REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 4, Number 308 (2016), 5 – 16

BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF THE GENERALIZED FLAT DEFORMATION LINEARLY - AN ELASTIC BODY

N. I. Martynov, M.A. Ramazanova

Institute of mathematics and mathematical modeling of MES RK, Almaty
nikmar50@mail.ru

Keywords: linearly - an elastic body, a static boundary value problem , function of tension, a regional task of Riman-Gilbert's task

Abstract. Solutions of the main static boundary value problems objectives of the nonlinear theory of elasticity of the generalized flat deformation one-coherent linearly - an elastic body in the field of volume are received in the closed look. The common decision is written down through two holomorphic functions, and the main regional objectives are reduced to Riman-Gilbert's task for a holomorphic vector. Solutions of the first and second regional tasks are received with the help of integral of Schwartz, and the third (mixed) boundary value problems task - as the solution of a problem of interface Keldish – Sedov. For the mixed boundary value problem ratios between power and kinematic loadings which provide static balance linearly - elastic bodies are received. For the mixed boundary value problem the concept of the coordinated boundary conditions which provide continuous differentiability of the decision up to area border is entered.

УДК 539.3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОБОБЩЕННОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ ЛИНЕЙНО - УПРУГОГО ТЕЛА

Н.И. Мартынов, М.А.Рамазанова

(Институт математики и математического моделирования МОН РК,г.Алматы)

Ключевые слова: линейно-упругое тело, статическая краевая задача, функция напряжений, краевая задача Римана–Гильберта.

Аннотация. Решения основных статических краевых задач нелинейной теории упругости обобщенной плоской деформации односвязного линейно-упругого тела в поле объемных получены в замкнутом виде.

Общее решение записано через две голоморфные функции, а основные краевые задачи сведены к задаче Римана-Гильберта для голоморфного вектора. Решения первой и второй краевых задач получены с помощью интеграла Шварца, а третьей (смешанной) краевой задачи - как решение задачи сопряжения Келдыша – Седова. Для смешанной краевой задачи получены соотношения между силовыми и кинематическими нагрузками, которые обеспечивают статическое равновесие линейно-упругого тела. Для смешанной краевой задачи вводится понятие согласованных граничных условий, которые обеспечивают непрерывную дифференцируемость решения вплоть до границы области.

Введение. Возникшая в 19-м веке нелинейная теория упругости [1-9] долгое время занималась в основном чисто теоретическими исследованиями. Начиная с середины 50-х годов, наряду с теоретическими исследованиями, значительно возросло число прикладных исследований. Это связано, в первую очередь, с общим развитием науки и техники, вычислительной математики, а также производством и внедрением в повседневную жизнь резинотехнических изделий, полимеров, композитов и других современных материалов.

Начально-краевые и краевые задачи нелинейной теории упругости относятся к сложным задачам математической физики. Поэтому аналитические (эталонные) решения краевых задач нелинейной теории упругости [1, 2, 8, 9], которые крайне редки, очень важны. Они позволяют продвинуться в понимании и исследовании механики упругого поведения материала в широком диапазоне изменения режимных параметров, а также при рассмотрении поведения реальных изделий и конструкций под действием силовых факторов.

В работах [8, 9] для описания упругих свойств реальных материалов выдвинуты следующие требования на упругие потенциалы: удовлетворительное описание упругих свойств рассматриваемого материала в требуемом интервале деформаций; возможно, большая простота потенциала, облегчающая решение краевых задач. Этим условиям удовлетворяет линейно-упругий потенциал, о котором будет идти речь в данной работе.

Отметим, что запись основных соотношений нелинейной теории упругости в комплексном виде позволила получить компактные и относительно простые соотношения. Это дало возможность построить ряд точных решений некоторых краевых задач обобщенной плоской деформации [8, 9]. Так, в работе [9] для неограниченно-линейного предварительно напряженного упругого материала, который по своей структуре близок к линейно-упругому материалу, построено общее решение. Это позволило решить ряд краевых задач и продвинуться в разработке геометрически нелинейной теории трещин и теории разрушения.

Настоящая работа посвящена построению в замкнутом виде решений основных статических краевых задач обобщенной плоской деформации линейно-упругого тела, находящегося в поле объемных сил. Чтобы не загромождать изложение, авторы ограничились рассмотрением односвязной ограниченной области.

Основные соотношения. Приведем основные соотношения теории обобщенной плоской деформации нелинейной теории упругости, используя результаты работ [8, 9], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Под обобщенной плоской деформацией понимают деформацию, при которой прямоугольные декартовые координаты материальной точки до (снабжены значком ^{0}) и после деформации связаны соотношениями:

$$x_1 = x_1(x_1^0, x_2^0, t),\ \ x_2 = x_2(x_1^0, x_2^0, t),\ \ x_3 = \lambda_3 x_3^0,\ \ \lambda_3 = const \tag{1.1}$$

Таким образом, при обобщенной плоской деформации нормальное волокно к плоскости $x_3^0 = const$ смещается поступательно, удлиняясь с постоянной кратностью $\lambda_3 = const$. Плоской деформации отвечает случай $\lambda_3 = 1$.

Введем комплексные координаты z до и после деформации η:

$$\begin{gathered} z = x_1^0 + ix_2^0, s = \overline{z} = x_1^0 - ix_2^0, x_1 = x_1^0 + u_1, x_2 = x_2^0 + u_2, \\ \eta = x_1 + ix_2, \overline{\eta} = x_1 - ix_2, w = u_1 + iu_2, i^2 = -1, \end{gathered} \tag{1.2}$$

а также комплексные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} - i\frac{\partial}{\partial x_2^0}\right),\ \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_1^0} + i\frac{\partial}{\partial x_2^0}\right) \tag{1.3}$$

В соотношениях (1.2), (1.3) i- мнимая единица, а u_1, u_2 - компоненты вектора перемещения.

