REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 1, Number 305 (2016), 34 – 38

UDC 539.3(043.3)

APPROXIMATE EQUATION OF OSCILLATIONS THAT ACCOUNTING DEFORMATION OF TRANSVERSE SHEAR OF LAYERED PLATE

A.Zh.Seitmuratov, I.U.Makhambayeva, K.K.Daurenbekov

The Korkyt Ata Kyzylorda State University, Kyzylorda, Kazakstan.
angisin_@mail.ru

Key words: deformable body, natural oscillations, butch ostsillyations, waves.

Abstract: The research results of its own and forced oscillations of flat elements taking into account the layered plate's material are presented in this work. The totality of approximate equations of the boundary and initial conditions allow us to formulate and solve a variety of boundary value problems of oscillations and wave processes for the flat element. In solving partial problems the material of flat element may be resilient, or partially or fully demonstrates the viscous properties.

УДК 539.3(043.3)

ПРИБЛИЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ, УЧИТЫВАЮЩЕЕ ДЕФОРМАЦИЮ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА СЛОИСТОЙ ПЛАСТИНКИ

А.Ж.Сейтмуратов, И.У.Махамбаева, К.К.Дауренбеков

Кызылординский государственный университет им.Коркыт Ата, Кызылорда, Казахстан.
angisin_@mail.ru

Ключевые слова: деформируемые тела, собственные колебания, слоистые пластинки, волны.

Аннотация: В настоящей работе приводятся результаты по исследованию собственных и вынужденных колебаний плоских элементов с учётом слоистости материала пластинки. Совокупность приближенных уравнений граничных и начальных условий позволяют сформулировать и решать различные краевые задачи колебания и волновых процессов для плоского элемента. При решении частных задач материал плоского элемента может быть упругим, или частично или полностью проявлять вязкие свойства.

При исследовании гармонических волн в деформируемых телах вводится понятие фазовой скорости как скорости изменения состояния среды, при этом фазовая скорость выражается через частоты собственных колебаний и поэтому исследование распространения гармонических волн имеет прямое отношение к проблемам определения собственных форм и частот колебании ограниченных в плане пластин.

Для простоты рассмотрим пластинку из изотропного однородного материала.[1] Если материал пластинки упругий, то приближенное уравнение поперечных колебаний четвёртого порядка [2]

$$P_0(W)+p\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{h^2}{6}\Big[p^2\left(N^{-1}+3M^{-1}\right)\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}-$$

$$-4p\left(3-2MN^{-1}\right)\Delta\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+8M\left(1-MN^{-1}\right)\Delta^2 W\Big]=\Phi\left(\varphi_Z,f_{tz}\right)$$

(1) запишем в виде

$$A_0\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}-A_1\Delta\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+A_2\Delta^2 W+\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=\Phi(f_z,f_{jz})\;(j=x,y) \quad (2)$$

где коэффициенты A_j равны

$$A_0=\frac{h^2(7-8\nu)}{12b^2(1-\nu)};\quad A_1=\frac{2h^2(2-\nu)}{3(1-\nu)};\quad A_2=\frac{2h^2b^2}{3(1-\nu)} \quad (3)$$

ν – коэффициент Пуассона,

b – скорость распространения поперечных волн в материале пластинки.

Если материал пластинки удовлетворяет модели Максвелла, т.е. операторы L,M равны

$$(L,M)(\xi)=(\lambda,\mu)\left[\xi(t)-\frac{1}{\tau}\int_0^t e^{-\frac{t-\xi}{\tau}}\xi(\xi)d\xi\right] \quad (4)$$

где τ - лишь одно время релаксации, то уравнение (2) примет вид

$$A_0\left(\frac{\partial^4 W}{\partial t^4}+\frac{2}{\tau}\frac{\partial^3 W}{\partial t^3}+\frac{1}{\tau^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right)-A_1\Delta\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial W}{\partial t}\right)+$$
$$+A_2\Delta^2 W+\left(\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+\frac{1}{\tau}\frac{\partial W}{\partial t}\right)=\Phi_1(f_{z,}f_{jz}); \quad (5)$$

Как видно, ядро (4) регулярное и вместо уравнения (2) имеем уравнение (5). Уравнение (5) можно обобщить для любого регулярного ядра, содержащего конечное число регулярных составляющих.

Для других приближённых уравнений колебаний плоского элемента эти уравнения для регулярных ядер также можно привести к дифференциальным уравнениям в частных производных.

