N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 8 – 20

THE EQUATION OF TRANSFORMATION AND ITS GENERALIZED DECISIONS IN DIFFERENTIAL ALGEBRA OF BIQUATERNIONS

L. A. Alexeyeva

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: alexeeva@math.kz

Key words: equation of transformation, differential algebra, biquaternions, Minkowski space, generalized solutions, twistor.

Abstract. The differential algebra of biquaternions on Minkowski space is developed for creation of the generalized solutions of the biquaternionic differential equations, characteristic for problems of theoretical and mathematical physics. The biquaternionic wave equation of a general view is investigated at biquaternionic representation of its structural coefficient. The fundamental and generalized decisions are constructed at any right part in the class of generalized biquaternions on Minkowski space. Solutions of the uniform equation (twistors) are constructed and investigated with use of scalar potentials, satisfying to the hyperbolic equation, which generalizes the equations of Kleyn-Gordon-Fokk and Schrödinger. The polarized and unpolarized twistor fields of a general view with use of elementary twistors are constructed.

УДК 517.9+537.8, MSQ 15A66

УРАВНЕНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ И ЕГО ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ АЛГЕБРЕ БИКВАТЕРНИОНОВ

Л. А. Алексеева

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан.

Ключевые слова: биволновое уравнение, структурный коэффициент, дифференциальная алгебра, бикватернионы, пространство Минковского, обобщенное решение, твистор.

Аннотация. Разрабатывается дифференциальная алгебра бикватернионов на пространстве Минковского для построения обобщенных решений бикватернионных дифференциальных уравнений, характерных для задач теоретической и математической физики. Исследовано биволновое уравнение общего вида при бикватернионном представлении его структурного коэффициента. Построены фундаментальные и обобщенные решения при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского. Построены и исследованы решения однородного уравнения (твисторы) с использованием скалярных потенциалов, удовлетворяющих волновым уравнениям, обобщающим уравнения Клейна-Гордона-Фока и Шредингера. Построены поляризованные и неполяризованные твисторные поля общего вида с использованием элементарных твисторов.

Предложенная В. Р. Гамильтоном алгебра кватернионов [1] и ее комплексное расширение – алгебра бикватернионов являются удобным математическим аппаратом для описания многих физических процессов. В последние десятилетия эти алгебры стали активно использоваться в работах разных авторов для решения ряда задач электродинамики, квантовой механики, механики твердого тела и теории поля. Эти разделы физики активно изучаются в рамках теорий клиффордовых алгебр.

Здесь разрабатывается дифференциальная алгебра бикватернионов на пространстве Минковского для построения обобщенных решений бикватернионных дифференциальных уравнений, характерных для задач теоретической и математической физики. Рассматривается биволновое уравнение

$$\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{F}\circ\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x), \qquad (\tau,x)\in M \ , \tag{1}$$

где дифференциальные бикватернионные операторы $\nabla^{\pm}=\partial_{\tau}\pm i\nabla$ – *взаимные биградиенты* [1], структурный коэффициент $\mathbf{F}$ – постоянный комплексный бикватернион.

Уравнение (1) относится к классу биволновых уравнений общего вида:

$$\mathbf{A}\circ\nabla^{\pm}\mathbf{B}+\mathbf{C}\circ\mathbf{B}=\mathbf{H}(\tau,x), \tag{2}$$

которые приводятся к (1), если существует $\mathbf{A}^{-1}$ [1]. В этом случае, умножая (2) слева на $\mathbf{A}^{-1}$, получим уравнение (1), где $\mathbf{F}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{C}$, $\mathbf{G}=\mathbf{A}^{-1}\circ\mathbf{H}$.

В [1] рассмотрен случай, когда $\mathbf{F}$ - комплексное число: $\mathbf{F}=m, m\in\mathbb{Z}$. Там же показано, что уравнение (1) эквивалентно модифицированной системе уравнений Максвелла (при $\mathbf{F}=0$) и Дирака (при $\mathbf{F}=i\rho,\ \rho\in\mathrm{R}$). В [2] рассмотрен случай, когда $\mathbf{F}=F,\quad F\in\mathbb{Z}^3$ -- трехмерный комплексный вектор. В [1-2] для таких $\mathbf{F}$ на основе дифференциальной алгебры бикватернионов и теории обобщенных функций построены элементарные и общие решения (1), описывающие нестационарные, гармонические по времени и статические бикватернионные поля.

Здесь исследуем общий случай для произвольного постоянного бикватерниона $\mathbf{F}=f+F$. Построим обобщенные решения (1) при произвольной правой части из класса обобщенных бикватернионов на пространстве Минковского: $\mathbf{G}\in\mathrm{B}'(M)$ [1].

Уравнение (1) при $\mathbf{G}=0$ имеет вид уравнения трансформации зарядов-токов электро-гравимагнитного (ЭГМ) поля [3, 4], описываемого бикватернионом $\mathbf{B}(\tau,x)$ под действием внешнего постоянного ЭГМ-поля, описываемого заданным структурным коэффициентом $\mathbf{F}$. Поэтому назовем его *уравнением трансформации.* Эквивалентная ему система дифференциальных уравнений относится к классу уравнений Янга-Милса [5].

Здесь дифференциальная алгебра бикватернионов используется для построения обобщенных решений уравнения (1).

1. Неоднородное биволновое уравнение и его решения. Введем дифференциальные бикватернионные операторы:

$$\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}=\nabla^{+}+\mathbf{F}=\nabla^{+}+f+F,\quad \mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}=\nabla^{-}+\mathbf{F}^{-}=\nabla^{-}+f-F\ ,$$

свойствами которых будем пользоваться далее для решения поставленной задачи.

Л е м м а 1.1.

$$\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}=\mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}=\Box+2f\partial_{\tau}+f^2+(F,F)-2i(F,\nabla). \tag{3}$$

где справа стоит волновой оператор (даламбертиан): $\Box=\dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\Delta,\ \ \Delta=\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2$ *-лаплассиан.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Поскольку, как легко проверить [1],

$$\nabla^{+}\circ\nabla^{-}=\nabla^{-}\circ\nabla^{+}=\Box, \tag{4}$$

простым вычислением получим требуемое:

$$\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}=\mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}=$$

$$=\left(\nabla^{+}+f+F\right)\circ\left(\nabla^{-}+f-F\right)=\Box+2f\partial_{\tau}+f^2+(F,F)+2i(F,\nabla).$$

Далее значок кватернионного умножения между операторами будем убирать:

$$\mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}\mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}\ \Box\ \mathbf{D}^{+}_{\mathbf{F}}\circ\mathbf{D}^{-}_{\mathbf{F}}.$$

Построим решения уравнения (1) для верхнего знака биградиента:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}\mathbf{B}=\mathbf{G}(\tau,x), \qquad (\tau,x)\in M. \tag{5}$$

Решения для нижнего знака биградиента можно построить аналогично показанному ниже либо просто используя операцию комплексного сопряжения.

