REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 2224-5227
Volume 3, Number 301 (2015), 126 – 130

A new method of exclusion «small denominators» in the problem of resonant satellites

M. D. Shinibaev[1], A. A. Bekov[1], E. K. Akinbekov[2], B. N. Rahimzhanov[3], D.T. Berdaliev[4], M. S. Umirbekov[4]

[1] JSC "National Center of Space Researches and Technologies", Almaty, Kazakhstan,
[2] South-Kazakhstan State University after M.Auezov, Shymkent, Kazakhstan,
[3]Kokshetausky State University after Sh.Ualikhanov, Kokshetau, Kazakhstan,
[4] South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan.
E-mail: bekov@mail.ru

Key words: resonance, orbits, small denominator, the gravitational field, the force function, Earth satellite, polar coordinates.

Abstract. Here we have to uncover the essence of the problem will require some information from the mechanics, and unpopular among mathematicians, and some mathematical concepts, little known mechanics [1,2,3]. Let us consider the "small denominators". Astronomers have long noticed that the resonance phenomena associated with commensurable frequencies of the interacting movements lead to "small denominators" and great mathematical difficulties [2], since the expression:

$$m\omega_1 + n\omega_2 \approx 0$$

goes denominator in the perturbation series with solution of the form

$$\sum_{m,n\neq 0} \frac{a_{mn}}{(m\omega_1 + n\omega_2)} e^{i(m\omega_1+n\omega_2)t} \tag{1}$$

where m, n-integers, , ω_1 *and* ω_2 - the frequencies of motion, t - time, a_{mn} - const,

$(m\omega_1 + n\omega_2)$ – «small denominator».

It is clear that the exact commensurability frequency $m\omega_1 + n\omega_2$ method of solution in the form of (1) does not apply, and in acute commensurability $(m\omega_1 + n\omega_2) = \chi^\alpha$, where $\alpha \geq 1$, χ-small parameter of the solution (1) leads to terms with an exceptionally large amplitude, that is to resonance.

Henri Poincaré [3] wrote "The difficulties encountered in celestial mechanics due to the existence of small divisors and approximate commensurability of the mean motions are related to the very nature of things and cannot be bypassed."

Now answer the question: "What is the problem of stability?"

First and challenging research problems of this kind (and still unsolved) was the question of the stability of planetary orbits.

It was necessary to answer the question: "Do not cause small perturbations of the planets with each other, after a sufficiently long time, a collision or goes to infinity?"

The main difficulty in these studies is associated with the divergence of the perturbation series (1) because of the small denominators $m\omega_1 + n\omega_2$.

In the context of the above, the theme developed in the article is relevant in all areas of science where there are resonances and small denominators.

УДК 531.1+629.195

Новый метод исключения «малых знаменателей» в задаче о движении резонансных ИСЗ

М. Д. Шинибаев[1], А. А. Беков[1], Е. К. Акинбеков[2], Б.Н.Рахимжанов[3], Д.Т.Бердалиев[4], М.С.Умирбеков[4]

[1] АО «Национальный Центр Космических Исследований и Технологий», Алматы, Казахстан,
[2] Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент, Казахстан,
[3]Кокшетауский государственный университет им. Ш.Уалиханова, Кокшетау, Казахстан,
[4] Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан.
E-mail: bekov@mail.ru

Ключевые слова: резонанс, орбита, малый знаменатель, поле тяготения, силовая функция, спутник Земли, полярные координаты.

Аннотация. Здесь нам для раскрытия сути задачи потребуется некоторые сведения из механики, непопулярные среди математиков, и некоторые математические понятия, мало- известные механикам [1,2,3]. Остановимся на «малых знаменателях». Астрономы давно заметили, что резонансные явления, связанные с соизмеримостью частот взаимодействующих движений, приводят к «малым знаменателям» и большим математическим трудностям [2], так как, выражение:

$$m\omega_1 + n\omega_2 \approx 0$$

выходит знаменателем в ряды теории возмущений, имеющие решение вида

$$\sum_{m,n\neq 0} \frac{a_{mn}}{(m\omega_1 + n\omega_2)} e^{i(m\omega_1 + n\omega_2)t} \tag{1}$$

где m, n-целые числа, ω_1 и ω_2-частоты движений, t- время, a_{mn}- const, $i = \sqrt{-1}$, $(m\omega_1 + n\omega_2)$- «малый знаменатель».