Для тензора второго ранга $T = t_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta$ (g_α- ортонормированные орты, по греческим индексам производится суммирование) вводятся следующие комплексные компоненты тензора [4, 5]:

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}),\ \ T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}),\ \ T_3 = t_{13} + it_{23},\ \ T_4 = t_{31} + it_{32},\ \ T_5 = t_{33} \tag{1.4}$$

Градиент тензора движения F и обратный ему тензор F^{-1} определяются как [4,5]:

$$F=\frac{\partial x_{\mu}}{\partial x_{\nu}^{0}}g_{\mu}g_{\nu},\quad F^{-1}=\frac{\partial x_{\alpha}^{0}}{\partial x_{\beta\nu}}g_{\alpha}g_{\beta} \tag{1.5}$$

Тогда дифференциалы радиусов - векторов в исходной (в недеформируемой конфигурации) и текущей (в деформируемой конфигурации) связаны соотношением:

$$dR=F\cdot dR^{\circ} \tag{1.6}$$

Из (1.6) видно, что градиент тензора F определяет локальное движение точек материальной частицы. Применяя к градиенту движения F полярное разложение, получим [8, 9]:

$$F=Q\cdot\Lambda^{\circ},\quad \Lambda^{\circ}=\sqrt{F^{*}\cdot F},\quad Q^{-1}=Q^{*} \tag{1.7}$$

Здесь Λ°- симметричный тензор с положительными главными значениями, а Q - ортогональный тензор (F^{*}-тензор, сопряженный тензору F). Тензор Λ° называется тензором кратностей удлинения, а величины λ_i- главными кратностями удлинения, поскольку в главном ортонормированном векторном базисе Λ°, как показано в [8, 9]:

$$\lambda_i=\frac{ds_i}{ds_i^{\circ}},\quad ds^{\circ}=\left|dR^{\circ}\right|,\quad ds=\left|dR\right| \tag{1.8}$$

Для обобщенной плоской деформации комплексные компоненты ортогонального тензора Q и тензора градиента движения F имеют следующий вид [8, 9]:

$$Q_1=2e^{-i\omega},\ Q_2=Q_3=Q_4=0,\ Q_5=1,\ F_1=2\overline{\eta}_s,\ F_2=2\eta_s,\ F_3=F_4=0,\ F_5=\lambda_3,\ e^{i\omega}=\frac{\eta_z}{\left|\eta_z\right|} \tag{1.9}$$

Здесь ω – угол поворота материальной частицы вокруг оси Ox_3. Таким образом, деформационные характеристики среды определяются тензором градиента движения F или тензором кратностей удлинения Λ° и ортогональным тензором Q.

Для оценки силовых характеристик упругой среды вводится вектор напряжений σ_n, действующий на площадке с нормалью n деформируемого тела, а также симметричный тензор истинных напряжений Коши $\Sigma=\sigma_{\alpha\beta}g_{\alpha}g_{\beta}$ [8,9]. Кроме того, вводится вектор напряжений $\sigma_{n^{\circ}}$ в расчете на единицу площади исходной недеформированной поверхности с нормалью n° и несимметричный номинальный тензор напряжений $\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}$:

$$\sigma_{n^{\circ}}=\frac{dS_n}{dS_n^{\circ}}\sigma_n=n^{\circ}\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}, \tag{1.10}$$

где $J=\left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j^{\circ}}\right|=\lambda_3\cdot\Delta=\lambda_3\cdot(\left|\eta_z\right|^2-\left|\eta_s\right|^2)$ - якобиан преобразования (1.1).

Статическое уравнение равновесия с помощью комплексных компонент номинального тензора напряжений на плоскости z (до деформации) записывается в виде [8, 9]:

$$\frac{\partial\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1}{\partial s}+\frac{\partial\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2}{\partial z}+f=0, \tag{1.11}$$

где $f=\rho^{\circ}(f_1^{*}+if_2^{*})$- объемная сила, ρ°-плотность материала до деформации, f_1^{*}, f_2^{*}- компоненты массовой силы. Система уравнений (1.11) замыкается заданием конкретного вида упругого потенциала Ф (закона упругости), который для обобщенной плоской деформации, в общем случае для сжимаемого упругого тела, задается в виде [8, 9]:

$$\Phi=\Phi(\left|\eta_z\right|,\left|\eta_s\right|,\lambda_3) \tag{1.12}$$

При этом комплексные компоненты номинального тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1=\frac{\eta_z}{|\eta_z|}\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2=\frac{\eta_s}{|\eta_s|}\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_3=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_4=0,\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_3}\quad(1.13)$$

а истинных напряжений – соотношениями:

$$\lambda_3\Delta\Sigma_1=\overline{\eta}_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\overline{\eta}_z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \lambda_3\Delta\Sigma_2=\eta_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\eta_z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \Delta\Sigma_5=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5\quad(1.13а)$$

Заметим, что часто удобно работать с симметричным тензором напряжений Био (условными напряжениями) σ_{ij}^{0} [9], комплексные компоненты которого для обобщенно плоской деформации определяются как:

$$\Sigma_1^0=\frac{1}{|\eta_z|}\mathrm{Re}\left(\overline{\eta}_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1\right),\ \Sigma_2^0=\frac{\overline{\eta}_s}{|\eta_z|}\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \Sigma_3^0=\Sigma_4^0,\ \Sigma_5^0=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5\qquad(1.13б)$$

При этом для изотропного тела тензора условных напряжений σ_{ij}^0 и истинных напряжений Коши σ_{ij} соосны, и главные напряжения $\sigma_1^0,\ \sigma_2^0$ вычисляются через упругий потенциал Φ следующим образом [9]:

$$\sigma_1^0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|}+\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|}\right),\ \sigma_2^0=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|}-\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|}\right)\qquad(1.13в)$$

Отметим, что при $\lambda_1\geq\lambda_2$ [9]:

$$|\eta_z|=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2),\ |\eta_s|=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\qquad(1.14)$$

К соотношениям (1.11)-(1.14) добавляются соответствующие граничные условия, которые записываются на недеформируемом контуре упругого тела на плоскости z.