Используя свойство (3), из (5) получим

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}\mathbf{B}=\left\{\Box+2f\partial_\tau+f^2+(F,F)+2i(F,\nabla)\right\}\mathbf{B}=\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{G}\equiv\mathbf{Q}$$

Т.е. каждая компонента $\mathbf{B}$ удовлетворяет уравнению

$$\Box u+2f\partial_\tau u+2i(F,\nabla u)+f^2u+(F,F)u=q(\tau,x) \tag{6}$$

с соответствующей $\mathbf{Q}$ правой частью.

Заметим, что это уравнение, если положить $m^2=f^2+(F,F)$, содержит оператор Клейна-Гордона-Фока $\left(\Box+m^2\right)$, а также дополнительное слагаемое: $2f\partial_\tau+2i(F,\nabla)$.

Если $f=ik$ – чисто мнимая величина, то в этом уравнении можно увидеть и оператор Шредингера $\left(2ik\partial_\tau-\Delta\right)$. И хотя уравнение (4) имеет более сложный вид, чем уравнения названных авторов, его решения, как покажем далее, определяются более простыми, на наш взгляд, функциями.

Т е о р е м а 1.1. *Решение биволнового уравнения* (1) *можно представить в виде*

$$\mathbf{B}=\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\left(\psi*\mathbf{G}\right)+\mathbf{B}^0=\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\psi*\mathbf{G}+\mathbf{B}^0=\psi*\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{G}+\mathbf{B}^0 \tag{7}$$

где $\psi(\tau,x)$ *-- фундаментальное решение уравнения* (6) (*при* $q=\delta(\tau)\delta(x)$), *а* $\mathbf{B}^0(\tau,x)$ *решение однородного уравнения* (5) (*при* $\mathbf{G}\equiv\mathbf{0}$):

$$\mathbf{B}^0=\sum_{\psi^0}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\psi^0*\mathbf{C}^0=\sum_{\psi^0}\psi^0*\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{C}^0=\sum_{\psi^0}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\left(\psi^0*\mathbf{C}^0\right) \tag{8}$$

$\psi^0(\tau,x)$ -- *решения однородного уравнения* (6) (*при* $q=0$), $\mathbf{C}^0\in B'(M)$ -- *произвольные обобщенные бикватернионы, допускающие такую свертку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности уравнения, достаточно доказать утверждение для каждого слагаемого в формуле (5). Подставим первое слагаемое в уравнение (5) и, используя (3) и свойство дифференцирования свертки [6,1], получим

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}\left(\psi*\mathbf{G}\right)=\left\{\Box\psi+2f\partial_\tau\psi+f^2\psi+(F,F)\psi+2i(F,\nabla\psi)\right\}*\mathbf{G}=\delta(\tau)\delta(x)*\mathbf{G}=\mathbf{G}.$$

Для каждого слагаемого второй суммы аналогично имеем

$$\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{-}\mathbf{D}_{\mathbf{F}}^{+}\left(\psi^0*\mathbf{C}^0\right)=\left\{\Box+2f\partial_\tau+f^2+(F,F)+2i(F,\nabla)\right\}\psi^0*\mathbf{C}^0=0.$$

Очевидно, в силу линейности уравнения (1), любое решение можно представить в аналогичном виде. При этом в формулах теоремы (7) и (8) для построения решения можно брать любое из равенств в зависимости от удобства вычисления сверток, что зависит от конкретного вида входящих в свертку функций (определение бикватернионной свертки см. в [1]).

Следовательно, класс решений биволнового уравнения (5) определяется скалярными функциями $\psi(\tau,x)$ и $\psi^0(\tau,x)$ - решениями уравнения (6), которые будем называть *скалярными потенциалами* биволнового уравнения (5) .

2. Скалярные потенциалы неоднородного биволнового уравнения. Построим вначале решения неоднородного уравнения (6) для произвольных $q(x,\tau)$.

Т е о р е м а 2.1. *Фундаментальные решения уравнения* (6) *имеют вид:*

$$\psi=(1-a)\frac{e^{-i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau-\|x\|)+a\frac{e^{-i(F,x)+\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau+\|x\|)+\psi^0, \qquad \forall a\in\mathbb{Z} \tag{9}$$

где $\delta(\tau-\|x\|)$ *– простой слой на световом конусе* $\tau=\pm\|x\|$; $\psi^0(\tau,x)$ *– решение однородного уравнения* (6) (*при* $q=0$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства формулы теоремы используем преобразование Фурье обобщенных функций. Далее переменные Фурье, соответствующие (τ, x) обозначаем (ω, ξ) соответственно. Уравнение для ψ имеет вид:

$$\Box\psi + 2f\partial_\tau\psi + 2i(F, \nabla\psi) + f^2\psi + (F, F)\psi = \delta(\tau)\delta(x), \quad (10)$$

а его преобразование Фурье [6] приводится к уравнению:

$$\left(\|\xi\|^2 - \omega^2 - 2if\omega + 2(F,\xi) + f^2 + (F,F)\right)\overline{\psi}(\omega,\xi) = 1,$$

которое можно записать в виде:

$$\left\{(\xi + F, \xi + F) + (f - i\omega)^2\right\}\overline{\psi} = 1$$

Откуда получим

$$\overline{\psi}(\omega,\xi) = \frac{1}{(\xi + F, \xi + F) - (\omega + if)^2} \quad (11)$$

Для построения обратного преобразования Фурье воспользуемся фундаментальным решением уравнения Даламбера

$$\Box\chi = \delta(x,t),$$

которое имеет вид :

$$\chi(x,\tau) = \frac{1-a}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) + \frac{a}{4\pi\|x\|}\delta(\tau + \|x\|), \quad \forall a \in \mathbb{Z}.$$

Это сингулярные обобщенные функции – простые слои на световом конусе "будущего и прошедшего": $\tau = \pm\|x\|$. Их преобразование Фурье равно следующим регуляризациям функции $\left(\|\xi\|^2 - \omega^2\right)^{-1}$:

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{4\pi\|x\|}\delta(\tau \mp \|x\|)\right] = \frac{1}{\|\xi\|^2 - \omega^2 \pm i0} \quad (12)$$

Используя свойства сдвига преобразования Фурье [6], из (11) и (12) следует формула:

$$\psi = \frac{e^{i(F,x)-\tau f}}{4\pi\|x\|}\left((1-a)\delta(\tau - \|x\|) + a\delta(\tau + \|x\|)\right) + \psi^0, \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

Поскольку на носителе первого слагаемого $\tau = \|x\|$, а у второго $\tau = -\|x\|$, в результате получим формулу теоремы. Теорема доказана.

