**REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**
ISSN 2224-5227
Volume 1, Number 305 (2016), 49 – 56

## ON THE RELATIONSHIP AND PROPORTIONALITY OF DISCRETE AND CONTINUOUS DEPENDENCE

**V.P. Malyshev[1], A.M. Makasheva[2],Yu.S. Zubrina[3]**

Chemical and metallurgical institute named after Zh. Abishev, Karaganda
eia_hmi@mail.ru

**Key words:** proportionality, number, improper integral, unit interval, partial sum, limit.

**Abstract.** The authors evaluated the relationship and commensurate amount of series and improper integral for the function of the same name based on the convergence of the series on the basisof integral sign of the Cauchy, Maclaurin. To this end, they analyzed the ratio of comparable values within any unit interval of variation of the terms of series and prove the possibility of calculating the final or limit amount of the series in the case of constant input of the coefficient of proportionality, equal to the ratio average integral value of the same function and the corresponding term of the series in any single interval. The method is suitable for the analysis of convergent and divergent series.

УДК 51+622.73

## О ВЗАИМОСВЯЗИ И СОРАЗМЕРНОСТИ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ

**Малышев В.П[1]., Макашева А.М[2]., Зубрина Ю.А[3]**

Химико-металлургический институт имени Ж. Абишева
eia_hmi@mail.ru

**Ключевые слова:** соразмерность, ряд, несобственный интеграл, единичный интервал, частичная сумма, предел.

**Аннотация.** Авторы оценивают взаимосвязь и соизмеримость суммы ряда и несобственного интеграла для одноименной функции на основе сходимости ряда по интегральному признаку Коши, Маклорена. С этой целью они анализируют соотношение сравниваемых величин в пределах любого единичного интервала варьирования членов ряда и доказывают возможность расчета конечной или предельной суммы ряда в случае постоянства вводимого ими коэффициента соразмерности, равного отношению среднеинтегральной величины одноименной функции и соответствующего члена ряда в каком-либо единичном интервале. Метод подходит для анализа сходящихся и расходящихся рядов.

### Введение

Как известно, основной дифференциального и интегрального исчислений служит сводимость дискретных зависимостей к непрерывным при стремлении интервала варьирования аргумента к бесконечно малой величине $dx$. Но взаимосвязь дискретных и непрерывных распределений может оказаться определенной и продуктивной при фиксированных интервалах варьирования, $\Delta x$.

В наибольшей мере это проявляется при установлении сходимости ряда, т.е. суммы дискретных величин, с помощью интегрального признака сходимости Коши, Маклорена[1], согласно которому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если для функции $f(x)$, принимающей значения $a_n$ в точках $n$, а именно при $f(n) = a_n$, и при условии монотонного убывания $f(x)$ в области $x \geq n_0$ с соблюдением неравенства$f(x) \geq 0$, обеспечивается сходимость несобственного интеграла $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$.

Тем самым этим признаком устанавливается определенная эквивалентность дискретного и непрерывного распределений переменной величины. Детальные выкладки были представлены ранее авторами [2] только на примере сходящихся рядов типа $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, где$r > 1$, $n$ – целое число, задающее интервал варьирования дискретных значений членов ряда. Однако подобный подход может быть распространен и на анализ расходящихся рядов с определением их аналогичной соразмерности с тождественной по выражению (одноименной) функцией.

**Определение соразмерности суммы ряда и несобственного интеграла**

В основу анализа соразмерности суммы ряда и несобственного интеграла для одноименной функции положено соотношение этих величин внутри некоторого единичного интервала варьирования членов ряда (рисунок 1).

Особенностью единичного интервала является то, что в нем сопоставляются площади, которые, с одной стороны, представляют собой среднее значение функции $f(x)$ в этом интервале $\Delta x = 1$ (согласно теореме о среднем значении), т.е. $\int_{x=n-1}^{x=n} f(x)dx$, отнесенное к единице, и, с другой, значение члена ряда$a_n$, умноженного на единицу.

