BULLETIN OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
ISSN 1991-3494
Volume 6, Number 352 (2014), 41 – 49

MODELING OF DYNAMIC PROCESSES IN DRILL STRINGS WHEN DOING RIH/POOH OPERATIONS

A. Barayev, M. Zh. Zhumabayev, A. Baimisheva, A. S. Tulep

South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan,
International Kazakh-Turkish University named after A. Yassavi, Turkestan, Kazakhstan

Key words: modeling, process, RIH/POOH, equations, Fourier method, own functions.
Abstract. On the basis of certain assumptions equations had been mixed in the partial derivatives that describe the dynamic processing RIH/POOH operations with mixed boundary and initial conditions. The equation is solved with the generalized Fourier method. Its own functions and meanings were found.

УДК 621.81

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В БУРИЛЬНЫХ КОЛОННАХ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ СПУСКОПОДЪЕМНЫХ ОПЕРАЦИЙ

А. Бараев, М. Ж. Жумабаев, А. Баймишева, А. С. Тулеп

Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,
Международный казахско-турецкий университет им. А. Ясави, Туркестан, Казахстан

Ключевые слова: моделирование, процесс, спускоподъем, уравнения, метод Фурье, собственные функции.
Аннотация. На основе определенных допущений был получены неоднородные уравнения в частных производных, описывающие динамичиские процессоспуско-подъемные операции с неоднородными граничными и начальными условиями. Уравнение решено обобщенным методом Фурье. Найдены собственные функции и собственные значения.

В практике бурения скважин отмечено, что в сложных геолого-технических условиях неверный выбор скорости спуска или подъема колонны труб может быть причиной серьезных осложнений [1].

Характерная особенность спуска и подъема колонны – кратковременный и неравномерный процесс. При определении динамических нагрузок учет всех конструктивных особенностей буровых установок представляет весьма сложную и едва ли разрешимую задачу. Поэтому для выяснения основного характера динамического нагружения спускоподъемного механизма (СПМ) обычно прибегают к определенной идеализации расчетной схемы с соответствующими допущениями.

Рассмотрим бурильные колонны как однородный стержень (или система однородных стержней с замковыми соединениями) длиной h с постоянной площадью поперечного сечения S. Материал стержня будем считать идеально упругим, пренебрегая потерями на трения. Бурильная колонна и ее компоновка как волновод и задачу о динамике всего волновода заменим эквивалентной задачей для колонны (или ее свободного участка), учитывая в граничных сечениях влияние связанных с ней других звеньев волновода, а на боковой поверхности – силы контактного взаимодействия с пристеночным слоем заполняющей кольцевой щели среды.

Уравнение продольных колебаний колонны в принятых предположениях записываем в виде [2, 3]:

$$pS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, x, t\right) + pgS, \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ - продольное смещение сечения колонны, E и p - плотность и модуль Юнга для материала колонны (стержня), $F(...)$ - функция, описывающая контактные силы взаимодействия колонны с внешней средой. Для интегрирования уравнения (1) поставим следующие начальные и граничные условия:

$$u = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = v_0(x) \quad \text{при} \quad t=0 \qquad (2)$$

$$m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P_1(t) + ES\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при} \quad x=0 \qquad (3)$$

$$m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P_2(t) - ES\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{при} \quad x=h \qquad (4)$$

где $u_o(x)$ и $v_o(x)$ - смещение и скорости сечения колонны до момента приложения внешней нагрузки, m_1 и m_2 - массы грузов, жестко соединенных с нижним и верхним сечениями колонны. $P_1(t)$ и $P_2(t)$ - силы, действующие на эти массы, соответственно. Если массы соединены к этим сечениям через безинерционные упругие элементы с коэффициентами жесткости k_1 и k_2, то вместо (3) и (4) имеем условия [4]:

$$ES\frac{\partial u}{\partial x} = k_1\left[u(0,t) - u_{01}\right] \quad \text{при} \quad x=0 \qquad (5)$$

$$ES\frac{\partial u}{\partial x} = -k_2\left[u_2(h,t) - u_{02}\right] \quad \text{при} \quad x=h \qquad (6)$$

где $u_0(t)$ и $u_{02}(t)$ - перемещения масс, удовлетворяющие уравнениям движения

$$m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k_1\left[u(0,t) - u_{01}\right] + P_1(t) \qquad (7)$$

$$m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k_2\left[u(h,t) - u_{02}\right] + P_2(t) \qquad (8)$$

и совместно определяемые с решением уравнения (1).