Заметим, что ψ – сингулярная обобщенная функция, включающая две сферические расходящиеся и сходящиеся волны, распространяющиеся в R^3 с единичной скоростью (если τ - время). При $\operatorname{Re} F = E \neq 0$ реальная и мнимая часть плотности слоя на сфере $\|x\| = |\tau|$ колеблются с изменением x. $\operatorname{Im} F = H$ дает экспоненциальное затухание или возрастание плотности в зависимости от направления x по отношению к H с ростом $\|x\|$. $\operatorname{Re} f$ дает экспоненциальное затухание плотности простого слоя на сфере с ростом τ, а влияние $\operatorname{Im} f$ рассмотрим несколько позже.

Т е о р е м а 2.2. *Если* $\sup_\tau q(x,\tau) = \{\tau : \tau \geq 0\}$ *и* $q(x,\tau)$ *- регулярная функция, такая, что при малых* x *для* $\forall\tau > 0$ $\exists\varepsilon < 1$: $|q(x,\tau)| \leq O\left(\|x\|^{-(2+\varepsilon)}\right)$, *то обобщенное решение уравнения* (6) *имеет вид:*

$$u = \psi^0 + \frac{e^{i(F,x)}}{4\pi}H(\tau)\int_{r<\tau}\frac{e^{-i(F,y)-rf}}{r}q(y,\tau - r)dV(y), \quad r = \|y - x\| \quad (13)$$

$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$.

Доказательство. Используя свойство фундаментального решения [6], получим обобщенное решение в виде свертки:

$$u = q(x,\tau) * \frac{e^{i(F,x)-\|x\|f}}{4\pi\|x\|}\delta(\tau - \|x\|) =$$

$$= \frac{e^{i(F,x)}}{4\pi}H(\tau)\int\limits_{\|y-x\|<\tau}\frac{e^{-i(F,y)-\|x-y\|f}}{\|y-x\|}q(y,\tau-\|y-x\|)dV(y),$$

$dV(y) = dy_1 dy_2 dy_3$. Что дает формулу теоремы. При этом интеграл существует в силу условий на $q(x,\tau)$.

3. Скалярные потенциалы однородного биволнового уравнения. Рассмотрим решения однородного уравнения (6):

$$\Box u + 2f\partial_\tau u + 2i(F,\nabla u) + f^2 u + (F,F)u = 0 \tag{14}$$

Его преобразование Фурье имеет вид:

$$\left\{(\xi+F,\xi+F)+(f-i\omega)^2\right\}\bar{\psi}^0 = 0$$

Следовательно [6], в пространстве обобщенные функций его решение имеет вид:

$$\bar{\psi}^0 = \varphi(\omega,\xi)\delta_S(\omega,\xi),$$

где $\delta_S(\omega,\xi)$ -- простой слой на поверхности S в M, на которой выполняются условия:

$$S = \left\{(\omega,\xi) : (\xi+F,\xi+F)+(f-i\omega)^2 = 0\right\}, \tag{15}$$

плотность простого слоя $\varphi(\omega,\xi)$ -- произвольная интегрируемая на S функция.

Формальное решение уравнения (14) имеет вид поверхностного интеграла

$$\psi^0(\tau,x) = \int\limits_S \varphi(\omega,\xi)\exp(-i\omega\tau - i(x,\xi))dS(\omega,\xi), \quad \forall\varphi(\omega,\xi)\in L_1(S) \tag{16}$$

При каких **F** такая поверхность существует, и какой вид она имеет?

3.1. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 = i\varepsilon - E$, где ε, E -- действительные скаляр и вектор. Тогда S – это поверхность в $R^4 = \left\{(\omega,\xi) \overset{\Delta}{=} (\omega,\xi_1,\xi_2,\xi_3)\right\}$, описываемая уравнением:

$$S = \left\{(\omega,\xi) : (\xi - E,\xi - E) - (\varepsilon-\omega)^2 = 0\right\}. \tag{17}$$

Это трехмерный конус в R^4 с вершиной в точке $(\omega,\xi) = (\varepsilon,E)$. Т.к. на его поверхности

$$\omega = \pm\|\xi - E\| + \varepsilon,$$

интеграл (16) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}\psi^0(\tau,x) &= e^{-i\varepsilon\tau}\int\limits_{R^3}\phi(\xi)\exp\left(\pm i\|\xi-E\|\tau - i(x,\xi)\right)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ &= e^{-i\varepsilon\tau - i(x,E)}\int\limits_{R^3}\phi(\xi)\exp\left(\pm i\|\xi-E\|\tau - i(x,\xi-E)\right)d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ &= e^{-i(\varepsilon\tau+(x,E))}\int\limits_{R^3}\varphi(\varsigma)\exp\left(\pm i\|\varsigma\|\tau - i(x,\varsigma)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2 d\varsigma_3\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь $\forall\varphi(\varsigma)\in L_1(R^3)$ – произвольная интегрируемая на R^3 функция.

3.2. Если же $\mathbf{F}=\mathbf{F}_2=h-iH$ ($h,\ H$ – действительные скаляр и вектор), тогда из (15) следует:

$$\left(\xi-iH,\xi-iH\right)+\left(h-i\omega\right)^2=\left\|\xi\right\|^2-\omega^2+\left(h^2-\left\|H\right\|^2\right)-2i\left(\left(H,\xi\right)+h\omega\right)=0 \tag{19}$$

Решением этого уравнения будет пересечение двух гиперповерхностей в M, задаваемых равенствами:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\left\|\xi\right\|^2=\omega^2+\left\|H\right\|^2-h^2,\quad h\omega+(H,\xi)=0\right\} \tag{20}$$

При $H=0$ $\quad S=\left\{(\omega,\xi):\left\|\xi\right\|^2=-h^2,\quad \omega=0\right\}$, откуда следует, что такой поверхности не существует.

