BULLETIN OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 1991-3494
Volume 2, Number 354 (2015), 194 – 197

WINDOWING ARBITARY SIGNAL. PRINCIPLE WAVELET – TRANSFORMATION. PART 1

A. S. Tergeussizova

Almaty University of Power Engineering & Telecommunications, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: aliya55@mail.ru

Keywords: wavelet transform, wavelet-analysis, wavelet basis, signal analysis, the Fourier transform of the window function, the non-stationary signal.

Abstract. Windowing is a family of spectra, which shows the change of the signal at intervals shift conversion window. This allows you to select on a coordinate axis and analyze the features of non-stationary signals. A distinctive feature of wavelet analysis is that it can use a family of functions that implement the various embodiments of the uncertainty relation. Accordingly, the researcher has the flexibility to choose between them and the application of the wavelet functions that most effectively solves the problem. The report describes the windowed Fourier transform and the principle of wavelet - transformation.

УДК 004.383.3:621.391

ОКОННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА. ПРИНЦИП ВЕЙВЛЕТ – ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. ЧАСТЬ 1

А. С. Тергеусизова

Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: вейвлет преобразование, вейвлет-анализ, вейвлетный базис, анализ сигналов, оконное преобразование Фурье, функция, нестационарный сигнал.

Аннотация. Оконное преобразование это семейство спектров, которыми отображается изменение спектра сигнала по интервалам сдвига окна преобразования. Это позволяет выделять на координатной оси и анализировать особенности нестационарных сигналов. Отличительной особенностью вейвлет-анализа является то, что в нем можно использовать семейства функций, реализующих различные варианты соотношения неопределенности. Соответственно, исследователь имеет возможность гибкого выбора между ними и применения тех вейвлетных функций, которые наиболее эффективно решают поставленные задачи. В докладе описаны оконное преобразование Фурье и принцип вейвлет-преобразования.

Принцип вейвлет - преобразования. Гармонические базисные функции преобразования Фурье предельно локализованы в частотной области (до импульсных функций Дирака при $T \to \infty$) и не локализованы во временной (определены во всем временном интервале от $-\infty$ до ∞). Их противоположностью являются импульсные базисные функции типа импульсов Кронекера, которые предельно локализованы во временной области и «размыты» по всему частотному диапазону. Вейвлеты по локализации в этих двух представлениях можно рассматривать как функции, занимающие промежуточное положение между гармоническими и импульсными функциями. Они должны быть локализованными как во временной, так и в частотной области представления. Однако при проектировании таких функций мы неминуемо столкнемся с принципом неопределенности, связывающим эффективные значения длительности функций и ширины их спектра. Чем точнее мы будем осуществлять локализацию временного положения функции, тем шире будет становиться ее спектр, и наоборот, что наглядно видно на рисунке 1.

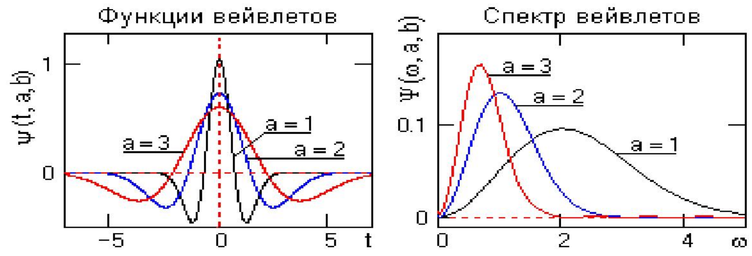

Рисунок 1 – Локализация временного положения функции

Отличительной особенностью вейвлет-анализа является то, что в нем можно использовать семейства функций, реализующих различные варианты соотношения неопределенности. Соответственно, исследователь имеет возможность гибкого выбора между ними и применения тех вейвлетных функций, которые наиболее эффективно решают поставленные задачи [3].

Вейвлетный базис пространства $L^2(R)$, $R(-\infty, \infty)$, целесообразно конструировать из финитных функций, принадлежащих этому же пространству, которые должны стремиться к нулю на бесконечности. Чем быстрее эти функции стремятся к нулю, тем удобнее использовать их в качестве базиса преобразования при анализе реальных сигналов. Допустим, что такой функцией является psi-функция t, равная нулю за пределами некоторого конечного интервала и имеющая нулевое среднее значение по интервалу задания. Последнее необходимо для задания локализации спектра вейвлета в частотной области. На основе этой функции сконструируем базис в пространстве $L^2(R)$ с помощью масштабных преобразований независимой переменной.

