УДК 517.948

М. Ю. НЕМЧЕНКО

(Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы
Университет им.Сулеймана Демиреля, Каскелен)

К ВОПРОСАМ СПЕКТРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ОДНОСКОРОСТНОГО ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

M. Y. Nemchenko

(Institute of Mathematics and Mathematical Modeling SCMESRK, Almaty;
SuleymanDemirel University, Kaskelen, Almaty)

ISSUES FOR THE OPERATOR SPECTRAL GEOMETRY OF ONE-SPEED PARTICLE TRANSPORT

Keywords: eigenvalues, spectral geometry,operator of single-speed transfer of particles.

Abstract It is proved that among all regions with the same measure of the ball minimizes the first eigenvalue of a single-speed transfer of particles in multidimensional Euclidean space. This result applies to the theory of spectral geometry. A similar result is true for the Newtonian potential in a multidimensional Euclidean space of dimension greater than two.

It is proved that among all regions with the same measure of the ball minimizes the first eigenvalue ofoperator single-speed transfer of particles in multidimensional Euclidean space. This result applies to the theory of spectral geometry. A similar result is true for the Newtonian potential in a multidimensional Euclidean space of dimension greater than two.

First time in the scientific literature J.W.S. Rayleigh in his famous book "The Theory of Sound" (book published in 1877) by explicit calculations and physical interpretations argued that minimizes the circle (among all regions of equal volume) the first eigenvalue of the Laplace operator with Dirichlet boundary condition. The proof of this hypothesis was obtained only after 30 years at the same time and independently by G.Faber and E.Krahn. Currently inequality Rayleigh-Faber-Krahn extended to many other boundary spectral problems, and operators.

Аннотация. В работе доказано, что среди всех областей с одинаковой мерой шар минимизирует первое собственное значение оператора односкоростного переноса частиц в многомерном евклидовом пространстве. Полученный результат относится к теории спектральной геометрии. Аналогичный результат является верным для Ньютоново потенциала в многомерном евклидовом пространстве размерности больше двух.

Ключевые слова: собственные значения, спектральная геометрия, оператор односкоростного переноса частиц.

Тірек сөздер: меншіктімәндер, спектрлік геометрия, біржылдамдықтыбөлшектасымалы оператор.

1. Введение и основной результат

Односкоростное уравнение переноса (при определенных условиях) описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, передачи лучистой энергии, прохождение гамма-квантов через вещество, движение газов и другие процессы. Работы, опубликованные в последнее время в этой области, привели к ряду интересных результатов, например [1,2,3]. Известно, что если длина свободного пробега частиц значительно больше, чем их размеры, то процесс распространения частиц может быть описан более точным уравнением, нежели уравнение диффузии: а именно, так называемым односкоростным уравнением переноса. Рассмотрим односкоростное уравнение переноса с учетом следующих предположений: (1) скорость всех частиц одинакова и равна v ; (2) столкновения между частицами могут быть проигнорированы; (3) частицы сталкиваются с неподвижными ядрами среды; (4) когда частицы сталкиваются с неподвижным ядром в точке x происходит одно из трех следующих случайных событий: (a) с вероятностью p_1 частица рассеивается в ядре, отскакивая от него, как упругий шарик, (б) с вероятностью p_2 частица может быть захвачена ядром, (c) с вероятностью p_3 частица может разделить ядро, в результате чего $v \geq 1$ появляются новые частицы (в данном случае считается, что частица, которая разделила ядро исчезает); (5) распределение частиц по отношению к направлению изотропно после рассеяния, а также после деления. Обозначим через $\psi(x,s)$ поток частиц в точке $x = (x_1, \dots, x_d)$ в стационарном состоянии, двигающийся в направлении $s = (s_1, \dots, s_d)$, $|s| = 1$ внутри области без источников. Тогда функция $\psi(x,s)$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению

$$(s, grad\,\psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi}\int_S \psi(x,\zeta)d\zeta\,, \tag{1}$$

где S – поверхность единичной сферы, $h = p_1 + vp_3$, $(s,\psi) = \sum_{i=1}^{d} s_i \frac{\partial\psi}{\partial x_i}$,

