

Физика

**REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**

ISSN 2224-5227

Volume 1, Number 1 (2015), 5 – 14

UDC 530.12

THE MOTION OF BODIES IN PHOTOGRAVITATIONAL FIELD OF A STAR TAKING INTO ACCOUNT SPECIAL AND GENERAL RELATIVITY THEORY

A.P. Ryabushko¹, T.A. Zhur², I.T.Nemanova², I.P. Boyarina², O.L. Zubko¹, V.I. Yurinok¹

alba_e01@list.ru

¹Belorus National Technical University

²Belorus State Agrarian Technical University

Key words: Photogravitational problem, relativistic equations of motion, the Infeld method.

Abstract. The patterns of motion for every test body in photogravitational field of the star, which can significantly differ from the patterns of motion of body in gravitational field, have been obtained. The following effects of SRT and GRT to the terms of order v^2/c^2 have been considered: the light pressure, the Poynting-Robertson effect, the longitudinal and transverse Doppler effect, the increase in mass of the moving test body, the effects of the space-time curvature which arise due to the gravitational fields of the star and gas-dust ball surrounding the star. We have showed that the longitudinal Doppler effect and the aberration of light (the effects of order v/c) lead to the spiral motion of the test body around the star. Taking into account the other effects of order v^2/c^2 accelerates approximately by three times the body fall on the spiral onto the star. The spiral can be seen as the decreasing in ellipse size with decreasing eccentricity and periastron, which can shift against the motion in orbit due to the influence of the gravitational field of gas-dust ball.

УДК 530.12

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ФОТОГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ПРИ УЧЕТЕ СПЕЦИАЛЬНОЙ И ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

А. П. Рябушко¹, Т. А. Жур², И. Т. Неманова², И. П. Боярина², О. Л. Зубко¹, В. И. Юринок¹

¹Белорусский национальный технический университет

²Белорусский государственный аграрный технический университет

Ключевые слова: фотогравитационная задача, релятивистские уравнения движения, метод Инфельда.

Аннотация. Получены закономерности движения любого пробного тела в фотогравитационном поле звезды, которые могут существенно отличаться от закономерностей движения тела в гравитационном поле.

Учтены эффекты СТО и ОТО до порядка v^2/c^2 : прямое световое давление, эффект Пойнтинга-Робертсона, продольный и поперечный эффекты Доплера, увеличение массы движущегося пробного тела, эффекты искривления пространства-времени, возникающие благодаря гравитационным полям звезды и окружающего

ее газопылевого шара. Показано, что продольный эффект и Доплера и аберрация света (эффекты порядка v/c) приводят к спиралеподобному движению пробного тела вокруг звезды, а учет остальных эффектов порядка v^2/c^2 увеличивает скорость падения тела по спирали на звезду примерно в 3 раза. Спираль можно представить в виде уменьшающегося в размерах эллипса, эксцентриситет которого также уменьшается, а перигея может смещаться против движения по орбите благодаря воздействию гравитационного поля газопылевого шара.

Введение

Актуальность предлагаемого исследования обусловлена необходимостью более точного прогнозирования движения малых тел в Солнечной системе (астероидов, комет, метеоритов, пылевых частиц, космических аппаратов и станций, возможно с солнечным парусом и т.д.) в связи с интенсивным освоением ближнего и дальнего космоса, а также для решения некоторых космогонических проблем планетарных систем.

Релятивистское движение тел без учета светового давления разными методами (Эйнштейна-Инфельда и Фока) исследуется многие годы белорусской и казахской школами по проблеме движения (см., например, работы [1]–[12] и имеющуюся в них библиографию).

ПIONЕРСКАЯ РАБОТА [13], учитывающая влияние светового давления звезды на движение пылевых частиц, принадлежит известному астроному и одному из основоположников астрофизики в СССР акад. В.Г.Фесенкову (см. также [14]), который в этой работе получил уравнения движения (УД) частицы в ньютоновской теории тяготения с учетом прямого светового давления на частицу и учета одного кинематического эффекта специальной теории относительности (СТО) – аберрации света, приводящей к так называемому эффекту Пойнтинга-Робертсона (см. [15], [16]), согласно которому пробное тело должно двигаться по спирали, закручивающейся вокруг звезды. В [13], в частности, дана оценка времени падения пробного тела на Солнце с орбиты Земли, которое в зависимости от «парусности» пробного тела составляет 7000 и более лет (см. [15], [16], где также имеется ряд оценок для времени падения).

Учет светового давления в теории движения тел предполагает использование законов электродинамики, основой которых являются ковариантные уравнения Максвелла и СТО. Это означает, что должны учитываться такие эффекты СТО, как релятивистские изменения массы движущегося относительно наблюдателя тела и импульса электромагнитного излучения звезды (светового давления), действующего на тело в соответствии с продольным и поперечным эффектами Доплера, а также лоренцево поперечное сокращение площади миделева сечения тела и аберрация света. Из всех перечисленных эффектов в работах [13]–[16] и работах многих других авторов была принята во внимание только аберрация, имеющая первый порядок по малому параметру v/c , где v – скорость тела, а c – скорость света в вакууме, и прямое световое давление звезды. Отметим, что продольный эффект Доплера также первого порядка относительно v/c и нелогично, учитывая аберрацию, его не учитывать. Остальные перечисленные выше эффекты второго порядка по v/c . Если движение тела происходит в окрестности звезды, окруженной газопылевым облаком, то желательно учесть кривизну пространства-времени и возникающие силы согласно общей теории относительности (ОТО), что приводит к появлению в УД еще дополнительных членов порядка v^2/c^2 .