При $H\neq 0$ второе уравнение – это трехмерная гиперплоскость в R^4, проходящая через начало координат, с вектором нормали (h,H). Если $h\neq 0$, то S – это пересечение трехмерного гиперболоида с трехмерной гиперплоскостью, на котором

$$\left\|\xi\right\|^2=(h^{-1}H,\xi)^2+\left\|H\right\|^2-h,\quad \omega=-(h^{-1}H,\xi)\quad\Rightarrow\quad \left\|\xi\right\|^2=\frac{\left\|H\right\|^2-h^2}{1-(e_\xi,h^{-1}H)^2},\qquad e_\xi=\frac{\xi}{\left\|\xi\right\|}.$$

Условием существования такого пересечения, в силу не отрицательности $\left\|\xi\right\|$, является неравенство

$$\frac{\left\|H\right\|^2-h^2}{h^2-\left\|H\right\|^2\cos^2\theta}\geq 0, \tag{21}$$

где θ -- угол между ξ и H. Неравенсто выполняется при $\left|h\right|\leq\left\|H\right\|$, если $\left|\cos\theta\right|<\dfrac{|h|}{\left\|H\right\|}<1$.

При $\left|h\right|>\left\|H\right\|$ решений нет.

Легко видеть, что $S_\cap(\xi)$ -- это однополостный гиперболоид вращения вокруг вектора H в R^3, полуоси которого определяются величинами

$$\left(\left\|H\right\|^2-h^2\right)^{1/2},\quad \left(\left\|H\right\|^2-h^2\right)^{1/2},\ h.$$

Формула решения (17) приводится к виду:

$$\psi^0(\tau,x)=\int\limits_{S_\cap(\xi)}\varphi(\xi)\exp\left(i(\tau h^{-1}H-x,\xi)\right)dS_\cap(\xi),\quad \forall\varphi(\xi)\in L_1\left(S_\cap(\xi)\right) \tag{22}$$

где

$$S_\cap(\xi)=\left\{\ \xi:\left\|\xi\right\|=\sqrt{\frac{\left\|H\right\|^2-h^2}{1-\left\|h^{-1}H\right\|^2\cos^2\theta}},\quad \frac{\pi}{2}-\arccos\frac{|h|}{\left\|H\right\|}<\theta<\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{|h|}{\left\|H\right\|}\right\}$$

Этот интеграл можно упростить, если перейти к декартовой системе координат, связанной с вектором H:

$$\xi=\sum_{k=1}^{3}\zeta_k e^k,\quad e^3=e_H=H/\left\|H\right\|.$$

Тогда

$$S_\cap(\xi)\to S_\varsigma=\left\{\zeta:\frac{\left\|\zeta\right\|_2^2}{\left\|H\right\|^2-h^2}-\frac{1}{h^2}\zeta_3^{\ 2}=1\right\},\quad \left\|\zeta\right\|_2^2=\zeta_1^2+\zeta_1^2$$

и интеграл (22) преобразуется к интегралу по плоскости $\varsigma \in R^2$, с выколотым кругом радиуса $r = \|H\|^2 - h^2$, на которой $\zeta_3 = \pm\sqrt{\frac{h^2\|\zeta\|_2^2}{\|H\|^2 - h^2}} \equiv \pm\alpha\left(\|\varsigma\|\right)$. Действительно, в силу ортогональности H к e^1 и e^2, имеем

$$\psi^0(\tau,x) = \int\limits_{S_\zeta} \gamma(\varsigma)\exp\left(ih^{-1}(H,\varsigma)\tau - i\sum_{k=1}^{2}(x,e^k)\zeta_k - i(x,e_H)\zeta_3)\right)dS_\zeta \quad \Rightarrow$$

$$\psi^0(\tau,x) = \int\limits_{\|\varsigma\|_2^2 \geq \|H\|^2 - h^2} \gamma(\varsigma)\exp\left(\pm i\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|) - i(\varsigma, x_{\perp H}) \mp i(x,e_H)\alpha(\|\varsigma\|)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$$\|\varsigma\|_2^2 = \sum_{k=1}^{2}\varsigma_k^2, \quad \forall\gamma(\varsigma) \in L_1\left(\varsigma \in R^2, \quad \|\varsigma\| \geq \|H\|^2 - h^2\right).$$

Остался случай $h = 0$. Тогда из (20) получим:

$$S = \left\{\omega = \pm\sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2}, \|\xi\| \geq \|H\|, \quad (H,\xi) = 0\right\}$$

$$\psi^0(\tau,x) = \int\limits_{\{\xi \perp H\}\bigcap\{\|\xi\| \geq \|H\|\}} \varphi(\xi)\exp\left(i(\pm\tau\sqrt{\|\xi\|^2 - \|H\|^2} - (x,\xi))\right)dS_\cap(\xi) \quad \Rightarrow$$

$$\psi_\mp^0(\tau,x) = \iint\limits_{\|\varsigma\|_2 \geq \|H\|} \gamma(\varsigma)\exp\left(-i\left(\varsigma_1(x,e_H^1) + \varsigma_2(x,e_H^2) \mp \tau\sqrt{\|\zeta\|^2 - \|H\|^2}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

$\forall\gamma(\varsigma) \in L_1\left(\varsigma \in R^2, \quad \|\varsigma\| \geq \|H\|\right)$. Здесь область интегрирования тоже совпадает с плоскостью, перпендикулярной вектору H, с выколотым кругом радиуса $\|H\|$.

Сформулируем полученные результаты в виде теоремы.