Рассмотрим наиболее простую краевую задачу определения частот собственных колебаний плоского элемента прямоугольной формы в плане, занимающем часть пространства $(0\le x\le l_{1;};0\le y\le l_2;|z|\le h)$, края которого шарнирно опёрты. Толщина плоского элемента равна $2h$. [3]

Пусть плоским элементом является изотропная однородная прямоугольная пластинка толщиной $2h$ и размерами l_1 и l_2 в плоскости (x, y) в направлении осей x и y, соответственно.

В качестве приближённого уравнения колебания пластинки примем уравнение четвёртого порядка, при этом материал пластинки описывается моделью Максвелла (2). Правые части уравнений полагаем равными нулю.

В случае опёртой пластинки для уравнения (2) имеем известные граничные условия

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0\;(x=0\,;\,l_1); \quad (6)$$

$$W=\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=0 \qquad (y=0\,;\,l_2);$$

Решение уравнений (2) при граничных условиях (6) можно искать в виде

$$W = \exp\left(\frac{b}{h}\xi t\right)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}W_{n,m}\sin\left(\frac{\pi nx}{l_1}\right)\sin\left(\frac{\pi my}{l_2}\right), \qquad (7)$$

где ξ- безразмерная комплексная величина, действительная часть которой описывает затухающий характер колебаний, а мнимая часть – определяет частоты собственных колебаний шарнирно опёртой пластинки. [4]

Подставляя решение (7) в уравнение (2) для определения частоты ξ получаем уравнение алгебраическое четвёртой степени

$$B_0\xi^4 + \frac{2B_0}{\tau_0}\xi^3 + (1 + \frac{B_0}{\tau_0^2} + B_1\gamma)\times$$
$$\times\xi^2 + \frac{1}{\tau_0}(1 + B_1\gamma)\xi + B_2\gamma^2 = 0 \qquad (8)$$

где коэффициенты B_j; τ_0; γ равны

$$B_0 = \frac{7-8\nu}{12(1-\nu)}; \qquad B_1 = \frac{2(2-\nu)}{3(1-\nu)}; \qquad B_2 = \frac{2}{3(1-\nu)}$$

$$\tau_0 = \frac{b\tau}{h}; \quad \gamma = \pi^2\left[\left(\frac{nh}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{mh}{l_2}\right)^2\right], \qquad (9)$$

при этом τ_0 – безразмерное время релаксации, ν - коэффициент Пуассона материала пластики, γ - безразмерный параметр, характеризующий геометрические размеры пластинки и номера гармоник (n,m) в решении (7).

Из теоремы Гурвица [5] следует, что алгебраическое уравнение (8) имеет решения, действительная часть которых отрицательна, т.е. действительная часть комплексной частоты ξ отрицательна.

Уравнения (8) решались численно и результаты расчётов приведены в таблицах 1 и 2 и проиллюстрированы на рис. 1 и.2. [6]

Таблица 1- результаты расчёта частот собственных колебаний для упругой и вязкоупругой пластинки при $\nu = 0{,}3$ и $\tau_0 = 5$

γ	τ_0	$-\mathrm{Re}\,\xi_1$	$\mathrm{Im}\,\xi_1$	$-\mathrm{Re}\,\xi_2$	$\mathrm{Im}\,\xi_2$
0	5	0,2	0,0000	0,1	1,3296
1		0,1	0,5940	0,1	2,0178
2		0,1	0,9767	0,1	2,4773
3		0,1	1,2760	0,1	2,8513
4		0,1	1,5289	0,1	3,1760
5		0,1	1,7515	0,1	3,4675
6		0,1	1,9523	0,1	3,7345
7		0,1	2,1364	0,1	3,9825
8		0,1	2,3072	0,1	4,2152
9		0,1	2,4673	0,1	4,4351
10		0,1	2,6183	0,1	4,6443

Таблица 2- результаты расчёта частот собственных колебаний для упругой и вязкоупругой пластинки при $\nu = 0{,}3$ и $\tau_0 = 10$

γ	τ_0	$-\mathrm{Re}\,\xi_1$	$\mathrm{Im}\,\xi_1$	$-\mathrm{Re}\,\xi_2$	$\mathrm{Im}\,\xi_2$
0	**10**	**0,1**	**0,0000**	**0,05**	**1,3324**
1		**0,05**	**0,6004**	**0,05**	**2,0196**

