с физико-механическими характеристиками ограждающего слоя.

Влияние контактных условий на низшую критическую скорость нагрузки $c_{(0)*}$, м/с проиллюстрировано на рисунке, где приведены дисперсионные кривые при $n = 0$. Обозначения кривых для тоннеля без ограждающего слоя: 1 – жесткий контакт обделки с массивом, 2 – скользящий контакт обделки с массивом. Обозначения кривых для тоннеля с ограждающим слоем при $h_c/R = 0,1$: 3 – жесткое сопряжение слоев обделки и последней с массивом; 4 – скользящий контакт между слоями обделки, жестко сцеплённой с массивом; 5 – жесткий контакт между слоями обделки при ее скользящем контакте с массивом; 6 – скользящий контакт между слоями обделки и ограждающего слоя с массивом.



Дисперсионные кривые для тоннелей

Минимумы кривых определяют значения низших критических скоростей $c_{(0)*}$ нагрузки. Для кривой 1 $c_{(0)*} = 1109$ м/с, 2 – $c_{(0)*} = 1023$ м/с, 3 – $c_{(0)*} = 1001$ м/с, 4 – $c_{(0)*} = 933$ м/с, 5 – $c_{(0)*} = 855$ м/с, 6 – $c_{(0)*} = 825$ м/с. Из этого следует, что при замене жёсткого контакта обделки с массивом на скользящий критические скорости снижаются.

Для повышения критических скоростей нагрузки можно использовать более жесткий, чем массив, ограждающий слой ($\mu_2 > \mu_1$). Например, применив в качестве такого слоя бетон ($v_2 = 0,2$, $\mu_2 = 1,21 \cdot 10^4$ МПа, $\rho_2 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $c_{s2} = 2200$ м/с). Как показали проведенные численные исследования, соответствующие этому случаю дисперсионные уравнения корней не имеют.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Украинец В.Н. Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайтырова, 2006. – 123 с.
- [2] Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Динамика упругого полупространства с подкрепленной цилиндрической полостью при подвижных нагрузках //Прикладная механика. – 2009. – № 9. – С.75-85.
- [3] З Булычев Н.С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – М.: Недра, 1989. – 270 с.

REFERENCES

- [1] Ukrainianets V.N. Dynamics of tunnels and pipelines of a small embedding under the influence of mobile loads. – Pavlodar: Research Center PSU, 2006. – 123 pages.
- [2] Alekseyeva L.A., Ukrainianets V.N. Dynamics of an elastic half-space with the supported cylindrical cavity at mobile loads// Intern. sc. mag. "Applied mechanics". NAN of Ukraine. – 2009. – V.45. – No. 9. – Page 75-85.
- [3] Bulychev N.S. Mekhanika podzemnykh sooruzhenii v primerakh i zadachakh [Mechanics of underground structures in examples and problems], Moscow, Nedra Publ., 1989, 270 p.

**ТАЯЗ ОРНАЛАСҚАН ТОННЕЛЬДІҢ ҚОСҚАБАТ ҚАПТАМАСЫНЫң КОНТАКТ ШАРТТАРЫ
МЕН ПАРАМЕТРЛЕРИНЕН КӨЛІК ЖҮКТЕМЕСІНІҢ ҚАУІПТІ ЖЫЛДАМДЫҒЫНА ӘРЕКЕТІ**

В. Н. Украинец¹, Ж. О. Отарбаев², С. Р. Гирнис¹

¹С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік университеті, Қазақстан,

²К. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: тоннель, қабатты қабықша, көлік жүктемесі, жүктеме қозғалысының қауіпті жылдамдығы.

Аннотация. Серпімді жартылай кеңістіктегі екі қабатты қабықшага жүгірмелі жүктеме әрекеті туралы есептің шешімі негізінде көлік жүктемелері әсер еткенде таяз орналасқан тоннельдің қосқабат қаптамасының геометриялық пен физика-механикалық параметрлерінен және оның контакт шарттарынан көлік жүктемесінің (ішкітоннельдің жылжымалы көлігінің жүктемесі) қауіпті жылдамдығына әсері зерттеленді.

Көлік жүктемесі әрекетінен тоннель динамикасының математикалық моделін құру кезінде коршаған массивпен қабықшаның сыртқы қалын қабатының қозғалысын сипаттау үшін жүктемеге байланған жылжымалы координаталар жүйесіндегі серпімді теориясының динамикалық тендеулер қолданылды. Берілген массив және қабат нүктелердің жылжу векторлары Ламе потенциалдар арқылы көрсетілген. Қабықшаның ішкі жұқа қабаттың тербелісі қолданылған жылжымалы координаталар жүйесінде жұқа қабықшаның класикалық теориясының жуықталған тендеулермен анықталған. Бұл авторлармен шығарылған есеп шешімін жүктеме қозғалысының жылдамдығы дыбысқа дейін жағдайда (коршаған массивпен қабықшаның сыртқы қалын қабатында жылжу толқының жылдамдығы жүктеме қозғалысының жылдамдығынан кем болғанда) едәуір женілдетеді.

Сандық эксперименттер мен шығарылған есептің шешімін пайдалағанда мақалада тоннель қаптамасының қабаттары және жыныс массивпен қаптаманың түйіндесу шарттарынан (қатты және сырғырмалы контакттар) көлік жүктеменің қауіпті жылдамдығына әрекеті зерттелінді. Есеп нәтижелері кестелер мен графиктер түрінде толық талданған. Қаптаманың сыртқы қабаттың қаттылығы өскенде көлік жүктеменің қауіпті жылдамдығы үлкесіді деп анықталған.

Поступила 22.05.2015 г.

**BULLETIN OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

ISSN 1991-3494

Volume 4, Number 356 (2015), 130 – 134

**«INVERSION» AS A METHOD OF EXCLUSION
OF «SMALL DENOMINATORS» IN THE HILL’S SECOND PROBLEM**

**M. D. Shinibaev¹, A. A. Bekov¹, S. A. Zholdasov², O. Kashikbaev²,
B. N. Rakhimzhanov³, E. A. Akinbekov⁴,**

¹ JSC «National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan,

²Syr-Dariya University, Zhetisay, Kazakhstan,

³ Kokshetausky State University after Sh. Ualikhanov, Kokshetau, Kazakhstan,

⁴ South-Kazakhstan State University after M. Auezov, Shymkent, Kazakhstan.

E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

Keywords: resonance, orbits, small denominator, the gravitational field, the force function, Earth satellite, polar coordinates.

Abstract. For disclosure of the essence of the problem we give some details of the geometry, astronomy, and the theory of the intermediate orbits. In geometry, introduces the concept of inversion [1]. This transformation which takes each A point in the plane of the point A' , lying on the moon OA that $OA' \cdot OA = k$, where $k - \text{const}$ degree of