Целью настоящей работы является вывод и интегрирование релятивистских УД пробного тела с учетом перечисленных выше эффектов СТО и ОТО, что будет достигнуто удержанием в разложении в ряды УД и их решений членов первого и второго порядков по малому параметру v/c . Тем самым будет сделан еще один существенный шаг по пути приближения предлагаемой теории движения тел в задаче двух тел к реально существующим в природе движениям. Это приближение, которое будет рассмотрено ниже, назовем постニュтоновским приближением (ПНП) СТО-ОТО. Пренебрегая эффектами ПНП ОТО, получим приближение, которому можно присвоить аббревиатуру ПНП СТО.

Вывод УД в ПНП СТО-ОТО

Учет перечисленных выше факторов, влияющих на движение пробного тела, и предположение, что звезда, распределение среды в окружающем звезду газопылевом облаке, пробное тело – сферически симметричны, приводят к заключению, что движение плоское. Без ограничения общности можно считать, что движение пробного тела происходит в координатной плоскости Oxy прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, т. е. в координатной плоскости $z=0$. Тогда согласно исследованием подробно изложенным в работах [17]–[24], и используя метод последовательных приближений Пуанкаре-Эйнштейна-Инфельда требуемые УД можно записать в следующем виде (O – центр масс звезды; x, y – координаты центра масс пробного тела; $r^2 = x^2 + y^2$; t – время далекого неподвижного наблюдателя; $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ а}^{-1} \cdot \text{м}^3 \cdot \text{Н}^{-2}$ – ньютоновская постоянная тяготения):

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x = F_0^1 + F_1^1 + F_{2y}^1 + F_{2g}^1 + F_{2p}^1, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} y = F_0^2 + F_1^2 + F_{2y}^2 + F_{2g}^2 + F_{2p}^2. \end{cases} \quad (1), (2)$$

Смысл входящих систему (1)–(2) величин следующий. Все F с индексами являются удельными силами (ускорениями) разного порядка, учет которых отличает систему (1)–(2) от классических (ニュートンовских) УД пробного тела (планета, астероид, комета и т.д.), когда в УД (1), (2) справа стоят нули:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} x = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\gamma M}{r^3} y = 0 \quad (3)$$

Введя на плоскости Oxy полярную систему координат по формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, находим известными методами (см., например [25]–[28]) решение УД (3):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \varphi) \quad (4)$$

описывающее коническое сечение с параметром p и эксцентриситетом e .

В дальнейшем будем рассматривать в поле притяжения финитные движения, т.е. $0 \leq e \leq 1$ – окружность ($e=0$), эллипс ($0 < e < 1$). При выводе уравнения орбиты (4) использовались два первых интеграла системы (3): интеграл сохранения энергии

$$v^2 = \gamma M \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad p = a(1-e^2), \quad (5)$$

где a – большая полуось эллиптической орбиты и v^2 определяются формулой

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2, \quad (6)$$

которая дает квадрат поступательной скорости пробного тела на орбите, и интеграл сохранения орбитального момента импульса пробного тела (интеграл площадей)

$$L = x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma M p} \quad (7)$$

Учесть влияние светового давления на движение пробного тела можно с разной степенью точности (СТ), разумея под этим учет в УД (1)–(2) справа членов: 0) не содержащих малый параметр v/c (0СТ); 1) содержащих $(v/c)^0$ и v/c в первой степени (1СТ); 2) содержащих v^2/c^2 , v/c и $(v/c)^0$ (2СТ – вторая СТ).

Интегрирование в случае 0СТ

В этом случае УД имеют вид (заменим x, y, r на x^*, y^*, r^* , так как УД и их решения при учете прямого светового давления F_0^1 и F_0^2 отличаются от x, y, r):

$$\frac{d^2x^*}{dt^2} + \frac{\gamma M}{(r^*)^3} x^* = F_0^1 = \frac{\gamma A}{(r^*)^3} x^*, \quad \frac{d^2y^*}{dt^2} + \frac{\gamma M}{(r^*)^3} y^* = F_0^2 = \frac{\gamma A}{(r^*)^3} y^*, \quad r^* = \sqrt{(x^*)^2 + (y^*)^2}, \quad (8)$$

где A называется редуцирующей массой звезды относительно пробного тела и определяется формулой (см. [13]-[15], [29]-[32])

$$A = k\sigma_0 W_0 r_0^2 / (\gamma m_0 c) = \Pi W_0 r_0^2 / (\gamma c) \quad (9)$$

в которой k – коэффициент отражения света пробным телом $1 \leq k \leq 2$, σ_0 – мидлево сечение пробного тела в системе отсчета K , относительно которой тело покоятся; W_0 – звездная постоянная, т.е. полное количество энергии электромагнитного излучения звезды в системе покоя звезды K , приходящего за 1 сек на 1 см² неподвижной в системе K площадки, перпендикулярной направлению на звезду и находящейся на расстоянии r_0 от звезды; m_0 – масса покоя пробного тела в системе K . Величина $\Pi = k\sigma_0/m_0$ называется парусностью пробного тела.