Ясно, что при точной соизмеримости частот $\mathrm{m}\omega_1 + \mathrm{n}\omega_2 = 0$ метод решения в виде (1) неприменим, а при острой соизмеримости $(\mathrm{m}\omega_1 + \mathrm{n}\omega_2) = \chi^\alpha$, где $\alpha \geq 1$, χ-малый параметр решения (1) приводит к членам с исключительно большой амплитудой, то есть к резонансу.

Анри Пуанкаре [3], писал «Трудности, встречающиеся в небесной механике вследствие существования малых делителей и приблизительных соизмеримостей средних движений, связаны с самой природой вещей и не могут быть обойдены».

Теперь ответим на вопрос: «Что такое проблемы устойчивости?»

Первой и стимулирующей исследования задачей этого рода (не решенной и поныне) был вопрос об устойчивости планетных орбит.

Надо было ответить на вопрос: «Не вызовут ли малые возмущения планет друг с другом, через достаточно большое время, столкновение или уход в бесконечность?»

Основная трудность, в этих исследованиях связана с расходимостью рядов теории возмущений (1) из-за малых знаменателей $m\omega_1 + n\omega_2$.

В контексте изложенного, тема разрабатываемая в статье актуальна во всех областях науки, где есть резонансы и малые знаменатели.

Пусть ИСЗ совершает неуправляемое движение (в околоземном пространстве) в поле тяготения Земли и Луны, тогда силовая функция задачи Хилла в геоцентрических координатах имеет вид [4]:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu r^2 + \frac{1}{2}(\nu' - \nu) z^2 , \tag{2}$$

где μ - гравитационный параметр, ν и ν' - постоянные параметры, обеспечивающие действительное движение перигея и узла орбиты, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, x, y, z -координаты ИСЗ.

Дифференциальные уравнения движения запишутся в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3}$$

Разлагая U в ряд Фурье, после интегрирования получим решение типа (1), то есть, переменные *x,y,z* приводят к малым знаменателям.

Дифференциальные уравнения (3) с учетом (2)допускают интеграл площадей в основной плоскости

$$x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}=C, \tag{4}$$

и интеграл энергии

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=2(U+h), \tag{5}$$

где C, h - соответственно постоянные интеграла площадей и интеграла энергии.

Опираясь на интегралы (4), (5) перейдем от геоцентрических координат к переменным Хилла, тогда (3) примет вид [4]:

$$\frac{d^2W}{d\vartheta^2}+\left(1+\frac{\alpha}{W^4}\right)W-\frac{1}{\left(1+S^2\right)^{\frac{3}{2}}}=0, \tag{6}$$

$$\frac{d^2S}{d\vartheta^2}+\left(1+\frac{\beta}{W^4}\right)S=0 \tag{7}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\mu^2}{C^3}W^2 \tag{8}$$

где

$$\alpha=\frac{\nu C^6}{\mu^4},\quad \beta=\frac{(\nu-\nu')C^6}{\mu^4},\quad \alpha=const,\quad \beta=const$$

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mu}{C^2}W,\quad W=\frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\rho},\quad S=\frac{z}{\rho},\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}$$

ρ-проекция радиус-вектора $\overline{r}$ на плоскость $0xy$ (экватор Земли), S-тангенс широты, ϑ-долгота.

