REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 1, Number 305 (2016), 29 – 33

THE SOLUTION OF THE REGIONAL TASK FOR COMPOUND AREA BY METHOD OF THE INTEGRATED EQUATIONS OF THE THEORY OF POTENTIAL

R. Zh. Zhadraev

zhadraev.rzh.@mail.ru
Kazakh academy of transport and communications named after M.Tynyshpaev,
Almaty, the Republic of Kazakhstan

Key words: elasticity, integrated equations, potential, regional task, tension, movements.

Abstract. The article deals with the results of research by method of the integrated equations of the theory of potential tension of compound area. The integrated equations for flat tasks of the theory of elasticity which decision gives an unknown vector of density determining tensely – the deformed condition of the compound area consisting of two various multilinked subareas are worked out and also elasto-potential which express tension and movements are made.

УДК 517. 968 : 531.534

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ОБЛАСТИ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Р. Ж. Жадраев

zhadraev.rzh.@mail.ru
Казахская Академия транспора и коммуникаций им. М. Тынышпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: упругость, интегральные уравнения, потенциал, краевая задача, напряжения, перемещения.

Аннотация. В статье представлены результаты исследования методом интегральных уравнений теории потенциала напряженного состояния составной области. Составлены интегральные уравнения для плоских задач теории упругости, решение которых дает неизвестный вектор плотности при определении напряженно-деформированного состояния составной области, состоящей из двух различных многосвязных подобластей, а также составлены эластопотенциалы, которые выражают напряжения и перемещения.

Развитие энергетики, строительства, машиностроения требует решения новых задач по расчету и проектированию конструкций различного рода, элементы которых состоят из нескольких материалов. Это объясняется широким применением в технике вставных элементов с натягами (подземные сооружения, детали машиностроения, корпуса ядерных реакторов и т.д.). При эксплуатации такие элементы подвергаются тепловым и механическим воздействиям. Различие физико-механических характеристик материалов приводит к возникновению значительной напряженности вблизи контактных поверхностей. Такие зоны повышенной напряженности , характеризующиеся перепадами напряжений, могут являться очагами разрушения в составных упругих средах.

Точность исследования напряженного состояния играет важную роль в оценке прочности, а исследование полей напряжений в зависимости от способа задания нагрузки, физико-механических параметров элементов и их геометрии имеет важное значение при их конструировании.

Заметный прогресс в методах исследования задач механики деформируемого твердого тела достигается путем использования современных математических приемов.

Одним из таких направлений является применение метода потенциала, который сводит краевые задачи теории упругости к сингулярным интегральным уравнениям на границе области и хорошо зарекомендовал себя в численных исследованиях последних лет [1-4].

Метод интегральных уравнений теории потенциала стали широко применять не только для исследования краевых задач теории гармонических функций, но и доля изучения уравнения упругого равновесия после появления теории интегральных уравнений Фредгольма [8, 9], хотя теоремы Фредгольма для сингулярных интегральных уравнений были доказаны позже [6-9].

Регулярные интегральные уравнения для первой плоской краевой задачи Д.Лауричелла, а также для трехмерной первой краевой задачи Г.Вейль получили посредством сложных искусственных построений.

Некоторые авторы [1, 11], получив сингулярные интегральные уравнения для краевых задач теории упругости, оперировали с ними как с фредгольмовскими, хотя теория Фредгольма оказались не применимой непосредственно к указанным уравнениям. Входящие в эти уравнения интегралы сходятся в специальном смысле (в смысле главного значения Коши), в связи с чем уравнения названы сингулярными.

Математическое исследование названных выше уравнений оказалось возможным провести только после разработки С.Г.Михлиным [8, 9] теории многомерных сингулярных интегралов и интегральных уравнений и доказательства В.Д.Купрадзе [6, 7] справедливости применения альтернативы Фредгольма к этим уравнениям.

