**REPORTS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN**
ISSN 2224-5227
Volume 4, Number 302 (2015), 11– 15

UDC 531.1+629.195

PARAMETRIC RESONANCE IN THE ORBITAL MOTION OF THE SATELLITE

M.D. Shinibaev[1], A.A. Bekov[1], M.G. Gumabaev[2], A.S. Ramazanova[2], A.D. Niyazimbetov[2], E. Kurmuch[2], B.N. Rakhimzhanov[3]

[1] JSC «National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan,
[2]South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan
Syr-Dariya University, Zhetisay, Kazakhstan,
[3] Kokshetausky State University, named Sh.Ualikhanov, Kokshetau, Kazakhstan
E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

Key words: resonance, orbits, small denominator, the gravitational field, the force function, Earth satellite, polar coordinates.

Abstract. In the analysis of motion of space vehicles have to build a mathematical model adequate to the true nature of the movement. The simplest model of a space object finite size in case of its orbital motion can be represented by a material point, which contains the entire mass of the body. A more complex model of gravity bodies of finite size may consider the size of the body, homogeneity and heterogeneity in the distribution of mass in its volume. The model chosen depends on the setting of objectives. Overall, the model should be easier and should consider the main features of the real movement of the body that are essential for the selected application.

It is known that the problems of the mechanics of space flight in the majority cannot be solved in closed form in quadratures, therefore, apply various approximate methods for solving systems of differential equations of motion. One of the important methods of the study of perturbed motion of a space object associated with the construction of new types of intermediate orbits.

It is current interest for resonant and non-resonant satellites. The article investigates the parametric resonance in the orbital motion of the satellite. In the context of the above, the theme developed in the article is relevant in all areas of science where there are resonances and small denominators.

УДК 531.1+629.195

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В ОРБИТАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ИСЗ

М.Д. Шинибаев[1], А.А. Беков[1], М.Ж. Жумабаев[2], А.С. Рамазанова[2], А.Д. Ниязымбетов[2], Е. Курмуш[2], Б.Н. Рахимжанов[3]

[1]АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан;
[2]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт,
Шымкент, Казахстан;
[3]Кокшетауский государственный университет им. Ш.Уалиханова,
Кокшетау, Казахстан.

Ключевые слова: резонанс, орбита, малый знаменатель, поле тяготения, силовая функция, спутник Земли, полярные координаты.

Аннотация. При анализе движения космических аппаратов приходится строить математическую модель, адекватную истинной природе движения [1]. Простейшую модель космического объекта конечных размеров в случае его орбитального движения можно представить материальной точкой, в которой сосредоточена вся масса тела.

Более сложная модель тяготения тел конечных размеров может учитывать размеры тела, однородность и неоднородность распределения массы в его объеме. Выбор модели зависит от постановки задачи.

В целом модель должна быть по возможности проще и при этом должна учитывать основные особенности движения реального тела, которые существенны для выбранной постановки задачи.

Известно, что задачи механики космического полета в большинстве своем не могут быть решены в замкнутом виде в квадратурах, поэтому применяются различные приближенные методы решения систем дифференциальных уравнений. Один из актуальных методов изучения возмущенного движения космического объекта связан с построением новых типов промежуточных орбит. Это актуально как для резонансных, так и для нерезонансных спутников Земли.

В статье исследуется параметрический резонанс в орбитальном движении ИСЗ.

В контексте изложенного, тема, разрабатываемая в статье, актуальна во всех областях науки, где есть резонансы и малые знаменатели.

Дифференциальные уравнения орбитального движения ИСЗ в безразмерных переменных Хилла имеют вид [1]

$$\frac{d^2w}{d\upsilon^2}+\left(1+\frac{\alpha}{w^4}\right)w-\frac{1}{(1+s^2)^{3/2}}=0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2s}{d\upsilon^2}+\left(1+\frac{\beta}{w^4}\right)s=0, \quad \frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\mu^2}{C^3}w^2, \tag{2}$$

где

$$\alpha=\frac{\nu C^6}{\mu^4}, \quad \beta=\frac{(\nu'-\nu)C^6}{\mu^4}, \quad \alpha-const, \quad \beta-const, \tag{3}$$

ν, ν' – постоянные параметры, выбираемые так, чтобы движения узла и перигея орбиты совпадали с их действительными движениями;

$$\frac{1}{\rho}=\frac{\mu}{C^2}w, \quad w=\frac{C^2}{\mu}\cdot\frac{1}{\rho}, \quad \rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad s=\frac{z}{\rho}, \tag{4}$$

υ – истинная долгота, w – переменная Хилла, s – тангенс широты, здесь α, β, s и w – безразмерные величины.

