М. БЕРИКХАНОВА, К. ШЕРНИЯЗОВ, Н. ТЕМИРГАЛИЕВ

ТОЧНЫЕ ПОРЯДКИ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА ПРИ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ С ДОМИНИРУЮЩЕЙ СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

Институт теоретической математики и научных вычислений;
Евразийского национального университета им.Л.Н.Гумилева;
Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Задача восстановления функций по неточной информации ставится в различных постановках (см., напр., [1-18]).

Исходным в каждой из них является следующее определение (формулировку которой в самом общем виде см.,напр., в [1-7], здесь же приведен случай $Tf = f$ восстановления функций; $N = 1,2,\ldots$)

$$\delta_N(\varepsilon_N) = \delta_N(D_N; Tf = f; F; \varepsilon_N)_{L^q} = \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \sup_{\substack{f\in F \\ (z_1,\ldots,z_N):\left|l_N^{(j)}(f)-z_j\right|\le\varepsilon_N^{(j)} \\ (j=1,\ldots,N)}} \left\|f(\cdot)-\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)\right\|_{L^q(0,1)^s} \equiv \tag{1}$$

$$\equiv \inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N} \sup_{\substack{f\in F \\ \left|\gamma_N^{(j)}\right|\le 1(j=1,\ldots,N)}} \left\|f(\cdot)-\varphi_N\left(l_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\varepsilon_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N^{(N)};\cdot\right)\right\|_{L^q(0,1)^s},$$

где $\varepsilon_N \equiv \left\{\varepsilon_N^{(j)}\right\}_{j=1}^N$ – неотрицательная последовательность; в случае $\varepsilon_N \equiv 0$ речь будет идти о задаче восстановления по точной информации.

Здесь $l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)}$ – набор функционалов $l^{(N)}$, определенных на линейной оболочке функционального класса F, определенная на $C^N \times [0,1]^s$ числовая функция $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;x)$ - алгоритм переработки приближенной информации об f, полученной от функционалов $l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f)$ с точностью ε_N, после чего как функция от x приобретает статус вычислительного агрегата для приближенного вычисления $f(x)$, D_N – данный набор комплексов $\left(l_N^{(1)},\ldots,l_N^{(N)};\varphi_N\right) \equiv \left(l^{(N)},\varphi_N\right)$.

Теперь сформулируем задачу нахождения предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении (записи $A << B$ и $A \succ\prec B$ соответственно означают $|A| \le cB$ и одновременное выполнение $A << B$ и $B << A$).

В случае, если известен *точный порядок восстановления по точной информации* $\{\psi(N)\}$, заключающийся в выполнении соотношения $\delta_N(D_N;T;F;0)_Y \succ\prec \psi(N)\,(N\to+\infty)$, то задача нахождения последовательности $\widetilde{\varepsilon}_N = \left(\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)},\ldots,\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)(N=1,2,\ldots)$ – *предельной погрешности неточной информации при оптимальном восстановлении* состоит в следующем: выполнено $\delta_N(D_N;T;F;\widetilde{\varepsilon}_N)_Y \succ\prec \psi(N)\,(N\to+\infty)$, и одновременно для всяких возрастающих к $+\infty$ при возрастании N при каждом t последовательностей $\left\{\eta_N^{(t)}\right\}$ $(N=1,2,\ldots;t=1,2,\ldots,N)$ имеет место равенство

$$\overline{\lim_{N\to+\infty}} \frac{\delta_N\left(D_N;T;F;\left(\eta_N^{(1)}\widetilde{\varepsilon}_N^{(1)},\ldots,\eta_N^{(N)}\widetilde{\varepsilon}_N^{(N)}\right)\right)_Y}{\delta_N(D_N;T;F;0)_Y} = +\infty. \tag{2}$$

Данная статья посвящена восстановлению функций из S – классов функций с доминирующей смешанной производной (тем самым, математическая модель есть функция), когда в качестве источника конечной информации выступают тригонометрические коэффициенты Фурье с произвольным конечным спектром.