Полные сведения о математическом аппарате теории потенциала в приложении к задачам механики твердого деформируемого тела в настоящее время приводится в монографиях В.Д.Купрадзе и его сотрудников Т.Г.Гегелиа, М.О.Башелейшвили, Т.В.Бурчуладзе [6, 7], где получены многомерные сингулярные интегральные уравнения внутренних и внешних краевых задач статики, динамики и термического нагружения для однородных и составных тел при помощи эластопотенциалов, построенных с помощью матрицы фундаментальных решений Кельвина, Бурчуладзе. Исследованы предельные свойства эластопотенциалов и доказаны теоремы существования, единственности и корректности для решения сингулярных интегральных уравнений основных краевых задач. А также показано, что сингулярные интегральные уравнения основных плоских краевых задач по своим спектральным свойствам аналогичны интегральным уравнениям Дирихле и Неймана в теории гармонических функций.

Исследованиями в области совершенствования метода эластопотенциала для решения краевых задач плоской теории упругости занимались В.Д.Купрадзе [6, 7], Ю.Д. Копейкин [4, 5], И.С.Аржаных [1], П.И.Перлин [11] и многие другие зарубежные ученые [1-11].

В работе Ю.В.Верюжского и его учеников $[2-3]$ рассматривается напряженно-деформированное состояние составных тел. После некоторых преобразований с помощью теоремы взаимности работ получен для таких тел эластопотенциал, после чего составлены разрешающие уравнения каждого фрагмента $S_к$, независимо от остальной части плиты, и условия неразрывности определяются тождественностью соответствующих неизвестных перерезывающих сил, изгибающих моментов, углов поворота и прогибов на участках сопряжения.

Для практики важно исследовать напряженно-деформированное состояние неоднородной среды, состоящей из двух многосвязных областей. В этом случае правильный выбор фундаментальных решений обуславливает эффективность разрешающих интегральных уравнений задачи теории упругости и их успешную реализацию на ЭВМ.

Рассмотрим вторую краевую задачу для области $D = D^+ \cup D^-$, т.е. составленной из двух многосвязных областей: внутренней D^+ и внешней D^-. Граница области D^- состоит из гладких замкнутых контуров $L^-_{лк}, L_q$, $q = 0,1,2,\ldots, n$; причем L_0 охватывает все остальные. Контур $L^-_{лк}$ граничит с областью D^+, так что область D^+ охватывается областью D^-. Контур L_0 может отсутствовать (сводится к бесконечно удаленной точке). В последнем случае область D^- будет бесконечной.

Внутренняя область D^+ ограничена несколькими внутренними контурами L_s, $s = 1, 2, \ldots, m$ и внешним контуром $L^+_{лк}$, который охватывает всю область D^+ и является линией контакта двух областей D^+ и D^-. Назовем через $L_{лк}$ линию контакта двух сред.

На линии контакта $L_{лк}$ необходимо составить условия сопряжения :

$$p^+ = p^-, \; u^+ = u^-. \tag{1}$$

Для постановки краевой задачи полагаем заданными все перечисленные контуры областей, а также физические параметры обеих сплошных сред. Будем предполагать, что не только модули сдвига G сред различаются, но и коэффициенты Пуассона ν.

На всех контурах, кроме $L_{лк}$, задана внешняя нагрузка, на контуре $L_{лк}$ – задано условие (1).

Для области $D = D^+ \bigcup D^-$ решаем вторую краевую задачу плоской теории упругости, т.е. в этой области ищется решение системы Ламе:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} u_{k,ki} = -\frac{K_i}{G}. \tag{2}$$

Согласно Б.Г.Галеркину сделаем следующую замену искомых функций:

$$u_i = \Delta W_i - \frac{1}{2(1-\nu)} W_{k,ki}, \tag{3}$$

где W – вектор функций напряжений. После подстановки представления (3) в уравнение (2) получаем:

$$\Delta\Delta W_i = -\frac{K_i}{G}. \tag{4}$$

В поставленной задаче удобно разыскивать функции W_1 и W_2 в виде так называемых бигармонических потенциалов простого слоя с неизвестными заранее плотностями распределения $\mu_1(y)$ и $\mu_2(y)$:

$$W_i = \oint_L \mu_i(y) * W_k^*(x,y), \; i = k, \tag{5}$$

где $\mu_1(y)$, $\mu_2(y)$ – искомые плотности потенциалов; W_k^* – фундаментальное решение, т.е.

