**REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**
ISSN 2224-5227
Volume 3, Number 301 (2015), 17– 26

UDC 539.3

The mixed regional task for the neohookean material in the nonlinear theory of elasticity

N.I. Martynov, M.A. Ramazanova
nikmar50@mail.ru

Institute of mathematics and mathematical modeling of MON RK

Key words: elastic body, the neohookean material, static regional task, function of tension.

Abstract. The solution of the mixed static regional problem of the generalized flat deformation for the elastic neohookean body which is in a field of volume forces is received in the closed look. A common decision is written in through two holomorphic functions, and basic regional tasks over of nonlinear theory of resiliency are brought to the task of Riemann-Gilbert for a holomorphic vector. Decisions of first (on a border efforts are set) and second (on a border, moving is set) regional tasks written down in squaring by means of integral of Schwarz, and the mixed regional task, as linear combination of two decisions of task of interface of Keldiush - Sedova of theory of analytical functions. Ratios between power and kinematic loadings which provide static balance of an elastic not Hookean body are received. It is noted that in the general case, the components of the stress tensor and the nominal gradient motion belong to nearly limited functions. It is shown that there are boundary conditions, which are called self-consistent, for which the solution is continuously differentiable up to the boundary.

УДК 539.3

Смешанная краевая задача для неогуковского материала в нелинейной теории упругости

Н.И.Мартынов, М.А.Рамазанова
nikmar50@mail.ru

Институт математики и математического моделирования МОН РК

Ключевые слова: упругое тело, неогуковский материал, статическая краевая задача, функция напряжений.

Аннотация. Решение смешанной статической краевой задачи обобщенной плоской деформации для упругого неогуковского тела, находящегося в поле объемных сил получено в замкнутом виде. Общее решение записано через две голоморфные функции, а основные краевые задачи нелинейной теории упругости приведены к задаче Римана-Гильберта для голоморфного вектора. Решения первой (на границе заданы усилия) и второй (на границе заданы перемещения) краевых задач записывается в квадратурах с помощью интеграла Шварца, а смешанной краевой задачи, как линейная комбинация двух решений задачи сопряжения Келдыша - Седова теории аналитических функций. Получены соотношения между силовыми и кинематическими нагрузками, которые обеспечивают статическое равновесие упругого негуковского тела. Отмечено, что в общем случае компоненты номинального тензора напряжений и градиента движения принадлежат классу почти ограниченных функций. Показано, что существуют граничные условия, которые названы самосогласованными, при которых решение непрерывно-дифференцируемо вплоть до границы области.

Введение. Начально-краевые и краевые задачи нелинейной теории упругости [1-9] относятся к сложным задачам математической физики. В настоящее время получено небольшое число точных аналитических (эталонных) решений краевых задач нелинейной теории упругости [3,4,8,9], которые имеют важное значение. Они позволяют продвинуться в понимании и исследовании механики упругого поведения материала в широком диапазоне изменения режимных параметров, а также при рассмотрении поведения реальных изделий и конструкций под действием силовых факторов.

Отметим, что запись основных соотношений нелинейной теории упругости в комплексном виде позволила получить компактные и относительно простые соотношения. Это дало возможность получить ряд точных решений задач обобщенной плоской деформации [8,9]. Так, в работе [9] для неограниченно-линейного материала, который по своей структуре близок к неогуковскому материалу в случае обобщенной плоской деформации, построено общее решение.

В работе [10] решения основных статических краевых задач (на границе заданы усилия или перемещения) обобщенной плоской деформации для неогуковского материала находящегося в поле объемных сил, получены в замкнутом виде. Использование номинального тензора напряжений и функции напряжений позволило записать общее решение через две голоморфные функции, а основные краевые задачи нелинейной теории упругости привести к задаче Римана-Гильберта для голоморфного вектора. Окончательное решение записывается в квадратурах с помощью интеграла Шварца. Там же [10] построено универсальное представление объемных сил, которое не зависит от вида конкретного упругого потенциала и позволяет записать краевые условия, как краевые условия задачи, в которой отсутствуют объемные силы.

В настоящей работе рассматривается смешанная краевая задача (на части границы области заданы усилия, на другой ее части - перемещения) обобщенной плоской деформации для неогуковского материала, заполняющего односвязную ограниченную область D с границей Γ.

1.Основные соотношения. Приведем основные соотношения теории обобщенной плоской деформации нелинейной теории упругости [8,9], а также результаты работы [10], которые понадобятся нам в дальнейшем.

Под обобщенной плоской деформацией понимают деформацию, при которой прямоугольные координаты материальной точки до (снабжены значком $^\circ$) и после деформации, связаны соотношениями:

$$x_1 = x_1(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, t), \quad x_2 = x_2(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, t), \quad x_3 = \lambda_3 \overset{\circ}{x}_3, \quad \lambda_3 = const \tag{1}$$

Таким образом, при обобщенной плоской деформации нормальное волокно к плоскости $\overset{\circ}{x}_3 = const$ смещается поступательно, удлиняясь с постоянной кратностью $\lambda_3 = const$. Плоской деформации отвечает случай $\lambda_3 = 1$.

