N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 26 – 32

CYLINDRICAL COORDINATES OF A TEST BODY IN THE HILL'S GRAVITATIONAL FIELD

A. A. Bekov[1], M. D. Shinibayev[2], S. K. Dosibekov[3], A. M. Taskulova[3], K. S. Astemesova[4], D. I. Usipbekova[4]

[1]The Institute of Space Investigations named after U. M. Sultangazyn, JSC "NCKIT", Almaty, Kazakhstan,
[2]South-Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent, Kazakhstan,
[3]M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan,
[4]Kazakh national technical university after K. I. Satpayev, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: bekov@mail.ru

Key words: Cylindrical coordinates, a test body, the Hill's gravitational field
Abstract. We propose a method of determining the cylindrical coordinates of the orbits of hyperbolic type for a test body in the gravitational field of the Hill.

УДК 521.3+629.195.1

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ХИЛЛА

А. А. Беков[1], М. Д. Шинибаев[2], С. К. Досыбеков[3], А. М. Таскулова[3], К. С. Астемесова[4], Д. И. Усипбекова[4]

[1]Институт космических исследований им. У. М. Султангазина АО «НЦКИТ», Алматы, Казахстан,
[2]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, Шымкент, Казахстан,
[3]Южно-Казахстанский государственный университет им. М. О. Ауезова, Шымкент, Казахстан,
[4]Казахский национальный технический университет им. К. И. Сатпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: цилиндрические координаты, испытательное тело, гравитационное поле Хилла.
Аннотация. Предлагается метод определения цилиндрических координат орбит гиперболического типа для пробного тела в поле тяготения Хилла.

Дифференциальные уравнения движения пробного тела в переменных Хилла имеют вид [1]:

$$\left.\begin{aligned} d\vartheta &= \frac{w\,dw}{\sqrt{-w^4+2w^3+Hw^2+\alpha}}, \\ \frac{d^2 s}{d\vartheta^2} &+ \left(1+\frac{\beta}{w^4}\right)s = 0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\alpha = \frac{\nu c^6}{\mu^4}, \quad \beta = \frac{(\nu-\nu')c^6}{\mu^4}, \quad \frac{1}{\rho} = w\cdot\frac{\mu}{c^2}, \quad s = \frac{z}{\rho},$$

α,β – постоянные параметры, $\rho^2 = x^2 + y^2$; s – тангенс широты; w – переменная Хилла; ϑ – истинная долгота; c и h – постоянные интеграла площадей и интеграла энергии; ν и ν' – малые параметры; μ – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального и пробного тела.

Интегрирование первого уравнения из (1) позволяет определить полярные координаты пробного тела в случае орбит гиперболического типа ($\alpha > 0,\ H > 0$):

$$\rho = (\rho_{00} + k^2\rho_{02} + k^3\rho_{03}) + (k\rho_{11} + k^3\rho_{13})\cos\frac{\pi}{2K}u + (k^2\rho_{22} + k^3\rho_{23})\cos\frac{\pi}{K}u + \\ + k^3\rho_{33}\cos\frac{3\pi}{2K}u, \tag{2}$$

$$\vartheta = (\vartheta_{00} + k^2\vartheta_{02})u + (k\vartheta_{11} + k^3\vartheta_{13})\sin\frac{\pi}{2K}u + (k^2\vartheta_{22} + k^3\vartheta_{23})\sin\frac{\pi}{K}u + \\ + k^3\vartheta_{33}\sin\frac{3\pi}{2K}u, \tag{3}$$

$$u = (1 + k^2u_{02} + k^3u_{03})T + (ku_{11} + k^3u_{13})\sin\frac{\pi}{2K}T + (k^2u_{22} + k^3u_{23})\sin\frac{\pi}{K}T + \\ + k^3u_{33}\sin\frac{3\pi}{2K}T + k^3u_{43}T\cos\frac{\pi}{2K}T, \tag{4}$$

где $\rho_{ij}, \vartheta_{ij}, u_{ij}$ – постоянные величины, определяемые через корни подкоренного полинома ($i, j = 1,2,3,4$)

$$G_4(w) = -w^4 + 2w^3 + Hw^2 + \alpha.$$

Для определения аппликаты пробного тела используем второе уравнение из (1), переписав его в следующем виде

$$\frac{d^2s}{du^2} + \mu(w^2 + \beta w^{-2})s = 0, \tag{5}$$

которое после вычисления скобки будет представлено в виде дифференциального уравнения Хилла.