Пусть орбита ИСЗ имеет малый наклон к плоскости $0xy$, тогда $z\neq 0,\ z^2\approx 0,\ S\neq 0,\ S^2\approx 0$ и дифференциальное уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d^2W}{d\vartheta^2}+\left(1+\frac{\alpha}{W^4}\right)W-1=0 \tag{9}$$

или

$$d\vartheta=\frac{WdW}{\sqrt{-W^4+2W^3+HW^2+\alpha}}, \tag{10}$$

где H -постоянная интегрирования

$$H=\frac{2hC^2}{\mu^2}.$$

В случае эллиптического типа движения [4] $\alpha>0,\quad H<0$, поэтому (10) примет вид:

$$d\vartheta=\frac{WdW}{\sqrt{-W^4+2W^3-HW^2+\alpha}}, \tag{11}$$

Для действительных движений подкоренной полином должен быть положительным

$$G_4(W) = -W^4 + 2W^3 - HW^2 + \alpha > 0, \qquad (12)$$

В соответствие с теоремой Декарта [5] три смены знака и отсутствие одного

члена в подкоренном полиноме, дает наличие трех положительных и одного отрицательного корня, пусть $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4$, где α_4-отрицательный корень. Подкоренной полином положителен на двух интервалах:

$$\text{A) } \alpha_4 < W < \alpha_3, \qquad \text{B) } \alpha_2 < W < \alpha_1. \qquad (13)$$

В соответствии с [5] справедливо следующее преобразование (11) к нормальной форме Лежандра на интервале А:

$$d\vartheta = \mu_0 \frac{W d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$W = \frac{\alpha_4\alpha_{31} + \alpha_1\alpha_{43}\sin^2\varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{43}\sin^2\varphi}, \quad \sin^2\varphi = \frac{\alpha_{31}}{\alpha_{43}} \cdot \frac{W-\alpha_4}{\alpha_1 - W} \qquad (14)$$

где

$$0 < k^2 < 1, \quad \alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i, \quad (k, i = 1,2,3,4), \quad k^2 = \frac{\alpha_{43}\alpha_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{42}},$$

$$\mu_0 = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31}\alpha_{42}}}, \quad \text{при } W = \alpha_4, \quad \varphi = 0; \quad \text{при } W = \alpha_3, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Видимо на нерезонансном участке движения $\alpha_4 \le W \le \alpha_3$ и $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

На резонансном участке движения из выражения $W = \frac{C^2}{\mu} \cdot \frac{1}{\rho}$ следует, что $\rho \to \infty, W \to 0$

Теперь из (14), найдем угол φ, который соответствует резонансу:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{\alpha_{31}(-\alpha_4)}{\alpha_{43}\alpha_1}}, \qquad (15)$$

где $\alpha_4 < 0$.

Таким образом, переменные Хилла W, ϑ, φ

дают возможность исключения «малых знаменателей» в задаче о движении резонансных ИСЗ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Журавлев С.Г Движение резонансных искусственных спутников Земли // Итоги науки и техники. - М., 1980. – Т.15. – С. 114-158.

[2] Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // УМН.- 1963. - Т.XYIII , вып.6(114), ноябрь-декабрь. – С. 92-191.

[3] Пуанкаре А. О кривых определяемых дифференциальными уравнениями. - М.-Л.: Гостехиздат, -1947.

[4] Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы.- 2001.-128с.

[5] Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 973. - 832с.

REFERENCES

[1] Zhuravlev S.G Dvizheniye rezonansnykh iskusstvennykh sputnikov Zemli // Itogi nauki i tekhniki. - M., 1980. - T.15. - S. 114 - 158. (in Russ.).

[2] Arnol'd V.I. Malyye znamenateli i problemy ustoychivosti dvizheniya v klassicheskoy i nebesnoy mekhanike // UMN. – 1963. - T. XYIII, vyp. 6(114), noyabr-dekabr. - S.92-191. (in Russ.).

[3] Puankare A. O krivykh opredelyayemykh differentsial'nymi uravneniyami. - M.-L.: Gostekhizdat,1947. (in Russ.).