Т е о р е м а 3.1. *Решения однородного биволнового уравнения* (1) *при* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 = h - iH$ *существуют, если* $\|H\| > |h|$, *и имеют вид*:

при $|h| \neq 0$

$$\psi_\pm^0(\tau,x) =$$

$$= \iint\limits_{\|\varsigma\|^2 \geq \|H\|^2 - h^2} \gamma(\varsigma)\exp\left(\pm i\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|) - i(\varsigma, x_{\perp H}) \mp i(x,e_H)\alpha(\|\varsigma\|)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2, \tag{23}$$

где $\alpha\left(\|\varsigma\|\right) = \frac{\|h\zeta\|}{\sqrt{\|H\|^2 - h^2}}$, $\varsigma \in R^2$, $\forall\gamma(\varsigma) \in L_1\left(\left\{\varsigma \in R^2 : \|\varsigma\|^2 \geq \|H\|^2 - h^2\right\}\right)$, $x_{\perp H} = x - \left(x, e_H\right)e_H$,

при $|h| = 0$

$$\psi_\mp^0(\tau,x) = \iint\limits_{\|\varsigma\| \geq \|H\|} \gamma(\varsigma)\exp\left(-i\left(\varsigma_1(x,e^1) + \varsigma_2(x,e^2) \mp \tau\sqrt{\|\zeta\|^2 - \|H\|^2}\right)\right)d\varsigma_1 d\varsigma_2, \tag{24}$$

$\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left(\varsigma\in R^2,\ \ \|\varsigma\|\geq\|H\|\right)$, *либо представимы в виде линейной комбинаций решений такого вида*: $\psi^0(\tau,x)=a\psi_+^0(\tau,x)+b\psi_-^0(\tau,x),\quad a,b\in\mathbb{Z}.$

3.3. В общем случае структурный коэффициент

$$\mathbf{F}=f+F=(f_1+if_2)+\left(F_1+iF_2\right) \tag{25}$$

разлагается на два бикватерниона:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2=\left(h+i\varepsilon\right)-\left(E+iH\right), \tag{26}$$

$$\mathbf{F}_1=if_2+F_1=i\varepsilon-E,\quad \mathbf{F}_2=f_1+iF_2=h-iH.$$

Предполагаем здесь, что

$$\mathbf{F}_1\neq 0,\quad \mathbf{F}_2\neq 0. \tag{27}$$

Тогда гиперповерхность (15) описывается соотношениями:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\left((\xi-E)-iH,(\xi-E)-iH\right)\right)+\left(h+i(\varepsilon-\omega)\right)^2=0\right\} \tag{28}$$

Выделим действительную и мнимую часть:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-\|H\|^2-2i\left(H,(\xi-E)\right)+(h^2-(\varepsilon-\omega)^2+2ih(\varepsilon-\omega))=0\right\},$$

приравнивая их нулю, получим S – это пересечение двух гиперповерхностей в R^4:

$$S=\left\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-(\omega-\varepsilon)^2=\|H\|^2-h^2\quad\cap\quad\left(H,(\xi-E)\right)+h(\omega-\varepsilon)=0\right\} \tag{29}$$

Чтобы второе уравнение описывало гиперплоскость, необходимо, чтобы H и h не обращались одновременно в ноль в R^4. В противном имеем случай 3.1.

Если $\|H\|-|h|\neq 0$, то S – это пересечение в R^4 трехмерного однополостного (при $\|H\|-|h|>0$) или двуполостного (при $\|H\|-|h|<0$) гиперболоида, сдвинутого на вектор $\left(\omega^*,\xi^*\right)=(\varepsilon,E)$, с трехмерной гиперплоскостью с тем же сдвигом, которое в R^3 описывается множествами вида:

$$S_\cap(\xi)=\left\{\omega=\varepsilon-h^{-1}(H,\xi-E),\ \xi:\left\{\|\xi-E\|^2-\left(h^{-1}H,\xi-E\right)^2=\|H\|^2-h^2\right\}\right\} \tag{30}$$

Из формулы (16) и формулы (30) следует: при $|h|\neq 0$

$$\psi^0(\tau,x)=e^{-i\tau\varepsilon}\int\limits_{S_\cap(\xi)}\phi(\xi)\exp\left(i\left(\tau(h^{-1}H,\xi)-(x,\xi)\right)\right)dS_\cap(\xi), \tag{31}$$

Для $\forall\phi(\xi)\in L_1\left(S_\cap(\xi)\right)$.

Переходя к системе координат с началом в точке $\xi^*=E$ и ортами $\left\{e^1,e^2,e^3\right\}$, получим

$$S_\varsigma(\varepsilon,E)=\left\{\varsigma\in R^3:\|\varsigma\|^2-\left(\|h^{-1}H\|\varsigma_3\right)^2=\|H\|^2-h^2\right\}=$$

$$=\left\{\varsigma\in R^3:\zeta_1^2+\zeta_2^2+(1-\|h^{-1}H\|^2)\varsigma_3{}^2=\|H\|^2-h^2\right\}$$

Следовательно, такая поверхность существует, только если

$$\|H\|>|h|, \tag{32}$$

и на ней

$$\varsigma_3(\|\varsigma\|)=\pm\sqrt{\frac{\|H\|^2-h^2-\|\zeta\|^2}{1-\|h^{-1}H\|^2}}\ \square\ \beta(\|\varsigma\|),\quad \|\zeta\|^2>\|H\|^2-h^2,\quad \varsigma\in R^2:$$

В этой системе координат решение (29) можно представить в виде

$$\psi^0(\tau,x)=\exp\Big(-i\tau\big(\varepsilon-(h^{-1}H,E)\big)-i\big(x,E\big)\Big)\int\limits_{S_\cap(\xi)}\phi(\xi)\exp\Big(i\Big(\tau(h^{-1}H,\xi-E)-(x,\xi-E)\Big)\Big)dS_\cap(\xi)=$$

$$=\exp\Big(-i\tau\big(\varepsilon-(h^{-1}H,E)\big)-i\big(x,E\big)\Big)\iint\limits_{\|\varsigma\|>\sqrt{\|H\|^2-h^2}}\gamma(\varsigma)\exp\Big(i\Big(\tau(h^{-1}H,\|\varsigma\|e_H)-(x_{\perp H},\varsigma)\mp\beta(\|\varsigma\|)x_{\parallel H}\Big)\Big)d\varsigma_1 d\varsigma_1$$

для $\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left\{\varsigma:\|\varsigma\|\le\sqrt{\|H\|^2-h^2}\right\}$, $x=x_{\parallel H}e^3+x_{\perp H}$, $x_{\parallel H}=(x,e^3)$, $x_{\perp H}=x-(x,e^3)e^3$.