2.Представление объемных сил. Объемную силу f в уравнении равновесия (1.11) представим как решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\theta_{zs}=f\qquad(1.15)$$

$$\theta\big|_{\Gamma}=0\qquad(1.15а)$$

В качестве функции θ возьмем функцию:

$$\theta=\psi_1(z)+\overline{\psi}_2(s)+F,\ F=\frac{2}{\pi}\iint\limits_D f(\xi)\ln|\xi-z|d\xi_1d\xi_2,\ \xi=\xi_1+i\xi_2,\qquad(1.16)$$

где ψ_1,ψ_2- произвольные голоморфные функции, а F- объемный потенциал. Подберем ψ_1,ψ_2 таким образом, чтобы на границе Γ выполнялось соотношение (1.15а). С учетом (1.16) соотношение (1.15а) и комплексно сопряженное (1.15а) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}(\psi_1+\overline{\psi}_2+F)\big|_{\Gamma}&=0\\(\overline{\psi}_1+\psi_2+\overline{F})\big|_{\Gamma}&=0\end{aligned}\qquad(1.17)$$

Краевое условие (1.17) для аналитического вектора $\psi=(\psi_1,\psi_2)^T$ можно записать как краевую задачу Римана – Гильберта [10-13]:

$$\mathrm{Re}(\overline{L}\psi)=l,\ \overline{L}=\begin{pmatrix}1&1\\-i&i\end{pmatrix},\ l=\begin{pmatrix}-2\,\mathrm{Re}(F)\\-2\,\mathrm{Im}(F)\end{pmatrix}\qquad(1.17а)$$

С помощью конформного отображения область D можно отобразить на единичный круг и рассматривать задачу (1.17а) на границе единичного круга. При таком отображении структура матриц $\overline{L}$ и l не изменяется, а матрица A остается постоянной (в дальнейшем область D считаем единичным кругом). Поэтому решение краевой задачи Римана - Гильберта (2.12) для голоморфного вектора можно записать, используя интеграл Шварца [10,11,13]:

$$\psi(z)=\frac{\overline{L}^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{l(t)(t+z)}{t(t-z)}dt+i\overline{A}^{-1}\cdot C_0\ , \qquad (2.18)$$

где C_0 - постоянный действительный вектор-столбец. Для односвязной области, без потери общности, C_0 можно положить равным нулю.

Таким образом, объемную силу f будем представлять в виде (1.16) , где голоморфный вектор $\psi(z)$ определяется в замкнутом виде (2.18), где C_0 =0, и $\theta\big|_\Gamma=0$.

3. Линейно-упругий материал. Упругий потенциал Φ для линейно-упругого тела с учетом (1.14) определим как:

$$\Phi=\frac{E}{6}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-1)=\frac{E}{12}(|\eta_z|^2+|\eta_s|^2+2\lambda_3^2-6) \qquad (1.19)$$

С учетом (1.13), (1.19), комплексные компоненты номинального тензора напряжений запишутся в виде:

$$\{F^{-1}J\Sigma\}_1=\frac{E}{6}\eta_z,\ \{F^{-1}J\Sigma\}_2=\frac{E}{6}\eta_s,\ \{F^{-1}J\Sigma\}_3=\{F^{-1}J\Sigma\}_4=0,\ \{F^{-1}J\Sigma\}_1=\frac{E}{3}\lambda_3, \qquad (1.19а)$$

т. е компоненты номинального тензора напряжений физически линейным образом связаны с компонентами тензора градиента движения. Этим и обусловлено название (1.19), как упругого потенциала для линейно-упругого тела. Отметим, что связь между компонентами номинального тензора напряжений (1.19а) и градиентом движения линейна, в то время как связь между компонентами истинного тензора напряжений и градиентом движения нелинейная, что видно из соотношений (13а), (1.19а):

$$\lambda_3\Delta\Sigma_1=\frac{E}{6}(|\eta_z|^2+|\eta_s|^2),\ \lambda_3\Delta\Sigma_2=\frac{E}{3}\eta_z\eta_s$$

В работе [9] рассмотрен потенциал:

$$\Phi=\sigma^*|\eta_z|^2+\alpha|\eta_s|^2, \qquad (1.19б)$$

где σ^*,α- постоянные. Из (1.13в), (1.14), (1.19б) (см. [9]) следует, что связь между энергетической парой (главными условными напряжениями σ_i^0 и главными относительными удлинениями (λ_i-1)) линейна, и при отсутствии деформаций $(\lambda_1=\lambda_2=1)$, $\sigma_1^0=\sigma_2^0=\sigma^*$. Т.е. σ^*- величина предварительного всестороннего (в плоскости) условного напряжения. Такой материал в [9] назван неограниченно-линейным предварительно напряженным упругим материалом. Использование упругого потенциала (1.19б) позволило получить точные решения ряда краевых задач, и с их помощью выявить влияние геометрической нелинейности на напряженно-деформируемое состояние упругой среды [9].

