**REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**
ISSN 2224-5227

Volume 3, Number 301 (2015), 138 – 142

USING OF DIFFERENTIAL EQUATION IN THE SOLUTION OF PROBLEMS IN PHYSICS

[1]Turmambekov T.A., [2]Saidakhmetov P.A., [2]Abdraimov R.T., [2]Kozybakova G.N.

[1]Ahmet Yasavi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan;
[2]M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Keywords: a mathematical model, elliptic integral, differential equations, physics.

Abstract. The mathematical apparatus of modern mathematics course at school and university should be as used in physics and a wealth of factual material physics course should be one of the levers of formation of mathematical concepts. This paper discusses the stages of building a mathematical model of a physical problem, as well as an example of the use of differential equations in the description of the resulting model. The solution of the differential equation describing the oscillations of a simple pendulum, is given. The resulting equation describes the diverse physical processes, when describing their values, are subject to the given equation. It is stressed that the solution of this equation in terms of elementary functions is possible only in the case of small quantities changing. At the end the stages of solving the problems of physics by means of differential equations are regarded. These steps correspond to steps of constructing a mathematical model.

УДК:

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ФИЗИКИ.

[1]Турмамбеков Т.А, [2]Саидахметов П.А, [2]Абдраимов Р.Т.,[2]Козыбакова Г.Н.

[2]Международный Казахско-Турецкий университет им. Ахмета Ясави, Туркестан, Казахстан;
[2]Южно-Казахстанский университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: математическая модель, эллиптический интеграл, дифференциальное уравнение.

Аннотация. Математический аппарат современного курса математики в школе и ВУЗе должен быть максимально использован в физике, а богатый фактический материал курса физики должен служить одним из рычагов формирования математических представлений. В данной работе рассматриваются этапы построения математической модели физической задачи, а также пример использования дифференциальных уравнений при описании полученной модели. Приведено решение дифференциального уравнения, описывающего колебания математического маятника. Полученное уравнение описывает многообразные физические процессы, если характеризующие их величины подчиняются данному уравнению. Подчеркнуто, что решение данного уравнения в элементарных функциях возможно только в случае малости изменяющейся величины. В заключении рассмотрены этапы решения задач физики с помощью дифференциальных уравнений. Данные этапы соответствуют этапам построения математической модели.

Математический аппарат, который широко используется при изложении курса физики, играет исключительную роль, как при изложении курса физики, так и при решении задач физики. Все законы физики описываются на математическом языке, т.е. в форме математических моделей. Для описания фундаментальных законов механики и закона всемирного тяготения на языке математики И.Ньютон наряду с Г.Лейбницем разработал дифференциальное и интегральное исчисления, ставшие основой математического аппарата физики.

Можно сказать, что решение любой физической задачи теоретическим путем есть математическое моделирование. Математическая модель должна правильно передавать существенные свойства физических объектов, которые определяют описываемое явление. Правильность выбора свойств определяется только опытом, который определяет правильность построенной на основе модели физической теории. Создание математической модели любой задачи физики состоит из трех основных этапов:

1) построение математической модели, имеющей структурное сходство с явлением;

2) изучение этой модели и получение решения полученной задачи;

3) приложение полученных результатов к задачам физики

При построении математической модели явления необходимы его идеализация и формализация: оставляются только существенные условия (параметры) задачи. Рассмотрим создание математической модели при описании колебаний маятника. В первом приближении пренебрежем силами трения. Если пренебречь размерами тела, подвешенного на нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала с массой тела, то возникает модель, называемая в физике ***математическим маятником*** [1]. Если отклонить тело на угол α (рис.1.) от вертикальной линии, то оно под действием силы тяжести $m\vec{g}$ и натяжения нити $\vec{T}$ будет совершать колебания в вертикальной плоскости.

Для описания движения этой модели следует записать уравнение движения (2-ой закон Ньютона)

$$\vec{F}_p = \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}. \qquad (1)$$

Запишем полученное векторное уравнение в проекциях на оси ОХ и ОУ, которые соответственно направим по касательной к траектории движения и вдоль нити (рис. 1):

$$\text{ОХ: } mg\sin\alpha = -ma, \qquad (2)$$

$$\text{ОУ: } mg\cos\alpha - T = 0. \qquad (3)$$

Под влиянием тангенциальной составляющей силы тяжести, направленной вдоль оси ОХ, тело совершает колебания. Знак «минус» в формуле (2) означает, что сила направлена в сторону, противоположную отклонению маятника. Другая составляющая силы тяжести, нормальная, направлена вдоль нити (оси ОУ), уравновешивается силой натяжения нити (см. (3)). Уравнение (2) можно записать в виде