$\alpha = {}^1/_l$, l – среднее значение свободного пробега в точке x, кроме того, предполагаем $l = const$. Уравнение (1) является уравнением переноса с изотропным рассеянием без источников. Более подробная теория уравнений переноса и связанные с ним исследования могут быть найдены в [4], [5] и [6]. Для полного описания процесса переноса частиц необходимо описать поведение потока частиц $\psi(x,s)$ на границе этой среды (граничные условия). Для простоты считаем, что область Ω с границей $\partial\Omega$, где происходит процесс переноса, выпукла. В этом случае граничное условие типа Дирихле

$$\psi(x,s) = 0, (s, n_x) < 0 \tag{2}$$

выражает отсутствие потока частиц, падающих на область Ω с внешней стороны. В граничном условии (2) n_x является единичной внешней нормалью в точке x, а (s, n_x) – скалярное произведение. Оператор, порожденный уравнением (1) и граничным условием (2) назовем оператором односкоростного переноса частиц. Получили спектральную задачу для оператора односкоростного переноса частиц

$$(s, grad\,\psi) + \alpha\psi = \frac{\lambda}{4\pi}\int_S \psi(x,\zeta)d\zeta\,, x \in \Omega, \tag{3}$$

$$\psi(x,s) = 0, (s, n_x) < 0, x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

где $\lambda = \alpha h$. Известно, что спектральная задача (3)-(4) эквивалентна интегральному уравнению Пайерлса[7]

$$\varphi(x) = \lambda\int_\Omega P(|x-y|)\varphi(y)dy, \tag{5}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\pi}\int_S \psi(x,\zeta)d\zeta$$

и

$$P(|x-y|) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{-\alpha|x-y|}}{|x-y|^{d-1}} \tag{6}$$

– ядро Пайерлса. Оператор Пайерлса компактен в $L_2(\Omega)$. Следовательно его спектр является дискретным. Обозначим собственные значения оператора Пайерлса через $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \dots$ (нумеруем собственные значения в порядке возрастания). В этой статье докажем неравенство

Рэлей-Фабер-Крана для односкоростного уравнения переноса нейтронов (3) с граничным условием типа Дирихле (4), то есть докажем, что шар минимизирует первое собственное значение λ_1 оператора односкоростного переноса частиц во всех областях того же объема многомерного евклидового пространства.

Теорема 1. Пусть $\Omega \subset R^d$ выпуклая область и $\Omega^* \subset R^d$ – шар той же меры, что и Ω, то есть $|\Omega^*| = |\Omega|$, тогда выполняется неравенство

$$\lambda_1(\Omega^*) \le \lambda_1(\Omega). \tag{7}$$

Данный результат может быть интерпретирован теорией односкоростного нейтронного переноса. Впервые в научной литературе Рэлей в своей известной книге «Теория звука» [8] (книга опубликована в 1877 году) с помощью явных вычислений и физических интерпретаций утверждал, что круг минимизирует (среди всех областей равного объема) первое собственное значение оператора Лапласа с граничным условием Дирихле. Музыкальная интерпретация этого результата следующая: среди всех барабанов одинакового объема, круговой барабан производит самые низкие басовые ноты. Доказательство этой гипотезы было получено лишь спустя 30 лет одновременно и независимо Г.Фабером и Э.Краном. В настоящее время неравенство Рэлей-Фабер-Крана расширено для многих других краевых спектральных задач и операторов [9]. Результаты такого рода относятся к теории спектральной геометрии. Многие задачи спектральной геометрии мотивированы вопросами, возникающими в акустике, квантовой механике и других областях физики.

Для удобства читателя в разделе 2 дается краткое описание симметрической невозрастающей перестановки функции, далее в разделе 3 приведено доказательство основного утверждения.

2. Предварительные замечания

Пусть Ω – ограниченное измеримое множество в R^d. Его симметрическая перестановка Ω^* является открытым централизованным шаром, объем которого совпадает с объемом, то есть $|\Omega^*| = |\Omega|$ и

$$\Omega^* = \{x \in R^d \,\|x| < \rho\}.$$

Пусть u неотрицательная измеримая функция, равная нулю на бесконечности в том смысле, что все ее положительные уровневые множества имеют конечную меру:

$$Vol\,(\{x|\, u(x) > t\}) < \infty, \qquad (\forall t > 0).$$

В определении симметрической невозрастающей перестановки функции u используется специальное разложение, которое выражает неотрицательную функцию u в терминах ее уровневых множеств

$$u(x) = \int_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}} dt. \tag{8}$$

Заметим, что характеристическая функция $\chi_{\{u(x)>t\}}$ измерима по совокупности *x* и *t*, когда функция u измерима.