Решение краевой задачи (2)-(4) и (5)-(8) при произвольных видах функции $F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, x, t\right)$ представляет сложную математическую задачу.

Аналитическое решение уравнения (1) в общем случае отсутствуют. В некоторых частных видах функции F решение указанных краевых задач можно получить в виде бесконечных рядов [2-3, 5].

Пусть функция F имеет вид (модель Винклера-Фойгта для описания контактной силы):

$$F = -k_0 u - \mu_0\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (9)$$

где k_0 и μ_0 коэффициенты жесткости и вязкости безинерционного податливого элемента при сдвиге.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2)-(4), представим в виде суммы:

$$u = u_0(x) + \overline{u}(x,t),$$

где $u_0(x)$ решения уравнения $ES\dfrac{d^2u_0}{dx^2}-k_0u_0=-pgS$ с граничными условиями $\dfrac{du_0}{dx}=0$ при $x=0$, $x=h$.

При этом функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению:

$$pS\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=ES\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x^2}-k_0\tilde{u}-\mu_0\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} \tag{10}$$

Нулевым начальным и граничным условиям:

$$m_1\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=ES\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+P_1(t) \quad \text{при} \quad x=0 \tag{11}$$

$$m_2\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2}=-ES\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}+P_2(t) \quad \text{при} \quad x=h \tag{12}$$

Решение краевой задачи (11) и (12) для уравнения (10) при $\mu=0$ получаем обобщенным методом Фурье [3,5], вводя при этом разрывные производные в сечениях $x=0$ и $x=h$. Согласно этого метода уравнения (10) с помощью сосредоточенных сил записывается в неоднородном виде (в дальнейшем знак ~ опущен):

$$ES\frac{\partial^2 u}{\partial x}=pS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\left[m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-P_1(t)\right]\delta(x)+\left[m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-P_2(t)\right]\delta(h-x) \tag{13}$$

здесь δ - дельта функция Дирака.

При такой записи уравнения производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ в сечениях $x=0$ и $x=h$ имеет разрыв за счет выполнения граничных условий (11) и (12). При этом в сечениях $x=+0$, $x=h-0$ производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ удовлетворяет условиям (11) и (12) соответственно, в сечениях $x=-0$ и $x=h-0$ она равна нулю, т.е:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \text{при } x=-0, \quad x=h+0 \tag{14}$$

Таким образом, решение неоднородного уравнения (13) совпадает с решением уравнения (10) (не содержащих разрывы производных), удовлетворяющее условиям:

$$ES\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=+0}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=-0}\right]=m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-P_1(t)$$

$$ES\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=h+0}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=h-0}\right]=m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-P_2(t)$$

Рассмотрим однородное уравнение:

$$ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-pS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-k_0u-m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta(x)-m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta(x-h)=0$$

решение представим в виде:

$$u=\varphi(x)T(t),$$

где $\varphi(x)$ и $T(t)$ удовлетворяет уравнениям:

$$ES\varphi'+\left(pS\omega^2-k_0\right)\varphi(x)+m_1\omega^2\varphi(0)\delta(x)+m_2\omega^2\varphi(h)\varphi(h-x)=0 \tag{15}$$

$$T''+\omega T=0 \tag{16}$$

Решение уравнения (16) имеет вид $\left(\lambda=\sqrt{\dfrac{Sp\omega^2-k_0}{ES}}\right)$

$$\varphi = A\sin\lambda x + B\cos\lambda x + \frac{m_1 w^2 \varphi(0)}{\lambda ES}\sin\lambda x H(x) + \frac{m_2 w^2}{\lambda ES}\varphi(h)\sin\lambda(h-x)H(h-x)$$

где H(ξ) - единичная функция Хевисайда, λ - собственное число.