Рассмотрим случай, когда орбита ИСЗ имеет малый наклон к плоскости Oxy, тогда $s^2 \approx 0$.

Теперь (1) имеет вид:

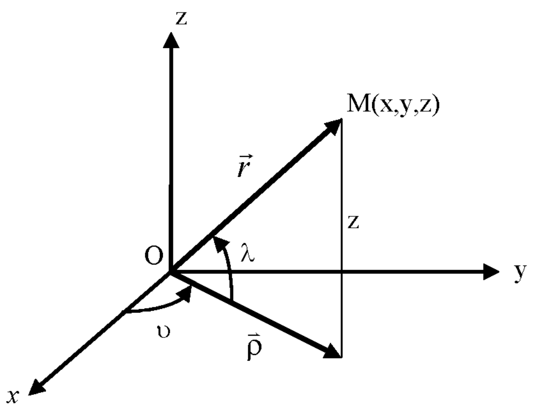
$$\frac{d^2w}{d\upsilon^2}+\left(1+\frac{\alpha}{w^4}\right)w-1=0, \tag{5}$$

или

$$d\upsilon=\frac{wdw}{\sqrt{-w^4+2w^3+Hw^2+\alpha}}, \tag{6}$$

где постоянная интегрирования

$$H=\frac{2hC^2}{\mu^2} \text{ – безразмерная величина.} \tag{7}$$



В случае эллиптического типа движения $\alpha > 0, H < 0$, поэтому (5) примет вид

$$d\upsilon = \frac{wdw}{\sqrt{-w^4 + 2w^3 - Hw^2 + \alpha}}, \qquad (8)$$

Для действительных движений подкоренной полином должен быть положительным,

$$G_4(w) = -w^4 + 2w^3 - Hw^2 + \alpha > 0. \qquad (9)$$

Согласно теореме Декарта [2], полином имеет три положительных и один отрицательный корень

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4,$$

α_4 – отрицательный корень.

Подкоренной полином положителен на двух интервалах:

А) $\alpha_4 < w < \alpha_3$;   В) $\alpha_2 < w < \alpha_1$.

На интервале А) справедливо следующее преобразование (8) к нормальной форме Лежандра [2]:

$$d\upsilon = \mu_* \frac{wd\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \qquad (10)$$

где

$$w = \frac{\alpha_4 \alpha_{31} + \alpha_1 \alpha_{43} \sin^2 \varphi}{\alpha_{31} + \alpha_{43} \sin^2 \varphi}; \qquad (11)$$

при $w = \alpha_4$, $\varphi = 0$; при $w = \alpha_3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $0 < k^2 < 1$, $\alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i$ $(k, i = 1,2,3,4)$,

$$k^2 = \frac{\alpha_{43}\alpha_{12}}{\alpha_{13}\alpha_{42}}, \quad \mu_* = \frac{2}{\sqrt{\alpha_{31}\alpha_{42}}},$$

k – модуль эллиптического интеграла 1-го рода, φ – промежуточная переменная.

Преобразуем (11), выделим k^2, разложим знаменатель по степеням k, тогда

$$w = (w_0 + k^2 w_{02} + k^4 w_{04}) + (k^2 w_{12} + k^4 w_{14}) \cos 2\varphi + k^4 w_{24} \cos 4\varphi, \qquad (12)$$

где

$$w_0 = \alpha_3, \; w_{01} = \frac{\alpha_{31}^2 \alpha_{42}}{2\alpha_{41}\alpha_{12}}, \quad w_{02} = \frac{3\alpha_{13}}{8} \cdot \left(\frac{\alpha_{31}\alpha_{42}}{2\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2, \; w_{12} = w_{01}, \; w_{14} = \frac{\alpha_{13}}{2} \cdot \left(\frac{\alpha_{31}\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2,$$

$$w_{24} = \frac{\alpha_{13}}{8} \cdot \left(\frac{\alpha_{31}\alpha_{42}}{\alpha_{41}\alpha_{21}} \right)^2.$$

Подставив (12) в (10), проинтегрировав от 0 до верхних пределов, имеем:

$$\upsilon = (\upsilon_{00} + k^2\upsilon_{02} + k^4\upsilon_{04})\varphi + (k^2\upsilon_{12} + k^4\upsilon_{14})\sin 2\varphi + k^4\upsilon_{24}\sin 4\varphi, \quad (13)$$