Отсюда следует возможность определения соответствия этих величин в виде *коэффициента соразмерности*

$$k = \frac{\int_{x=n-1}^{x=n} f(x)dx}{a_n}. \tag{1}$$

$a_n = (1/r)^{n-1}$,

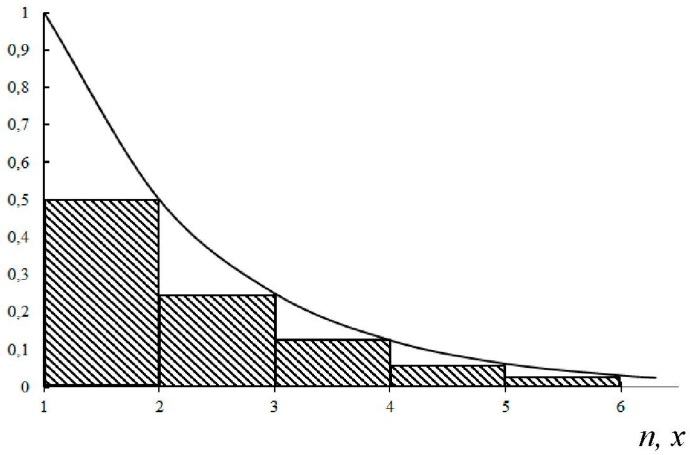



Рисунок 1 – Зависимость общего члена ряда $a_n$ и равной ему площади (слева) в единичных интервалах (заштрихованы) от $n$, а также $f(x)$ и общей площади под кривой в этих же интервалах, $\int_{n_0}^{\infty} f(x)dx$, от $x$ (на примере известного ряда с $r = 2$)

Вполне очевидно, что если $k = \text{const}$, т.е.$k \neq f(n)$, то этот коэффициент может быть отнесен к каждому единичному интервалу и, следовательно, к полному диапазону изменения суммы ряда и соответствующего несобственного интеграла

$$k=\frac{\int\limits_{x=0}^{\infty} f(x)dx}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n}. \quad (2)$$

При этом, если интеграл сходящийся, то можно найти сумму ряда по формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{1}{k}\int\limits_{x=0}^{\infty} f(x)dx, \quad (3)$$

если же расходящийся, то обсуждаемая соразмерность функции и членов ряда при $k$ = const сохраняется и можно найти конечную сумму

$$\sum_{n=1}^{n} a_n=\frac{1}{k}\int\limits_{x=n_0}^{x=n} f(x)dx. \quad (4)$$

Последнее выражение справедливо и для конечных сумм сходящихся рядов с началом отсчета $n_0 = 0$ (слева от $a_1$).

**Определение соразмерности дискретных и непрерывных зависимостей для сходящихся рядов**

Для ряда, общий вид которого использован при построении рисунка 1, сопоставление с одноименной функцией $f(x)=\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}$ в единичном интервале дает следующее выражение для коэффициента соразмерности

$$k=\frac{\int\limits_{x=n-1}^{x=n}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx}{\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}}=\frac{r-1}{\ln r}. \quad (5)$$

Как видно, $k\neq f(n)$ и поэтому сопоставляемые зависимости являются одинаково соразмерными в рассматриваемой области их определения.

Несобственный интеграл функции $f(x)=\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}$ в этой области равен

$$\int\limits_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx=\frac{r}{\ln r}. \quad (6)$$

Он является сходящимся, следовательно, по признаку сходимости Коши, Маклорена ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ также является сходящимся, и его предел можно найти по формуле (3):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}=\frac{1}{k}\int\limits_{x=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx=\frac{\ln r}{r-1}\cdot\frac{r}{\ln r}=\frac{r}{r-1}. \quad (7)$$

Для конечной суммы рассматриваемого ряда справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{n}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}=\frac{1}{k}\int\limits_{x=0}^{x=n}\left(\frac{1}{r}\right)^{x-1}dx=\frac{1-(1/r)^n}{1-(1/r)}. \quad (8)$$

Полученные формулы для сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ справедливы для любых значений $r>1$, имеющего смысл знаменателя регрессии этого ряда, $a_n/a_{n+1}$.

Зависимость $k$ от $r$ (5) в виде дроби позволяет проанализировать ее в интервале $r$ от 1 до $\infty$ по правилу Лопиталя в случае появления неопределенностей типа 0/0 или$\infty/\infty$ соответственно:

$$\lim_{r\to 1} k = \lim \frac{r-1}{\ln r} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{d(r-1)}{d\ln r} = \frac{r}{1} \Rightarrow 1, \qquad (9)$$

$$\lim_{r\to\infty} k = \lim \frac{r-1}{\ln r} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \frac{d(r-1)}{d\ln r} = \frac{r}{1} \Rightarrow \infty \cdot \qquad (10)$$

Следовательно, при наименьшей убыли членов ряда ($r\to 1$) достигается полная соразмерность членов суммы ряда и одноименной функции

$$\lim_{k\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{x-1} dx \cdot \qquad (11)$$

Впрочем, при $r = 1$ ряд вырождается в простейшую арифметическую прогрессию с $a_{n+1} = a_n = 1$ и становится расходящимся.