Для определения постоянных A и B используем условие (14), которое дает:

$$A = \frac{m_2 w^2}{\lambda ES}\varphi(h)\cos\lambda h$$

$$B = \frac{w^2\cos\lambda h}{\lambda ES\sin\lambda h}\left[m_1\varphi(0) + m_2\varphi(h)\cos\lambda h\right]$$

Таким образом, имеем:

$$\varphi = \frac{m_2 w^2 \varphi(h)}{\lambda ES}\cos\lambda h\sin\lambda x + \frac{w^2\cos\lambda h}{\lambda ES\sin\lambda h}[m_1\varphi(0) + m_2\varphi(h)\cos\lambda h]\cos\lambda x +$$

$$+\frac{m_1 w^2\varphi(h)}{\lambda ES}\sin\lambda x H(x) + \frac{m_2 w^2\varphi(h)}{\lambda ES}\sin\lambda(h-x)H(h-x)$$

Для интервала $0 \le x \le h$ последнее выражение приведем к виду:

$$\varphi = \frac{m_1 w^2\varphi(0)}{\lambda ES\sin\lambda h}\cos\lambda(h-x) + \frac{m_2 w^2\varphi(h)}{\lambda ES\sin\lambda h}\cos\lambda x.$$

Полагая: $\varphi = \varphi(0)$ при $x=0$, $\varphi = \varphi(h)$ теперь при $x = h$ составим систему однородных уравнений для определения величин:

$$\varphi(0) = \frac{m_1 w^2\varphi(0)}{\lambda\sin\lambda h}\varphi(0)\cos\lambda h + \frac{m_2 w^2\varphi(h)}{\lambda\sin\lambda h}$$

$$\varphi(h) = \frac{m_1 w^2}{\lambda\sin\lambda h}\varphi(0) + \frac{m_2 w^2\varphi(h)}{\lambda\sin\lambda h}$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, получаем трансцендентные уравнения для нахождения собственных чисел:

$$tg\lambda h = \lambda pS\frac{(m_1 + m_2)(\lambda^2 ES) + k_0}{\lambda^2 p^2 S^2 - m_1 m_2(\lambda^2 ES + k_0)_2} \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет бесконечное число корней $\lambda = \lambda_m$ *(n=1,2,3...)* и каждому корню соответствует собственная функция $\varphi = \varphi_m(x)$

Теперь рассмотрим неоднородное уравнение:

$$ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - pS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - k_0 u - m_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta(x) - m_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta(h-x) = -P_1(t)\delta(x) - P_2(t)\delta(h-x)$$

Решение его представим в виде разложения:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)T_n(t),$$

где функции φ_n и T_n удовлетворяют уравнению:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[ES\varphi' T_n - pS\varphi_n T_n'' - k_0\varphi_n T_n - m_1\varphi_n(0)T_n'\delta(x) -$$

$$- m_2\varphi_n(h)T_n''\delta(h-x)] = -P_1(t)\delta(x) - P_2(t)\delta(h-x)$$

Пользуясь выражением из (15), последнее уравнение приведем к виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[pS\varphi_n + m_1\varphi_n(0)\delta(x) + m_2\varphi_n(h)\delta(h-x)](T_n' + w^2{}_n T_n) = P_1(t)\delta(x) + P_2(t)\delta(h-x)$$

$$\varphi_1(x)\ldots(p = 1,2,3\ldots.)$$

Умножаем обе части уравнения на функции и суммируем по p :