Ранее[1] было найдено

$$w = w_{00} + k^2w_{02} + (kw_{11} + k^3w_{13})\cos\frac{\pi}{2K}u + (k^2w_{22} + k^3w_{23})\cos\frac{\pi}{2K}u + \\ + k^3w_{33}\cos\frac{3\pi}{2K}u, \tag{6}$$

где $K = \int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода; k – модуль эллиптического интеграла 1-го рода; u – промежуточная переменная

$$u = \int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}. \tag{7}$$

Рассмотрим случай малого наклона, т.е. $s \neq 0,\ s^2 = 0,\ s \approx O(k)$. В этом случае (6) перепишется в следующем виде

$$w = w_{00} + k^2w_{02} + kw_{11}\cos\frac{\pi}{2K}u + k^2w_{22}\cos\frac{\pi}{2K}u. \tag{8}$$

[1] Шинибаев М.Д. и др. Гиперболический тип движения пробного тела во второй задаче Хилла. – в печати.

Учитывая (8), найдем

$$w^2 = (a_{00} + k^2 a_{02}) + k^2 a_{12}\cos\frac{\pi}{K}u + (ka_{21} + k^2 a_{22})\cos\frac{\pi}{2K}u, \tag{9}$$

где

$$a_{00} = w_{00}^2,\quad a_{02} = \frac{1}{2}w_{11}^2 + 2w_{02}w_{00},\quad a_{12} = \frac{1}{2}w_{11}^2,\ a_{21} = 2w_{11}w_{00},\quad a_{22} = 2w_{22}w_{00};$$

$$\beta w^{-2} = (b_{00} + k^2 b_{02}) + k^2 b_{12}\cos\frac{\pi}{K}u + (kb_{21} + k^2 b_{22})\cos\frac{\pi}{2K}u, \tag{10}$$

где

$$b_{00} = \beta w_{00}^{-2},\quad b_{02} = b_{00}\left(\frac{3}{2}\frac{w_{11}^2}{w_{00}^2} - \frac{2w_{02}}{w_{00}}\right),\quad b_{12} = b_{00}\cdot\frac{3}{2}\frac{w_{11}^2}{w_{00}^2},\ b_{21} = -b_{00}\cdot\frac{2w_{11}}{w_{00}},$$

$$b_{22} = -b_{00}\cdot\frac{2w_{22}}{w_{00}}.$$

Подставим (10), (9) в (5)

$$\frac{d^2s}{du^2} + \left[(A_{00} + k^2 A_{02}) + k^2 A_{12}\cos\frac{\pi}{K}u + (kA_{21} + k^2 A_{22})\cos\frac{\pi}{2K}u\right]s = 0, \tag{11}$$

где

$$A_{00} = \mu(a_{00} + b_{00}),\quad A_{02} = \mu(a_{02} + b_{02}),\quad A_{12} = \mu(a_{12} + b_{12}),\quad A_{21} = \mu(a_{21} + b_{21}),$$
$$A_{22} = \mu(a_{22} + b_{22}).$$

Введем следующие обозначения в (11)

$$q_0 = A_{00} + k^2 A_{02},\quad 2q_1 = k^2 A_{12},\quad 2q_2 = kA_{21} + k^2 A_{22},$$

тогда

$$\frac{d^2s}{du^2} + \left[(q_0 + 2q_1\cos\frac{\pi}{K}u + 2q_2\cos\frac{\pi}{2K}u\right]s = 0. \tag{12}$$