Введем комплексные координаты z до и после деформации η :

$$z = \overset{\circ}{x}_1 + i\overset{\circ}{x}_2, \quad s = \overline{z} = \overset{\circ}{x}_1 - i\overset{\circ}{x}_2, \quad x_1 = x_1^\circ + u_1, \quad x_2 = x_2^\circ + u_2 \tag{2}$$

$$\eta = x_1 + ix_2 = z + w, \quad \overline{\eta} = x_1 - ix_2 = s + \overline{w}, \quad w = u_1 + iu_2, \quad i^2 = -1,$$

а также комплексные операторы:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_1} - i\frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_1} + i\frac{\partial}{\partial \overset{\circ}{x}_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{\eta}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{3}$$

В соотношениях (2),(3) i- мнимая единица, а u_1, u_2 - компоненты вектора перемещения.

Для тензора второго ранга $T = t_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta$ (g_α- ортонормированные орты; по греческим индексам производится суммирование) вводятся следующие комплексные компоненты тензора [8,9]:

$$T_1 = t_{11} + t_{22} + i(t_{12} - t_{21}), \quad T_2 = t_{11} - t_{22} + i(t_{12} + t_{21}), \quad T_3 = t_{13} + it_{23}, \quad T_4 = t_{31} + it_{32}, \quad T_5 = t_{33} \tag{4}$$

Градиент тензора движения F и обратный ему тензор F^{-1} определяются как [8,9]:

$$F = \frac{\partial x_\mu}{\partial \overset{\circ}{x}_\nu} g_\mu g_\nu, \quad F^{-1} = \frac{\partial \overset{\circ}{x}_\alpha}{\partial x_\beta} g_\alpha g_\beta \qquad (5)$$

Тогда дифференциалы радиусов - векторов в исходной (в недеформируемой конфигурации) и текущей (в деформируемой конфигурации) связаны соотношением:

$$dR = F \cdot dR^\circ \qquad (6)$$

Из (6) видно, что градиент тензора F определяет локальное движение точек материальной частицы. Применяя к градиенту движения F полярное разложение, получим [8,9]:

$$F = Q \cdot \Lambda^\circ, \quad \Lambda^\circ = \sqrt{F^* \cdot F}, \quad Q^{-1} = Q^* \qquad (7)$$

Здесь Λ°- симметричный тензор с положительными главными значениями, а Q - ортогональный тензор (F^*- тензор, сопряженный тензору F). Тензор Λ° называется тензором кратностей удлинения, а величины λ_i- главными кратностями удлинения, поскольку в главном ортонормированном векторном базисе Λ°, как показано в [8,9]:

$$\lambda_i = \frac{ds_i}{ds_i^\circ}, \quad ds^\circ = \left|dR^\circ\right|, \quad ds = \left|dR\right| \qquad (8)$$

Для обобщенной плоской деформации комплексные компоненты ортогонального тензора Q и тензора градиента движения F имеют следующий вид [8,9]:

$$Q_1 = 2e^{-i\omega}, \; Q_2 = Q_3 = Q_4 = 0, \; Q_5 = 1, \; F_1 = 2\overline{\eta}_s, \; F_2 = 2\eta_s, \; F_3 = F_4 = 0, \; F_5 = \lambda_3, \; e^{i\omega} = \frac{\eta_z}{\left|\eta_z\right|} \qquad (9)$$

Здесь ω- угол поворота материальной частицы вокруг оси Ox_3. Таким образом, деформационные характеристики среды определяются тензором градиента движения F или тензором кратностей удлинения Λ° и ортогональным тензором Q.

Для оценки силовых характеристик упругой среды вводится вектор напряжений σ_n, действующий на площадке с нормалью n деформируемого тела, а также симметричный тензор истинных напряжений Коши $\Sigma = \sigma_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta$ [8,9]. Кроме того, вводится вектор напряжений σ_{n° в расчете на единицу площади исходной недеформированной поверхности с нормалью n°, и несимметричный номинальный тензор напряжений $\left\{F^{-1} J \Sigma\right\}$:

$$\sigma_{n^\circ} = \frac{dS_n}{dS_n^\circ} \sigma_n = n^\circ \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}, \qquad (10)$$

где $J = \left|\frac{\partial x_i}{\partial x_j^\circ}\right| = \lambda_3 \cdot \Delta = \lambda_3 \cdot (\left|\eta_z\right|^2 - \left|\eta_s\right|^2)$ - якобиан преобразования (1).