Определение. Функцию $u^*(x) = \int_0^\infty \chi_{\{u(x)>t\}^*} dt$ назовем симметрической невозрастающей перестановкой функции u .

Тогда $u^*(x)$ полунепрерывная снизу (следовательно, уровневые множества открытые) функция, которая единственным образом определяется через функцию распределения $\mu_u(t) = Vol\,\{x|\, u(x) > t\}$. По конструкции u^* той же меры, что и u , то есть соответствующие уровневые множества двух функций имеют одинаковый объем

$$\mu_u(t) = \mu_{u^*}(t), (\forall t > 0). \tag{9}$$

Лемма. (О сохранении норм перестановок в L_2). Для каждой неотрицательной функции u из $L_2(\Omega)$ выполнено соотношение

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \|u^*\|_{L_2(\Omega^*)}.$$

Доказательство. Применяя разложение (8), теорему Фубини и формулу (9), запишем

$$\int_\Omega |u(x)|^2 dx = \int_\Omega\int_0^\infty \chi_{\{u^2(x)>t\}} dt\, dx =$$

$$= \int_0^\infty Vol(\{u^2(x) > t\})dt = \int_0^\infty Vol(\{u(x) > s\})2sds =$$

$$= \int_0^\infty \mu_u(s)2sds = \int_0^\infty \mu_{u^\bullet}(s)2sds =$$

$$= \int_0^\infty Vol(\{u^\bullet(x) > s\})2sds = \int_0^\infty Vol(\{u^{\bullet 2}(x) > t\})dt =$$

$$= \int_\Omega\int_0 \chi_{\left\{u^\bullet \infty \rangle t\right\}} dtdx = \int_\Omega \left|u^\bullet(x)^2\right| dx.$$

Утверждение леммы следует из того, что функция $u^\bullet$ равноизмерима с функцией u .

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся теоремой Ф.Рисса [10].

Теорема Ф. Рисса

$$\int_\Omega\int_\Omega f(y)g(x-y)h(x)dydx \le \int_{\Omega^\bullet}\int_{\Omega^\bullet} f^\bullet(y)g^\bullet(x-y)h^\bullet(x)dydx, \tag{10}$$

где $f^\bullet, g^\bullet$ и $h^\bullet$ симметрические невозрастающие перестановки положительных измеримых функций f, g и h соответственно.

3. Доказательство теоремы 1.

Так как симметрическое полярное ядро Пайерлса положительно, то наименьшее по модулю собственное значение λ_1 – положительное и простое; а соответствующую собственную функцию $u_1(x)$ можно выбрать положительной в Ω (по теореме Енча[11]).

Из неравенства (10), а также учитывая, что само ядро *P(x)* – симметрическая невозрастающая функция, следует

$$\int_\Omega\int_\Omega u_1(y)P(x-y)u_1(x)dy\,dx \le \int_{\Omega^\bullet}\int_{\Omega^\bullet} u_1^\bullet(y)P(x-y)u_1^\bullet(x)\,dy\,dx.$$

Отсюда учитывая лемму 1 и вариационный принцип для $\lambda_1(\Omega^\bullet)$, имеем

$$\lambda_1(\Omega) = \frac{\int_\Omega (u_1(x))^2 dx}{\int_\Omega\int_\Omega u_1(y)P(x-y)u_1(x)dy\,dx} \ge \frac{\int_{\Omega^\bullet}(u_1^\bullet(x))^2 dx}{\int_{\Omega^\bullet}\int_{\Omega^\bullet} u_1^\bullet(y)P(x-y)u_1^\bullet(x)dy\,dx} \ge$$

$$\ge \inf_{v \in L_2(\Omega^\bullet)} \frac{\int_{\Omega^\bullet}(v(x))^2 dx}{\int_{\Omega^\bullet}\int_{\Omega^\bullet} v(y)P(x-y)v(x)dy\,dx} = \lambda_1(\Omega^\bullet).$$

Теорема 1 доказана полностью.

Замечание 1. Мы можем задаться вопросом является ли шар единственной минимизирующей областью собственного значения λ_1? На самом деле нет, например, диск после удаления конечного числа точек также является минимизирующей областью, а так как пространство $L_2(\Omega)$ не изменится, если мы удалим из Ω множество Ω_0 меры нуль, то любая область вида $\Omega\backslash\Omega_0$ также минимизирует значение λ_1.

