REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 2, Number 300 (2015), 46 – 50

UDC 55. ББК 26.34

Mathematical model of expiration high-viscosity liquids from the end of a narrow channel

Kuralbayev Z.K.[1], Taurbekova A.A.[2]
ainura_071@mail.ru
[1]Almatinsky University of Energy and Communications, Almaty, Kazakhstan
[2]doktorant PhD KazNTU, K.I. Satpaeva, Almaty, Kazakhstan

Key words: "lithosphere-asthenosphere", magmatism, tectonosphere Diapirism, rift zones, the Reynolds number

Abstract. This article is devoted to the actual problem - the creation of a mathematical model of the motion high-viscosity liquids flowing from the end of the "narrow channel" in the vertical direction under the influence of internal tectonic processes. This problem has a theoretical value for the model study of the processes occurring in the bowels of the earth, when heated igneous matter climb up the "narrow channels".

УДК 55. ББК 26.34

Математическая модель истечения сильновязкой жидкости из конца узкого канала

Куралбаев З.К.[1], Таурбекова А.А.[2]
ainura_071@mail.ru
[1]Алматинский университет энергетики и связи, г. Алматы, Казахстан
[2]докторант PhD КазНТУ им. К.И. Сатпаева, г. Алматы, Казахстан

Ключевые слова: "литосфера-астеносфера", мантийный поток, тектоносферы, числа Рейнольдса, математическая модель.

Аннотация. Данная статья посвящена актуальной проблеме - созданию математической модели движения сильновязкой жидкости, вытекающей из конца «узкого канала» в вертикальном направлении под воздействием внутренних тектонических процессов. Данная задача имеет теоретическое значение для модельного исследования процессов, происходящих в недрах Земли, когда нагретые магматические вещества поднимаются вверх по «узким каналам».

Введение. В различных сферах науки возникают сложные задачи, решение которых связано с трудностями проведения экспериментов или инструментальных измерений. Такая проблема связана, прежде всего, с недостаточностью информации об изучаемом явлении или процесса.

«Общепризнанно, что при изучении многих сложных явлений нельзя ограничиваться только экспериментальными и аналитическими исследованиями. Быстрый рост производительности компьютеров в последние десятилетия стимулировал развитие вычислительного направления в механике жидкости вообще и для исследования проблем гидродинамических неустойчивостей, частности» [1, стр.184].

Одна из таких сложных задач, связанных с излиянием сильновязкой жидкости из щели, является темой данной статьи.

По данным исследования глубинных процессов, происходящих в недрах Земли, установлено, что активные тектонические процессы связаны с восходящими потоками веществ нижележащей мантии, «поступающих по узким каналам пониженной вязкости и плотности» [2-4].

Обзор литературы о влиянии восходящего мантийного потока (струй) на глубинные и поверхностные структуры Земли, о механизмах происходящих процессов имеется в монографии [5] и в статье [6].

«Условиям существования восходящей струй является существование узкого канала пониженной вязкости» [7]. Возможным механизмом образования такого канала обычно считают разогрев теплом, поступающим из ядра Земли.

В связи со сложностью решения задачи об истечении магматических веществ из такого узкого «канала», в данной статье используется метод математического моделирования данного процесса.

В данной статье рассматривается задача об истечении сильновязкой жидкости из конца «канала». Здесь движение мантийного потока моделируется как сильновязкая жидкость, для которой число Рейнольдса является очень малым.

Актуальность решения задачи – модельного исследования такого сложного процесса, происходящего в недрах Земли, не вызывает сомнения. Результаты решения данной задачи имеют теоретическое значение для объяснения природы некоторых процессов, происходящих в тектоносфере. В пользу использования законов гидродинамики описании движений мантийных веществ выступают многие исследователи, в частности, [2-4,9]. «Ключевым моментом для характеристики таких движений (тектонических - авторы статьи) и вызванные ими структурообразования во внешней оболочке становится геологические наблюдения, лабораторные эксперименты и физическое моделирование, которые показывают определяющую роль вязких движений и дают возможность описывать геологические явления с привлечением законов гидродинамики» [9].