Все рассматриваемые функции будем считать определенными на всем пространстве R^s, 1-периодическими по каждой из своих s переменных и суммируемыми на кубе периодов $[0,1]^s$.

Пусть s – целое положительное число, $2r>1$. Через E_s^r обозначают множество всех 1-периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$ из класса $L(0,1)^s$, тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега которых для всех $m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s$ удовлетворяют условию ($\overline{m_j}=\max\{1,|m_j|\}$)

$$\hat{f}(m)=\int\limits_{[0,1]^s} f(x)e^{-2\pi i\ (m,x)}dx, \qquad \left|\hat{f}(m)\right|\le(\bar{m}_1\ldots\bar{m}_s)^{-r}.$$

Пусть s – целое положительное число, $r>0$. Класс Соболева с доминирующей смешанной производной $SW_2^r(0,1)^s$ есть множество всех 1- периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, представимых в виде

$$f(x)=\sum_{m\in Z^s}\hat{f}(m)e^{2\pi i(m,x)}, \quad \sum_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)\right|^2(\bar{m}_1\ldots\bar{m}_s)^{2r}\le 1.$$

Пусть s – целое положительное число, $r>0$. Класс Соболева $W_2^r(0,1)^s$ есть множество всех 1- периодических по каждой переменной функций $f(x)=f(x_1,\ldots,x_s)$, которые в случае $r>0$

$$\sum_{m\in Z^s}\left|\hat{f}(m)\right|^2(\bar{m}_1^2+\ldots+\bar{m}_s^2)^r\le 1.$$

Норму пространства $L^q\equiv L^q(0,1)^s\,(1\le q<\infty)$, как обычно, будем обозначать через $\|\cdot\|_{L^q}$ или $\|\cdot\|_q$, а под $L^\infty[0,1]^s$ будем всюду понимать $C[0,1]^s$.

Как сообщалось выше, восстановление производится по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье с *произвольным* конечным спектром, с дальнейшей переработкой *по произвольным* алгоритмам φ_N :

$$D_N=\left\{\ l_1(f)=\hat{f}(m^{(1)}),\ \ldots\ ,\ l_N(f)=\hat{f}(m^{(N)}):m^{(1)}\in Z^s,\ \ldots\ ,\ m^{(N)}\in Z^s\ \right\}\times\{\varphi_N\} \quad (3)$$

.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть даны числа $s\ (s=1,2,\ldots)$ и $r>\frac{1}{2}$. Тогда для D_N из (3) и для числовой последовательности $\widetilde{\varepsilon}_N=\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}$ $(N=2,3,\ldots)$ верны соотношения

$$\delta_N(0)\equiv\delta_N(D_N;Tf=f;E_s^r;0)_{L^2}\succ\prec\delta_N(D_N;Tf=f;E_s^r;\widetilde{\varepsilon}_N)_{L^2}\succ\prec\widetilde{\varepsilon}_N\sqrt{N}=\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r-\frac{1}{2}}},$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(D_N;Tf=f;E_s^r;\widetilde{\varepsilon}_N\eta_N=\dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}\eta_N\right)_{L^2}}{\delta_N\left(D_N;Tf=f;E_s^r;\widetilde{\varepsilon}_N=\dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r}\right)_{L^2}}=+\infty.$$

Теорема 2. Пусть даны числа $s(s=1,2,\ldots)$ и $r>\dfrac{1}{2}$. Тогда для числовой последовательности $\widetilde{\varepsilon}_N=\dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r+\frac{1}{2}}}(N=2,3,\ldots)$ верны соотношения (D_N определены согласно (3))

$$\delta_N(0)\equiv\delta_N(D_N;Tf=f;SW_2^r(0,1)^s;0)_{L^2}\succ\prec\delta_N(D_N;Tf=f;SW_2^r(0,1)^s;\widetilde{\varepsilon}_N)_{L^2}\succ\prec\widetilde{\varepsilon}_N\cdot\sqrt{N}=\frac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^r},\quad(4)$$