Если $|h|=0$, тогда

$$S=\Big\{(\omega,\xi):\|\xi-E\|^2-(\omega-\varepsilon)^2=\|H\|^2\cap\big(H,(\xi-E)=0\big)\Big\},$$

$$S_\cap(\xi)=\Big\{(\omega,\xi):\omega=\varepsilon\pm\sqrt{\|\xi-E\|^2-\|H\|^2};\quad\xi:\Big\{\|\xi-E\|^2\ge\|H\|^2\cap\big(H,(\xi-E)=0\big)\Big\}\Big\},$$

$$\psi^0(\tau,x)=e^{-i\tau\varepsilon}\int\limits_{\substack{\xi-E\perp H\,\cap\\ \|\xi-E\|\ge\|H\|}}\varphi(\xi)\exp\Big(i(\pm\tau\sqrt{\|\xi-E\|^2-\|H\|^2}-(x,\xi))\Big)dS_\cap(\xi),\quad\forall\varphi(\xi)\in L_1(S_\cap(\xi))$$

$S_\cap(\xi)$ – это часть плоскости, перпендикулярной вектору H, проходящей через точку $\xi^*=E$, с выколотым кругом радиуса $\|H\|$, с центром в той же точке $\xi^*=E$. Интеграл тоже можно упростить, переходя к системе координат, связанной с осями соответствующего однополостного гиперболоида.

Сформулируем полученные результаты в следующей теореме.

Т е о р е м а 3.2 *Скалярные потенциалы однородного уравнения трансформации* (1), *удовлетворяющие уравнению* (14), *существуют. если* $\|H\|>|h|$, *и представимы в виде линейной комбинаций решений вида*:

при $|h|\neq 0$

$$\psi^0(\tau,x)=\exp\Big(-i\tau\big(\varepsilon-(h^{-1}H,E)\big)-i\big(x,E\big)\Big)\times$$
$$\times\iint\limits_{\|\varsigma\|>\sqrt{\|H\|^2-h^2}}\gamma(\varsigma)\exp\Big(i\Big(\tau h^{-1}\|H\|\|\varsigma\|-(x_{\perp H},\varsigma)\mp\beta(\|\varsigma\|)x_{\parallel H}\Big)\Big)d\varsigma_1 d\varsigma_2, \tag{33}$$

где $\beta(\|\varsigma\|)=|h|\sqrt{\dfrac{\|\zeta\|^2}{\|H\|^2-h^2}-1}$, *а* *при* $|h|=0$

$$\psi^0(\tau,x)=e^{-i\tau\varepsilon-i(x,E)}\int\limits_{\|\varsigma\|\ge\|H\|}\gamma(\varsigma)\exp\Big(i(\pm\tau\sqrt{\|\varsigma\|^2-\|H\|^2}-(x_{\perp H},\varsigma)-\big(x,e_H\big)\Big)d\varsigma_1 d\varsigma_2,$$

для $\forall\gamma(\varsigma)\in L_1\left\{\varsigma\in R^2:\|\varsigma\|\ge\sqrt{\|H\|^2-h^2}\right\}$, $x_{\parallel H}=(x,e_H)$, $x_{\perp H}=x-x_{\parallel H}e_H$, $e_H=H/\|H\|$.

В силу произвольности $\gamma(\varsigma)$, можно строить множество скалярных потенциалов и соответственно решений исходного бикватернионного уравнения (1).

Рассмотрим далее класс элементарных решений твисторного уравнения (1), через которые можно выразить любые его решения.

4. Элементарные твисторы и твисторные поля. Назовем решения однородного биволнового уравнения (2) *твисторами.* Построим их бикватернионные представления.

4.1. Рассмотрим вначале случай, когда $\mathbf{F}=\mathbf{F}_1=i\varepsilon+E,$ и скалярные потенциалы имеют вид (18). Заметим, что входящие в них функции -

$$\psi_\xi^\pm(\tau,x)=\exp\left(\left(-i\varepsilon\tau\pm i\|\xi-E\|\right)\tau-i(x,\xi)\right),\quad \forall\xi\in R^3, \tag{32}$$

по построению являются решением однородного уравнения (14) и представляют собой две гармонические волны, движущиеся с фазовой скоростью $c=\dfrac{-\varepsilon\pm\|\xi-E\|}{\|\xi\|}$ в направлении волнового вектора ξ (или противоположном направлении в зависимости от знака *c*); длина волн $\lambda=2\pi/\|\xi\|$, их частота $\varpi=\left|-\varepsilon\pm\|\xi-E\|\right|$, период колебаний $T=\dfrac{2\pi}{\left|-\varepsilon\pm\|\xi-E\|\right|}$.

При $\|\xi\|\to\infty$ $c\to\pm1,\ \lambda\to0,\ \varpi\to\pm\infty,\ \ T\to0$. В частности, скалярный потенциал

$$\psi_E^\pm(\tau,x)=\exp\left(-i\varepsilon\tau-i(x,E)\right)$$

описывает гармоническую волну в направлении вектора E, у которой $c=\dfrac{|\varepsilon|}{\|E\|}$, $\varpi=|\varepsilon|,\ T=\dfrac{2\pi}{|\varepsilon|}$.

Рассмотрим порождаемый $\psi_\xi^\pm(\tau,x)$ *элементарный ξ-твистор* -

$$\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm=\frac{\mathbf{D}_F^-\psi_\xi^\pm}{\sqrt{\|\xi\|^2+\|E\|^2}}=\frac{\pm i\|\xi-E\|-(\xi+E)}{\sqrt{\|\xi\|^2+\|E\|^2}}\psi_\xi^\pm(\tau,x) \tag{33}$$

Интересно, что его амплитуда не зависит от ε. Его норма и псевдонорма [1] равны:

$$\left\|\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm\right\|=1,\qquad \left\langle\left\langle\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm\right\rangle\right\rangle=i\frac{\sqrt{2(\xi,E)}}{\sqrt{\|\xi\|^2+\|E\|^2}}\ . \tag{34}$$

При $E\perp\xi$ $\left\langle\left\langle\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm\right\rangle\right\rangle=0,$ при $E=\xi$ $\left\langle\left\langle\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm\right\rangle\right\rangle=i.$ Бикватернион его энергии - импульса равен

$$\mathbf{\Xi}(\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm)=1+\frac{\|\xi-E\|^2}{\|\xi\|^2+\|E\|^2}\left(1\pm2i(\xi+E)\right).$$