Функция изменения частотной независимой переменной в спектральном представлении сигналов отображается во временном представлении растяжением/сжатием сигнала. Для вейвлетного базиса это можно выполнить функцией типа (t) =>(a^mt), a = const, m = 0, 1, … , M, т.е. путем линейной операции растяжения/сжатия, обеспечивающей самоподобие функции на разных масштабах представления. Однако локальность функции (t) на временной оси требует дополнительной независимой переменной последовательных сдвигов функции (t) вдоль оси, типа (t) => (t+k), для перекрытия всей числовой оси пространства $R(-\infty, \infty)$ [4]. С учетом обеих условий одновременно структура базисной функции может быть принята следующей:

$$(t) \Rightarrow (a^m t+k). \tag{1.3}$$

Для упрощения дальнейших выкладок значения переменных m и k примем целочисленными. При приведении функции (1.3) к единичной норме, получаем:

$$_{mk}(t) = a^{m/2}\,(a^m t+k). \tag{1.4}$$

Если для семейства функций $_{mk}(t)$ выполняется условие ортогональности:

$$\langle _{nk}(t),\ _{lm}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} {}_{nk}(t)\cdot{}^{*}{}_{lm}(t)\,dt \tag{1.5}$$

то семейство $_{mk}(t)$ можно использовать в качестве ортонормированного базиса пространства $L^2(R)$. Произвольную функцию этого пространства можно разложить в ряд по базису $_{mk}(t)$:

$$s(t) = \sum_{m,k=-\infty}^{\infty} S_{mk}\ {}_{mk}(t), \tag{1.6}$$

где коэффициенты S_{mk} – проекции сигнала на новый ортогональный базис функций, как и в преобразовании Фурье, определяются скалярным произведением

$$S_{mk} = \langle s(t),\ _{mk}(t)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)_{mk}(t)\,dt, \tag{1.7}$$

– при этом ряд равномерно сходится:

$$\lim_{M,K\Rightarrow\infty} \|s(t) - \sum_{m=-M}^{M}\ \sum_{k=-K}^{K} S_{mk}\ {}_{mk}(t),\| = 0. \tag{1.8}$$

При выполнении этих условий базисная функция преобразования (t) называется ортогональным вейвлетом.

Простейшим примером ортогональной системы функций такого типа являются функции Хаара. Базисная функция Хаара определяется соотношением

$$(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < 1/2 \\ -1, & 1/2 < t < 1 \\ 0, & t < 0,\ t > 1. \end{cases} \qquad (1.9)$$

Легко проверить, что при a = 2, m = 0, 1, 2, ..., k = 0, 1,2, … две любые функции, полученные с помощью этого базисного вейвлета путем масштабных преобразований и переносов, имеют единичную норму и ортогональны. На рисунке 2 приведены примеры функций для первых трех значений m и b при различных их комбинациях, где ортогональность функций видна наглядно.

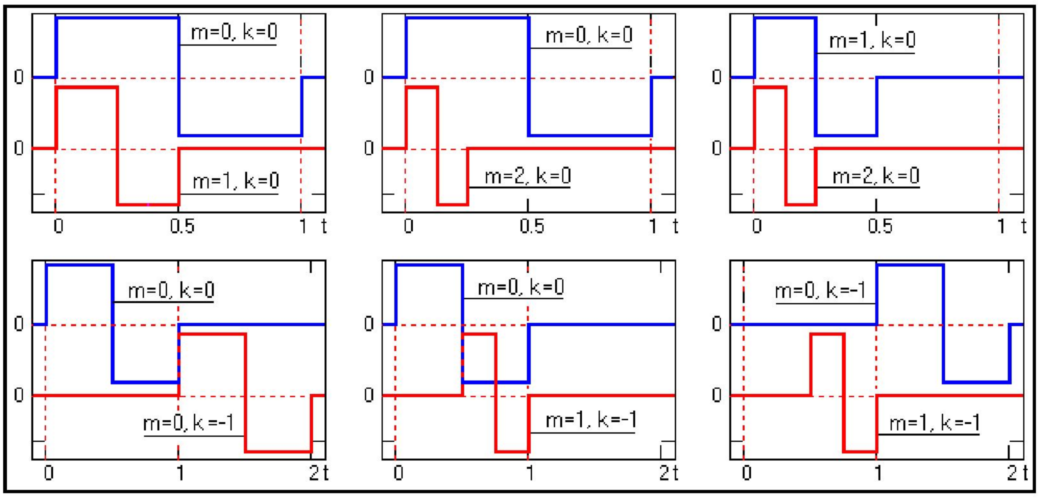

Рисунок 2 – Функции Хаара

Вейвлетный спектр, в отличие от преобразования Фурье, является двумерным и определяет двумерную поверхность в пространстве переменных m и k. При графическом представлении параметр растяжения/сжатия спектра m откладывается по оси абсцисс, параметр локализации k по оси ординат – оси независимой переменной сигнала. Математику процесса вейвлетного разложения сигнала в упрощенной форме рассмотрим на примере разложения сигнала s(t) вейвлетом Хаара с тремя последовательными по масштабу m вейвлетными функциями с параметром a=2, при этом сам сигнал s(t) образуем суммированием этих же вейвлетных функций с одинаковой амплитудой с разным сдвигом от нуля, как это показано на рисунке 3.