причем для всякой возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N=1}^{\infty}$ имеет место равенство

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\delta_N\left(D_N;Tf=f;SW_2^r(0,1)^s;\widetilde{\varepsilon}_N\eta_N=\dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r+\frac{1}{2}}}\eta_N\right)_{L^2}}{\delta_N\left(D_N;Tf=f;SW_2^r(0,1)^s;\widetilde{\varepsilon}_N=\dfrac{(\ln N)^{r(s-1)}}{N^{r+\frac{1}{2}}}\right)_{L^2}}=+\infty.$$

В коротком изложении задача (1)-(2) заключается в следующем:

1^0 .Находится $\succ\prec\delta_N(0)$; 2^0 . Находится $\{\widetilde{\varepsilon}_N\}$ такое, что $\delta_N(0)\succ\prec\delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N)$ с одновременным выполнением 3^0. $\forall\eta_N\uparrow+\infty:\ \overline{\lim_{N\to\infty}}\dfrac{\delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N\eta_N)}{\delta_N(\widetilde{\varepsilon}_N)}=+\infty.$

Обратимся к общей теме восстановления по неточной информации, одна из постановок в которой приведена в виде 1^0-3^0.

По этой теме, если публикации разбить на группы, отнеся в первую – [1-9], во вторую – [10-12] и в третью группу [13-14], то они различаются как по постановкам и, что интересно, так и по употребляемым названиям по сути одних и тех же математических объектов, и, конечно, по формулировкам результатов.

Большая серия работ на данную тему выполнена Дж. Траубом, Х. Вожняковским, Л. Пласкотой (см. [13-14] и имеющуюся в них библ., их соавторами и последователями, где в центр исследований поставлена задача минимизации суммарной *стоимости* $c(\varepsilon^{(N)})=\sum_{j=1}^{N}c(\varepsilon_N^{(j)})$ по стоимости $c(\varepsilon_N^{(j)})$ нахождения приближенных значений z_j (информационного "шума") в постановках типа (1, где $c(\varepsilon)$ - заданная неотрицательная функция от $\varepsilon(\varepsilon\geq 0)$.

Заметим, что данная оптимизация и оптимизация 1^0-3^0 представляют собой *различные* задачи. Действительно, при одних и тех же исходных данных в (1), постановка задачи в [13-14] существенно зависит от выбора функции стоимости $c(\varepsilon)$, и в этом смысле получаемые решения достаточно *произвольны*, в то время как решения задачи 1^0-3^0 *однозначны*.

Другое направление исследований представлено в работах В. М. Тихомирова, Г. Г. Магарил-Ильяева, К. Ю. Осипенко и А. Г. Марчука (см. [10-12] и имеющуюся в них библ.), их соавторов и последователей, где даны *точные решения* задачи (1).

При этом задачи формулируются в следующих названиях составляющих объектов (в обозначениях из §1). Согласно [10-12] для каждого $f\in F$ множество

$$I_\varepsilon^N f \equiv \left\{(z_1,\ldots,z_N): \left|l_j(f)-z_j\right| \le \varepsilon_j \quad (j=1,\ldots,N)\right\}$$

называют *информацией*, а отображение $I \equiv l^{(N)} = (l_1,\ldots,l_N): F \mapsto C^N$ – *информационным*. Отображение $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;y): C^N \times \Omega_Y \mapsto Y$ называют *методом восстановления*, а её *погрешностью*-величину

$$sup\left\{\left\|Tf(\cdot)-\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;\cdot)\right\|_Y : f \in F, (z_1,\ldots,z_N) \in I_\varepsilon^N f\right\}. \tag{5}$$

Далее, *inf* от (5) по всем φ_N называют *погрешностью оптимального восстановления* и обозначают через $E(T,F,I_\varepsilon^N)$,а метод $\overline{\varphi_N}$, на котором достигается эта нижняя грань (если таковая существует), называют *оптимальным методом восстановления* (оператора T на классе F по информации I_ε^N).