2	0,05	0,9806	0,05	2,4788
3	0,05	1,2789	0,05	2,8526
4	0,05	1,5314	0,05	3,1773
5	0,05	1,7537	0,05	3,4685
6	0,05	1,9542	0,05	3,7355
7	0,05	2,1381	0,05	3,9834
8	0,05	2,3089	0,05	4,2161
9	0,05	2,5074	0,05	4,5670
10	0,05	2,6307	0,05	4,7541

Рисунок 1- влияние времени релаксации на коэффициент затухания $\mathrm{Re}\xi$

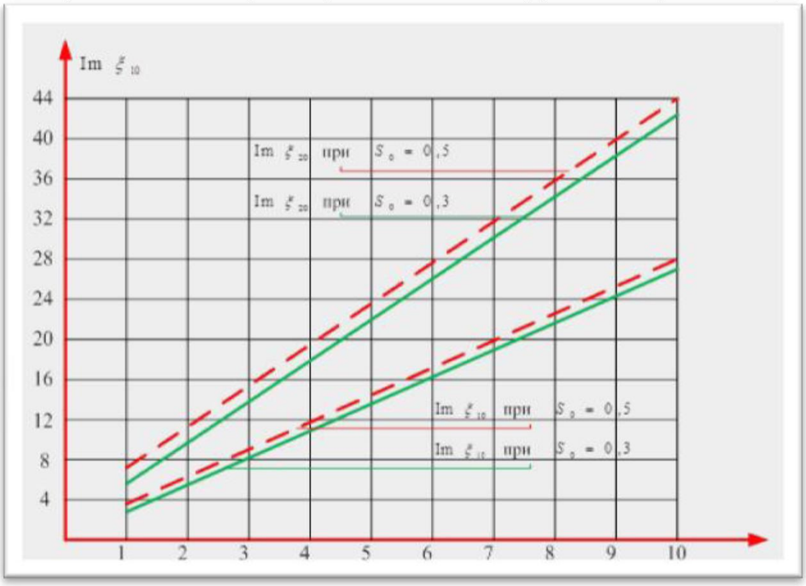
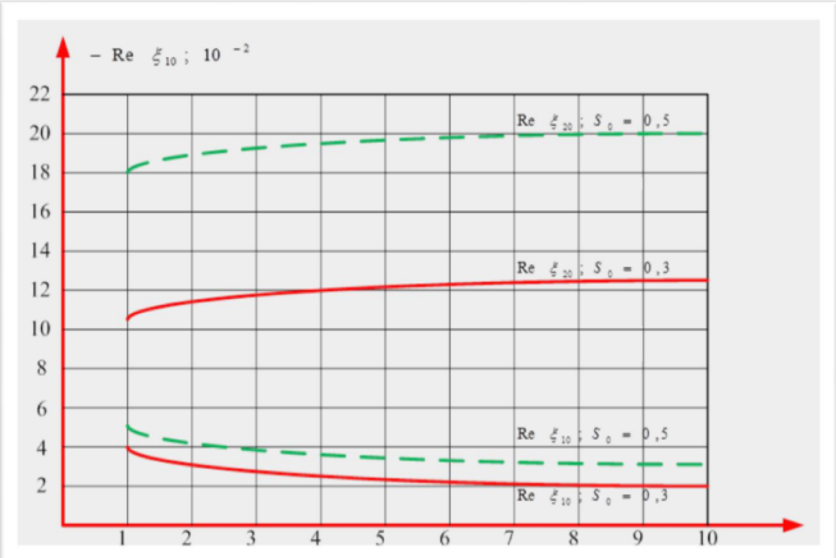


Рисунок 2- влияние времени релаксации на частоту $\mathrm{Im}\xi_j$ собственных колебаний



Как следует из таблиц 1 и 2 время релаксации существенно влияет на коэффициент затухания $\mathrm{Re}\xi_j$ и слабо влияет на частоты $\mathrm{Im}\xi_j$ собственных колебаний.

Если решать задачу на основе приближенного уравнение Кирхгофа параболического типа,

$$D\Delta^2 W + \rho\frac{d^2W}{dt^2} = q;\ D = \frac{4\mu h^2(\lambda+\mu)}{3(\lambda+2\mu)}, \tag{10}$$

где D – цилиндрическая жёсткость.

то имеем лишь одну частоту

$$\xi = \gamma\sqrt{B_2}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) описывает лишь изгибные колебания пластинки, уравнение (2) учитывает не только изгибные колебания, но и инерцию вращения и деформацию поперечного сдвига, уравнение же (5) описывает также и другие более тонкие волновые эффекты, имеющие место в пластинке.