Постановка задачи. Рассматривается задача о движениях сильновязкой жидкости, вытекающей в вертикальном направлении из круглой щели, расположенной на некоторой горизонтальной поверхности. Радиус щели равен r, плотность жидкости ρ и динамический коэффициент ее вязкости равен μ.

Предполагается, что из-за достаточно большого значения динамического коэффициента, число Рейнольдса Re мало и в качестве исходных уравнений движений используются следующие уравнения [8]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{\rho g}{\mu}\dfrac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\{u, w\}$ - вектор скорости движения, x – горизонтальная и z – вертикальная координаты; g-ускорение силы тяжести, имеющее направление, обратное положительному направлению оси z.

Рассматриваемая сильновязкая жидкость предполагается несжимаемой, следовательно, выполняется следующее условие:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Граничные условия данной задачи будут сформулированы из физических условий задачи.

На выходе из канала, при z=0, задана скорость истечения жидкости из щели:

$$u\,(0, x, t)=0, \tag{3}$$

$$w\,(0, x, t)=\begin{cases} v(x,t), & \text{если } x \in [-r,r]; \\ 0, & \text{если } x \notin [-r,r]. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь r- радиус канала, на его сечении при $z = 0$, $v(x,t)$ – скорость жидкости при z=0, из конца «канала».

Вытекающая из канала жидкость образует определенную массу, занимая некоторую область, выше плоскости z=0. Поверхность этой области описывается некоторой функцией z= ξ(x,t), изменяющейся (увеличивающейся) с течением времени t. Предполагается, что на этой поверхности z= ξ(x,t) могут быть заданы следующие граничные условия:

а) равенство нулю касательного напряжения:

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad (5)$$

б) кинематическое условие равенства скорости поднятия в вертикальном направлении жидкости и поднятия граничной ее поверхности:

$$w\,(x,\xi,t)=\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\xi}{\partial t}+u(x,\xi,t)\,\frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad (6)$$

Можно предположить, что в начальный момент времени (при t=0) начинается процесс истечения жидкости. Тогда при t=0 выполняется следующее условие

$$\xi(x,0)=0 \qquad (7)$$

Область, содержащая излившейся из канала жидкости, расширяется не только в вертикальном направлении. Поэтому должны быть заданы условия на горизонтальных границах этой области. Эти условия могут быть записаны в следующем виде:

$$x=\pm p(t), \qquad \xi(\pm p(t),t)=0; \qquad (8)$$

Здесь $x=\pm p(t)$ - горизонтальная граница области, занятой вытекшей жидкостью.

Очевидно, в начальный момент времени (t=0), т.е. в начале рассматриваемого процесса $p(0)=\pm r$. Полученная совокупность математических формул (1)-(8) образует математическую модель рассматриваемой задачи. Отсюда может быть сформулирована следующая задача: требуется решить систему уравнений (1)-(2) для граничных условий (3)-(6), (7) и начального условия (8).

Вывод уравнений. Необходимо преобразовать математических формул, приведенных выше, для конкретной постановки математической задачи. Используя формулы (2),(5),(7), можно получить дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $\xi(x,t)$. Для этого производится интегрирование формулы (2) по переменной z в пределах от 0 до $\xi(x,t)$. Можно получить следующее выражение:

$$w(\xi,x,t)-w(0,x,t)=-\int_0^{\xi}\frac{\partial u}{\partial x}\partial z.$$

Из формул (5) и (7) следует, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+u(\xi,x,t)\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}-w(0,x,t)=-\int_0^{\xi}\frac{\partial u}{\partial x}\partial z.$$

Используя известную формулу дифференцирования интеграла с переменным пределом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\xi}u(x,z,t)\,\partial z=\int_0^{\xi}\frac{\partial u}{\partial x}\partial z+u(\xi,x,t)\,\frac{\partial\xi}{\partial t},$$