Для начального значения масштабного коэффициента сжатия m определяется функция вейвлета, и вычисляется скалярное произведение сигнала с вейвлетом $\langle 1(t), s(t+k)\rangle$ с аргументом по

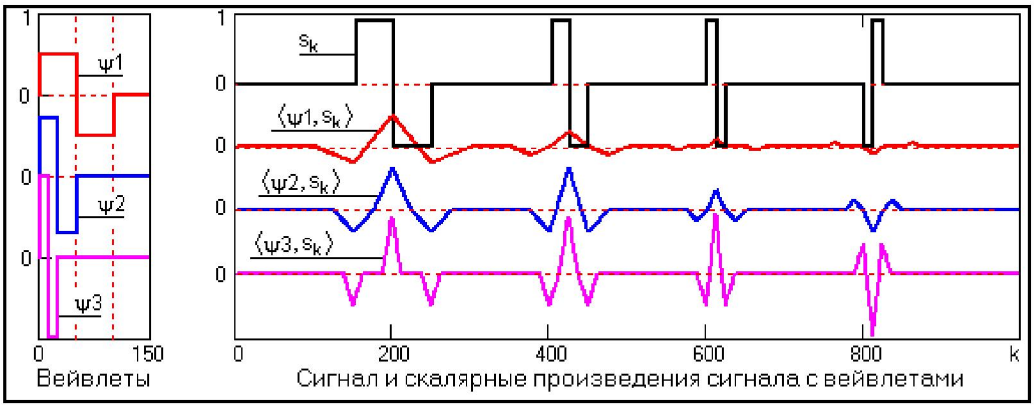

Рисунок 3 – Скалярные произведения сигнала с вейвлетами сдвигу k. Для наглядности результаты вычисления скалярных произведений на рисунке 3 построены по центрам вейвлетных функций (т.е. по аргументу k от нуля со сдвигом на половину длины вейвлетной функции). Как и следовало ожидать, максимальные значения скалярного произведения отмечаются там, где локализована эта же вейвлетная функция [5].

После построения первой масштабной строки разложения, меняется масштаб вейвлетной функции и выполняется вычисление второй масштабной строки спектра, и т.д.

Как видно на рисунке 4, чем точнее локальная особенность сигнала совпадает с соответствующей функцией вейвлета, тем эффективнее выделение этой особенности на соответствующей масштабной строке вейвлетного спектра. Можно видеть, что для сильно сжатого вейвлета Хаара характерной хорошо выделяемой локальной особенностью является скачок сигнала, причем выделяется не только скачок функции, но и направление скачка.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет анализ и его приложения. – М.: Физматлит, 2003. – 176 с.
[2] Малла С. Вейвлеты в обработке сигналов. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
[3] Bussow R. // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2007. – Vol. 21, N 8. – P. 2970.
[4] Штарк Г.-Г. Применение вейвлетов для ЦОС. – М.: Техносфера, 2007.
[5] Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – М.; Ижевск: РХД, 2001.
[6] Чуи Ч. Введение в вейвлеты. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

REFERENCES

[1] Koronovskii A.A., Hramov A.E. Temples Continuous wavelet analysis and its applications. M.: FIZMATLIT, 2003. 176 p.
[2] Malla S. Wavelets in signal processing. M .: Mir, 2005. 671 c.
[3] Bussow R. Mechanical Systems and Signal Processing. 2007. Vol. 21, N 8. P. 2970.
[4] Stark H.-G. The use of wavelets for DSP. M .: Technosphere, 2007.
[5] Daubechies. Ten lectures on wavelets. M.; Izhevsk: RHD, 2001.
[6] Chui C. Introduction to wavelets. M.: The World, 2001. 412 p.

КЕЗ КЕЛГЕН СИГНАЛДЫ ТЕРЕЗЕЛІК ТҮРЛЕНДІРУ. ВЕЙВЛЕТ-ТҮРЛЕНДІРУ ҚАҒИДАСЫ. 1-БӨЛІМ

А. С. Тергеусизова

Алматы Энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: вейвлет-түрлендіру, вейвлет-талдау, вейвлеттік базис, сигналдарды талдау, Фурьенің терезелік түрлендіруі, функция, қалыпты емес сигнал.

Аннотация. Терезелік түрлендіру дегеніміз түрлендіру терезесін ығыстыру аралығы бойынша сигнал спектрінің өзгеруін бейнелейтін спектрлер жиыны. Бұл қалыпты емес сигналдардың ерекшеліктерін координат осінде айқындауға және талдауға мүмкіндік береді. Вейвлет-талдаудың айрықша ерекшелігі – онда белгісіздіктердің қатынастарының әртүрлі нұсқаларын жүзеге асыратын функцияларды пайдалануға болатындығы. Осыған байланысты, зерттеуші олардың ішінен таңдауға және өзіне қойылған есептерді тиімді шешуге ыңғайлы вейвлет-функцияларды пайдалануына болады. Баяндамада Фурьенің терезелік түрлендіруі мен вейвлет-түрлендіру қағидалары сипатталынған.

Поступила 20.03.2015 г.