Напротив, при наибольшей убыли членов ряда ($r\to\infty$) коэффициент соразмерности резко возрастает, обусловливая бесконечно большое отличие дискретных и непрерывных величин внутри единичных интервалов варьирования, а точнее, среднеинтегрального значения функции $\int_{x=n-1}^{n} f(x)dx$ и$a_n$.

В таблице 1 приведены некоторые расчетные данные для обсуждаемых величин.

Зависимость $k$ от $r$ представлена на рисунке 2.

Из начала координат, $r = 1$, $k = 1$, зависимость выходит под углом, соответствующим производной $dk/dr$ в этой точке, значения которой раскрываются при двукратном использовании правила Лопиталя:

$$\lim_{r\to 1} \frac{dk}{dr} = \lim_{r\to 1} \frac{\ln r + (1/r) - 1}{(\ln r)^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{1-(1/r)}{2\ln r} = \frac{0}{0} \Rightarrow \frac{1}{2r} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (12)$$

Таблица 1 – Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$, интеграл $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{x-1} dx$ и коэффициент соразмерности $k$ как функции$r$

| $R$ | 1 | 1,1 | 1,3 | 1,5 | 2 | 3 | 5 | 10 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $K$ | 1 | 1,049 | 1,144 | 1,233 | 1,443 | 1,821 | 2,485 | 3,909 | 12,53 | 21,50 |
| $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{x-1} dx$ | $\infty$ | 11,54 | 4,955 | 3,700 | 2,885 | 2,731 | 3,107 | 4,343 | 12,78 | 21,72 |
| $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ | $\infty$ | 11 | 4,(3) | 3 | 2 | 1,5 | 1,25 | 1,(1) | 1,020 | 1,(01) |

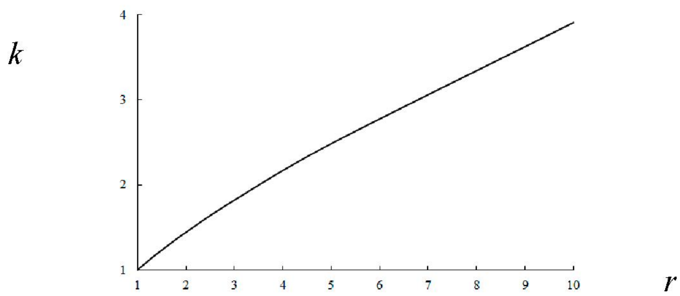



Рисунок 2 – Зависимость коэффициента соразмерности

несобственного интеграла $\int_0^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{x-1} dx$ и суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$



$r$

от знаменателя регрессии $r$

В соизмеримых шкалах $k$ и $r$ этому соответствует угол ~ 26,6°. На противоположной границе, при $r \to \infty$, производная $dk/dr$ устремляется к нулю:

$$\lim_{r\to\infty}\frac{dk}{dr}=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln r+(1/r)-1}{(\ln r)^2}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow\frac{1-(1/r)}{2\ln r}=0, \quad (13)$$

т.е. зависимость стремится к горизонтальной асимптоте.

Из таблицы следует, что значения несобственного интеграла претерпевают минимум в области вариации $r$ от 2 до 3. Более точно положение минимума можно найти путем дифференцирования функции (6) по $r$:

$$\frac{d\left(\frac{r}{\ln r}\right)}{dr}=\frac{\ln r-1}{(\ln r)^2}, \quad (14)$$

откуда приравниванием нулю находим значение $n = e \approx 2{,}718$, чему соответствует точно такое же значение несобственного интеграла

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{e}\right)^{x-1}dx=\frac{e}{\ln e}=e. \quad (15)$$

Вероятно, эта особенность характерна для зависимостей типа $\frac{x}{\ln x}$.

**Определение соразмерности дискретных и непрерывных зависимостей для расходящихся рядов**

Типичным расходящимся рядом является геометрическая прогрессия, выраженная через конечную сумму ряда

$$S_n=\sum_{n=1}^{n}a_n=\sum_{n=1}^{n}a_1q^{n-1}=a_1\left(1+q+\ldots+q^{n-1}\right)=a_1\frac{q^n-1}{q-1}, \quad (16)$$

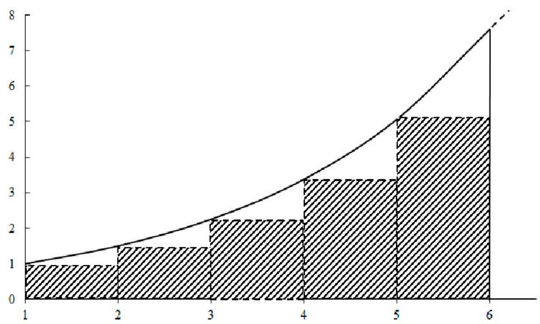
где $q$ – знаменатель геометрической прогрессии ($q > 1$), равный $a_{n+1}/a_n$.