Отметим, что если упругий потенциал для несжимаемого упругого тела ($J=1$) задан в виде (1.19), то такое упругое тело называется неогуковским [8,9].

Поэтому упругий потенциал (1.19) также можно назвать упругим потенциалом для сжимаемого неогуковского материала.

4.Общее решение. С учетом (1.15) уравнение равновесия (1.11) запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\{F^{-1}J\Sigma\}_1+\theta_z\right\}+\frac{\partial\{F^{-1}J\Sigma\}_2}{\partial z}=0 \qquad (2.1)$$

Введем комплексную функцию напряжений U, которая интегрирует уравнение (2.1).

$$-U_s = \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ U_z = \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 + \theta_z, \tag{2.2}$$

С учетом (1.19а) соотношения (2.2) запишутся в виде:

$$U_z = \frac{E}{6}\eta_z + \theta_z,\ -U_s = \frac{E}{6}\eta_s,\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 = \frac{E}{3}\lambda_3 \tag{2.3}$$

Из первых двух соотношений (2.3) имеем:

$$U_{zs} - U_{sz} = \frac{E}{3}\eta_{zs} + \theta_{zs} = 0 \tag{2.4}$$

Интегрируя соотношение (2.4), получим:

$$\eta = \Phi_1(z) + \overline{\Phi}_2(s) - \theta, \tag{2.5}$$

где Φ_1, Φ_2 - произвольные аналитические функции от z. Интегрируя первые два соотношения (2.3) с учетом (2.5), будем иметь:

$$U = \frac{E}{6}\eta + \theta + \overline{\Phi}_5 = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \theta) + \overline{\Phi}_3,\ -U = \frac{E}{6}\eta + \Phi_6 = \frac{1}{2}(\overline{\Phi}_2 - \theta) + \Phi_4,$$
$$\overline{\Phi}_3 = \frac{1}{2}\overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_5,\ \Phi_4 = \frac{1}{2}\Phi_1 + \Phi_6 \tag{2.6}$$

Складывая первые два соотношения (2.6), получим:

$$\frac{1}{2}\Phi_1 + \Phi_4 = -\left(\frac{1}{2}\overline{\Phi}_2 + \overline{\Phi}_3\right) = C = const$$

Тогда $U = \frac{1}{2}(\Phi_1 - \overline{\Phi}_2 + \theta) - C$. Произвольную постоянную C можно положить равной нулю, поскольку она не влияет на компоненты номинального тензора напряжений. Окончательно получим:

$$U = \frac{1}{2}\left(\Phi_1 - \overline{\Phi}_2 + \theta\right),\ \frac{E}{3}\eta = \Phi_1(z) + \overline{\Phi}_2(s) - \theta \tag{2.7}$$

При обобщенной плоской деформации сжимаемого материала при заданной осевой силе G_3 постоянная λ_3 определяется из соотношения [9]:

$$G_3 = \iint_D \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_3} dS^\circ \tag{2.8}$$

Учитывая (13), (2.3), из (2.8) получаем:

$$\lambda_3 = \frac{3G_3}{ES^\circ},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 = \frac{G_3}{S^\circ} \tag{2.8a}$$

В соотношениях (2.8), (2.8а) S° - площадь поперечного сечения цилиндра в недеформируемом состоянии.

5. Первая краевая задача. Рассмотрим первую краевую задачу, когда на границе Γ недеформируемой области D заданы усилия: $g = g_1 + ig_2$. Граничные условия на Γ записываются в виде [8,9]:

$$n^\circ\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 + \overline{n}^\circ\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2 = 2g,\quad n^\circ = n_1^\circ + in_2^\circ = e^{i\gamma_0} = -i\frac{dz}{d\sigma_0}, \tag{2.9}$$

где γ_0 - угол между внешней нормалью n° и осью Ox_1^0, σ_0 - длина дуги недеформируемого контура. С учетом (2.2) , (1.15а) соотношение (2.9) примет вид:

$$\left.\frac{dU}{d\sigma_0}\right|_\Gamma = i(2g + e^{i\gamma_0}\theta_z) = 2ig,\ \text{или}\ U\big|_\Gamma = C + 2i\int_0^{\sigma_0} g d\sigma_0 + \int_{z(0)}^{z(\sigma_0)} \theta_z dz = C + 2i\int_0^{\sigma_0} g d\sigma_0 = G, \tag{2.10}$$

где $C = const$. Для односвязной области произвольную постоянную C можно положить равной нулю. Подставляя первое соотношение (2.7) во второе соотношение (2.10), получим:

$$(\Phi_1 - \overline{\Phi}_2)\Big|_{\Gamma} = 2G - \theta = 2G \tag{2.11}$$

В соотношении (2.11) учтена зависимость (1.15а). Граничное условие (2.11) можно записать, как граничную задачу Римана-Гильберта [10-13] для голоморфного вектора $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$ в виде:

$$\operatorname{Re}(\overline{A}\Phi)\Big|_{\Gamma} = b, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4\operatorname{Re}G \\ -4ImG \end{pmatrix}, \quad \det|A| \neq 0, \tag{2.12}$$

а решение (2.12) можно записать, используя интеграл Шварца [10,11,13]:

$$\Phi(z) = \frac{\overline{A}^{-1}}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1} \frac{b(t)(t+z)}{t(t-z)}dt + i\overline{A}^{-1}\cdot C_0 \tag{2.13}$$

где C_0 - постоянный действительный вектор-столбец.