[4] Shinibayev M.D. Postupatel'noye dvizheniye passivno gravitiruyushchego tela v tsentral'nom i netsentral'nom pole tyagoteniya, Almaty. - 2001.-128s. (in Russ.).

[5] Korn G. i Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov. - M.: Nauka, 1973. - 832s. (in Russ.).

Резонанстық жасанды Жер серігінің (ЖЖС) қозғалысындағы «кіші бөлгіштерді» жою жаңа әдісі

М.Д.Шыныбаев[1], А.А.Беков[1], Е.К.Акинбеков[2], Б.Н.Рахимжанов[3], Д.Т.Бердалиев[4], М.С.Умирбеков[4]
E-mail: bekov@mail.ru
[1] «Ұлттық Ғарыштық Зерттеулер мен Технологиялар Орталығы» АҚ, Алматы, Қазақстан,
[2] М.Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,
[3] Ш.Уалиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті, Көкшетау, Қазақстан,
[4] Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан.

Тірек сөздер:резонанс, орбита, кіші бөлгіш, тартылыс өрісі, күш функциясы, :ер серігі, полярлық координаталар.

Аннотация. Есептің мағынасын түсіну үшін бізге механикадан математиктерге ұнамайтын және математикадан механиктер зерсалмайтын түсініктер қажет болады [1,2,3]. «Кіші бөлшектерге» тоқтайық. Астрономдар басқалардан ұзақ уақыт бұрын, резонанстық қозғалыстар себебін «Кіші бөлшектермен» байланыстырып және олар өте үлкен математикалық қиындықтар тудыратынын байқаған [2], өйткні кіші бөлгіш:

$$m\omega_1 + n\omega_2 \approx 0$$

ғаламшар теорияларындағы қатарларда бөлгіш ретінде кіреді:

$$\sum_{m,n\neq 0} \frac{a_{mn}}{(m\omega_1 + n\omega_2)} e^{i(m\omega_1 + n\omega_2)t} \qquad (1)$$

мұнда m, n-бүтін сандар, ω_1 и ω_2-ғаламшарлардың бұрыштық жылдамдықтары, t- уақыт, a_{mn}- const, $i = \sqrt{-1}$, $(m\omega_1 + n\omega_2)$- «кіші бөлгіш».

Егер тура теңдік орнатылса $\mathrm{m}\omega_1 + \mathrm{n}\omega_2 = 0$ онда (1) түрдегі шешім жарамсыз болады. Ал бұрыштықжылдамдықтар өткір өлшемдес болса $(\mathrm{m}\omega_1 + \mathrm{n}\omega_2) = \chi^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$, χ-кіші параметр, онда (1) шешім өте үлкен амплитудалы мүшелерге алып келеді, басқаша айтқанда резонанс орыналады.

Бұл жағдай туралы Анри Пуанкаре [3], былай жазған: «Аспан механикасындағы кіші бөлгіштер және өткір өлшемдестік табиғатпен ұштасатын шешілмейтін мәселе».

Зерттеулер ішінде осы мәселені шешуге ықпал етуші проблема, ол ғаламшардың орынтылықтығы проблемасы (бұл осы күндерде тапқан жоқ).

Ғаламшардың аз ықпалдық әсерлесулері,айтарлықтай көп уақыт өткенде, кандай нәтиже береді, олар түйісеріме немесе бір бірінен шексіз алысқа ұмтылады ма?

Бұл сұраққа жауап алуға тағыда «кіші бөлшектер» $m\omega_1 + n\omega_2$ кедергі етеді.

Осы айтылғандар аясында мақаладағы зерттеулер өте маңызды .

Сведения об авторах:

Беков Аскар Абдул-Халыкович,
доктор физ.-мат. наук, профессор

Адрес:
АО «НЦКИТ» , г. Алматы,
ул. Шевченко, 15,
050010, Казахстан

т. 291-58-81
т. 8-7051911162
e-mail: bekov@mail.ru

Поступила 18.03.2015 г.