Для анализа сопоставимости дискретной геометрической прогрессии с одноименной непрерывной функцией прогрессию упростим до вида $\sum_{n=1}^{n}q^{n-1}$, поскольку $a_1$ – это постоянный множитель. В этом случае одноименная функция выразится как $f(x) = q^{n-1}$.

На рисунке 3 приведено сопоставление обсуждаемых зависимостей.

$a_n = q^{n-1}$,

$f(x) = q^{x-1}$




*n, x*

Рисунок 3 – Зависимость общего члена ряда $a_n$ и равной ему площади (справа) в единичных интервалах (заштрихованы) от $n$, а также $f(x)$ и

общей площади под кривой в этих же интервалах, $\int_n^{n+1} f(x)dx$,

от $x$ (на примере ряда с $q = 1{,}5$)

В данном случае коэффициент соразмерности примет вид

$$k=\frac{\int\limits_{x=n}^{x=n+1} f(x)dx}{a_n}=\frac{\int\limits_{x=n}^{x=n+1} q^{x-1}dx}{q^{n-1}}=\frac{q-1}{\ln q}, \qquad (17)$$

а конечная сумма в соответствии с (4) должна отсчитываться от $n_0$ = 1 (см. рис. 3):

$$\sum_{n=1}^{n} q^{n-1}=\frac{1}{k}\int\limits_{x=1}^{x=n} q^{n-1}dx=\frac{q^n-1}{q-1}, \qquad (18)$$

т.е. в полном соответствии с известным выражением для $S_n$ (16).

Данный прием можно использовать для нахождения конечных сумм для других расходящихся рядов при обеспечении условия $k$ = const$\neq f(n)$ и при возможности взятия несобственного интеграла от одноименной с изучаемым рядом функции.

**О возможности обобщения прогрессий и регрессий**

Идентичность выражений по коэффициенту соразмерности $k$ (5) и (17) для регрессивных и прогрессивных рядов, представленных общими членами $a_n=\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$ и $a_n=q^{n-1}$, свидетельствует о возможности их обобщения по условию

$$q=\frac{1}{r}. \qquad (19)$$

При этом идентичными оказываются и конечные суммы (8) и (18):

$$\frac{1-(1/r)^n}{1-(1/r)}=\frac{q^n-1}{q-1}. \qquad (20)$$

Соблюдение условия (19) создает возможность снятия ограничения $q > 1$ для прогрессии и $r > 1$ для регрессии с обобщением на условие $q > 0$ для $q = a_{n+1}/a_n$, включая значение $q = 1$. В этом случае $q$ приобретает более общий смысл *коэффициента пропорциональности* ряда. При $n\to\infty$ для $q < 1$ выражение (20) сводится к пределу суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\frac{1}{1-q}. \qquad (21)$$

Общий вид дискретных ($a_n = q^{n-1}$) и непрерывных ($f(x) = q^{x-1}$) зависимостей при различных значениях коэффициента пропорциональности ряда $q$ представлен на рисунке 4. Вообще же эти зависимости являются частным случаем для показательных функций типа $y = a^x$ для области $x \geq 1$ при $a > 0$.

**Выводы**

На основе признака сходимости суммы ряда Коши, Маклорена разработана процедура определения конечной и полной суммы ряда через отношение общего члена ряда и среднеинтегральной величины одноименной функции в пределах единичного интервала из изменения. Это отношение, названное коэффициентом соразмерности дискретного ряда и одноименной непрерывной функции, выражается для убывающего ряда как