Первое приближение примем в виде [2]

$$s_1 = A\cos(cu + \varepsilon),$$

тогда без учета q_2 имеем

$$\frac{d^2s}{du^2} + q_0 s = -2q_1 A\cos(cu + \varepsilon)\cos\frac{\pi}{K}u$$

или

$$\frac{d^2s}{du^2} + q_0 s = -q_1 A\left\{\cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + \cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right]\right\}. \tag{13}$$

Общее решение (13) состоит из суммы общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения (13):

$$s_2 = s_1 + s_r,\quad s_1 = A\cos(cu + \varepsilon),\quad s_r = B_0\cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] + B_1\cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right],$$

$$\dot{s}_r = -B_0\left(c - \frac{\pi}{K}\right)\sin\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] - B_1\left(c + \frac{\pi}{K}\right)\sin\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right],$$

$$\ddot{s}_r = -B_0\left(c - \frac{\pi}{K}\right)^2\cos\left[\left(c - \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right] - B_1\left(c + \frac{\pi}{K}\right)^2\cos\left[\left(c + \frac{\pi}{K}\right)u + \varepsilon\right].$$

Подставив в (13) $s_r, \dot{s}_r, \ddot{s}_r$ и найдем

$$B_0=\frac{q_1A}{\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0},\qquad B_1=\frac{q_1A}{\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0},$$

Следовательно, второе приближение дает решение вида

$$s_r=A\cos(cu+\varepsilon)+\frac{q_1A}{\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+$$
$$+\frac{q_1A}{\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right].$$

Найдем третье приближение из следующего дифференциального уравнения

$$\frac{d^2s}{du^2}+q_0s=-2q_1\cos\frac{\pi}{K}u\cdot\left\{A\cos(cu+\varepsilon)+\frac{q_1A}{\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{q_1A}{\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]\right\}-2q_2\cos\frac{\pi}{2K}u\left\{A\cos(cu+\varepsilon)+\frac{q_1A}{\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+\frac{q_1A}{\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]\right\}.$$

Если в правой части ограничиться величинами порядка $O(k^3)$, то имеем

$$\frac{d^2s}{du^2}+q_0s=-q_1A\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]-q_1A\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]-$$
$$-q_2A\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]-q_2A\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]. \tag{14}$$

Частное решение будем искать в следующем виде

$$s_r=D_0\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+D_1\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+D_2\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]+$$
$$+D_3\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right],$$

вычислим

$$\dot{s}_r = -D_0 \sin\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]\cdot\left(c-\frac{\pi}{K}\right) - D_1\left(c+\frac{\pi}{K}\right)\sin\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]-$$

$$-D_2\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)\sin\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]-D_3\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)\sin\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right],$$

$$\ddot{s}_r = -D_0\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]-D_1\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]-$$

$$-D_2\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]-D_3\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)^2\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right].$$

Подставив $\dot{s}_r$, $\ddot{s}_r$, s_r в (14), найдем

$$D_0 = \frac{q_1 A}{\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0},\quad D_1 = \frac{q_1 A}{\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0},\quad D_2 = \frac{q_2 A}{\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)^2 - q_0},\quad D_3 = \frac{q_2 A}{\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)^2 - q_0},$$

следовательно, мы можем общее решение уравнения (14) записать в следующем виде

$$s = A\left\{\cos(cu+\varepsilon) + \frac{k^2 A_{12}}{\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0\right]}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right] + \frac{k^2 A_{12}}{\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2 - q_0\right]}\times\right.$$

$$\times\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right] + \frac{kA_{21}+k^2A_{22}}{2\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)^2 - q_0\right]}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]+$$

$$\left.+\frac{kA_{21}+k^2A_{22}}{2\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)^2 - q_0\right]}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]\right\},$$

где

$$c = \left\{1 + [(q_0-1)^2 - q_1^2]^{1/2}\right\}^{1/2}.$$

Перепишем (15) в более компактной форме

$$s = s_0\left\{k\cos(cu+\varepsilon) + k^3 s_{13}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right] + k^3 s_{23}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+\right.$$

$$\left.+(k^2 s_{32}+k^3 s_{33})\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]+(k^2 s_{42}+k^3 s_{43})\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]\right\}, \tag{16}$$

где $A = s_0 k$, ε – постоянные интегрирования.