Интегрирование УД (8) совершенно аналогично интегрированию УД (3). В итоге имеем в полярных координатах следующие первые интегралы и уравнение орбиты при одинаковых начальных условиях для (3) и (8) (см. [20], где вместо $x, y, x^*, y^*, r^*, v^*, a^*, p^*, e^*$, используются соответственно $x^1, x^2, x_1^1, x_1^2, r_1, v_1, a_1, p_1, e_1$:

$$(v^*)^2 = \gamma(M - A) \left(\frac{2}{r^*} - \frac{1}{a^*} \right), \quad (r^*)^2 \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\gamma(M - A)p^*}, \quad (10)$$

$$\frac{1}{r^*} = \frac{1}{p^*} (1 + e^* \cos \phi), \quad p^* = a^* \left[1 - (e^*)^2 \right]. \quad (11)$$

В процессе интегрирования также были выявлены следующие связи (см. [17], [18]):

$$\frac{p^*}{p} = \frac{M}{M - A} = \frac{1 + e^*}{1 + e}, \quad e^* = \frac{Me + A}{M - A} \Rightarrow e, \quad (12)$$

из которых и (4), (5), (11) находим, что $p^* > p$, $e^* > e$, $a^* > a$; также $r^* \geq r$ при одинаковых Φ , т.е. эллипс (4) под действием светового давления увеличился, образно говоря, «раздулся», и превратился в эллипс (11) (а может быть в параболу с $e^* = 1$ или гиперболу с $e^* > 1$, это зависит от величины светового давления и «парусности» пробного тела). Мы далее будем рассматривать эллипсы, требуя выполнения условий $0 \leq e < 1$, $0 < e^* < 1$ (см. рис.). Условие $0 < e^* < 1$ будет выполняться, как это следует из (12), если $A < M(1 - e)/2$, что обеспечивает $M - A > 0$ (поле притяжения).

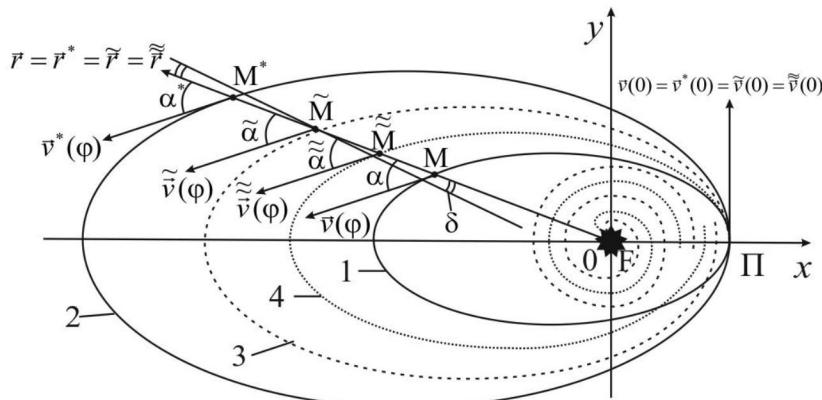


Рис. Возможные траектории пробного тела в фотогравитационном поле (поле притяжений) звезды с фокусом F и периастром П:

1 – опорный эллипс а ньютоновском поле тяготения;
2 – «раздувшийся» от прямого светового давления эллипс;

3 – спиралевидная траектория при учёте продольного эффекта Доплера и аберрации (ПНП СТО порядка v/c , δ – угол аберрации-угол между \tilde{v} и направлением луча света (в Солнечной системе для орбиты Земли в среднем за 1 год принимается $\delta \approx 20^\circ,5$);

4 – траектория в ПНП СТО-ОТО порядка v^2/c^2

Эллипс (4) будем называть опорным, а «раздувшийся» эллипс (11) – возмущенным. Если $e = 0$, то при $A < M/2$ всегда $0 < e^* < 1$, т.е. опорная окружность превращается в эллипс (ср. с [13], [14], где утверждается, что окружность остается окружностью).

3. Интегрирование в случае 1СТ

Имеем УД (см. [19], [20]):

$$\begin{cases} \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2} + \frac{\gamma(M-A)}{\tilde{r}^3}\tilde{x} = F_1^1 = \frac{\gamma A}{(r^*)^3} \cdot \frac{v^*}{c} (-2x^* \cos \alpha + y^* \sin \alpha), \\ \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + \frac{\gamma(M-A)}{\tilde{r}^3}\tilde{y} = F_1^2 = \frac{\gamma A}{(r^*)^3} \cdot \frac{v^*}{c} (-2y^* \cos \alpha - x^* \sin \alpha), \end{cases} \quad (13)$$

в которых кроме прямого светового давления (учет F_0^1, F_0^2) учтены еще F_1^1, F_1^2 , возникающие благодаря влиянию продольного эффекта Доплера и аберрации света; α^* – угол между векторами $\tilde{v}^* = (dx^*/dt, dy^*/dt)$ и $\tilde{r} = (x, y)$ (см. рис.). Отметим также, что значок тильда «~» в УД (13) появляется из-за учета членов порядка v/c , обобщающих УД (8) и видоизменяющих решения УД (13) по сравнению с решениями УД (8).