В частности, $\mathbf{\Xi}(\mathbf{\Psi E}_E^\pm)=1$

Бикватернионы – свертки вида:

$$\mathbf{BE}^0(\tau,x,\xi)=\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm(\tau,x)*\mathbf{C}^0(\tau,x), \tag{35}$$

где $\mathbf{C}^0(\tau,x)$ --произвольные функциональные бикватернионы, допускающие такую свертку, в силу свойств свертки, также являются твисторами, и описывают ξ-поляризованные нестационарные твисторные $\mathbf{C}^0$ - поля

Используя $\mathbf{\Psi}_\xi^\pm$ можно также строить неполяризованные твисторы $\mathbf{BE}^0(\tau,x)$ в виде :

$$\begin{gathered}\mathbf{BE}^0(\tau,x)=\sum_{C^0,\mathbf{\Psi}^\phi}\mathbf{\Psi E}^\phi(\tau,x)*\mathbf{C}^0(\tau,x),\\ \mathbf{\Psi E}^\phi(\tau,x)=\int_{R^3}\phi(\xi)\mathbf{\Psi E}_\xi^\pm(\tau,x)dV(\xi),\quad \forall\phi(\xi):\phi(\xi)\|\xi\|^{-1}\in L_1(R^3)\end{gathered} \tag{36}$$

Бикватернионы $\mathbf{C}^0(\tau,x)$ произвольные, допускающие такие свертки, в том числе могут быть из класса сингулярных обобщенных функций.

4.2. При $\mathbf{F}=\mathbf{F}_2=h-iH$, $h\neq0$, как следует из (23), функции

$$\psi_{\pm}(\tau,x)=\exp\left(\pm i\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|)-i(\varsigma,x_{\perp H})\mp i(x,e_H)\alpha(\|\varsigma\|)\right)=$$
$$=\exp\left(i\left(\tau h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|)-\varsigma_1 x_1'-\varsigma_2 x_2'\mp x_3'\,\alpha(\|\varsigma\|)\right)\right).$$

являются скалярными потенциалами однородного биволнового уравнения. Для построения соответствующего ему твистора рассмотрим билинейное уравнение в системе координат $\left(x_1',x_2',x_3'\right)$, связанной с вектором H (далее штрихи опускаем).

Скалярный потенциал $\psi_\xi(\tau,x)$ описывает гармонические волны в направлении волнового вектора $k_\varsigma=\left\{\varsigma_1,\varsigma_2,\pm h\alpha(\|\varsigma\|)\right\}$, частота колебаний которых $\varpi=\left|h^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|)\right|$, период $T=2\pi/\varpi$, длина волны $L=2\pi/\|k_\varsigma\|$.

Вычислим порождаемые ими элементарные твисторы:

$$\mathbf{\Psi H}_\varsigma^{\pm}(\tau,x)=\frac{1}{\sqrt{\|H\|^2+h^2}}\mathbf{D}_F^{-}\psi_\varsigma^{\pm}(\tau,x)=$$
$$=\psi_\varsigma^{\pm}\frac{h\pm ih^{-1}\|H\|\alpha(\|\varsigma\|)-\{\varsigma_1,\varsigma_2,\mp\alpha(\|\varsigma\|)\}+iH}{\sqrt{\|H\|^2+h^2}},\quad \|\zeta\|\geq\sqrt{\|H\|^2-h^2} \tag{37}$$

Здесь в фигурных скобках указаны компоненты действительной части вектора. Норма $\left\|\mathbf{\Psi H}_\varsigma^{\pm}\right\|=\sqrt{1+\dfrac{2\|\zeta\|^2\|H\|^2}{\|H\|^4-h^4}}$, а псевдонорма не зависит от ς : $\left\langle\left\langle\mathbf{\Psi H}_\varsigma^{\pm}\right\rangle\right\rangle=i\sqrt{\dfrac{\|H\|^2-h^2}{\|H\|^2+h^2}}$.

При $\|\zeta\|=\sqrt{\|H\|^2-h^2}$ норма $\left\|\mathbf{\Psi H}_\varsigma^{\pm}\right\|=\sqrt{1+\dfrac{2\|H\|^2}{\|H\|^2+h^2}}$.

4.3. В общем случае (для удобства выкладок) будем работать в системе координат, изначально связанной с вектором H ($H \parallel e_3$). Рассмотрим входящие в скалярные потенциалы $\psi^0(\tau,x)$ функции из теоремы 3.2, которые в выбранной системе координат имеют вид:

$$\psi_\varsigma^{\pm}(\tau,x)=\exp\left(-i\left(\tau\left(\varepsilon+h^{-1}\|H\|\left(\|\varsigma\|-E_3\right)\right)+\left(x,E-\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)\right)\right)\right)=$$
$$=-e^{-i\left(\tau(\varepsilon-h^{-1}\|H\|-E_3)-(x,E)\right)}\exp\left(-i\left(\tau h^{-1}\|H\|(\|\varsigma\|)-\left(x,\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)\right)\right)\right) \tag{38}$$

где введен действительный вектор

$$\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)=\{\varsigma_1,\varsigma_2,\pm\beta(\|\varsigma\|)\},\quad \beta(\|\varsigma\|)=|h|\sqrt{\frac{\|\zeta\|^2}{\|H\|^2-h^2}-1},\quad \|\zeta\|>\sqrt{\|H\|^2-h^2},\quad \varsigma\in R^2.$$

По построению, они тоже являются решениями (14), и описывают, соответственно знаку, две гармонические волны, движущиеся с фазовыми скоростями $c^{\pm}=\dfrac{\varepsilon+h^{-1}\|H\|\left(\|\varsigma\|-E_3\right)}{\left\|\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)-E\right\|}$ в направлении волновых векторов $K^{\pm}=\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)-E$; длина волн $\lambda^{\pm}=2\pi/\left\|\Pi^{\pm}(\|\varsigma\|)-E\right\|$, их частота $\varpi=\varepsilon+h^{-1}\|H\|\left(\|\varsigma\|-E_3\right)$, период колебаний $T=\dfrac{2\pi}{\varepsilon+h^{-1}\|H\|\left(\|\varsigma\|-E_3\right)}$.