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}[pS\varphi_n\varphi_p + m_1\varphi_n(0)\varphi_p(x)\delta(x) + m_2\varphi_n(h)\varphi_p(x)\delta(h-x)]\times$$

$$\times(T_n'' + \omega^2{}_nT_n) = \sum_{p=1}^{\infty}P_1(t)\delta(x) + \sum_{p=1}^{\infty}P_2(t)\delta(h-x)\varphi_p(x)$$

Производя интегрирования до x в пределах $0\le x\le h$, получаем:

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}pS[\int_0^h\varphi_n\varphi_p dx + m_1\varphi_n(0)\varphi_p(0) + m_2\varphi_n(h)\varphi_p(h)]\times$$

$$\times(T_n'' + \omega^2{}_nT_n(t)) = P_1(t)\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_p(0) + P_2(0)\sum_{p=1}^{\infty}\varphi_p(h) \quad (18)$$

Можно показать [2, 3], что функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют следующему условию обобщенной ортогональности:

$$pS\int_0^h\varphi_n\varphi_p dx + m_1\varphi_n(0)\varphi_p(0) + m_2\varphi_n(h)\varphi_p(h) = 0 \quad \text{при} \quad n\neq p$$

Тогда из равенства (18) следует:

$$T_n' + \omega^2{}_nT_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|}[P_1(t)\varphi_n(0) + P_2(t)\varphi_n(h)] = f_n(t)$$

Здесь:

$$\|\varphi_n\| = pS\int_0^h\varphi^2{}_n dx + m_1\varphi^2{}_n(0) + m_2\varphi^2{}_n(h)$$

Решение последнего уравнения при нулевых начальных условиях получаем:

$$T_n = \frac{1}{w_n}\int_0 f_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

Пусть контакт боковой поверхности колонны со стенкой скважины по закону Винклера происходит на участке $0 \le x \le H$ (H - длина зоны контакта), остальная часть поверхности свободная.

Обозначим через перемещение сечения колонны в участках $0\le x\le l,..l\le x\le l+H,..l+H\le x\le h$ соответственно, для которых функция F имеет вид: $F_1=0$, $F_2=-k_0u_2$, $F_3=0$

В сечениях $x = l$, $x-l + H$ выполняются условия непрерывности смещений и напряжений:

$$u_1(l,t) = u_2(h,t), \qquad \frac{\partial u_1(l,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x}$$

$$u_2(l+h,t) = u_3(l+h,t), \qquad \frac{\partial u_1(l+H,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_3(l+h,t)}{\partial x} \quad (19)$$

Перемещение сечений колонны в каждой зоне представим в виде:

$$u_1 = \varphi_1(x)T(t), \qquad u_2 = \varphi_2(x)T(t), \qquad u_3 = \varphi_3(x)T(t),$$

где $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ функции удовлетворяют однородным уравнениям:

$$ES\varphi_1'' - (pS\omega^2\varphi_1(x) + m_1\omega^2\varphi_1(0)\delta(x)) = 0$$

$$ES\varphi_2'' - (pS\omega^2\varphi - k_0)\varphi_2(x) = 0$$

$$ES\varphi_3'' - pS\omega^2\varphi_3(x) + m_2\omega^2\varphi_3(0)\delta(h-x) = 0$$

Решение каждого уравнения представим в виде:

$$\varphi_1 = A_1 \cos \beta x + \frac{m_1\omega^2\varphi_1(0)}{\beta ES}\sin \beta x H(x),$$
$$\varphi_2 = A_2 \cos \lambda(l-x) + B_2 \sin \lambda(l-x),$$
$$\varphi_3 = A_3 \cos \beta(h-x) + \frac{m_1\omega^2\varphi_3(h)}{\beta ES}\sin \beta x(h-x)H(h-x),$$
$$\beta = \omega\sqrt{ps}, \qquad A_1, A_2, A_3, B_2$$