Статическое уравнение равновесия с помощью комплексных компонент номинального тензора напряжений на плоскости z (до деформации) записывается в виде [8,9]:

$$\frac{\partial \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_1}{\partial s} + \frac{\partial \left\{F^{-1} J \Sigma\right\}_2}{\partial z} + f = 0, \qquad (11)$$

где $f = \rho^\circ (f_1^* + i f_2^*)$- объемная сила, ρ°-плотность материала до деформации, f_1^*, f_2^*- компоненты массовой силы. Система уравнений (11) замыкается заданием конкретного вида упругого потенциала Φ (закона упругости), который для обобщенной плоской деформации в общем случае для сжимаемого упругого тела имеет вид [8,9]:

$$\Phi = \Phi(\left|\eta_z\right|, \left|\eta_s\right|, \lambda_3) \qquad (12)$$

При этом комплексные компоненты номинального тензора напряжений определяются соотношениями:

$$\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1=\frac{\eta_z}{|\eta_z|}\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_z|},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2=\frac{\eta_s}{|\eta_s|}\frac{\partial\Phi}{\partial|\eta_s|},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_3=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_4=0,\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5=\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_3},\qquad(13)$$

а истинных напряжений – соотношениями:

$$\lambda_3\Delta\Sigma_1=\bar\eta_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\bar\eta_z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \lambda_3\Delta\Sigma_2=\eta_s\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\eta_z\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ \Delta\Sigma_5=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5\quad(13a)$$

Отметим, что при $\lambda_1\ge\lambda_2$ [9]:

$$|\eta_z|=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2),\ |\eta_s|=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2)\qquad(14)$$

К соотношениям (11) - (14) добавляются соответствующие граничные условия, которые записываются на недеформируемом контуре упругого тела на плоскости z.

Упругий потенциал Φ для неогуковского материала [8,9] с учетом (14) имеет вид:

$$\Phi=\frac{E}{6}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-1)=\frac{E}{12}(|\eta_z|^2+|\eta_s|^2+2\lambda_3^2-6)\qquad(15)$$

Следуя работе [10] объемную силу f, в уравнении равновесия (11) будем представлять в виде $f=\theta_{zs}$. В качестве функции θ возьмем функцию:

$$\theta=\psi_1(z)+\bar\psi_2+\frac{2}{\pi}\iint_D f(\xi)\ln|z-\xi|d\xi_1d\xi_2,\quad \xi=\xi_1+i\xi_2,\qquad(16)$$

где ψ_1,ψ_2 - определенным образом подобранные голоморфные функции, такие, что на границе Γ области D выполняются соотношения [10]:

$$\theta_z\big|_\Gamma=\theta_s\big|_\Gamma=0\quad и\quad \theta\big|_\Gamma=0\qquad(17)$$

Для этого достаточно выбрать $\psi_1',\ \psi_2'$ следующим образом [10]:

$$\psi_1'\big|_\Gamma=-Tf,\quad \bar\psi_2'\big|_\Gamma=-\overline{Tf}\ ,\qquad(18)$$

где

$$\theta_s=\bar\psi_2'+\overline{Tf},\ \theta_z=\psi_1'+Tf,\ Tf=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi_1d\xi_2,\ \overline{Tf}=-\frac{1}{\pi}\iint\frac{f(\xi)}{\bar\xi-\bar z}d\xi_1d\xi_2,\ \xi=\xi_1+i\xi_2$$

(19)

Таким образом, θ_z,θ_s на границе области Γ обращаются в нуль. Это следует из соотношений(18), (19). Отметим, что оператор Tf непрерывен на всей плоскости z вплоть до границы Γ, если f – суммируемая функция [11,12].

Производные (18) вовнутрь области D продолжим по формулам Коши:

$$\psi_1'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{Tf(\tau)d\tau}{\tau-z},\quad \bar\psi_2'(s)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma\frac{\overline{Tf}(\bar\tau)d\bar\tau}{\bar\tau-s}\qquad(19a)$$

Тогда

$$\psi_1(z)=C_1+\int_L\psi_1'(t)dt,\quad \bar\psi_2(z)=C_2+\int_L\bar\psi'(\bar t)d\bar t\ ,\qquad(19б)$$

где C_1, C_2- произвольные постоянные, L- произвольный незамкнутый контур, целиком лежащий в области D. Последнее соотношение (17) следует из того, что производная вдоль контура равна нулю, и, следовательно, на контуре $\theta\big|_\Gamma=const$. Эту постоянную можно принять равной нулю, добавив соответствующую постоянную в соотношение (16). Таким образом, построенное представление (16) - (19б) объемных сил позволяет записать граничные условия, как граничные условия краевой задачи, в которой отсутствуют объемные силы. Нетрудно видеть, что представление (16) - (19б) не зависит от вида конкретного упругого потенциала, и поэтому оно универсально.