Применяя ту же процедуру, что и при нахождении первых интегралов УД (8), после достаточно продолжительных и утомительных вычислений, подробно изложенных в работе [18], имеем интеграл энергии

$$\begin{aligned} \tilde{v}^2 = & \frac{2\gamma(M-A)}{\tilde{r}} - \frac{2\gamma(M-A)}{p}(1+e) + \frac{\gamma M}{p}(1+e)^2 - \\ & - \frac{2\gamma A}{c(p^*)^2} \sqrt{\gamma M p} \left[\left(1 + \frac{3}{2}(e^*)^2\right)\varphi + 2e^* \sin \varphi - \frac{1}{4}(e^*)^2 \sin 2\varphi \right] \end{aligned} \quad (14)$$

и интеграл орбитального момента импульса пробного тела (интеграл площадей)

$$L = \tilde{r}^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma M p} - \frac{\gamma A}{c} \varphi \quad (15)$$

Найденные интегралы энергии и площадей (14) и (15) дают возможность получить уравнение орбиты пробного тела. Процедура ее получения подробно изложена в работе авторов [18]. Не повторяя этих подобных вычислений, сразу приведем уравнение орбиты в полярных координатах:

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1 + e^* \cos \varphi}{p^*} + \frac{2\gamma A}{cp^* \sqrt{\gamma M p}} \left[\left(1 - \frac{e^*}{4} \cos \varphi \right) \varphi - \left(1 - \frac{e^*}{4} \right) \sin \varphi \right] \quad (16)$$

4. Интегрирование УД в случае 2СТ

В УД справа добавляются члены $F_{2y}^1, F_{2p}^1, F_{2y}^2, F_{2p}^2$, которые имеют вид (обоснование см. в [8], [18], [19]):

$$\begin{aligned} F_{2y}^1 &= \frac{\gamma A}{2(r^*)^3} \cdot \frac{(v^*)^2}{c^2} \left[(3 - 4 \sin^2 \alpha^*) x^* - 3 y^* \sin \alpha^* \cos \alpha^* \right], \\ F_{2y}^2 &= \frac{\gamma A}{2(r^*)^3} \cdot \frac{(v^*)^2}{c^2} \left[(3 - 4 \sin^2 \alpha^*) y^* - 3 x^* \sin \alpha^* \cos \alpha^* \right] \end{aligned} \quad (17)$$

и возникают благодаря взаимодействию aberrации с продольным эффектом Доплера, поперечному эффекту Доплера, лоренцеву сокращению миделева сечения пробного тела и увеличению его массы (см. [19]);

$$\begin{aligned} F_{2g}^1 &= \frac{\gamma(M-A)}{c^2} \left\{ \left[4 \frac{\gamma(M-A)}{r^*} - (v^*)^2 \right] \frac{x^*}{(r^*)^3} + \frac{4}{(r^*)^2} \frac{dr^*}{dt} \frac{dx^*}{dt} \right\}, \\ F_{2g}^2 &= \frac{\gamma(M-A)}{c^2} \left\{ \left[4 \frac{\gamma(M-A)}{r^*} - (v^*)^2 \right] \frac{y^*}{(r^*)^3} + \frac{4}{(r^*)^2} \frac{dr^*}{dt} \frac{dy^*}{dt} \right\} \end{aligned} \quad (18)$$

и обязаны искривлению пространства-времени редуцированной массой звезды (см. [18]);

$$\begin{aligned} F_{2p}^1 &= -\frac{4}{3} \pi \rho \gamma x^* + \frac{4 \pi \rho \gamma}{3 c^2} \left[4 \frac{dx^*}{dt} \left(x^* \frac{dx^*}{dt} + y^* \frac{dy^*}{dt} \right) - x^* (v^*)^2 + \gamma(M-A)x^* \left(-\frac{11}{2r^*} + \frac{3}{R} + \frac{3R^2}{(r^*)^3} \right) \right], \\ F_{2p}^2 &= -\frac{4}{3} \pi \rho \gamma y^* + \frac{4 \pi \rho \gamma}{3 c^2} \left[4 \frac{dy^*}{dt} \left(x^* \frac{dx^*}{dt} + y^* \frac{dy^*}{dt} \right) - y^* (v^*)^2 + \gamma(M-A)y^* \left(-\frac{11}{2r^*} + \frac{3}{R} + \frac{3R^2}{(r^*)^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

Добавки F_{2p}^1, F_{2p}^2 характеризуют действующие на частицу силы гравитационного поля газопылевого шара радиусом R , центр которого находится в центре звезды и плотность которого $\rho = \text{const}$ (см. [8]), а также силы прямого светового давления (члены с $M-A$).

В силу метода последовательных приближений при интегрировании УД (1)-(2) следует считать, что в них слева вместо x, y, r находятся $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{r}$; справа в F_0^1, F_0^2 вместо x^*, y^*, r^* (см. формулы (8)) нужно также писать $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{r}$, а в F_1^1, F_1^2 (см. УД (13)) вместо $x^*, y^*, r^*, v^*, \alpha^*$ следует поставить $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{r}, \tilde{v}, \tilde{\alpha}$, которые уже найдены в предыдущих приближениях.