где определяем из условий (18), которые дают;

$$A_1 = \frac{m_1\omega^2}{\beta ES}a_{11}\varphi_1(0) + \frac{m_2\omega^2}{\beta ES}a_{21}\varphi_3(h)$$
$$A_2 = A_1 \cos \beta l + m_1\omega^2\frac{\varphi_1(0)}{\beta ES}\sin \beta l = \frac{m_1\omega^2}{\beta ES}b_{11}\varphi_1(0) + \frac{m_2\omega^2}{\beta ES}b_{21}\varphi_3(h)$$
$$B_2 = \frac{\beta}{\lambda}A_1 \sin \beta l - \frac{m_1\omega^2\varphi(0)}{\lambda ES}\cos \beta l = \frac{m_2\omega^2}{\beta ES}b_{13}\varphi_1(0) + \frac{m_2\omega^2}{\beta ES}b_{23}\varphi_3(h)$$
$$A_3 = \frac{m_1\omega^2}{\beta ES}a_{11}\varphi_1(0) + \frac{m_2\omega^2}{\beta ES}a_{23}\varphi_3(h)$$
$$a_{11} = \frac{c_1}{a_1b_3 - b_1a_3}, \quad a_{21} = \frac{c_2}{a_1b_3 - b_1a_3}.$$
$$b_{11} = a_{11}\cos \beta l + \sin \beta l, \quad b_{21} = a_{21}\cos \beta l, \quad b_{13} = \frac{a_{11}\beta}{\lambda}\sin \beta l - \frac{\beta}{\lambda}\cos \beta l, \quad b_{23} = a_{21}\sin \beta l,$$
$$a_{13} = \frac{d_1}{b_1a_3 - a_1b_3}, \quad a_{23} = \frac{d_2}{b_1a_3 - a_1b_3}, \quad c_1 = \frac{\beta}{\lambda}\cos \beta l \sin \lambda H - \sin \beta l \cos \lambda H,$$
$$a_1 = \cos \beta l \cos \lambda H + \frac{\beta}{\lambda}\sin \beta l \sin \lambda H, \quad b_1 = \lambda \cos \beta l \sin \lambda H - \beta \sin \beta l \cos \lambda H,$$
$$b_3 = \beta \sin(h-l-H), \quad a_3 = \cos \beta(h-l-H),$$
$$d_1 = -\lambda \sin \beta l \sin \lambda H - \beta \cos \beta l \cos \lambda H, \quad d_3 = -\beta \cos \beta(h-l-H).$$

Полагая в формулах, составим систему однородных линейных уравнений относительно величин $\varphi_1(0)$ и $\varphi_3(h)$, приравнивая определители к нулю, получим уравнение для определения собственных чисел:

$$\left(1 - \frac{m_1\omega^2}{\beta ES}a_{11}\right)\left(1 - \frac{m_2\omega^2}{\beta ES}a_{23}\right) - \frac{m_1m_2\omega^2}{\beta^2 ES}a_{21}a_{31} = 0 \tag{20}$$

Решение неоднородных уравнений представим в виде разложений:

$$u_k = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{kn}(x)T_n(t) \tag{21}$$

Пользуясь условием обобщенной ортогональности, получим:

$$pS\int_0^l \varphi_{1n}dx + pS\int_l^{l+H}\varphi_{2n}\varphi_{2p}dx + \int_{l+H}^l \varphi_3\varphi_{3n}dx + m_1\varphi_{1n}(0)\varphi_{1p}(0) + m_2\varphi_{3n}(h)\varphi_{3p}(h) = 0 \tag{22}$$

Получим уравнение для определения неизвестных функций

$$T_n'' + \omega^2{}_nT_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|}[P_1(t)\varphi_{1p}(0) + P_2(t)\varphi_{3n}(h)] = f_n(t),$$

решение, которого имеет вид:

$$T_n = \frac{1}{\omega_n}\int_0 f_n(\tau)\sin\omega_n(\tau)d\tau,$$

где:

$$\|\varphi_n\| = pS\int_0^l \varphi_{1n}\, dx + pS\int_l^{l+H}\varphi^2{}_{2n}dx + \int_{l+H}^{h}\varphi^2{}_{3n}dx + m_1\varphi^2{}_{1n}(0) + m_2\varphi^2{}_{3n}(h)$$

$$m_1=m_2=0,\quad P_2=0.$$

Этот случай соответствует, когда на торец $x=0$ колонны действует динамическая нагрузка $P_1(t)$, а другой торец свободный.