С учетом (16), уравнение равновесия запишется в виде:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\theta_z\right\}+\frac{\partial\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2}{\partial z}=0 \qquad (20)$$

Введем комплексную функцию напряжений U:

$$-U_s=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2,\ U_z=\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\theta_z, \qquad (21)$$

которая интегрирует уравнение (20). С учетом (13) - (15),(21) соотношения (13) запишутся в виде:

$$U_z=\frac{E}{6}\eta_z+\theta_z,\ -U_s=\frac{E}{6}\eta_s,\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5=\frac{E}{3}\lambda_3 \qquad (22)$$

Из первых двух соотношений (22) нетрудно получить общее решение [10]:

$$U=\frac{1}{2}(\Phi_1-\overline{\Phi}_2+\theta),\ \frac{E}{3}\eta=\Phi_1+\overline{\Phi}_2-\theta \qquad (23)$$

При обобщенной плоской деформации сжимаемого материала постоянная λ_3 определяется из соотношения [9]:

$$G_3=\iint\limits_D\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_3}dS^\circ \qquad (24)$$

при заданной осевой силе G_3. Учитывая последние соотношения (13), (22), из (24) получаем:

$$\lambda_3=\frac{3G_3}{ES^\circ},\ \left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_5=\frac{G_3}{S^\circ} \qquad (24a)$$

В соотношениях (24), (24a) S° - площадь поперечного сечения цилиндра в недеформируемом состоянии.

Отметим, что связь между компонентами номинального тензора напряжений (22) и градиентом движения линейна, в то время как, связь между компонентами истинного тензора напряжений и градиентом движения, не- линейна, что видно из соотношений (13а), (22) :

$$\lambda_3\Delta\Sigma_1=\frac{E}{6}(|\eta_z|^2+|\eta_s|^2),\ \lambda_3\Delta\Sigma_2=\frac{E}{3}\eta_z\eta_s$$

Рассмотрим первую краевую задачу, когда на границе Γ недеформируемой области D заданы усилия : $g=g_1+ig_2$. Граничные условия на Γ записываются в виде [8,9]:

$$n^\circ\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_1+\overline{n}^\circ\left\{F^{-1}J\Sigma\right\}_2=2g,\quad n^\circ=n_1^\circ+in_2^\circ=e^{i\gamma_0}=-i\frac{dz}{d\sigma_0}, \qquad (25)$$

где γ_0 - угол между нормалью n° и осью Ox_1^0, σ_0 -длина дуги недеформируемого контура. С учетом (21) соотношение (25) примет следующий вид:

$$\left.\frac{dU}{d\sigma_0}\right|_\Gamma=i(2g+e^{i\gamma_0}\theta_z)=2ig,\ \text{или}\ \ U|_\Gamma=C+2i\int_0^{\sigma_0}gd\sigma_0=G,\ C=const \qquad (26)$$

Для односвязной области произвольную постоянную C можно положить равной нулю. Подставляя первое соотношение (23) во второе соотношение (26) , получим:

$$(\Phi_1-\overline{\Phi}_2)|_\Gamma=2G-\theta=2G \qquad (27)$$

Граничное условие (27) можно записать как граничную задачу Римана-Гильберта [11-14] для голоморфного вектора $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)^T$ в виде:

$$\mathrm{Re}(\overline{A}\Phi)|_\Gamma=b,\ \ \overline{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ i & i\end{pmatrix},\ \ b=\begin{pmatrix}4\,\mathrm{Re}\,G\\ -4ImG\end{pmatrix},\ \ \det|A|\neq 0 \qquad (28)$$

При отображении односвязной области D на единичный круг $(z=\Omega(\zeta))$ вид матриц A и b не изменяется, причем матрица A остается постоянной. Поэтому решение краевой задачи Римана -

Гильберта для голоморфного вектора [11,12,14] можно записать, используя интеграл Шварца:

$$\Phi(\zeta)=\frac{\bar{A}^{-1}}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{b(t)(t+\zeta)}{t(t-\zeta)}dt+i\bar{A}^{-1}C_0, \qquad (29)$$

где постоянный действительный вектор-столбец C_0 для односвязной области можно положить равным нулю.

Таким образом, решение первой краевой задачи записывается в замкнутом виде. Нахождение остальных силовых и деформационных характеристик упругого тела осуществляется по приведенным выше соответствующим формулам. Отметим, что в работе [10] для первой краевой задачи обоснованы необходимые и достаточные условия равновесия упругого неогуковского тела.

Рассмотрим вторую краевую задачу, когда на границе $Г$ заданы перемещения или известна величина:

$$\frac{E}{3}\eta\bigg|_{Г}=\frac{E}{3}(z+W)\bigg|_{Г}=g \qquad (30)$$

Учитывая второе соотношение (26) и (19), краевое условие (39) запишем в виде:

$$(\Phi_1+\bar{\Phi}_2)\big|_{Г}=g\,, \qquad (30а)$$

или в виде (28), где

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -i & i\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\,\mathrm{Re}\,g\\ 2\,\mathrm{Im}\,g\end{pmatrix},\quad \det|A|\neq 0 \qquad (31)$$

Решение второй краевой задачи записывается в форме (29), где соответствующие матрицы определяются соотношениями (31).