где:

$$\upsilon_{00} = w_0\mu_*,\ \ \upsilon_{02} = \frac{1}{2}\mu_*\left(\frac{w_0}{2} - 2w_{01}\right),\ \ \upsilon_{03} = \frac{1}{8}\mu_*\left(\frac{9}{8}w_0 - w_{01} - 8w_{02}\right),$$

$$\upsilon_{12} = -\frac{1}{4}\mu_*\left(-2w_{01} + \frac{1}{2}w_0\right),\ \ \upsilon_{14} = -\frac{1}{4}\mu_*\left(\frac{3}{8}w_0 + \frac{8}{3}w_{02}\right),$$

$$\upsilon_{24} = \frac{1}{32}\mu_*\left(\frac{3}{8}w_0 - w_{01} - \frac{8}{3}w_{02}\right).$$

Приняв во внимание второе уравнение из (2), учитывая (12) и (13), имеем:

$$t = (t_{00} + k^2 t_{02} + k^4 t_{04})\varphi + (k^2 t_{12} + k^4 t_{14})\sin 2\varphi + k^4 t_{24}\sin 4\varphi, \quad (14)$$

где:

$$t_{00} = \frac{C^3\mu_*}{w_0\mu^2},\ \ t_{02} = \frac{t_{00}}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{2w_{01}}{w_0}\right),\ \ t_{04} = \frac{t_{00}}{8}\left(\frac{2w_{01}}{w_0} + \frac{8w_{02}}{w_0} + \frac{9}{8} + \frac{6w_{01}^2}{w_0^2}\right),$$

$$t_{12} = \frac{t_{00}}{4}\left(\frac{2w_{01}}{w_0} - \frac{1}{2}\right),\ \ t_{14} = \frac{t_{00}}{4}\left(-\frac{8}{3}\cdot\frac{w_{02}}{w_0} + \frac{2\alpha_{31}}{3}\cdot\frac{w_{02}}{w_0^2} - \frac{1}{2}\right),$$

$$t_{24} = \frac{t_{00}}{32}\left(1 + \frac{8}{3}\cdot\frac{w_{02}}{w_0} + \frac{8}{3}\cdot\frac{\alpha_{31}w_{02}}{w_0^2} + \frac{2w_{01}}{w_0}\right).$$

Обратив (14), имеем:

$$\varphi = (\varphi_{00} + k^2\varphi_{02} + k^4\varphi_{04})t + (k^2\varphi_{12} + k^4\varphi_{14})\sin 2t + k^4\varphi_{24}\sin 4t, \quad (15)$$

где:

$$\varphi_{00} = \frac{1}{t_{00}},\ \ \varphi_{02} = -\frac{t_{02}}{\varphi_{00}^2},\ \ \varphi_{04} = \frac{1}{\varphi_{00}^2}(t_{00} - t_{04}),\ \ \varphi_{12} = -\frac{t_{12}}{t_{00}},\ \ \varphi_{14} = \varphi_{00}(t_{02}\varphi_{12} - t_{04}),$$

$$\varphi_{24} = t_{00} - \frac{t_{24}}{t_{00}}.$$

Таким образом, (13) и (12) посредством (15) определяют полярные координаты ИСЗ в основной плоскости как функции времени.

Резонанс в плоской задаче наступает при $\rho \to \infty$, $w \to 0$, тогда из (11) можно найти резонансное значение $\varphi_{рез}$

$$\varphi_{рез} = \arcsin\sqrt{\frac{\alpha_{31}\alpha_4}{\alpha_{43}\alpha_1}}, \quad (16)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – корни полинома (9), причем $0 < \varphi_{рез} < \dfrac{\pi}{2}$.

Резонанс в пространственной задаче наступает при $\rho \to \infty$, $r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \to \infty$.

Найдем универсальные переменные, которые исключают «малые знаменатели».

Преобразуем второе из уравнений (2), используя (10), (12), (13), тогда найдем

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + (q_0 + 2q_1\cos 2\varphi + 2q_2\cos 4\varphi)s = 0, \quad (17)$$

где

$$q_0 = 4(q_{00} + kq_{01} + k^2 q_{02}),\quad q_1 = 2(kq_{11} + k^2 q_{12}),\quad q_2 = 2k^2 q_{22},\quad s = \operatorname{tg}\lambda -$$

тангенс широты; $q_{00}, q_{01}, q_{02}, q_{11}, q_{12}, q_{22}$ – постоянные величины определяемые из начальных условий.