Собственные функции определяются по формулам:

$$\varphi_{1n} = \lambda_n\cos\beta_n x\cos\beta_n(h-l-H)$$

$$\varphi_{2n} = [\lambda_n\cos\beta_n l\cos\lambda_n(l-x) + \beta_n\sin\beta_n l\sin\lambda_n(1-x)]\cos\beta_n(h-l-H)$$

$$\varphi_{3n} = (\lambda_n\cos\beta_n l\cos\lambda_n H + \beta_n\sin\beta_n l\sin\lambda_n H)\cos\beta_n(h-x)$$

Собственные числа λ_0 являются корнями трансцендентного уравнения

$$\beta_n\lambda_n\cos\lambda_n H\sin\beta_n(h-H) + \sin\lambda_n H[\beta^2{}_n\sin\beta_n(h-l)\sin\beta_n l - \lambda^2{}_n\cos\beta_n(h-l-H)\cos\beta_n l] = 0,$$

$$\beta_n = \sqrt{\lambda^2{}_n + \bar{k}_o},\qquad \bar{k}_0 = \frac{k_0}{ES}$$

Изучим теперь колебание бурильной колонны, по всей длине которой действует сила вязкого сопротивления, а некоторые сечения находятся, кроме вязкого сопротивления, в локальном упругом контакте с внешней средой. Уравнение движение колонны (упругого стержня) и контактных усилий с учетом сил трения записывается в виде:

$$S\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} k_0\, u(l_i,t)\delta(x-l_i) - \mu_0 S\frac{\partial u}{\partial t} + P_1(t)\delta(x) + \gamma S = 0 \tag{23}$$

где μ_0 - коэффициент вязкого трения, N - количество изолированных сечений.

Уравнение (22) интегрируется при следующих начальных и граничных условиях:

$$\tilde{u} = u_0(x),\qquad \frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = 0 \qquad \text{при}\quad t=0 \tag{24}$$

$$\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = 0\ \ \text{при}\ x=0,\qquad \tilde{u}=0\ \ \text{при}\ x=h, \tag{25}$$

где $u_0(x)$ – смещение колонны под действием силы тяжести, определяемое как решения уравнения, удовлетворявшего уравнению (23), начальным и граничным условиям (24) и (25). Решение уравнения (23) представим в виде суммы:

$$\tilde{u} = u_0(x,t) + u_0(x).$$

где u_g удовлетворяет уравнению (22) нулевым начальным и граничным условиям (25).

Вводя новую функцию $u(x,t)$ по формуле $u = e^{\delta 0 l}\cdot u_2(x,t),\ \left(\delta_0 = \frac{\mu_0}{2p},\right)$ приведем уравнение (23) к виду:

$$pS\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ES\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\mu^2{}_0 S}{4p}u - \sum_{j=1}^{N}k_{01}u(l_j,t)\delta(x-l_1) + P_1 l^{\delta 01}\delta(x) = 0 \tag{26}$$

Решение уравнения (25), удовлетворяющее нулевым начальным и краевым условиям (24), получим обобщенным методом Фурье [5].

Решение соответствующего однородного уравнения представим в виде:

$$u(x,t) = \varphi(x)T(t),$$

где φ и T удовлетворяют уравнениям:

$$\varphi''(x)+\lambda^2\varphi(x)-\sum_{i=1}^{N}k_{01}\varphi(l_1)\delta(x-l_i\ )=0 \qquad (27)$$

$$T_n'+\frac{4\lambda^2{}_nEp-\mu^2{}_0}{4p^2}T=0,$$

где λ - собственное число.