Отметим, что для первой краевой задачи система объемных и поверхностных сил является самоуравновешенной системой сил, а номинальные напряжения предполагаются непрерывными вплоть до границы *Г*. Перемещения определяются с точностью до жесткого смещения всего тела. Тогда C_0 в (2.13) можно положить равным нулю. Чтобы перемещения были однозначными функциями, необходимо задать в какой-либо точке упругого тела перемещение до деформации или после деформации. Полагая, например, $z_0 = 0$, $\eta_0 = \eta(0)$ и используя (2.7), (2.12), (2.13), получим:

$$C_0 = \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Im}X \\ \operatorname{Re}X \end{pmatrix}, \quad X = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\{G(t) - G(1/t)\}\frac{dt}{t} + \theta(0) + \frac{E}{3}\eta_0 \tag{2.13а}$$

Таким образом, решение первой краевой задачи записывается в замкнутом виде. Нахождение остальных силовых и деформационных характеристик упругого тела осуществляется по приведенным выше соответствующим формулам.

На поперечное сечение цилиндра действуют (со стороны положительного направления оси Ox_3) напряжения с главным вектором (2.8) и главным моментом [9]:

$$M_1 + iM_2 = -\iint\limits_D z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 dS^{\circ} \tag{2.14}$$

Учитывая, что $\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5 = const$ (третье соотношение (2.3)), и проведя ось Ox_3 через центр тяжести поперечного сечения *D*, получим, что главный момент (2.14) равен нулю.

Главный вектор и главный момент напряжений, действующих на боковую поверхность цилиндра единичной высоты [9]:

$$\begin{aligned} G_1 + iG_2 &= -\frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}\left\{\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 dz - \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2 ds\right\}, \\ M_3 &= -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\int\limits_{\Gamma} s\left\{\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1 dz - \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2 ds\right\} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Поскольку рассматривается статическая краевая задача, то система объемных f и поверхностных g сил является самоуравновешенной. Поэтому выполняются равенства:

$$\iint\limits_D \theta_{zs}dS^0 + \int\limits_{\Gamma} gd\sigma_0 = 0, \quad \frac{i}{2}\iint\limits_D (z\overline{\theta}_{zs} - s\theta_{zs})dS^0 + \frac{i}{2}\int\limits_{\Gamma}(z\overline{g} - sg)d\sigma_0 = 0 \tag{2.16}$$

Первое соотношение (2.16), записанное в комплексной форме, выражает факт равенства нулю результирующей объемных и контурных сил, второе соотношение (2.16) – равенство нулю суммарного момента объемных и контурных сил. Воспользуемся формулой Грина:

$$\iint\limits_D W_s dS^0 = -\frac{i}{2}\int\limits_\Gamma W dz,\ \iint\limits_D W_z dS^0 = \frac{i}{2}\int\limits_\Gamma W ds \tag{2.17}$$

и соотношением (1.15а). Тогда (2.16) примут следующий вид:

$$\int\limits_\Gamma g d\sigma_0 = 0,\ \int\limits_\Gamma (z\bar{g} - sg) d\sigma_0 = 0 \tag{2.18}$$

С учетом (1.15а), (2.2), (2.18) соотношения (2.15) для главного вектора и главного момента запишутся в виде:

$$G_1 + iG_2 = 2\int\limits_\Gamma g d\sigma_0 = 0,\ M_3 = \frac{i}{2}\int\limits_\Gamma (z\bar{g} - sg) d\sigma_0 = 0\ , \tag{2.19}$$

которые совместно с построенным решением, удовлетворяющим уравнениям равновесия (2.1) и граничным условиям (2.10), представляют необходимые и достаточные условия равновесия упругого тела.

6. Вторая краевая задача. Рассмотрим вторую краевую задачу, когда на границе Γ заданы перемещения или известна величина:

$$\left.\frac{E}{3}\eta\right|_\Gamma = \left.\frac{E}{3}(z+W)\right|_\Gamma = g \tag{2.20}$$

Учитывая второе соотношение (2.7) и (1.15а), краевое условие (2.20) запишем в виде:

$$\left.(\Phi_1 + \bar{\Phi}_2)\right|_\Gamma = g\ , \tag{2.20а}$$

или в виде (2.12), где

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix},\quad b = \begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} g \\ 2\operatorname{Im} g \end{pmatrix},\quad \det|A| \neq 0 \tag{2.21}$$

Решение второй краевой задачи записывается в форме (2.13), где соответствующие матрицы определяются соотношениями (2.21), а действительный вектор столбец C_0 равен нулю (для односвязной ограниченной области).

Для второй краевой задачи компоненты деформаций или η_z, η_s должны быть непрерывны вплоть до границы. Поэтому граничное значение g (2.20) должны быть непрерывно-дифференцируемой функцией на контуре. Для второй краевой задачи подразумевается, что перемещения, заданные на границе, обеспечивают равновесие упругого тела.

Сделаем замену:

$$\Phi_1(z) = \Omega_1(z) + i\Omega_2(z),\ \Phi_2(z) = -\Omega_1(z) + i\Omega_2(z) \tag{2.22}$$

Тогда граничные условия первой и второй краевых задач линейно – упругого тела для голоморфного вектора $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$ можно записать в виде:

<u>1я краевая задача</u> $\left.\operatorname{Re}\Omega_1\right|_\Gamma = \operatorname{Re} G\ ,\ \left.\operatorname{Re}\Omega_2\right|_\Gamma = \operatorname{Im} G$ (2.22а)

<u>2я краевая задача</u> $\left.\operatorname{Im}\Omega_1\right|_\Gamma = \frac{1}{2}\operatorname{Im} g\ ,\ \left.\operatorname{Im}\Omega_2\right|_\Gamma = -\frac{1}{2}\operatorname{Re} g$ (2.22б)

7. Третья (смешанная) краевая задача. Рассмотрим третью, смешанную краевую задачу, когда на части границы Γ_1 заданы усилия, на другой, оставшейся ее части Γ_2 заданы перемещения ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$). Тогда матрицы A, b, принимают, соответственно, значения (2.12) или (2.21) и терпят согласованный разрыв первого рода на множестве меры нуль. С помощью определенной процедуры третья краевая задача сводится к краевой задаче с непрерывной матрицей A [11-14]. Для третьей краевой задачи подразумевается, что перемещения и усилия, заданные на границе, обеспечивают равновесие упругого тела.