Приняв все это во внимание и применив к УД (1)-(2) методику, аналогичную методике интегрирования УД (13), в результате достаточно сложных и продолжительных вычислений подробно изложенных в работе [33], находим интеграл энергии

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{v}}^2 = & \frac{2\gamma Mp}{p^* \tilde{r}} - \frac{\gamma Mp}{(p^*)^2} \left(1 - (e^*)^2 \right) - \frac{\gamma A \varphi}{c(p^*)^2} \sqrt{\gamma Mp} \left(2 + 3(e^*)^2 \right) - \\ & - \frac{\gamma^2 A^2}{c^2 (p^*)^2} \left[3 \left(1 - (e^*)^2 \right) \varphi^2 + 2e^* (1 + e^* \cos \varphi) \varphi \sin \varphi \right] + v_p^2 \end{aligned} \quad (20)$$

(записываем его с точностью до вековых членов, выражение для v_p^2 см. в [8]) и интеграл площадей, который с точностью до вековых членов имеет вид

$$\tilde{L} = \tilde{r}^2 \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\gamma Mp} - \frac{\gamma A}{c} \varphi - 8\pi \sqrt{\gamma Mp} \frac{\gamma \rho}{c^2} (p^*)^2 e^* \varphi \sin \varphi, \quad (21)$$

и с их помощью орбиту движения пробного тела, уравнение которой в полярных координатах можно записать в виде (оставляя только вековые члены):

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1 + e^* \cos \varphi}{p^*} + \frac{2\gamma A \varphi}{cp^* \sqrt{\gamma Mp}} \left(1 - \frac{e^*}{4} \cos \varphi \right) + \frac{\gamma A^2 \varphi^2}{c^2 M p p^*} \left(3 - \frac{e^*}{8} \cos \varphi \right) + \frac{3\gamma(M-A)}{c^2 (p^*)^2} e^* \varphi \sin \varphi + \frac{1}{r_p}, \quad (22)$$

где

$$\frac{1}{r_p} = \frac{3\pi\gamma\rho p^*}{c^2} e^* \varphi^2 \cos \varphi + \left[\frac{6\pi\gamma\rho (p^*)^3}{c^2 R} - \frac{21\pi\gamma\rho (p^*)^2}{c^2} - \frac{2\pi\rho (p^*)^3}{M-A} \right] \frac{e^*}{p^*} \varphi \sin \varphi. \quad (23)$$

5. Обсуждение результатов интегрирования в случаях 1СТ и 2СТ

1) из (22) следует, что при увеличении φ также увеличивается $1/\tilde{r}$, а, следовательно, \tilde{r} уменьшается. Это означает, что орбитой движения пробного тела является слегка волнистая (из-за членов с $\cos \varphi$) спираль, которая закручивается около звезды, приближаясь к ней (см. рис.).

2) Подставив $1/\tilde{r}$ из (22) в (20) и, используя (12), преобразуем $\tilde{\tilde{v}}^2$ к виду:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{v}}^2 = & \frac{\gamma Mp}{(p^*)^2} \left[1 + e^* \cos \varphi + (e^*)^2 \right] + \frac{\gamma A \varphi}{c(p^*)^2} \sqrt{\gamma Mp} \left(2 - e^* \cos \varphi - 3(e^*)^2 \right) + \frac{\gamma^2 A^2 \varphi^2}{c^2 (p^*)^2} \left[3 - \frac{e^*}{4} \cos \varphi + 3(e^*)^2 \right] - \\ & - \frac{2\gamma^2 A^2 e^2}{c^2 (p^*)^2} (1 + e^* \cos \varphi) \varphi \sin \varphi + \frac{6\gamma^2 (M-A)^2}{c^2 (p^*)^2} e^* \sin \varphi + \frac{6\pi\gamma^2 \rho (M-A) p^*}{c^2} e^* \varphi^2 \cos \varphi + \\ & + 2\gamma(M-A) \left[\frac{6\pi\gamma\rho (p^*)^3}{c^2 R} - \frac{21\pi\gamma\rho (p^*)^2}{c^2} - \frac{2\pi\rho (p^*)^3}{M-A} \right] \frac{e^*}{p^*} \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

В силу малости ρ и e^* , входящих в (24), заключаем, что поступательная скорость $\tilde{\tilde{v}}$ движения пробного тела с увеличением φ также увеличивается (численные оценки см. ниже).

3) согласно (21) и малости ρ и e^* секториальная скорость пробного тела с ростом φ монотонно убывает и при $\varphi = \varphi_0 \approx c\sqrt{\gamma Mp}/(\gamma A)$ обращается в нуль. Напомним (см. (7)), что

$\tilde{L} = \left| \tilde{\tilde{r}} \times \frac{d\tilde{\tilde{r}}}{dt} \right| = \left| \tilde{\tilde{r}} \times \tilde{\tilde{v}} \right| = \left| \tilde{\tilde{r}} \right| \left| \tilde{\tilde{v}} \right| \sin \tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha}$ – угол между векторами $\tilde{\tilde{r}}$ и $\tilde{\tilde{v}}$, знак « \times » обозначает их

векторное произведение. Так как $\left| \tilde{\tilde{r}} \right| = \tilde{\tilde{r}}$ и $\left| \tilde{\tilde{v}} \right| = \tilde{\tilde{v}}$ при $\varphi = \varphi_0$ не равны нулю, что легко определяется из (22) и (24), то из $\tilde{L} = 0$ следует, что $\sin \tilde{\alpha} = 0$, т.е. векторы $\tilde{\tilde{r}}$ и $\tilde{\tilde{v}}$ с момента $\varphi = \varphi_0$ становятся коллинеарными противоположно направленными ($\tilde{\alpha} = \pi$, см. рис.), пробное тело

начинает падать на звезду по радиусу $\Phi = \Phi_0$. Имеем на траектории движения характерную точку $\Phi = \Phi_0$, которая разделяет ее на две части – спираль и отрезок радиальной прямой. Этую точку назовем точкой сепарации.