Вычислим порождаемый ими *элементарный ξ-твистор*

$$\mathbf{\Psi}_{\varsigma}^{\pm}(\tau,x)=\mathbf{D}_{F}^{-}\psi_{\varsigma}^{\pm}(\tau,x)=\left(h-i\left(h^{-1}\left\|H\right\|\left(\left\|\varsigma\right\|-E_3\right)\right)+\Pi^{\pm}(\left\|\varsigma\right\|)+iH\right)\psi_{\varsigma}^{\pm} \tag{39}$$

Его норма и псевдонорма равны:

$$\left\|\mathbf{\Psi}_{\xi}^{\pm}\right\|=\left\|H\right\|\sqrt{1+\frac{\left(\left\|\varsigma\right\|-E_3\right)^2}{h^2}+\frac{\left\|\zeta\right\|^2}{\left\|H\right\|^2-h^2}}$$

:

$$\left\langle\left\langle\mathbf{\Psi}_{\xi}^{\pm}\right\rangle\right\rangle=\sqrt{\left\|H\right\|^2\left(\frac{\left(\left\|\varsigma\right\|-E_3\right)^2}{h^2}-1\right)-\left\|\varsigma\right\|^2\left(1-\frac{h^2}{\left\|H\right\|^2-h^2}\right)} \tag{40}$$

Твисторы – свертки вида:

$$\mathbf{B}^0(\tau,x,\xi)=\mathbf{\Psi}_{\xi}(\tau,x)*\mathbf{C}^0(\tau,x), \tag{41}$$

$$\mathbf{B}^0(\tau,x)=\sum_{C^0(\tau,x)}\mathbf{\Psi}^{\chi}(\tau,x)*\mathbf{C}^0(\tau,x),$$

$$\mathbf{\Psi}^{\chi}(\tau,x)=\int\limits_{\left\|\zeta\right\|^2>\left\|H\right\|^2-h^2}\chi(\varsigma)\mathbf{\Psi}_{\zeta}(\tau,x)dV(\zeta),\quad \forall\chi(\varsigma)\in L_1\left\{\varsigma\in R^2:\left\|\zeta\right\|^2>\left\|H\right\|^2-h^2\right\} \tag{42}$$

описывают ξ-поляризованные (41) и неполяризованные (42) нестационарные твисторные $\mathbf{C}^0$–поля, порождаемые потенциалом $\mathbf{\Psi}^{\chi}(\tau,x)$, амплитуда которых в каждой точке поля определяется значением $\mathbf{C}^0(\tau,x)$.

Заключение. Рассмотренное здесь биволновое твисторное уравнение (1), если записать его в виде системы уравнений для скалярной и векторной части и перейти к их тензорному аналогу, можно отнести к классу уравнений Янга-Милса [5], используемых в квантовой механике для построения моделей элементарных частиц . Решения однородных уравнений Янга-Милса называются *твисторами*. Поэтому автор использовал это название для бикватернионного аналога этих уравнений (1), аналогично, как в [2], где был рассмотрен частный случай (1) при чисто векторном представлении структурного коэффициента.

Здесь показано, что для твисторов существуют порождающие их скалярные потенциалы, которые определяют их решения. Скалярные потенциалы выражаются через интегралы от элементарных потенциалов, выражаемых через экспоненциальные функции, и содержат достаточно произвольные подынтегральные функции типа $\chi(\varsigma)$. От этих представлений нетрудно перейти к представлению твисторов с использованием функций Бесселя и сферических гармоник, если выбирать $\chi(\varsigma)$ соответственно интегральным разложениям этих специальных функций. В этом случае можно получить счетное число еще более элементарных твисторов, которые можно использовать в теории элементарных частиц и квантовой теории [7].

Биволновое уравнение (1) при $\mathbf{B}=i\rho+J$ имеет вид уравнения трансформации масс-зарядов ρ) и электро-гравимагнитных токов (J) под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, описываемого бикватернионом **F,** ранее предложенного автором для одной бикватернионной модели ЭГМ-поля [7,8]. Если перейти на физический язык, полученные здесь твисторы для этой модели описывают трансформацию спиноров свободного поля (при **F** =0), под воздействием постоянного внешнего ЭГМ-поля, вектор электрической напряженности которого равен *E*, а гравимагнитной напряженности *H*. Потенциальная часть *H* описывает напряженность внешнего гравитационного поля, а его вихревая часть соответствует магнитной напряженности внешнего поля. Скаляры ε и h описывают свойства сопротивления-поглощения этих полей. Используя построенные здесь решения можно детально исследовать такие процессы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations // Int. J. Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. – 2012. – Vol. 7. – Issue 1. – P. 19-39.

[2] Алексеева Л.А. Твисторное биволновое уравнение и его обобщенные решения// Доклады НАН РК. – 2012. – № 4(284). – С. 27-33.

[3] Алексеева Л.А. Уравнения взаимодействия А-полей и законы Ньютона // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. – 2004. – № 3. – С. 45-53.

[4] Алексеева Л.А. Полевые аналоги законов Ньютона для одной модели электро-гравимагнитного поля // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2009. – Т. 6, – № 1. – С. 122-134.

[5] Yang C.N., Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance // Physical review. – 1954. – 96(1). – P. 191-195.

[6] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1976.

[7] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

[8] **MSQ** 15A66 Clifford algebras, spinors.

REFERENCES

[1] Alexeyeva L.A. Biquaternions algebra and its applications by solving of some theoretical physics equations. Int. J. Clifford Analysis, Clifford Algebras and their Applications. 2012. Vol. 7. Issue 1. P. 19-39.

[2] Alekseeva L.A. Tvistornoe bivolnovoe uravnenie i ego obobshhennye reshenija. Doklady NAN RK. 2012. N 4(284). S. 27-33.

[3] Alekseeva L.A. Uravnenija vzaimodejstvija A-polej i zakony N'jutona. Izvestija NAN RK. Serija fiziko-matematicheskaja. 2004. N 3. S. 45-53.

[4] Alekseeva L.A. Polevye analogi zakonov N'jutona dlja odnoj modeli jelektro- gravimagnitnogo polja. Giperkompleksnye chisla v geometrii i fizike. 2009. T. 6, N 1. S. 122-134.

[5] Yang C.N., Mills R. Conservation of Isotropic Spin and Isotropic Gauge Invariance. Physical review. 1954. 96(1). P. 191-195.

[6] Vladimirov V.S. Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike. M.: Nauka, 1976.

[7] Bogoljubov N.N., Shirkov D.V. Kvantovye polja. M.: Nauka, 1980. 320 s.

[8] MSQ 15A66 Clifford algebras, spinors.

Поступила 26.11.2014 г.