Пусть замкнутый контур Γ точками $a_1, b_1, ..., a_m, b_m$ разделен на 2m частей. Совокупность дуг (a_k, b_k) обозначим Γ_1, совокупность дуг (b_k, a_{k+1}) - Γ_2 ($k = 1, 2, ..., m;\ a_{2m+1} = a_1$). Пусть на Γ_1 заданы усилия g_1, а на Γ_2 заданы перемещения или величина $\left.\frac{E}{3}\eta\right|_{\Gamma_2} = g_2$. Тогда смешанную краевую задачу, с учетом (2.22а), (2.22б), можно сформулировать следующим образом [13, 14]: требуется определить голоморфный вектор $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$, удовлетворяющий краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\Omega_1\big|_{\Gamma_1} = \operatorname{Re}G_1,\ \operatorname{Re}\Omega_2\big|_{\Gamma_1} = \operatorname{Im}G_1,\ (G_1 = C_k + \tilde{G}_1, \tilde{G}_1 = 2i\int_0^{\sigma_{0k}} g_1 d\sigma_{0k},\ C_k = const,\ при\ t \in (a_k, b_k))$$

$$\operatorname{Im}\Omega_1\big|_{\Gamma_2} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}g_2,\ \operatorname{Im}\Omega_2\big|_{\Gamma_2} = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}g_2, \tag{3.1}$$

за исключением точек разрыва $a_1, b_1, ..., a_m, b_m$, вблизи которых

$$|\Omega(z)| < \frac{const}{|z-c|^{\alpha}},\ \alpha = const < 1\ (c\ пробегает\ все\ точки\ разрыва). \tag{3.1a}$$

Здесь σ_{0k} - элементарная длина дуги (a_k, b_k) в недеформируемом состоянии, отсчитываемая от точки a_k. Функции, удовлетворяющие условию (3.1a) и имеющие интегрируемые особенности, называются почти ограниченными [14].

Рассмотрим случай, когда Γ есть действительная ось, что достигается путем конформного отображения области D^+ на верхнюю полуплоскость. При этом необходимо считать голоморфный вектор $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$ ограниченным на бесконечности [13]. Будем предполагать, что бесконечно удаленная точка оси не совпадает с точками разрыва $a_1, b_1, ..., a_m, b_m$. Тогда Γ_1 состоит из m отрезков $(a_k,\ b_k)$, а Γ_2 - из m-1 конечных отрезков и двух бесконечных $(b_m, \infty),\ (-\infty, a_1)$. Для определения компонент голоморфного вектора $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$ приходим к краевой задаче М.В. Келдыша - Л.И.Седова [13, 14]: определить голоморфную в D^+ функцию $F(z) = u + iv$, удовлетворяющую на действительной оси краевому условию

$$u = l_1\ на\ \Gamma_1;\ v = l_2\ на\ \Gamma_2,\ F(\infty) = 0 \tag{3.2}$$

где $l_1,\ l_2$ - заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

Обозначим все точки разрыва единообразно буквами $c_1, c_2, ..., c_{2m}$. Пусть в точках $c_1, c_2, ..., c_p$ решение ограничено, а в точках $c_{p+1}, ..., c_{2m}$ допускается интегрируемая бесконечность (решение почти ограничено), т.е. решение принадлежит классу $h(c_1, ..., c_p)$ [13, 14]. Обозначим

$$R_1(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{p}(z - c_k)},\ R_2(z) = \sqrt{\prod_{k=p+1}^{2m}(z - c_k)} \tag{3.3}$$

Тогда решение задачи (3.2) в заданном классе $h(c_1, ..., c_p)$ имеет вид [13, 14]:

$$F(z) = \frac{R_1(z)}{R_2(z)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}\frac{l(\tau)}{\tau - z}d\tau + P_{m-p-1}(z)\right],\ l(\tau) = \begin{Bmatrix} 2l_1(\tau),\ \tau \in \Gamma_1 \\ 2il_2(\tau), \tau \in \Gamma_2 \end{Bmatrix}, \tag{3.4}$$

где $P_k(z)$ - многочлен с действительными коэффициентами степени *к*.

Если $p \geq m$, то $P_{m-p-1} \equiv 0$, причем в случае $p > m$ решение существует только при соблюдении условий разрешимости:

$$\int_\Gamma \frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)} l(\tau)\tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1,2,...,p-m) \tag{3.5}$$

Таким образом, решение краевой задачи (3.2) зависит от заданного класса, в котором оно рассматривается. В частности:

1) Решение, неограниченное вблизи всех точек a_k, b_k:

$$F(z) = \frac{1}{R(z)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{R(\tau)l(\tau)}{\tau - z} d\tau + P_{m-1}(z)\right], \; R(z) = \sqrt{\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)(z-b_k)} \tag{3.6}$$

2) Решение, ограниченное вблизи всех точек a_k, b_k:

$$F(z) = \frac{R(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{l(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau - z)} \tag{3.7}$$

При выполнении условий разрешимости:

$$\int_\Gamma \frac{l(\tau)}{R(\tau)}\tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1,2,...,m) \tag{3.8}$$

Решения, неограниченные в каких–либо точках, следует отбросить как не оправданные физически, поскольку перемещение в любой точке контура Γ должно быть ограниченным. Поэтому физически возможное решение - это решение (3.7) при условии (3.8).