Сделаем замену:

$$\Phi_1(z)=\Omega_1(z)+i\Omega_2(z),\ \ \Phi_2(z)=-\Omega_1(z)+i\Omega_2(z) \qquad (32)$$

Тогда граничные условия первой и второй краевой задачи для голоморфного вектора $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2)^T$ можно записать в виде:

<u>1я краевая задача</u> $\mathrm{Re}\,\Omega_1\big|_{Г}=\mathrm{Re}\,G\,,\ \ \mathrm{Re}\,\Omega_2\big|_{Г}=\mathrm{Im}\,G$ (32а)

<u>2я краевая задача</u> $\mathrm{Im}\,\Omega_1\big|_{Г}=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\,g\,,\ \ \mathrm{Im}\,\Omega_2\big|_{Г}=-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,g$ (32б)

Отметим, что для первой краевой задачи номинальные напряжения предполагаются непрерывными вплоть до границы $Г$, а перемещения определяются с точностью до жесткого смещения всего тела. Чтобы перемещения были однозначными функциями, необходимо задать в какой - либо точке упругого тела перемещение до деформации или после деформации. Кроме того, система объемных и поверхностных сил является самоуравновешенной системой сил. Для второй краевой задачи компоненты деформаций или η_z, η_s должны быть непрерывны вплоть до границы. Поэтому граничные значения G (26), g (30) должны быть непрерывно-дифференцируемыми функциями на контуре. Для второй краевой задачи подразумевается, что перемещения, заданные на границе, обеспечивают равновесие упругого тела.

Для третьей, смешанной краевой задачи (на части границы $Г_1$ заданы усилия, на другой оставшейся ее части $Г_2$ заданы перемещения), матрицы A, b, принимают, соответственно, значения (28) или (31) и терпят согласованный разрыв первого рода на множестве меры нуль. С помощью определенной процедуры третья краевая задача сводится к краевой задаче с непрерывной матрицей A [12,13,15]. Для третьей краевой задачи подразумевается, что перемещения и усилия, заданные на границе, обеспечивают равновесие упругого тела.

2. Смешанная краевая задача. Рассмотрим третью (смешанную) краевую задачу, когда на части границы $Г$ заданы усилия, на другой ее части заданы перемещения. Пусть замкнутый контур $Г$ точками $a_1,b_1,\dots,a_m,b_m$ разделен на 2m частей. Совокупность дуг (a_k,b_k) обозначим $Г_1$, совокупность дуг (b_k, a_{k+1}) - Γ_2 $(k=1,2,...,m;\ a_{2m+1}=a_1)$. Пусть на Γ_1 заданы усилия g_1, а на Γ_2 заданы перемещения или величина $\left.\frac{E}{3}\eta\right|_{\Gamma_2}=g_2$. Тогда смешанную краевую задачу можно сформулировать следующим образом [12 - 15]: требуется определить голоморфный вектор $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2)^T$, удовлетворяющий краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\Omega_1\big|_{\Gamma_1}=\operatorname{Re}G_1,\ \operatorname{Re}\Omega_2\big|_{\Gamma_1}=\operatorname{Im}G_1,\ (G_1=C_k+\tilde{G}_1, \tilde{G}_1=2i\int_0^{\sigma_{0k}} g_1 d\sigma_{0k},\ C_k=const,\ при\ t\in(a_k,b_k))$$

$$\operatorname{Im}\Omega_1\big|_{\Gamma_2}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}g_2,\ \operatorname{Im}\Omega_2\big|_{\Gamma_2}=-\frac{1}{2}\operatorname{Re}g_2, \qquad (33)$$

за исключением точек разрыва $a_1,b_1,...,a_m,b_m$, вблизи которых

$$|\Omega(z)|<\frac{const}{|z-c|^{\alpha}},\ \alpha=const<1\ (c\ пробегает\ все\ точки\ разрыва). \qquad (33а)$$

Здесь σ_{0k} - элементарная длина дуги (a_k,b_k) в недеформируемом состоянии, отсчитываемая от точки a_k. Функции, удовлетворяющие условию (33а) и имеющие интегрируемые особенности, называются почти ограниченными [15].

Рассмотрим случай, когда Γ есть действительная ось, что достигается путем конформного отображения области D^+ на верхнюю полуплоскость. При этом необходимо считать голоморфный вектор $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2)^T$ ограниченным на бесконечности [14]. Будем предполагать, что бесконечно удаленная точка оси не совпадает с точками разрыва $a_1,b_1,...,a_m,b_m$. Тогда Γ_1 состоит из m отрезков $(a_k,\ b_k)$, а Γ_2 из m-1 конечных отрезков и двух бесконечных $(b_m,\infty),\ (-\infty,a_1)$. Для определения компонент голоморфного вектора $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2)^T$ мы пришли к краевой задаче М.В. Келдыша - Л.И.Седова [14, 15]: определить голоморфную в D^+ функцию $F(z)=u+iv$, удовлетворяющую на действительной оси краевому условию

$$u=l_1\ на\ \Gamma_1;\ v=l_2\ на\ \Gamma_2,\ F(\infty)=0 \qquad (34)$$

где $l_1,\ l_2$ - заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера.