$$k=\frac{\int\limits_{x=n-1}^{x=n} f(x)dx}{a_n}$$

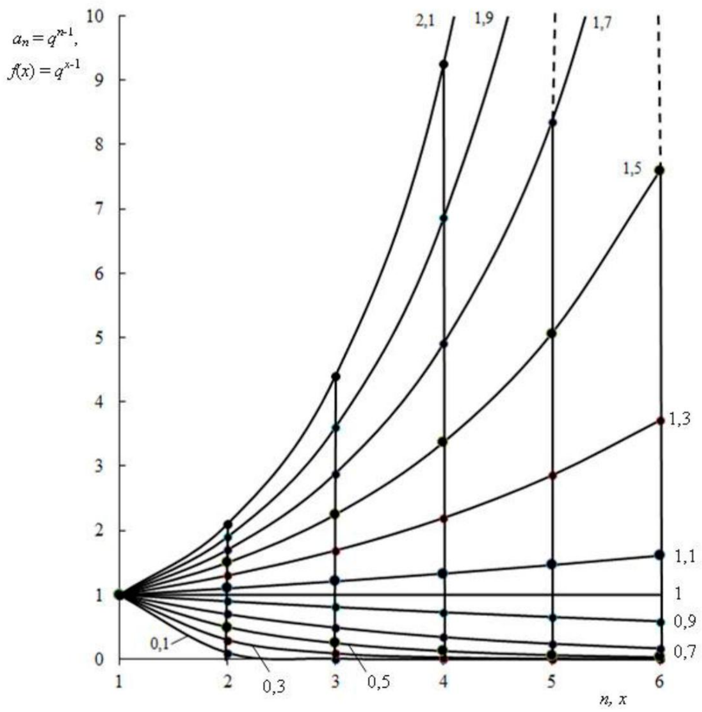



Рисунок 4 – Зависимость дискретных $a_n$ и непрерывных $f(x)$ величин от дискретного $n$ и непрерывного $x$ варьирования аргумента при различных значениях коэффициента пропорциональности $q$

и для возрастающего ряда как

$$k = \frac{\int_{x=n}^{x=n+1} f(x)dx}{a_n}.$$

При постоянной величине $k$, т.е. при $k \neq f(n)$, возможно определение как конечной, так и полной суммы ряда через несобственный интеграл одноименой функции по формулам для убывающего сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{1}{k}\int_{x=0}^{x=n} f(x)dx,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{k}\int_{x=0}^{\infty} f(x)dx,$$

а для возрастающего ряда как

$$\sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{1}{k}\int_{x=1}^{n} f(x)dx.$$

В качестве примера исследована соразмерность ряда $\sum_{n=1}^{n} q^{n-1}$ и несобственного интеграла для одноименной функции $\int_{n=n_0}^{n} q^{x-1}dx$ с обобщением областей опеределения при убывании (регрессии) для $0 < q < 1$ и возрастания (прогрессии) для $q > 1$ в виде непрерывного множества рядов и соответствующего множества одноименных функций.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

[1] Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – 13-е изд., исправленное. – М.: Наука.– 1986. – 544 с.
[2] Малышев В.П., Зубрина Ю.С.О возможности оценки и расчета суммы ряда на основе интегрального признака сходимости Коши, Маклорена // Вестник НАН РК. – 2015. – № 4. – С. 70-76.

**REFERENCES**

[1] Bronshtein I.N., Semendyaev K.A. Handbook of mathematics for engineers and students of technical colleges. - 13 th ed., Revised. - M .: Nauka.- 1986. - 544 p. (in Russ.).
[2] Malyshev V.P., Zubrin Yu.S. On possibility of assessing and calculating the sum of a series based on the integral sign of convergence of Cauchy, Maclaurin // Bulletin of the NAS RK. - 2015. - № 4. - pp 70-76. (in Russ.).

## ДИСКРЕТТІ ЖӘНЕ ҮЗДІКСІЗ ТӘУЕЛДІЛІКТЕРДІҢ ӨЗАРА БАЙЛАНЫСЫ ЖӘНЕ ШАМАЛАСТЫҒЫ ТУРАЛЫ

**Малышев В.П[1]., Макашева А.М[2]., Зубрина Ю.А[3].**

Ж. Әбішев атындағы Химия-металлургия институты
eia_hmi@mail.ru

**Түйін сөздер:** шамаластық, қатар, меншіксіз интеграл, жекеарақашықтық, ішінара сомма, шек.

**Аннотация.** Авторлар Коши, Маклорен интегралды белгісі бойынша қатардың шамаластығы негізінде бір аттас қызмет үшін қатар сомасы мен меншіксіз интегралдың өзара байланысы мен шамаластығын бағалайды. Осы мақсатта олар қатар мүшелері түрленуінің кез келген жеке арақашықтығы шегінде салыстырылатын өлшемдер арақатынасын талдайды және белгілі бір жеке арақашықтық қатарының сәйкесінше мүшесі мен бір аттас қызметтің орташа интегралды өлшемінің қатынасына тең, енгізілуші шамаластық коэффициентінің тұрақтылығы жағдайында қатардың соңғы немесе шекті сомасын есептеу мүмкіндігін дәлелдейді. Бұл әдіс қосылатын және айырылатын қатарлар үшін қолайлы.

Поступила 12.01.2016 г.