Функция $\varphi\ (x)$, удовлетворяющая уравнению (26) и граничным условиям

$\varphi'(-0)=0,\quad \varphi(h)=0,$ а также условиям сопряжения:

$$\varphi(l_1+0)-\varphi(l_1-0)=\frac{k_{01}\varphi(l_1)}{ES},$$

можно представить в виде $(0\le x\le h)$:

$$\varphi=\frac{1}{ES\lambda\cos\lambda h}\sum_{j=1}^{N}k_{0j}\varphi_j[\sin\lambda_j(\xi_j)\cos\lambda hH(\xi_j)-\sin\lambda(h-l_j)\cos\lambda x] \qquad (28)$$

где: $\varphi_j=\varphi(l_j),\quad \xi_j=x-l_j\qquad H(\xi)$

Полагая теперь $\varphi=\varphi_j$ при $x=l_j$, получим систему однородных уравнений относительно φ_j

$$\varphi_i=\frac{1}{ES\lambda\cos\lambda h}\sum_{j=1}^{N}k_{0j}\varphi_j[\sin\lambda_j(l_i-l_j)\cos\lambda h-\sin\lambda l_j(h-l_j)\cos\lambda l_i]$$

Приравнивая определитель этой системы к нулю, составим трансцендентные уравнения для определения собственных чисел, $\lambda=\lambda_2$ – соответствующие функции $\varphi=\varphi(\lambda_n,x)=\varphi_n(x)$ будут собственными функциями.

Собственные функции удовлетворяют условиям ортогональности [3].

$$\sum_{l=0}^{N}\int_{l-1}^{l}\varphi_k\varphi_3dx=0\quad \text{при}\quad k\ne s\quad (l_0=0) \qquad (29)$$

Решение неоднородного уравнения (25) представим в виде разложения:

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)T_n(t) \qquad (30)$$

Подставляя (30) в уравнение (26) , получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[Tn+\frac{4\lambda^2{}_nEp-\mu_0{}^2}{4p^2}Tn\right]\varphi_n(x)=\frac{P_1(t)}{ps}e^{\delta01}\delta(x)$$

Умножаем обе части этого равенства на функцию $\varphi_s(x)$, интегрируем в интервале $0\le x\le h$, пользуясь условием ортогональности (28), получаем:

$$T_n''+\frac{4\lambda^2{}_nEp-\mu^2{}_0}{4p^2}Tn=\frac{P_1(t)\varphi_n(0)}{pS\|\varphi_n\|}e^{\delta01},\quad \left(\|\varphi_n\|=\int_0^h\varphi^2{}_n(x)dx\right) \qquad (31)$$

Решение уравнения (31) зависит от величины μ_0, для которой предполагаем выполнение неравенства;

$$2\lambda_k\sqrt{Ep}\le\mu_0\le2\lambda_{k+1}\sqrt{Ep}$$

Тогда окончательное решение для функции $u_g(x,t)$ можно представить в виде разложения:

$$u_g=\frac{e^{-\delta0t}}{pS}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(0)}{\overline{\omega}_n\|\varphi_n\|}\int_0^l P_1(\tau)e^{\delta0t}sh\omega_n(t-\tau)dt\right]+$$

$$+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(0)}{\omega_n\|\varphi_n\|}\int_0^l P_1(\tau)e^{\delta01}\sin\omega_n(t-\tau)d\tau$$

где $\overline{\omega}_n = \frac{\sqrt{\mu^2{}_0 - 4\lambda^2{}_0 Ep}}{2p}$, $\omega_n = \frac{\sqrt{4\lambda^2{}_n Ep - \mu^2{}_0}}{2p}$.