Если из общего уравнения колебания получать и другие приближённые уравнения конечного порядка выше шестого, то для комплексной частоты ξ получаем алгебраическое уравнение степени выше шестой и соответственно можем определить и другие частоты собственных колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] А.Ж.Сейтмуратов., Филиппов И.Г. К теории колебания плоского двухслойного элемента строительных конструкций// ПГС. -2007. -№10. -М. -С.26-27.

[2] Сейтмуратов А.Ж. Приближенное уравнение продольного колебания трехслойной пластинки переменной толщины// ВЕСТНИК КарГУ. -2010. -№3(59) -С.83-88.

[3] Сейтмуратов А.Ж.,Умбетов У. Моделирование и прогнозирование динамики многокомпонентной деформируемой среды: Монография.-Тараз,2014, 171-176

[4] Филиппов И.Г. Чебан В.Г. Математическая теория колебаний упругих и вязкоупругих пластин и стержней. – Кишинев: Штиинца, 1988,-190-193

[5] Филиппов И.Г. К нелинейной теории вязкоупругих изотропных сред. Киев: Прикл. механика, 1983, т.19, № 3, с.3-8.

[6] Seitmuratov, A. Zh.; Umbetov, U.; Aitimova, U. Zh. Boundary Value Problems in the Theory of Oscillations of Rectangular Plates Interacting with a Deformable Medium June 2014 World Applied Sciences Journal;2014, Vol. 31 Issue 5, p705

REFERENCES

[1] A.Zh.Sejtmuratov., Filippov I.G. K teorii kolebanija ploskogo dvuhslojnogo jelementa stroitel'nyh konstrukcij// PGS. -2007. -№10. -M. -S.26-27.

[2] Sejtmuratov A.Zh. Priblizhennoe uravnenie prodol'nogo kolebanija trehslojnoj plastinki peremennoj tolshhiny// VESTNIK KarGU. -2010. -№3(59) -S.83-88.

[3] Sejtmuratov A.Zh.,Umbetov U. Modelirovanie i prognozirovanie dinamiki mnogokomponentnoj deformiruemoj sredy: Monografija.-Taraz,2014, 171-176

[4] Filippov I.G. Cheban V.G. Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vjazkouprugih plastin i sterzhnej. – Kishinev: Shtiinca, 1988,-190-193

[5] Filippov I.G. K nelinejnoj teorii vjazkouprugih izotropnyh sred. Kiev: Prikl. mehanika, 1983, t.19, № 3, s.3-8.

[6] Seitmuratov, A. Zh.; Umbetov, U.; Aitimova, U. Zh. Boundary Value Problems in the Theory of Oscillations of Rectangular Plates Interacting with a Deformable Medium June 2014 World Applied Sciences Journal;2014, Vol. 31 Issue 5, p705

ӘОЖ 539.3(043.3)

ҚАТПАРЛЫ ПЛАСТИНКАЛАРДЫҢ КӨЛБЕУ ЫҒЫСУЫНЫҢ ДЕФОРМАЦИЯСЫНЫҢ ЖУЫҚ ТЕРБЕЛІС ТЕҢДЕУІ

А.Ж.Сейтмуратов, И.Ө.Махамбаева , Қ.Қ.Дауренбеков

Қоркыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университет, Қызылорда, Қазахстан

Тірек сөздер: Деформациаланатын дене, өзіндік тербеліс, қатпарлы пластинкалар, толқындар.

Түйін: Берілген жұмыста жазық пластинка элементтерінің қатпарлы материал екендігін ескере отырып, өзіндік және мәжбүрлі тербеліс теңдеуін зертеу нітижесі келтірілген. Шектік және бастапқы шартарынының жуық теңдеулер жиынтығы, жазық элементтердің толқындар процесіндегі әртүрлі шеттік есептер теңдеуін шешу және тұжырымдау үшін қажет. Дербес есепті шешу барысында жазық элементтің материалы серпімді және толығынан тұтқырлық қасиетін көрсету мүмкін.

Сведение об авторах

1. Сейтмуратов Ангысын Жасаралович-д.ф.-м.н., ассацированный профессор кафедры «Математика и прикладная механика» КГУ им.Коркыт Ата
2. Махамбаева Индира Утепбергеновна- к.ф.-м.н., старший преподаватель кафедры «Вычислительная техника и информационные системы» КГУ им.Коркыт Ата
3. Дауренбеков Куаныш Койшыгулович- к.т.н., ассацированный профессор кафедры «Вычислительная техника и информационные системы» КГУ им.Коркыт Ата

Поступила 21.01.2016 г.