Обозначим все точки разрыва единообразно буквами $c_1,c_2,...,c_{2m}$. Пусть в точках $c_1,c_2,...,c_p$ решение ограничено, а в точках $c_{p+1},...,c_{2m}$ допускается интегрируемая бесконечность (решение почти ограничено), т.е. решение принадлежит классу $h(c_1,...,c_p)$ [14, 15]. Обозначим

$$R_1(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{p}(z-c_k)},\ R_2(z)=\sqrt{\prod_{k=p+1}^{2m}(z-c_k)} \qquad (35)$$

Тогда решение задачи (34) в заданном классе $h(c_1,...,c_p)$ имеет вид [14, 15]:

$$F(z)=\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}\frac{l(\tau)}{\tau-z}d\tau+P_{m-p-1}(z)\right],\ l(\tau)=\begin{cases}2l_1(\tau),\ \tau\in\Gamma_1\\ 2il_2(\tau),\tau\in\Gamma_2\end{cases}, \qquad (36)$$

где $P_k(z)$ - многочлен с действительными коэффициентами степени $к$.

Если $p\ge m$, то $P_{m-p-1}\equiv 0$, причем в случае $p>m$ решение существует только при соблюдении условий разрешимости:

$$\int_{\Gamma}\frac{R_2(\tau)}{R_1(\tau)}l(\tau)\tau^{j-1}d\tau=0\quad (j=1,2,...,p-m) \qquad (37)$$

Таким образом, решение краевой задачи (34) зависит от заданного класса, в котором оно рассматривается. В частности:

1) Решение, неограниченное вблизи всех точек a_k, b_k:

$$F(z)=\frac{1}{R(z)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R(\tau)l(\tau)}{\tau-z}d\tau+P_{m-1}(z)\right],\ R(z)=\sqrt{\prod_{k=1}^{m}(z-a_k)(z-b_k)} \tag{38}$$

2) Решение, ограниченное вблизи всех точек a_k, b_k:

$$F(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{l(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)} \tag{39}$$

При выполнении условий разрешимости:

$$\int_{\Gamma}\frac{l(\tau)}{R(\tau)}\tau^{j-1}d\tau=0\quad (j=1,2,...,m) \tag{40}$$

Решения, неограниченные в каких – либо точках, следует отбросить как не физические решения, поскольку перемещение в любой точке контура Γ должно быть ограниченным. Поэтому физически возможное решение - это решение (39) при условии (40).

Запишем условия разрешимости (40) для компонент голоморфного вектора $\Omega=(\Omega_1,\Omega_2)^T$, используя (33), (34), (36), (38).

$$\sum_{k=1}^{m}2\operatorname{Re}(C_k)\int_{a_k}^{b_k}\frac{\tau^{j-1}}{R(\tau)}d\tau+\int_{\Gamma}\frac{\tilde{l}_1(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)}d\tau=0,\ \tilde{l}_1(\tau)=\begin{Bmatrix}2\operatorname{Re}(\tilde{G}_1(\tau)),\ \tau\in\Gamma_1\\ i\operatorname{Im}g_2(\tau),\ \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix}, \tag{41}$$

$$\sum_{k=1}^{m}2\operatorname{Im}(C_k)\int_{a_k}^{b_k}\frac{\tau^{j-1}}{R(\tau)}d\tau+\int_{\Gamma}\frac{\tilde{l}_2(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)}d\tau=0,\ \tilde{l}_2(\tau)=\begin{Bmatrix}2\operatorname{Im}(\tilde{G}_1(\tau)),\ \tau\in\Gamma_1\\ -i\operatorname{Re}g_2(\tau),\ \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix}, \tag{42}$$

$$\tilde{G}_1(\tau)=2i\int_{a_k}^{\tau}g_1(\tau)d\tau,\ \tau\in(a_k,b_k),\ \text{(j=1,2,…,m)}$$

Умножим (42) на мнимую единицу и сложим с (41). Тогда получим:

$$\sum_{k=1}^{m}2C_k\int_{a_k}^{b_k}\frac{\tau^{j-1}}{|R(\tau)|}d\tau+i\int_{\Gamma}\frac{\tilde{l}(\tau)\tau^{j-1}}{R(\tau)}d\tau=0,\ \tilde{l}(\tau)=\begin{Bmatrix}2\tilde{G}_1(\tau),\ \tau\in\Gamma_1\\ g_2(\tau),\ \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix},\text{(j=1,2,…,m)} \tag{43}$$

Определитель системы уравнений (43) относительно $2C_k$ отличен от нуля. В самом деле, составляя в противном случае линейную комбинацию его строк с произвольными действительными $\lambda_i(i=1,...,m-1)$, не равными нулю одновременно, приходим к равенствам:

$$\int_{a_k}^{b_k}\frac{P_{m-1}(\tau)}{|R(\tau)|}d\tau=0,\quad P_{m-1}(\tau)=\sum_{k=0}^{m-1}\lambda_k\tau^k \tag{43a}$$