Решение (17) с точностью вплоть $O(k^4)$ имеет вид [3]:

$$s = A\{\cos(C_0\varphi+\varepsilon) + k^2 s_{12}\cos[(C_0+2)\varphi+\varepsilon] + k^2 s_{22}\cos[(C_0-2)\varphi+\varepsilon]\}, \quad (18)$$

где:

$$C_0 = \sqrt{1+\sqrt{(q_0-1)^2 - q_1^2}}, \quad s_{12} = \frac{q_{12}}{2[(C_0+2)^2 - q_0]}, \quad s_{22} = \frac{q_{22}}{2[(C_0-2)^2 - q_0]},$$

здесь в соответствии с [3] $C_0 \approx \sqrt{q_0}$, тогда

$$[(C_0+2)^2 - q_0] = C_0^2 + 2C_0 + 4 - q_0 \approx 2C_0 + 4 > 0,$$

$$[(C_0-2)^2 - q_0] = C_0^2 - 2C_0 + 4 - q_0 \approx 4 - 2C_0 \neq 0,$$

то есть при $\varphi \to \varphi_{рез}$, $s \not\to \infty$.

Таким образом, переменные Хилла $w, s, \xi = \frac{\mu z}{C^2}$ дают возможность исключить «малые знаменатели». Они безразмерны и универсальны, т.е. не теряют смысла, как в резонансной, так и в нерезонансной области движения ИСЗ.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шинибаев М.Д., Беков А.А. и др. Об орбитальном движении неуправляемого космического объекта в поле тяготения центрального и внешнего тела //Доклады НАН РК.– 2014, №3.– С.21-26.

[2] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М., 1973.– 831 с.

[3] Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики.– М.-Л., 1965.– 367 с.

REFERENCES

[1] Shinibaev M.D., Bekov A.A., et al. On the orbital motion of uncontrolled space object in the gravitational field of the central and outer body. Reports of NAS RK. – 2014, №3.– p.21-26 (in Russ).

[2] Korn G., Korn T. Mathematical Handbook for Scientists and Engineers. - M., 1973. – 831 p. (in Russ).

[3] Chebotarev G.A. Analytical and numerical methods of celestial mechanics.– M.-L., 1965.– 367 p. (in Russ).

ЖАСАНДЫ ЖЕР СЕРІГІНІҢ ОРБИТАЛЫҚ ҚОЗҒАЛЫСЫНДАҒЫ ПАРАМЕТРЛІК РЕЗОНАНС

М.Д. Шыныбаев[1], А.А. Беков[1], М.Ж. Жұмабаев[2], А.С. Рамазанова[2], А.Д. Ниязымбетов[2], Е. Құрмыш[2], Б.Н. Рахымжанов[3]

[1]«Ұлттық Ғарыштық Зерттеулер мен Технологиялар Орталығы», АҚ, Алматы, Қазақстан;
[2]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент, Қазақстан;
[3]«Ш.Уалиханов атындағы Көкшетау мемлекеттік университеті», Көкшетау, Қазақстан

Тірек сөздер: резонанс, орбита, кіші бөлгіш, тартылыс өрісі, күш функциясы, Жер серігі, полярлық координаттар.

Аннотация. Ғарыштық аппараттардың қозғалысын зерттеуде оның математикалық моделін құру және ол нақты қозғалысқа адекватты болуы қажет. Орбиталық қозғалыстағы ең қарапайым модель ретінде салмағы дене салмағына тең материялық нүкте алынады. Ал күрделі модельдерде массаның көлемде бірқалыпты немесе басқаша жайылуын есепке алуға тура келеді. Жалпы модельді таңдау есептің қойылымына байланысты және ол мүмкіншілігінше қарапайым болып қозғалыс қасиеттерін толық сипаттайтын етіледі.

Ғарыштық ұшу механикадағы дифференциалдық теңдеулер нақты түрде интеграл-данбайды, сондықтан түрлі жуықтап интегралдау әдістері қолданылады. Ғарыштық объектінің ауытқу қозғалысын зерттеудің өзекті әдістерінің бірі аралық орбитаның жаңа түрін құруға байланысты.

Бұл мәселе резонанстық Жер серіктеріне де, резонанстық емес Жер серіктеріне де өзекті.

Мақалада ЖЖС орбиталық қозғалысындағы параметрлік резонансы зерттелді.

Осы айтылғандарға орай қозғалып жатқан тақырып актуалды және маңызды болып тұр.

Поступила 15.07.2015 г.