Запишем условия разрешимости (3.8) для компонент голоморфного вектора $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)^T$, используя (3.1), (3.2), (3.4), (3.6).

$$\sum_{k=1}^{m} 2\operatorname{Re}(C_k)\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau^{j-1}}{R(\tau)} d\tau + \int_\Gamma \frac{\tilde{l}_1(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)} d\tau = 0, \;\; \tilde{l}_1(\tau) = \begin{Bmatrix} 2\operatorname{Re}(\tilde{G}_1(\tau)), & \tau \in \Gamma_1 \\ i\operatorname{Im} g_2(\tau), & \tau \in \Gamma_2 \end{Bmatrix}, \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{m} 2\operatorname{Im}(C_k)\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau^{j-1}}{R(\tau)} d\tau + \int_\Gamma \frac{\tilde{l}_2(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)} d\tau = 0, \;\; \tilde{l}_2(\tau) = \begin{Bmatrix} 2\operatorname{Im}(\tilde{G}_1(\tau)), & \tau \in \Gamma_1 \\ -i\operatorname{Re} g_2(\tau), & \tau \in \Gamma_2 \end{Bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$\tilde{G}_1(\tau) = 2i\int_{a_k}^{\tau} g_1(\tau)d\tau, \;\; \tau \in (a_k, b_k), \;\; \text{(j=1,2,…,m)}$$

Умножим (3.10) на мнимую единицу и сложим с (3.9). Тогда получим:

$$\sum_{k=1}^{m} 2C_k\int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau^{j-1}}{|R(\tau)|} d\tau + i\int_\Gamma \frac{\tilde{l}\,(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)} d\tau = 0, \;\; \tilde{l}\,(\tau) = \begin{Bmatrix} 2\tilde{G}_1(\tau), & \tau \in \Gamma_1 \\ g_2(\tau), & \tau \in \Gamma_2 \end{Bmatrix}, \text{(j=1,2,…,m)} \tag{3.11}$$

Определитель системы уравнений (3.11) относительно $2C_k$ отличен от нуля. В самом деле, составляя в противном случае линейную комбинацию его строк с произвольными действительными постоянными $\lambda_i (i = 0,1,...,m-1)$, не равными нулю одновременно, приходим к равенствам:

$$\int_{a_k}^{b_k} \frac{P_{m-1}(\tau)}{|R(\tau)|} d\tau = 0, \quad P_{m-1}(\tau) = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k \tau^k \tag{3.11a}$$

Для выполнения полученных соотношений (3.11а) многочлен $P_{m-1}(\tau)$ должен иметь, по крайней мере, по одному нулю в каждом из m промежутков (a_k, b_k), что возможно лишь при $\lambda_i = 0, (i = 0,1,...,m-1)$. Следовательно, система (3.11) имеет единственное решение. Определив из (3.11) C_k, удовлетворим условию разрешимости (3.8) или двум условия (3.9), (3.10). С учетом

(2.22)- 2.22б), (3.1), (3.2), (3.6), (3.7), голоморфный вектор $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)^T$ представится в виде:

$$\Phi_1(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)},\ \Phi_2(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)},$$
$$h_1(\tau)=\begin{Bmatrix}2G_1(\tau), & \tau\in\Gamma_1\\ g_2(\tau), & \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix},\ h_2(\tau)=\begin{Bmatrix}-2\overline{G}_1(\tau), & \tau\in\Gamma_1\\ \overline{g}_2(\tau), & \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Зная (3.12), по формулам (2.7) можно определить значения U,η, а затем их производные по z, s (комплексные компоненты номинального тензора напряжений и градиент тензора движения (равновесия)). Отметим, что U_z,U_s,η_z,η_s принадлежат классу почти ограниченных функций, т.е на контуре Γ в точках разрыва они обращаются в бесконечность интегрируемого порядка.

Определим значения U,η на границе Γ, используя (3.12). В результате будем иметь:

$$U\Big|_{\Gamma}=U(\tau_0)=\frac{R(\tau_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)},\ \frac{E}{3}\eta\Big|_{\Gamma}=\frac{R(\tau_0)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)} \tag{3.13}$$

Из соотношений (3.13) следует:

$$U\Big|_{\Gamma_2}=U(\tau_0)=\frac{R(\tau_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)},\ \frac{E}{3}\eta\Big|_{\Gamma_1}=\frac{R(\tau_0)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)} \tag{3.13а}$$

$$U\Big|_{\Gamma_1}=G_1(\tau_0)\Big|_{\Gamma_1}=\frac{R(\tau_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)},\ \frac{E}{3}\eta\Big|_{\Gamma_2}=g_2(\tau_0)\Big|_{\Gamma_2}=\frac{R(\tau_0)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)} \tag{3.13б}$$

Соотношения (3.13а) определяют неизвестные значения $G_1\big|_{\Gamma_2}$, $g_2\big|_{\Gamma_1}$, соответственно, через $g_2\big|_{\Gamma_2}$, $G_1\big|_{\Gamma_1}$. Соотношения (3.13б) связывают между собой силовые $G_1\big|_{\Gamma_1}$ и кинематические граничные условия $g_2\big|_{\Gamma_2}$, заданные на разных частях границы области, и определяют область изменения граничных условий, которые гарантируют равновесие линейно-упругого тела.