Приведем пример точного решения задачи восстановления.

Задача оптимального восстановления функций по тригонометрическим коэффициентам Фурье имеет следующее точное решение (см. [10]):

Пусть $I = \left\{\hat{f}(m)\right\}_{|m|\le N}$, тогда

$$E\left(Tf = f; W_2^r(0,1); I_\varepsilon^{2N+1}\right) = \sqrt{\varepsilon^2 + (N+1)^{-2r}} \equiv A, \tag{6}$$

что в обозначениях из §1 означает

$$\delta_N\left(D_N^{(T)}; Tf = f; W_2^r(0,1); \widetilde{\varepsilon}_N = \varepsilon\right)_{L^2} = A, \tag{7}$$

где $D_N^{(T)} = \left\{l_m(f) = \hat{f}(m) : m \in Z, |m| \le N\right\} \times \{\varphi_N\}$.

Формулировки теорем из статей [10-14] и теорем 1-2 отражают различие в постановках задач восстановления.

Если в [10] точное восстановление функций из одномерного класса Соболева производится по первым $2N+1$ коэффициентам Фурье, то в многомерных теоремах 1 и 2 – по N коэффициентам с произвольными гармониками, с последующим установлением предельной погрешности вычисления коэффициентов Фурье, еще сохраняющих порядок восстановления по точной информации.

Отметим также, что в порядковом отношении результаты (6)-(7) из [10] и (4) при $s=1$ из теоремы 2 совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темиргалиев Н.* Об оптимальном восстановлении решений классических уравнений математической физики//I-съезд математиков Казахстана: Тезисы докл.-Шымкент.1996.С.151-153.

2. *Темиргалиев Н.* Теоретико-числовые методы и теоретико-вероятностный подход к задачам Анализа. Теория вложений и приближений, абсолютная сходимость и преобразования рядов Фурье //Вестн. ЕАУ. 1997. № 3. С. 90-144

3. *Темиргалиев Н.* О задаче восстановления по неточной информации //Вестник Евразийского национального университета . 2004. № 1.С. 202-209.

4. *Темиргалиев Н.*, "Предельная нечувствительность операторов восстановления по неточной информации",Тезисы докладов 10-ой Межвузовской конференции по математике и механике, Алматы, ЭВЕРО, т.29(2004),252-253.

5. *Темиргалиев Н.,Математика: Избранное. Наука*,ред. Б. С. Кашин. – Изд-во ЕНУ им. Л.Н. Гумилева,Астана (2009): С.1-613.

6. *Темиргалиев Н.* Компьютерный (вычислительный) поперечник. Алгебраическая теория чисел и гармонический анализ в задачах восстановления (метод квази-Монте Карло). Теория вложений и приближений. Ряды Фурье. Спец. выпуск, посвященный научным достижениям математиков ЕНУ им. Л.Н.Гумилева Вест.ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, 2010. С.1-194.

7. *Темиргалиев Н.* Непрерывная и дискретная математика в органическом единстве в контексте направлений исследований, Пробное издание. ИТМиНВ. Астана, 2012. С. 1-259.

8. *Ажгалиев Ш.У.,Темиргалиев Н.*,"Об информативной мощности линейных функционалов",Матем. заметки, 3:6(2003),803-812.

9. *Ажгалиев Ш.У., Темиргалиев Н.*, Информативная мощность всех линейных функционалов при восстановлении функций из классов H_p^ω, Матем. сб., 198:11(2007), 3-2

10. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.*, "Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью". Матем. сб., 193:3 (2002), 79-100.