можно записать следующее уравнение:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\xi}u(x,z,t)\,\partial z+\begin{cases}v(x,t), & \text{если}\quad x\in[-r,r];\\ 0, & \text{если}\quad x\notin[-r,r].\end{cases} \qquad (9)$$

Вводится следующая замена переменных:

$$x=\mathcal{L}\bar{x};\ z=r\bar{z};\ u=V\bar{u};\ w=V\bar{w}.$$

$$t=\frac{\mathcal{L}}{V}\bar{t}. \qquad (10)$$

Здесь $\bar{x},\bar{z},\bar{u},\bar{w},\bar{t}$ - безразмерные величины; черточки в дальнейшем могут быть опущены.

Используя замену переменных (10), из системы уравнений (1) после оценки величин, можно получить:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=ER\frac{\partial\xi}{\partial x}, \qquad (11)$$

где $ER=\frac{\rho g H^3}{\eta u\alpha}$ безразмерное число.

Интегрируя формулу (11) по z дважды и с учетом граничных условий, из формулы (9) следует:

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}=\frac{ER}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi^3\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)+\begin{cases}\bar{v}(x,t), & \text{если}\quad x\in[-1,1];\\ 0, & \text{если}\quad x\notin[-1,1].\end{cases} \qquad (12)$$

Здесь $\bar{v}(x,t)=\frac{v(x,t)}{V}$ - безразмерная скорость истечения жидкости из «канала». Можно принять параболический закон истечения жидкости. Тогда

$$\bar{v}(x,t) = y(t)(1 - x^2), \tag{13}$$

где функция $y(t)$ может быть задана.

Тогда уравнение (12) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{ER}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi^3 \frac{\partial \xi}{\partial t}\right) + \begin{cases} y(t)(1 - x^2),\ если -1 \le x \le 1; \\ 0,\ если\ -\infty < x < -1,\ 1 < x < +\infty \end{cases} \tag{14}$$

Полученное уравнение (14) является уравнением в безразмерных параметрах; оно относится к параболическому типу уравнений формула изменения объема жидкости. Вытекающая из «канала» жидкость накапливается над поверхностью $z = 0$. Обьем накапливаемой жидкости за время t может быть определен в следующем виде:

$$Q = 2\int_0^{\rho(t)} \xi(x,t)dx \tag{15}$$

Расход жидкости из «канала» также может быть определен и тогда для определения объема накапливаемой за время t жидкости может быть использована формула:

$$Q = \frac{2}{3}\int_0^t y(\tau)d\tau,$$

поэтому

$$\int_0^{\rho(t)} \xi(x,t)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^t y(\tau)d\tau \tag{16}$$

Итак, формулы (14) и (16) являются формулами для определения неизвестных функций: $\xi(x,t)$ - верхней границы накопленной жидкости и $\rho(t)$ - подвижная граница по горизонтали.

Решения уравнения параболического типа (14) и определение функции $\rho(t)$ по формуле (16) позволяет решить поставленную в данной статье задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Чечеткин В.М. Численное моделирование гидродинамических неустойчивостей и турбулентности // В книге «Будущее прикладной математики. Лекции для молодых исследователей. От идей к технологиям / Под ред. Г.Г. Малинецкого» - М.: Ком Книга, 2009. – 512с.

[2] Пущаровский Ю.М., Меланхолина Е.Н. Тектоническое развитие Земли. Тихий Океан и его образование. –М.: Наука, 1992.-263с.

[3] Меланхолина Е.Н. Тектоническая обстановка развития активных окраин запада Тихого океана // Геотектоника. – 1993. – № 1. –С.79-95.

[4] Добрецов Н.Л., Кирдяшкин А.Г., Кирдяшкина А.А. Глубинная геодинамика. 2-е изд., доп. И перераб. Новосибирск: Издательство СО РАН, филиал «ГЕО», 2001. – 409с.

[5] Куралбаев З.К., Модельное исследование тектонических движений в системе «литосфера-астеносфера». – Алматы: 2008. – 212с.