4) уравнение орбиты (22) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{\tilde{r}} = \frac{1}{\tilde{p}} \cdot (1 + \tilde{e} \cos \Phi), \quad \frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1}{p^*} \left(1 + \frac{2\gamma A \varphi}{c \sqrt{\gamma M p}} + \frac{3\gamma A^2 \varphi^2}{c^2 M p} \right), \quad (25)$$

$$\tilde{e} = e^* \left(1 - \frac{\gamma A \varphi}{2c \sqrt{\gamma M p}} - \frac{\gamma A^2 \varphi^2}{8c^2 M p} + \frac{3\pi \gamma \rho (p^*)^2}{c^2} \varphi^2 \right) \left(1 + \frac{2\gamma A \varphi}{c \sqrt{\gamma M p}} + \frac{3\gamma A^2 \varphi^2}{c^2 M p} \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$\Phi = \left[1 + \frac{2\pi \rho p^3}{M - A} - \frac{3\gamma(M - A)}{c^2 p} + \frac{21\pi \rho p^2}{c^2} - \frac{6\pi \rho p^3}{c^2 R} \right] \varphi. \quad (27)$$

Внимательное рассмотрение решения в форме (25)-(27) показывает, что орбитой пробного тела является деформирующийся уменьшающийся в размерах эллипс, для которого приближенно

$\lim_{\varphi \rightarrow \Phi_0} \tilde{p} \approx p^*/6$ $\lim_{\varphi \rightarrow \Phi_0} \tilde{e} \approx e^*/16$

выполняются предельные равенства. Если пробное тело начало движение, например, на опорном эллипсе, совпадающем с орбитой Земли, то оно, имея парусность $\Pi \approx 10^4 \text{ м}^2/\text{s}$ [34], т.е., $A \approx 0,1 \text{ m}$ в пределе выйдет на эллиптическую орбиту с $\tilde{p} \approx 1,5 \cdot 10^{13}/6 = 0,25 \cdot 10^{13} \text{ м}$ и $\tilde{e} \approx 0,017/16 \approx 0,001$, т.е. орбита вдвое ближе к Солнцу, чем орбита Меркурия и практически является окружностью, с которой пробное тело начинает падать по радиусу $\Phi = \Phi_0$ на Солнце. Согласно (27) также до точки сепарации происходит смещение периастра. Для планет земной группы оно прямое, для остальных планет – обратное. Для пробных тел с большой парусностью смещение всегда обратное (против хода частицы по орбите).

5) Упомянутое выше пробное тело до точки сепарации сделает по спирали вокруг Солнца $n = \Phi_0/2\pi \approx 15924$ об. Интегрируя интеграл площадей (21) и считая $e^* \ll 1$, получим приближенную формулу зависимости времени t от Φ :

$$t = \frac{(p^*)^2 \varphi}{\sqrt{\gamma M p}} \left(1 - \frac{3\gamma A \varphi}{2c \sqrt{\gamma M p}} + \frac{\gamma A^2 \varphi^2}{c^2 M p} \right), \quad (28)$$

Согласно (28) время, затраченное на прохождение пробным телом 15924 оборотов, составит $t = t(\Phi_0) \approx 9700 \text{ с}$.

6) Используя интеграл энергии (24) при $e^* \ll 1$, находим приближенную формулу

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\gamma M p}}{p^*} \left(1 + \frac{\gamma A \varphi}{c \sqrt{\gamma M p}} + \frac{\gamma A^2 \varphi^2}{c^2 M p} \right), \quad (29)$$

из которой следует, что поступательная скорость монотонно возрастает от стартовой $\tilde{v}(0) = \sqrt{\gamma M p}/p^*$ до $\tilde{v}(\Phi_0) \approx 3\tilde{v}(0)$, т.е. в точке сепарации согласно (29) скорость пробного тела втрое превысит стартовую скорость. При учете в (29) только первых двух членов (1СТ) дает в точке сепарации Φ_0 превышение в два раза.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Петрова Н.М./ ЖЭТФ, 19, 989, 1949.
- [2] Рябушко А.П./ ЖЭТФ, 33, 1387, 1957.
- [3] Айткеева З.А., Петрова Н.П. // Сб. «Исследования процессов переноса. Вопросы теории относительности». Труды Казах. ун.-та. Алма-Ата, 1959, с. 209.