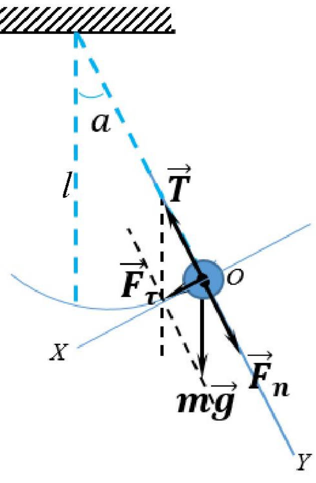

Рисунок 1. Математический маятник.

$$x'' + g\sin\frac{x}{l} = 0, \qquad (4)$$

поскольку для угла α верно соотношение

$$\alpha = x/l, \qquad (5)$$

где x – длина дуги окружности, радиус которой равен l, длине нити. Дифференциальное уравнение (4) не содержит явным образом независимую переменную t. Для решения такого уравнения удобно ввести функцию z(x):

$$z = x' \equiv \frac{dx}{dt}. \qquad (6)$$

Тогда уравнение (4) примет вид

$$z\frac{dz}{dx} = -g\sin\frac{x}{l}.$$

Данное уравнение после несложных преобразований приводится к виду

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{gl}\sqrt{\sin\frac{x_m + x}{2l}\sin\frac{x_m - x}{2l}}. \qquad (7)$$

или

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{gl}\sqrt{\sin^2\frac{x_m}{2l} - \sin^2\frac{x}{2l}}. \qquad (8)$$

В уравнениях (6) и (7) учтено, что в точке максимального отклонения маятника x_m от положения равновесия скорость маятника равна нулю:

$$x'(x = x_m) = z(x = x_m) = 0.$$

Разделив переменные и полагая, что $x \neq x_m$ и $x(t = 0) = 0$, из уравнения (7) получаем равенство, определяющее зависимость x от t

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\sin\frac{x_m + x}{2l}\sin\frac{x_m - x}{2l}}} = 2\sqrt{gl}t. \qquad (9)$$

Интеграл стоящий слева не берется в элементарных функциях. Он сводится к эллиптическому интегралу первого рода [2].

Задача упрощается, если углы отклонения маятника от положения равновесия малы. Тогда в уравнение (7) синусы углов можно заменить самими углами

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{x_m^2 - x^2}. \qquad (10)$$

Уравнение (9) преобразуется в уравнение

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x_m^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}t, \qquad (11)$$

из которого, используя таблицу основных интегралов [2], находим

$$x = x_m \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t. \qquad (12)$$

Путем подстановки убеждаемся, что функция (12) есть решение уравнения (10) при любом значении t, а также является приближенным решением уравнением (9). Функция (12) показывает, что маятник совершает гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

который не зависит от амплитуды колебаний.

Зависимость угла отклонения маятника α от времени t аналогичный вид

$$\alpha = \alpha_m \sin\sqrt{\frac{g}{l}}t. \qquad (13)$$

Поскольку для угла отклонения от положения равновесия при выполнении равенства (5) можно написать уравнения аналогичные уравнениям (7) и (8)

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin\frac{\alpha_m+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha_m-\alpha}{2}}, \qquad (14)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha_m}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{l}}. \qquad (15)$$

Решением данных уравнений (14, 15) в случае малых значений угла α, когда справедливо приближенное равенство $\sin\alpha \approx \alpha$ является функция (13). Такое приближение справедливо для углов порядка до 30°; при этом величина $\sin\alpha$ отличается от α не более чем на 4,7%. Это позволяет отсчитывать координату x по горизонтальному направлению, т.е. заменить дугу хордой.

Зависимость угла отклонения α от времени t, задаваемая уравнениями (14) и (15), можно получить, используя закон сохранения энергии при вращательном движении,

$$\frac{I\alpha'^2}{2} = mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_m).$$

Здесь $I = ml^2$ – момент инерции маятника, α_m – максимальное значение угла отклонения. После несложных преобразований данное уравнение можно легко свести к уравнению (14) или (15).

Записав основное уравнение динамики вращательного движения для описания движения маятника, получим дифференциальное уравнение для определения зависимости угла отклонения α от времени t

$$\alpha'' + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0, \qquad (16)$$

решением которого является формула (13).

Из рассмотренного примера можно сделать следующий вывод. Пусть величина x, описывающая некоторый физический процесс, подчиняется дифференциальному уравнению

$$x'' + \lambda x = 0. \qquad (17)$$

Здесь $\lambda > 0$, а значение изменяющейся величины x мало. Следовательно, в уравнении (17) вторая производная изменяющейся величины x'' пропорциональна малому изменению величины x со знаком минус. Тогда данная величина совершает колебания по закону синуса или косинуса в зависимости от начальных условий (гармоническому закону)

$$x = x_m \sin\sqrt{\lambda}t. \qquad (18)$$

Период колебаний величины x определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\lambda}}.$$

Легко заметить, что решение задач физики с помощью дифференциальных уравнений распадается на три этапа, соответствующие этапам построения математической модели.