Замечание 2. Полученный результат справедлив для Ньютонового потенциала в многомерном евклидовом пространстве размерности больше двух [12], [13].

ЛИТЕРАТУРА

1 Аниконов Д.С., Назаров В.Г. Задача двуракурсной томографии // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 3. – С. 372-378.

2 Smedley-Stevenson R.P. A new analytic solution of the one-speed neutron transport equation for adjacent half-spaces with isotropic scattering // Annals of Nuclear Energy. – 2012. – V. 46. – P. 218-231.

3 Степкин С.А. Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса // Математический сборник.-2001. – Т.192, №1. – С.139-160.

4 Владимиров В.С. Математический задачи односкоростной теории переноса частиц // Труды МИАН СССР. – 1961. – Т.61. – С.3-158.

5 Марчук Г.И. Методы расчета ядерных реакторов. М.: Госатомиздат, 1961. 667 с.

6 Marshak R.E. Theory of the slowing down of neutrons by elastic collision with atomic nuclei // Rev.mod.Phys..– 1947. – V.19. – P.185-238.

7 Владимиров В.С. Об одном интегро-дифференциальном уравнении // Известия АН СССР. – 1957. – Т.2, № 1. – С.3-52.

8 Rayleigh J.W. The theory of sound. New York: Dover Publications, 1945. 504 p.

9 Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. Birkhauser Basel, 2006. 202 p.

10 Burchard A. A snort course on rearrangement Inequalities. http://www.math.toronto.edu/almut/ rearrange.pdf. 2009.
11 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
12 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады академии наук России.-2009. – Т.428, № 4. – С.16-19.
13 KalmenovT.Sh.,Suragan D. A boundary condition and spectral problems for the Newton potential // Operator theory: Advances and Applications. – 2011.– V.216. – P.187-210.

REFERENCES

1 Anikonov D.S., Nazarov V.G. *Zhurnalvychislitel'nojmatematikiimatematicheskojfiziki*, **2012**, 52, N 3, 372-378 (in Russ.).
2 Smedley-Stevenson R.P. *Annals of Nuclear Energy*, **2012,** 46,218-231.
3 Stepkin S.A. *Matematicheskijsbornik*, **2001**, 192, N 1, 139-160 (in Russ.).
4 Vladimirov V.S. *Trudy MIAN SSSR*,**1961**, 61, 3-158 (in Russ.).
5 Marchuk G.I. Metodyraschetajadernyhreaktorov, M.: *Gosatomizdat*, **1961**. – 667 s. (in Russ.).
6 Marshak R.E. *Rev.mod.Phys.*, **1947**, 19, 185-238.
7 Vladimirov V.S. *Izvestija AN SSSR*, **1957**, 21, N 1, 3-52(in Russ.).
8 Rayleigh J.W. The theory of sound, New York: *Dover Publications*, **1945**, 504 s.
9 Henrot A. Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators. *Birkhauser Basel*, **2006**, 202 p.
10 Burchard A. http://www.math.toronto.edu/almut/ rearrange.pdf. **2009**.
11 Vladimirov V.S. Uravnenijamatematicheskojfiziki. M.: *Nauka*, **1981**, 512 s. (in Russ.).
12 Kal'menovT.Sh.,Suragan D. *Dokladyakademiinauk*, **2009**, 428, N 4, 16-19 (in Russ.).
13 KalmenovT.Sh., Suragan D. *Operator theory: Advances and Applications*, **2011**, 216, 187-210.

М. Ю. Немченко
(РМК ҚР БҒМ «Математика және математикалық моделдеу институты»
Сүлейман Демирел атындағы университет, Қаскелең, Алматы)

БІРЖЫЛДАМДЫҚТЫ БӨЛШЕК ТАСЫМАЛЫ ОПЕРАТОРЫ ҮШІН СПЕКТРЛІК ГЕОМЕТРИЯНЫҢ СҰРАҚТАРЫ

Жұмыста көпөлшемді евклид кеңістігінде өлшемі бірдей облыстардың ішінде шар біржылдамдықты бөлшек тасымалы операторының бірінші меншікті мәнін минималдайтыны дәлелденді. Алынған нәтиже спектрлік геометрия теориясына байланысты. Бұл нәтиже өлшемі екіден артық болатын көпөлшемді евклид кеңістігіндегі Ньютон потенциалы үшін де орынды болады.