$$W_k^* = \frac{0{,}125R}{\pi G}(1 - \ln R) \tag{6}$$

Внесем в (3) принимаемые значения (5) функций W_i. Тогда получим так называемый плоский эластопотенциал простого слоя для области $D^+ \vee D^-$;

$$u_j(x) = b\oint_{L_c} \mu_i(y) u_{ij}(x,y) dl_y, \tag{7}$$

где $u_{ij}(x,y) = \beta_i\beta_j - \delta_{ij}(3-4\nu)\ln R,$ $\quad \boldsymbol{b = \frac{0{,}125}{\pi G(1-\nu)}}$,

$\nu = \nu^-$, если $x \in D^-$, $\nu = \nu^+$, если $x \in D^+$.

По закону Гука и по формулам Коши найдем элементы тензора напряжений для внутренних точек области $D^- \vee D^+$ принадлежащими им значениями b и μ_j:

$$\sigma_{ik} = 2Gb\oint_{L_c} \mu_j \sigma_{ik}^{(j)} dl, \tag{8}$$

$$\sigma_{ik}^{(j)} = \frac{1}{R}[(1-2\nu)(\delta_{ik}\beta_j - \delta_{ij}\beta_k - \delta_{jk}\beta_i) - 2\beta_i\beta_j\beta_k].$$

Для граничных точек $x \in L_c$ области достаточно заменить интегралы их предельными значениями при $x \to y$.

Подставляя предельные значения напряжений для граничных точек x Є L_c в граничные условия $p_i = \sigma_{ij} n_j$, и с учетом третьего и четвертого условий неразрывности в зонах контакта $L_{лк}$ образуем замкнутую смешанную систему ИУ второго и первого рода поставленной краевой задачи:

$$\mu_i(x) + \frac{0{,}5}{\pi(1-\nu)} \oint_{L_c} Q_{ij}(x,y)\mu_j(y)dl = 2f_i, \tag{9}$$

$$b^+ \oint_{L_b} \mu_i(y)u_{ij}(x,y)dl_y - b^- \oint_{L_H} \mu_i(y)u_{ij}(x,y)dl_y = 0, \quad x \in L_{лк}, \tag{10}$$

где $L_c = L_н$, если $x \in \sum_{q=0}^{n} L_q$; $L_c = L_b$, если $x \in \sum_{s=1}^{n} L_s$;

$$Q_{ij}(x,y) = (1 - 2\nu + 2\beta_i\beta_j)\frac{\beta_k n_{xk}}{R}, \quad i = j; \tag{11}$$

$$Q_{ij}(x,y) = [(n_{xj}\beta_i - n_{xi}\beta_j)(1-2\nu) + 2\beta_i\beta_j\beta_k n_{xk}]\frac{1}{R}, \quad i \neq j;$$

Причем в уравнении (9) ядро является сингулярным, а в уравнении (10) – логарифмическим.

Решая полученную систему ИУ, определяем неизвестный вектор плотности в точках границы L. После этого по формулам (7), (8) определяем компоненты вектора перемещения и напряжения внутри области $D^+ \vee D^-$ и на границе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Аржаных И.С. Векторные потенциалы изотропного упругого тела. //Труды института математики и механики АН УзССР. - 1951. – Вып.8. – С. 26-71.

[2] Верюжский Ю.В. Применение метода потенциала для решения задач теории упругости. - Киев: КИСИ , 1975. - 175 с .

[3] Верюжский Ю.В. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. - К.: Вища школа, 1978. - 183 с..

[4] Копейкин Ю.Д. Применение бигармонических потенциалов в плоских краевых задачах теории упругости. // Упругость и неупругость. – 1971. - Вып.1. - С. 22-26.

[5] Копейкин Ю.Д., Аляутдинов М.И., Бормот Ю.Д. Решение двумерных задач расчета элементов конструкций. // Материалы по металлическим конструкциям. – 1975. - Вып. 18. - С. 5 - 8.

[6] Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. - М.: Физматгиз,1963. - 472 с.

[7] Купрадзе В.Д . и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976. - 664 с.