11. *Марчук А.Г., Осипенко К.Ю.*, "Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек",Матем. заметки, 17:3(1975),359-368.

12. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.*, "Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье" Матем. сб., 195:10 (2004), 67-82.

13. *Plaskota L.*,"Noisy information and computational complexity" Cambridge University Press (1996),P.1-308.

14. *Traub J. F., Wasilkowski G. and Wozniakowski H.*,"Information, Uncertainty, Complexity", Addison-Wesley (1983),C.1-184.

Берікханова М., Шерниязов Қ., Теміргалиев Н.

ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ФУРЬЕ КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ АРҚЫЛЫ ҮСТЕМ АРАЛАС ТУЫНДЫЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫ ЖУЫҚТАП ҚАЛПЫНА КЕЛТІРУДЕГІ КОМПЬЮТЕРЛІК (ЕСЕПТЕУІШ) ҚИМАНЫҢ ДӘЛ РЕТІ

Бұл мақала ақырлы ақпараттар көзі ретінде кез келген ақырлы спектрлі тригонометриялық Фурье коэффициенттері қолданылатын аралас туындылы функциялар класы S –функцияларын жуықтап қалпына келтіруге арналған. Барлық қарастырылатын функцияларды R^S, кеңістігінде түгел анықталған, әр s айнымалысы бойынша 1-периодты және $[0,1]^s$ периодттар кубында қосындыланатын деп есептейміз.

Алдымен $\delta_N(0)$ дәл ақпарат бойынша оңтайлы қалпына келтіру есебі қарастырылады. Содан соң бірінші абсолют – $\tilde{\varepsilon}_N$ тригонометриялық Фурье коэффициенттерінің есептеу қателігі, $\tilde{\varepsilon}_N$ – дәл Фурье коэффициенттері арқылы оңтайлы қалпына келтіру $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)$ реті олардың дәл мәндерімен есептеу ретімен бірдей болатындай етіп алынған. Бірақ тек $\tilde{\varepsilon}_N$ тізбегіне ғана тағы бір шарт қойылмайды, екінші абсолютті қамтамасыз ететін $\tilde{\varepsilon}_N$-ді $+\infty$ -ке өте баяу өсетін мүшелі η_N тізбегі бар $\eta_N\tilde{\varepsilon}_N$-ге ауыстыру $\delta_N(\tilde{\varepsilon}) \succ\prec \delta_N(0)$ қалпына келтіру ретін жоғалтуға әкеледі.

Berikhanova M., Sherniyazov K., Temirgaliev N.

THE EXACT ORDER OF COMPUTER (COMPUTATIONAL) WIDTHS OF THE RECOVERY OF FUNCTIONS WITH DOMINANT MIXED DERIVATIVES OF THE FOURIER COEFFICIENTS IN THE TRIGONOMETRIC

This article is dedicated to the restoration of functions S – classes of functions with dominating mixed derivative (thus, the mathematical model is a function), when the source of information are the finite trigonometric Fourier coefficients with an arbitrary finite spectrum.

All functions will be assumed definite throughout R^s, the 1-periodic in each of its s variables and summable on a cube of periods $[0,1]^s$.

First, we study the problem of optimal recovery of exact information $\delta_N(0)$. Then find the value $\tilde{\varepsilon}_N$ – the first absolute – error computing trigonometric Fourier coefficients such that the order $\delta_N(\tilde{\varepsilon}_N)$ of the optimal recovery is exact Fourier coefficients $\tilde{\varepsilon}_N$ will be the same as that of their exact values. But not only on the sequence $\tilde{\varepsilon}_N$ of a further requirement that ensures absolute second replacement $\tilde{\varepsilon}_N$ with $\eta_N\tilde{\varepsilon}_N$ an arbitrarily slow-growing to $+\infty$ the members of the sequence is a consequence of the loss of reconstruction accuracy $\delta_N(\tilde{\varepsilon}) \succ\prec \delta_N(0)$.