Положив $P_1 = P_0$, получаем:

$$u_g = \frac{P_0}{ES}\left[\sum_{n=1}^{k}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(0)}{\overline{\omega}_n\|\varphi_n\|}\left[\frac{\overline{\omega}_n}{\delta^2{}_0 - \omega^2{}_n} - \frac{e^{-\delta 0t}(\delta_0 sh\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_n ch\omega_0 t)}{\delta^2{}_0 - \overline{\omega}^2{}_n}\right]+\right]$$

$$\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(0)}{\omega_n\|\varphi_n\|}\left|\frac{e^{-\delta 0t}(\delta_0 sh\overline{\omega}_0 t + \overline{\omega}_n \cos\omega_0 t)}{\delta^2{}_0 + \omega^2{}_n}\right.$$

В случае колонны с одной изолированной зоной прихвата имеем:

$$\varphi = -h\cdot\sin\overline{\lambda}_n(1-\overline{l}_1)\cos\overline{\lambda}_n\xi \qquad 0 \le \xi \le \overline{l}_1$$

$$\varphi = h[\sin\overline{\lambda}_n(\xi - \overline{l}_1) - \sin\overline{\lambda}n(1-\overline{l}_1)\cos\overline{\lambda}_n\xi] \qquad \overline{l}_1 \le \xi \le 1$$

где $\beta_{01} = \frac{k_{01}h}{ES}, \overline{l}_1 = \frac{l_1}{h}, \xi = \frac{x}{h}, \overline{\lambda}_n = \lambda_n h,$

λ_n - корни уравнения $\overline{\lambda}_n\cos\overline{\lambda}_n + \beta_{01}\sin\overline{\lambda}_n(1-l_1)\cos\overline{\lambda}_n l_1 = 0$

Норма функции будет равна:

$$\|\varphi_n\| = h^3\left\{\frac{\sin^2\overline{\lambda}_n(1-\overline{l}_1)(2\overline{\lambda}_n + \sin 2\overline{\lambda}_n) + \cos^2\overline{\lambda}_n[2\overline{\lambda}_n(1-l_1) + \sin 2\overline{\lambda}_n(1-l_1)]}{4\lambda_n} - \right.$$

$$\frac{\cos\overline{\lambda}_n\sin\overline{\lambda}_n(1-\overline{l}_1)[2\overline{\lambda}_n(1-l_1) + \cos\overline{\lambda}_n(2-l_1) - \cos\overline{\lambda}_n(2-l_1)]}{2\lambda_n}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Баграмов Р.А. Буровые машины и комплексы. – М.: Недра, 1988.

[2] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1977.

[3] Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физики. – М., 1956.

[4] Марданов Б.М., Бараев А., Ахметов Н.М Прикладные задачи механики бурения нефтегазовых скважин. Шымкент: Изд-во «Әлем», 2013. – 172 с.

[5] Бабаков Н.М. – Наука, 1965.

REFERENCES

[1] Bagramov R.A. Burovye mashiny i kompleksy. M.: Nedra, 1988.

[2] Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravnenie matematicheskoj fiziki. M.: Nauka, 1977.

[3] Budak B.M., Samarskij A.A., Tihonov A.N. Sbornik zadach po matematicheskoj fiziki. M., 1956.

[4] Mardanov B.M., Baraev A., Ahmetov N.M Prikladnye zadachi mehaniki burenija neftegazovyh skvazhin. Shymkent: Izd-vo «Әlem», 2013. 172 s.

[5] Babakov N.M. Nauka, 1965.

БҰРҒЫЛАУ САПТАРДА ТҮСІПКӨТЕРІЛУ ОПЕРАЦИЯНЫҢ ДИНАМИКАЛЫҚ ҮДЕРІСТЕ МОДЕЛЬДЕП ОРЫНДАЛУЫ

А. Бараев, М. Ж. Жұмабаев, А. Баймишева, А. С. Төлеп

Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институт, Шымкент, Қазақстан,
А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан

Тірек сөздер: модельдеу, үдеріс, түсіпкөтерілу, Фурьенің әдісі, меншікті функция.

Аннотация. Фурьенің жиынтық әдісімен шешім табылған. Меншікті функциямен меншікті мағыналар табылған.

Поступила 23.10.2014 г.