[8] Михлин С.Г. Приведение основных задач плоской теории упругости к интегральному уравнению Фредгольма . // ДАН СССР, Новая серия , 1934. - Том 1.

[9] Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. - М.: Наука, 1966. - 254 с .

[10] Мусхелишвили Н.И.Сингулярные и интегральные уравнения . -М.: Наука, 1968. - 512 с.

[11] Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. - М.: Наука, 1977. - 312 с.

REFERENCES

[1] Arzhanykh I.S. Vector potentials of an isotropic elastic body.//Works of institute of mathematics and mechanics of AN UzSSR. - 1951. - No. 8. – Page 26-71. (in Russ.).

[2] Veryuzhsky Yu.V. Application of a method of potential for the solution of tasks of the theory of elasticity.//Book: KISI, 1975. - 175 pages. (in Russ.).

[3] Veryuzhsky Yu.V. Numerical methods of potential in some problems of applied mechanics. - To.: Vishcha school, 1978. - 183 pages. (in Russ.).

[4] Kopeykin Yu.D. Use of biharmonic potentials in flat regional tasks of the theory of elasticity.//Elasticity and unelasticity, 1971, vyp.1. - Page 22-26. (in Russ.).

[5] Kopeykin Yu.D., Alyautdinov M.I., Bormot Yu.D. Solution of two-dimensional problems of calculation of elements of designs.//Materials on metal designs, 1975, iss. 18. - Page 5 - 8. (in Russ.).

[6] Kupradze V.D. Potential methods in the theory of elasticity. - M.: physics-math, 1963. - 472 pages. (in Russ.).

[7] Kupradze V.D., etc. Three-dimensional tasks of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. – M.:

Science, 1976. - 664 pages. (in Russ.).
[8] Mikhlin S.G. Reduction of the main objectives of the flat theory of elasticity to the integrated equation of Fredholm.//The USSR, a New series, 1934, volume 1. (in Russ.).
[9] Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integrated equations. - M.: Science, 1966. - 254 pages. (in Russ.).
[10] Muskhelishvili N.I. Singular and integrated equations. - M.: Science, 1968. - 512 pages. (in Russ.).
[11] Parton V.Z., Perlin P.I. Integrated equations of the theory of elasticity. - M.: Science, 1977. - 312 pages. (in Russ.).

ҚҰРАМА АУДАН ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТІ ПОТЕНЦИАЛ ТЕОРИЯСЫНЫҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Р.Ж. Жадраев

Түйін сөздер: серпімділік, интегралдық теңдеулер, потенциал, шеттік есеп, кернеулер, жылжулар.

Аннотация. Мақалада потенциал теориясының интегралдық теңдеулер әдісімен көп байланысты құрама ортаның кернеулі күйін зерттеудің нәтижелері баяндалған. Серпімділік теориясының жазық есебі үшін интегралдық теңдеулер құрастырылған, олардың шешуі екі әртүрлі көп байланысты аудандардан құралған құрама ауданның кернеулі-деформацияланған күйін анықтаған кездегі белгісіз тығыздық векторын береді, сонымен бірге кернелер мен жылжуларды бейнелейтін эластопотенциалдар да құрастырылған.

ZHADRAYEV R. CANDIDATE OF TECHNICAL SCIENCES, ASSOCIATE PROFESSOR
The Kazakh Academy of transport and communications named after M. Tynyshpayev, Almaty, the Republic of Kazakhstan.
The solution of the regional task for compound area by method of the integrated equations of the theory of potential.

ЖАДРАЕВ Р.Ж. КАНДИДАТ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, ДОЦЕНТ
Казахская Академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева, г. Алматы, Республика Казахстан.
Решение краевой задачи для составной области методом интегральных уравнений теории потенциала.

ЖАДРАЕВ Р.Ж. ТЕХНИКА ҒЫЛЫМДАРЫНЫҢ КАНДИДАТЫ, ДОЦЕНТ
М. Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы, Алматы қаласы, Қазақстан Республикасы.
Құрама аудан үшін шеттік есепті потенциал теориясының интегралдық теңдеулер әдісімен шешу.

Поступила 12.01.2016 г.