Для выполнения полученных соотношений (43а) многочлен $P_{m-1}(\tau)$ должен иметь, по крайней мере, по одному нулю в каждом из m промежутков (a_k, b_k), что возможно лишь при $\lambda_i=0,(i=1,...,m-1)$. Следовательно, система (43) имеет единственное решение. Определив из (43) C_k, мы удовлетворим условию разрешимости (40) или двум условия (41), (42). С учетом (32) - (34), (38), (39) голоморфный вектор $\Phi=(\Phi_1,\Phi_2)^T$ представится в виде:

$$\Phi_1(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)},\ \Phi_2(z)=\frac{R(z)}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{h_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-z)},$$
$$h_1(\tau)=\begin{Bmatrix}2G_1(\tau),\ \tau\in\Gamma_1\\ g_2(\tau),\ \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix},\ h_2(\tau)=\begin{Bmatrix}-2\bar{G}_1(\tau),\ \tau\in\Gamma_1\\ \bar{g}_2(\tau),\ \tau\in\Gamma_2\end{Bmatrix} \tag{44}$$

Зная (44), по формулам (23) можно определить значения U, η, а затем их производные по z, s (комплексные компоненты номинального тензора напряжений и градиент тензора движения (равновесия)). Отметим, что U_z, U_s, η_z, η_s принадлежат классу почти ограниченных функций, т.е на контуре Γ в точках разрыва они обращаются в бесконечность интегрируемого порядка.

Определим значения U, η на границе Γ, используя (44). В результате будем иметь:

$$U\big|_{\Gamma} = U(\tau_0) = \frac{R(\tau_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)}, \quad \frac{E}{3}\eta\bigg|_{\Gamma} = \frac{R(\tau_0)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)} \qquad (45)$$

Из соотношений (45) следует:

$$U\big|_{\Gamma_2} = U(\tau_0) = \frac{R(\tau_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)}, \quad \frac{E}{3}\eta\bigg|_{\Gamma_1} = \frac{R(\tau_0)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)} \qquad (46а)$$

$$U\big|_{\Gamma_1} = G_1(\tau_0)\big|_{\Gamma_1} = \frac{R(\tau_0)}{2\pi i}\int_{\Gamma_2}\frac{g_2(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)}, \quad \frac{E}{3}\eta\bigg|_{\Gamma_2} = g_2(\tau_0)\big|_{\Gamma_2} = \frac{R(\tau_0)}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{G_1(\tau)d\tau}{R(\tau)(\tau-\tau_0)} \qquad (46б)$$

Соотношения (46а) определяют неизвестные значения $G_1\big|_{\Gamma_2}$, $g_2\big|_{\Gamma_1}$, соответственно, через $g_2\big|_{\Gamma_2}$, $G_1\big|_{\Gamma_1}$. Соотношения (46б) связывают между собой силовые $G_1\big|_{\Gamma_1}$ и кинематические граничные условия $g_2\big|_{\Gamma_2}$, заданные на разных частях границы области, и определяют область изменения граничных условий, которые гарантируют равновесие упругого неогуковского тела.

Таким образом, решение смешанной краевой задачи для неогуковского материала описывается в замкнутом виде при известном конформном отображении односвязной области на верхнюю полуплоскость.

Отметим, что найденные функции U_z, U_s, η_z, η_s для смешанной краевой задачи не всегда принадлежат классу почти ограниченных функций. Чтобы это понять, достаточно рассмотреть следующую смешанную краевую задачу. Пусть на контур линейно-упругого тела действует непрерывная система сил, которая вместе с объемными (достаточно гладкими) силами образуют самоуравновешенную нагрузку. Решив первую краевую задачу, определим η на Γ. Теперь разобьем границу Γ на две произвольные части $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На Γ_1 зададим усилия, такие же, как и в первой краевой задаче. На Γ_2 зададим найденные решения $\frac{E}{3}\eta$ первой краевой задачи. Теперь рассмотрим смешанную краевую задачу, с только что построенными граничными условиями. Тогда решение такой смешанной краевой задачи совпадает с решением первой краевой задачи, и непрерывно-дифференцируемо вплоть до границы области. Таким образом, несмотря на то, что граничные условия для смешанной краевой задачи имеют разрывы, само ее решение непрерывно-дифференцируемо вплоть до границы области. Граничные условия смешанной краевой задачи, которые обеспечивают непрерывную дифференцируемость ее решения вплоть до границы области, можно назвать самосогласованными. Для самосогласованных граничных условий решение смешанной краевой задачи эквивалентно решению определенной первой или определенной второй краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М, 1948, 211с.
[2] Новожилов В.В. Теория упругости. Л, 1958,369с.
[3] Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М, 1965, 455с.
[4] Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М,1980, 512с.
[5] Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М, 1963,311с.
[6] Трелоар Л. Введение в науку о полимерах. М, 1973, 238с.
[7] Трусдел К. Первоначальный курс механики сплошных сред. М, 1975, 592с.
[8] Черных К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах. Л.: Машиностроение,1986, 336с.
[9] Черных К.Ф. Введение в физически и геометрически нелинейную теорию трещин. М: Наука - Физматлит, 1996, 287с.