- [4] Абдильдин М.М. // Вестн. ЛГУ, №22, Сер. Физ. и хим., вып. 4, 19 и 155, 1964.
- [5] Петрова Н.М., Санчина И.В. // Докл. АН СССР, т. 217, 319, 1974.
- [6] Рябушко А.П. Движение тел в общей теории относительности. Мин., изд. «Выш. шк.», 1979. -240с.
- [7] Чечин Л.М. // Труды АФИ АН Каз ССР, Алма-Ата, Наука, 1984, с. 108-119.
- [8] Рябушко А.П., Неманова И.Т. // Докл. АН БССР, 1983, т. 27, №10, с.889-892; 1984, т.28, №9, с.806-809.
- [9] Абдильдин М.М. Исследование проблемы движения тел в ОТО методом Фока. Докт. дисс. Минск, АН БССР, 1985.
- [10] Рябушко А.П. Проблема устойчивости движения тел в ОТО Мин., изд. «Выш. шк.», 1987. – 112с.
- [11] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Nemanova I.T.// American Institute of Physics, v. 1205, Melville, New York, 2010.P.148-154.
- [12] Чечин Л.М. Движение тел в классических калибровочных полях. Lambert Academic Publishing, Deutschland 2012.-270 с.
- [13] Фесенков В.Г. //Астрон. журн. 1946. Т.23, вып. 6.с. 353-366.
- [14] Фесенков В.Г. Метеорная материя в межпланетном пространстве. М.-Л. Изд.-во АН ССР, 1947. -276с.
- [15] Мартынов Д.Я. Курс общей астрофизики. М., 1971. (1988)
- [16] Радзивский В.В. // Солнечная система. Маленькая Энциклопедия «Физика космоса». М. 1976. С. 61-80.
- [17] Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. 2011, №3. с. 80-88.
- [18] Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. 2011, №4. с. 93-97.
- [19] Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. 2012, №3. с. 77-83.
- [20] Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. 2012, №4. с. 89-95
- [21] Рябушко А.П., Жур Т.А., Боярина И.П. Зубко О.Л., Юринок В.И. // Тез.докл.11 Бел. мат. конф. Часть3. Минск, 5-9 ноября 2012, с.48-50.
- [22] Рябушко А.П., Зубко О.Л., Жур Т.А., Боярина И.П. // Материалы VIII Межд. научн.-практ. конф. «Новейшие достижения европейской науки-2012», 17-25 июня 2012. София. Том 18, с. 30-38.
- [23] Рябушко А.П., Неманова И.Т., Жур Т.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. 2012, №1. с. 96-100.
- [24] Рябушко А.П., Неманова И.Т., Жур Т.А. // Весці НАН Беларусі. Сер. Фіз.-мат. навук. 2012, №2. с. 89-92
- [25] Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1963.
- [26] Субботин М.Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., 1968.
- [27] Смарт У.М. Небесная механика. М., 1965.
- [28] Справочные руководство по небесной механике. Под ред. Г.Н. Дубошина. М., 1976. Часть II.
- [29] Эльяберг П.Е. Введение в теорию полета ИСЗ. М., 1965.
- [30] Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. М., 1965. С. 526,634.
- [31] Каплан С.А. Давления излучения. Маленькая энциклопедия «Физика космоса». М., 1976.с.215.
- [32] Аксенов Е.П. Теория движения ИСЗ. М., 1977. § 9.1.
- [33] Зубко О.Л. Релятивистские эффекты движения частицы в фотографитационном поле звезды. // Вестник БГУ, сер.1, 2014, №3.
- [34] Поляхова Е.Н. Космический полет с солнечным парусом. М., URSS, 2011.

REFERENCES

- [1] Petrova N.M. ZhETF, 19, 989,1949. (in Russ.).
- [2] Ryabushko A.P. ZhETF, 33, 1387.1957. (in Russ.).
- [3] Aitikeeva Z.A., Petrova N.P. Coll. «Study of transfer processes. Questions of relativity». Works of Kazakh. un. Alma-Ata, 1959, p. 209. (in Russ.).
- [4] Abdil'din M.M. Vestn. LGU, №22, Ser. phys. and chem., N. 4, 19 and 155, 1964. (in Russ.).
- [5] Petrova N.M., Sandina I.V. Reports AN SSSR, V. 217, 319, 1974. (in Russ.).
- [6] Ryabushko A.P. The motion of bodies in general relativity. Mn., pub. «Vysh.shk.», 1979. -240 p. (in Russ.).
- [7] Chechin L.M. Works of AFI AS Kaz SSR, Alma-Ata, Nauka, 1984, p. 108-119. (in Russ.).
- [8] Ryabushko A.P., Nemanova I.T. // Rep. AS BSSR, 1983, V. 27, №10, p.889-892; 1984, V.28, №9, p.806-809. (in Russ.).
- [9] Abdildin M.M. Study of the problem of motion of bodies in general relativity by Fock methods. Doct. diss. Minsk, AS BSSR, 1985. (in Russ.).
- [10] Ryabushko A.P. The problem of stability of motion of bodies in general relativity. Mn.,pub. "Vysh. shk., "1987. – 112p. (in Russ.).
- [11] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Nemanova I.T. American Institute of Physics, v. 1205, Melville, New York, 2010.P.148-154.
- [12] Chechin L.M. The motion of bodies in classical gauge fields. Lambert Academic Publishing, Deutschland 2012.-270 p.
- [13] Fesenkov V.G. Astron. jour. 1946. V.23, Ed. 6. p. 353-366.
- [14] Fesenkov V.G. Meteoric matter in interplanetary space. M.-L. pub. AS SSR, 1947. -276p. (in Russ.).
- [15] Martynov D.Ya. . Course of general astrophysics. М., 1971. (1988) (in Russ.).
- [16] Radzievskii V.V. Solar system. Small encyclopedia "Physics of Space". M. 1976. p. 61-80. (in Russ.).
- [17] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Boyarina I.P. Vesti NAS Belarus. Ser. Phys.-math. sc. 2011, №3. p. 80-88. (in Russ.).
- [18] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Boyarina I.P. Vesti NAS Belarus. Ser. Phys.-math. sc. 2011, №4. p. 93-97. (in Russ.).
- [19] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Boyarina I.P. Vesti NAS Belarus. Ser. Phys.-math. sc. 2012, №3. p. 77-83. (in Russ.).
- [20] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Boyarina I.P. Vesti NAS Belarus. Ser. Phys.-math. sc. 2012, №4. p. 89-95. (in Russ.).