1 этап. Составление дифференциального уравнения, связывающего величины, которые описывают явление.

На этом этапе проводятся следующие действия:

– устанавливают величины, определяющие описываемое явление, и выявляют физические законы, связывающие их;

– выявляют независимую переменную и функцию этой переменной, которую следует определить;

– исходя из условий задачи, определяют начальные условия;

– выражают все фигурирующие в условии задачи величины через независимую переменную, искомую функцию и ее производные;

– исходя из условий задачи и физического закона, которым подчиняется данный процесс, составляют дифференциальное уравнение.

2 этап. Решение составленного дифференциального уравнения:

– определяют тип дифференциального уравнения;

– находят общее решение или общий интеграл дифференциального уравнения;

– по начальным условиям находят частное решение.

3 этап. Исследование полученного уравнения:

– исследуют полученное решение;

– обобщают полученное решение на другие физические процессы.

Полученный результат допускает обобщение. Процессами, описывающимися уравнением (18), являются колебания груза на пружине, колебательный контур и любые малые колебания. Отметим, что необязательно независимой переменной должно быть время. Таким образом, разнообразные физические процессы описываются одним дифференциальным уравнением, а величины, характеризующие их, изменятся согласно гармоническому закону.

ЛИТЕРАТУРА

[1]Сивухин Д. В. Общий курс физики. Учеб. пособие: для вузов. В 5 т. Т. I. Механика. – 4-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2005, 560 с.

[2]Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.2, М.: Физматлит, 2001, 810 с.

REFERENCES

[1] Sivukhin D.V. General course of physics. Proc. Benefit: for schools. In 5 V. V. I. Mechanics. - 4th ed., Stereotypes. - M .: FIZMATLIT; Publ MIPT, 2005, 560 p.

[2] Fikhtengolts G.M. Course of differential and integral calculus. Volume 2, M .: FIZMATLIT, 2001, 810 p.

Физикалық есептерді шығаруда дифференциалдық теңдеулерді қолдану

[1]Тұрмамбеков Т.А, [2]Саидахметов П.А, [2]Абдраимов Р.Т.,[2] Қозыбақова Г.Н.

[1]А. Яссауи атындағы Халықаралық Қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан;
[2]М. .Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Тірек сөздер: математикалық модель, элиптикалық интеграл, дифференциалды теңдеу, математикалық маятник, математикалық аппарат.

Аннотация. Қазіргі заманның математика курсындағы математикалық аппараттар мектептегі және ЖОО-дағы физикада максимал пайдалану керек, ал физика курсының бай нақтылы материалы математикалық болжамды қалыптастырудың бірден бір тірегі болып табылуы тиіс. Бұл жұмыста физикалық есептердің математикалық модельдерін құру кездері, сонымен қатар, алынған модельді сипаттауда дифференциалдық тендеулерді пайдалану қарастырылады. Математикалық маятниктің тербелісін сипаттайтын дифференциалдық теңдеуді шешу келтірілген. Егер әртүрлі физикалық процеске қатысты шамалар берілген теңдеулерге бағынса, онда аталған теңдеу осы процестерді сипаттайды. Элементар функцияда берілген теңдеудің шешімі өзгеретін шаманың өте аз жағдайында ғана мүмкін екендігі нақты көрсетілген. Қорытындысы, физика есептерін диференциалдық теңдеудің көмегімен шешудің кезеңдері қарастырылған. Бұл кезеңдер математикалық модельді құру кездеріне сәйкес келеді.

Тұрмамбеков Төребай Абдрахманұлы ф.-м.ғ.д. профессор Қ.А. Яссауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті	**Турмамбеков Торебай Абдрахманович д.ф.-м.н. профессор** Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави	**Turmambekov Torebay Abdrakhmanovich d.p.s.-m. Professor** International Kazakh-Turkish university of the name H.A.Yesevi	tore_bai@mail.ru
Саидахметов Полат Аблатұлы ф.-м.ғ.к. кафедра менгерушісі М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті	**Саидахметов Полат Аблатыевич к.ф.-м.н. зав.кафедра** Южно-Казахстанский государственный университет имени М.Ауезова	**Saidahmetov Polat Ablatyevich c.p.s.-m. Head of Department** South-Kazakhstan state university of the name M.Auezov	timpf_ukgu@mail.ru
АБДРАИМОВ Рахымжан Тұрысбекұлы физика магистрі, М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті	**АБДРАИМОВ Рахымжан Турисбекович магистр физики,** Южно-Казахстанский государственный университет имени М.Ауезова	Abdraimov Rakhymjan, master's degree of physics, South-Kazakhstan state university of the name M.Auezov	Raha_ukgu@mail.ru

Поступила 18.03.2015 г.