[10] Martynov N.I. Boundary value problems for neo - hoorean manerial in nonline elasticity // Science and world.- 2014.- № 9(13).-P. 25-31.
[11] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М: Наука, 1988,509с.
[12] Монахов В.Н. Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. М.: Наука, 1977, 424 с.
[13] Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М, 1970, 379с.
[14] Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука,1977, 640с.
[15] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. М.:ф.-м.л.,1962,599с.

REFERENCES

[1] Novozhilov V.V. Osnovy nelinejnoj teorii uprugosti. M, 1948, 211 s (in Russ).
[2] Novozhilov V.V. Teorija uprugosti. L, 1958, 369 s (in Russ).
[3] Grin A., Adkins Dzh. Bol'shie uprugie deformacii i nelinejnaja mehanika sploshnoj sredy. M, 1965, 455 s .
[4] Lur'e A.I. Nelinejnaja teorija uprugosti. M, 1980, 512 s (in Russ).
[5] Prager V. Vvedenie v mehaniku sploshnyh sred. M, 1963, 311 s.
[6] Treloar L. Vvedenie v nauku o polimerah. M, 1973, 238 s.
[7] Trusdel K. Pervonachal'nyj kurs mehaniki sploshnyh sred. M, 1975, 592 s.
[8] Chernyh K.F. Nelinejnaja teorija uprugosti v mashinostroitel'nyh raschetah. L.: Mashinostroenie, 1986, 336s (in Russ).
[9] Chernyh K.F. Vvedenie v fizicheski i geometricheski nelinejnuju teoriju treshhin. M: Nauka , Fizmatlit, 1996, 287 s (in Russ).
[10] Martynov N.I. Boundary value problems for neo - hoorean manerial in nonline elasticity // Science and shhorld. 2014, № 9(13), P. 25-31.
[11] Vekua I.N. Obobshhennye analiticheskie funkcii. M: Nauka, 1988, 509 s(in Russ).
[12] Monahov V.N. Kraevye zadachi so svobodnymi granicami dlja jellipticheskih sistem uravnenij. M.: Nauka, 1977, 424 s (in Russ).
[13] Vekua N.P. Sistemy singuljarnyh integral'nyh uravnenij i nekotorye granichnye zadachi. M, 1970, 379s (in Russ).
[14] Gahov F.D. Kraevye zadachi. M.: Nauka, 1977, 640 s (in Russ).
[15] Mushelishvili N.I. Singuljarnye integral'nye uravnenija. Granichnye zadachi teorii funkcij i nekotorye ih prilozhenija k matematicheskoj fizike. M.:f.-m.l., 1962, 599 s (in Russ).

Дүрегей шекті мақсат материалдың неогуковского үшін майысқақтықтың нелинейной қағидасында

Н.И.Мартынов, М.А. Рамазанова
(Математиканың және математикалық модельдеудің институты МОН РК)

Тірек сөздер: майысқақ дене, неогуковский материал, статикалық шекті мақсат, кернеудің атқаратын қызметінің.

Аннотация Жиынтық тайқы деформацияның дүрегей статикалық шекті мақсатының шешімі үшін майысқақ, ара тағы көріністе ал- ара көлемді күш дала болатын неогуковского дене үшін. Ортақ шешім арқылы екі жалаңаш атқаратын қызметім жазып ал-, ал майысқақтықтың нелинейной қағидасының негізгі шекті мақсаттары үшін жалаңаш бағыттауыш үшін к Риманның-Гильберттің мақсат деген келтір-. Біріншінің (шекарада мехнаттар тапсырынды) және екінің (шекарада ауыспалылықтар тапсырынды) тынымдары шекті мақсаттардың мен көмек Шварца интегралының квадратураларда жазылады, қарамастан, ал дүрегей шекті мақсаттың, сияқты Келдыштың қабысуының мақсатының екі тынымының линиядағы әрекеті - талдағыш атқаратын қызметімнің қағидасының Седовасы. Белгіле-, не кернеудің және гради-ента қозғалыстың номиналды тензорының компоненты ортақ уақиғасында почти шектеулі атқаратын қызметімнің сыныбына қарайды. Көрсетілген, самосогласованными аталған шекаралық шарттар өмір сүретін, при нешінші толассыз-сарала- облыстың шешімі шейін дейін шекараның.

.

Сведения об авторах

Мартынов Николай Иванович, д.ф.-м.н., ГНС Института математики и математического и моделирования КН МОН РК, г. Алматы, ул. Достык, д. 71, кв. 5, дом. тел. 2915186, моб. 87023099821, nikmar50@mail.ru .
Рамазанова Мира Асеновна, к.ф.-м.н., ВНС Института математики и математического и моделирования КН МОН РК, моб. 87473349256.

Поступила 14.04.2015 г.