- [21] Ryabushko A.P., Zhur T.A., Boyarina I.P., Zubco O.L., Yurinok V.I. Thes.rep.11 Bel. math. conf. part 3. Minsk, 5-9 November 2012, p.48-50. (in Russ.).
- [22] Ryabushko A.P., Zubko O.L., Jour T.A., Boyarina I.P. Materials of the VIII Intern. Scient.-pract. conf. "The newest success of European science - 2012", 17-25 June 2012. Sofia. V. 18, p. 30-38. (in Russ.).
- [23] Ryabushko A.P., Nemanova I.T., Zhur T.A. Vesti NAS Belarus. Ser. Phys.-math. sc. 2012, №1. p. 96-100. (in Russ.).
- [24] Ryabushko A.P., Nemanova I.T., Zhur T.A. Vesti NAS Belarus. Ser. Phys.-math. sc. 2012, №2. p. 89-92. (in Russ.).
- [25] Duboshin G.N. Celestial mechanics. The main objectives and methods. M., 1963. (in Russ.).
- [26] Subbotin M.F. . Introduction to theoretical astronomy. M., 1968. (in Russ.).
- [27] Smart U.M. Celestial mechanics. M., 1965. (in Russ.).
- [28] Reference Manual on celestial mechanics. Ed. G.N. Duboshin. M., 1976. Part II. (in Russ.).
- [29] Elyasberg P.E. Introduction to the theory of flight of the Earth satellite. M., 1965. (in Russ.).
- [30] Yavorski B.M., Detlaf A.A. Handbook on the Physics. M., 1965. p. 526.634. (in Russ.).
- [31] Kaplan S.A. Radiation pressure. Small Encyclopedia "Physics of Space". M., 1976. p.215. (in Russ.).
- [32] Aksenov E.P. The theory of motion of the Earth satellite. M., 1977. § 9.1. (in Russ.).
- [33] Zubco O.L. Relativistic effects of the motion of a particle in the field Photogravitational stars. Vestnik BGU, ser.1, 2014, №3. (in Russ.).
- [34] Polyahova E.N. Space flight with a solar sail. M., URSS, 2011. (in Russ.).

**Арнайы және жалпы салыстырмалылық теориясын ескергендеңі жүлдyzдың
фотогравитациялық өрісіндегі денелер қозғалысы**

А. П. Рябушко¹, Т. А. Жур², И. Т. Неманова², И. П. Боярина², О. Л. Зубко¹, В. И. Юринок¹

1Белорус ұлттық техникалық университеті

2Белорус мемлекеттік аграрлық техникалық университеті

Тірек сөздер: фотогравитациялық мәселе, қозғалыстың релятивисттік тендеулері, Инфельд әдісі.

Аннотация. Гравитациялық өрісте денесің қозғалыс заңдылығы айтарлықтай ерекшеленетін жүлдyzдың

фотогравитациялық өрісінде кез келген сынақ денелерінің қозғалыс заңдылықтары алынған. v^2/c^2 ретке дейінгі САТ және СЖТ эффектілері: тікелей жарық қысымы, Пойнтинг-Робертсон эффектісі, Доплердің бойлық және көлденең эффектісі, қозғалыстағы сынақ денесінің массасының өзгерісі, жүлдyzдың гравитациялық өрісінен және оны қоршап тұрған газ шаң-тозанды шардан пайда болған кеңістік-уақыттың кисаю эффектілері ескерілген. Доплердің де, жарық аберрациясының (v/c ретті эффектілер) да бойлық эффектісі жүлдyz айналасындағы сынақ денесінің спираль тәрізді қозғалысына алып келетіні, ал v^2/c^2 ретті басқа эффектілерді ескеру сынақ денесінің спираль бойымен жүлдyzға құлау жылдамдығын 3 есеге дейін жоғарылататыны көрсетілген. Спиральды экстремитеті де кішірейстін, ал периастры газ шаң-тозанды шардың гравитациялық өрісінің әсер етуінен орбита бойындағы қозғалысқа карсы ығыса алатын, эллипс өлшемінің кішіреюі түрінде түсіндіруге болады.

Поступила 16.02.15 г.