Таким образом, решение смешанной краевой задачи для линейно-упругого тела записывается в замкнутом виде при известном конформном отображении односвязной области на верхнюю полуплоскость.

Отметим, что найденные функции U_z,U_s,η_z,η_s для смешанной краевой задачи не всегда принадлежат классу почти ограниченных функций. Чтобы это понять, достаточно рассмотреть следующую смешанную краевую задачу. Пусть на контур линейно-упругого тела действует непрерывная система сил, которая вместе с объемными (достаточно гладкими) силами образуют самоуравновешенную нагрузку. Решив первую краевую задачу, определим η на Γ. Теперь разобьем границу Γ на две произвольные части $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$. На Γ_1 зададим усилия, такие же, как и в первой краевой задаче. На Γ_2 зададим найденные решения $\frac{E}{3}\eta$ первой краевой задачи. Теперь рассмотрим смешанную краевую задачу с только что построенными граничными условиями. Тогда решение такой смешанной краевой задачи совпадает с решением первой краевой задачи, и непрерывно-дифференцируемо вплоть до границы области. Таким образом, несмотря на то, что граничные условия для смешанной краевой задачи имеют разрывы, само ее решение непрерывно-дифференцируемо вплоть до границы области. Граничные условия смешанной краевой задачи, которые обеспечивают непрерывную дифференцируемость ее решения вплоть до границы области, можно назвать самосогласованными. Для самосогласованных граничных условий решение смешанной краевой задачи эквивалентно решению определенной первой или определенной второй краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: 1965.- 455с.
[2] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.:1980, 512с.
[3] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.: 1948, 211с.
[4] Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: 1958, 369с.
[5] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: 1963, 311с.
[6] Трелоар Л. Введение в науку о полимерах. М.: 1973, 238с.
[7] Трусдел К. Первоначальный курс механики сплошных сред. М.: 1975, 592с.
[8] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение, 1986, 336с.
[9] Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М: Наука - Физматлит, 1996, 287с.
[10] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М: Наука, 1988, 509с.
[11] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. М.: Наука, 1977, 424 с.
[12] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: 1970, 379с.
[13] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977, 640с.
[14] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.: ф.-м.л., 1962, 599с.

REFERENCES

[1] Grin A., Adkins Dzh. Bol'shie uprugie deformacii i nelinejnaja mehanika sploshnoj sredy. M.: **1965**, 455s (in Russ).
[2] Lur'e A.I. Nelinejnaja teorija uprugosti. M.:**1980**, 512s (in Russ).
[3] Novozhilov V.V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti. M.: **1948**, 211s(in Russ).
[4] Novozhilov V.V. Teorija uprugosti. L.: **1958**, 369s (in Russ).
[5] Prager V. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred. M.: **1963**, 311s (in Russ).
[6] Treloar L. Vvedenie v nauku o polimerah. M.: **1973**, 238s (in Russ).
[7] Trusdel K. Pervonachal'nyj kurs mehaniki sploshnyh sred. M.: **1975**, 592s (in Russ).
[8] Chernyh K.F. Nelinejnaja teorija uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah. L.: Mashinostroenie, **1986**, 336s (in Russ).
[9] Chernyh K.F. Vvedenie v fizicheski i geometricheski nelinejnuju teoriju tre-shhin. M: Nauka - Fizmatlit, **1996**, 287s (in Russ).
[10] Vekua I.N. Obobshhennye analiticheskie funkcii. M: Nauka, **1988**, 509s (in Russ).
[11] Monahov V.N. Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlja jellipticheskih sistem uravnenij. M.: Nauka, **1977**, 424 s (in Russ).
[12] Vekua N.P. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij i nekotorye gra-nichnye zadachi. M.: **1970**, 379s (in Russ).
[13] Gahov F.D. Kraevye zadachi. M.: Nauka, **1977**, 640s (in Russ).
[14] Mushelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija. Granichnye zadachi teorii funkcij i nekotorye ih prilozhenija k matematicheskoj fizike. M.: f.-m.l., **1962**, 599s (in Russ).

СЫЗЫҚТЫ-СЕРПІМДІ ДЕНЕНІҢ ЖАЛПЫЛАНҒАН ЖАЗЫҚ ДЕФОРМАЦИЯСЫНЫҢ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРІ

Н.И. Мартынов, Н.И. Рамазанова

(ҚР БҒМ математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қаласы. Қазақстан)

Түйін сөздер: сызықты-серпімді дене, статикалық шеттік есеп, кернеу функциясы, Риман-Гильберт шеттік есебі.

Аннотация. Көлемдік өрісте бірбайланысты сызықты-серпімді дененің жалпыланған жазық деформациясының сызықты емес серпімділік теориясының негізгі статикалық шеттік есептерінің шешімдері тұйық түрде алынды.

Жалпы шешім екі голоморфты функциялар арқылы жазылды, ал негізгі шеттік есептер голоморфты вектор үшін Риман-Гильберт есебіне келтірілді. Бірінші және екінші шеттік есептердің шешімдері Шварц интегралы арқылы алынды, ал үшінші (аралас) шеттік есептікі Кедыш-Седов түйіндес есебіндей алынды. Аралас шеттік есептер үшін күштік және кинематикалық жүктеулер арасындағы байланыстар алынды, олар сызықты-серпімді дененің статикалық орнықтылығын қамтамасыз етеді. Аралас шеттік есептер үшін, обылыс шекарасына дейінгі шешімнің үздіксіз дифференциалдануын қамтамасыз ететін, келісімді шекаралық шарттардың түсінігі еңгізіледі.

Поступила 26.06.2016 г.