[6] Куралбаев З.К., Таурбекова А.А. Механико-математическая модель мантийного диапиризма // Известия Национальной Академии Наук РК , №3(289), май-июнь 2013 г., 98-102стр.

[7] Lopez David E. Mantle plumes // Tectonophysies. – 1991. – 187, n4. 373-384

[8] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978. – 736с.

[9] Пейве А.В., Савельева А.А. Структуры и движения в литосфере // Геотектоника, 1998, - №6

REFERENCES

[1] Belotserkovskii OM, AM Oparin, VM Chechetkin Numerical simulation of hydrodynamic instabilities and turbulence // In the book "The Future of Applied Mathematics. Lectures for young researchers. From ideas to technology / Ed. GG Malinetskii "- M .: Com Book, 2009. - 512s.

[2] Pushcharovsky YM, Melankholina EN Tectonic evolution of the Earth. Pacific Ocean and its education. -M .: Nauka, 1992.-263s.

[3] Melankholina EN Tectonic setting of active margins west Pacific // Geotektonika. - 1993. - № 1. -S.79-95.

[4] Dobretsov NL, Kirdyashkin AG, AA Kirdyashkin Deep geodynamics. 2nd ed., Ext. And rev. Novosibirsk: Publishing House of SB RAS, a subsidiary of "GEO", 2001. - 409s.

[5] Kuralbayev ZK, Model study tectonic movements in the "lithosphere-asthenosphere." - Almaty, 2008. - 212c.

[6] Kuralbayev ZK, Taurbekova AA Mechanics and mathematical model of mantle diapirism // Proceedings of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, №3 (289), May-June 2013, 98-102str.

[7] Lopez David E. Mantle plumes // Tectonophysies. – 1991. – 187, n4. 373-384

[8] Loitsiansky LG Fluid Mechanics. - M .: Nauka, 1978. - 736s.
[9] Peive AV Saveliev AA Structure and motion in the lithosphere // Geotektonika, 1998, - №6

УДК 55. ББК 26.34

Аса тұтқырлы сұйықтың жіңішке арнадан ағып шығуының математикалық моделі

Құралбаев З.Қ.[1] , Таурбекова А.А.[2]
ainura_071@mail.ru
[1]Алматы энергетика және байланыс университет, Қазахстан, Алматы қаласы.
[2] К.И. Сатпаев атындағы ҚазҰТУ, PhD докторант, Қазахстан, Алматы қаласы.

Тірек сөздер: «Литосфера-астеносфера», магматизм, тектоносферы, диапиризма, рифт аумақтар, Рейнольдс саны

Аннотация. Бұл мақала ішкі тектоникалық процестердің әсерімен «жіңішке арна» арқылы жоғары көтерілетін қыздырылған магматикалық заттардың қозғалысын модельдік зерттеуге арнлаған математикалық модель құрастыруға арналған. Модель ретінде аса тұтқырлы сұйықтың «жіңішке арна» арқылы жоғары көтерілетін қозғалысы қарастырылған. Бұл есеп Жердегі тектоникалық процестерді зерттеудегі теориялық маңызы бар.

KURALBAYEV ZAUYTBEK KURALBAEVICH DOCTOR, prof., Almaty University of Energy and Communications, Almaty
TAURBEKOVA AYNUR ADILGAZIEVNA, PhD students KazNTU. K.I. Satpaeva

Сведения об авторах:

Фамилия, имя, отчество – Куралбаев Заутбек Куралбаевич
должность –доктор ф.-м.н., профессор
место работы/учебы (организация, кафедра, отдел)- АУЭС, заведующий кафедры. «Компьютерные технологии» при АУЭС
e-mail – zaufan@mail.ru

Фамилия, имя, отчество – Таурбекова Айнур Адилгазыевна
должность –докторант PhD 3 курса
место работы/учебы (организация, кафедра, отдел)- КазНТУ им.К.И.Сатпаева, кафедра «Компьютерная и программная инженерия», старший преподаватель кафедры «Компьютерные технологии» при АУЭС
e-mail – Ainura_071@mail.ru

Поступила 20.03.2015 г.