Найдем координату z с точностью $O(k^3)$. Для этого используем (16) и (2)

$$z=(kz_{01}+k^3z_{03})\cos(cu+\varepsilon)+k^3z_{23}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+k^3z_{33}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+$$

$$+(k^2z_{42}+k^3z_{43})\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]+(k^2z_{52}+k^3z_{53})\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right], \qquad (17)$$

где

$$z_{01}=\rho_{00},\qquad z_{03}=\rho_{02}+\frac{1}{2}\rho_{11}(s_{32}+s_{42}),\qquad z_{23}=\rho_{00}s_{13}+\frac{1}{2}s_{32}\rho_{11}+\frac{1}{2}\rho_{22},$$

$$z_{33}=\rho_{00}s_{23}+\frac{1}{2}s_{42}\rho_{11}+\frac{1}{2}\rho_{22},\quad z_{42}=\rho_{00}s_{32}+\frac{1}{2}\rho_{11},\quad z_{43}=s_{33}\rho_{00},$$

$$z_{52}=s_{42}\rho_{00}+\frac{1}{2}\rho_{11},\quad z_{53}=s_{43}\rho_{00};\quad A=s_0k;$$

$$s_{13}=A_{12}\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0\right]^{-1},\qquad s_{23}=A_{12}\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)^2-q_0\right]^{-1},$$

$$s_{32}=\frac{A_{21}}{2}\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)^2-q_0\right]^{-1},\quad s_{33}=\frac{A_{22}}{2}\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)^2-q_0\right]^{-1},$$

$$s_{42}=\frac{A_{21}}{2}\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)^2-q_0\right]^{-1},\quad s_{43}=\frac{A_{22}}{2}\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)^2-q_0\right]^{-1}.$$

Таким образом, для пробного тела в случае гиперболического типа движения найдены цилиндрические координаты ρ, ϑ, z посредством u, как явные функции времени, и определены выражениями (2), (3), (4), (17). Выпишем их:

$$\rho=(\rho_{00}+k^2\rho_{02}+k^3\rho_{03})+(k\rho_{11}+k^3\rho_{13})\cos\frac{\pi}{2K}u+(k^2\rho_{22}+k^3\rho_{23})\cos\frac{\pi}{K}u+$$

$$+k^3\rho_{33}\cos\frac{3\pi}{2K}u,$$

$$\vartheta=(\vartheta_{00}+k^2\vartheta_{02})u+(k\vartheta_{11}+k^3\vartheta_{13})\sin\frac{\pi}{2K}u+(k^2\vartheta_{22}+k^3\vartheta_{23})\sin\frac{\pi}{K}u+$$

$$+k^3\vartheta_{33}\sin\frac{3\pi}{2K}u,$$

$$z=(kz_{01}+k^3z_{03})\cos(cu+\varepsilon)+k^3z_{23}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+k^3z_{33}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{K}\right)u+\varepsilon\right]+$$

$$+(k^2z_{42}+k^3z_{43}\cos\left[\left(c-\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right]+(k^2z_{52}+k^3z_{53}\cos\left[\left(c+\frac{\pi}{2K}\right)u+\varepsilon\right],$$

где

$$u=(1+k^2u_{02}+k^3u_{03})T+(ku_{11}+k^3u_{13})\sin\frac{\pi}{2K}T+(k^2u_{22}+k^3u_{23})\sin\frac{\pi}{K}T+$$

$$+k^3u_{33}\sin\frac{3\pi}{2K}T+k^3u_{43}T\sin\frac{\pi}{2K}T,$$

здесь на интервале $\alpha_2 < w < \alpha_1$ имеем $T = \dfrac{1}{t_{00}} t$, $t_{00} - const$, t – время; $0 \le u \le \left(1 + \dfrac{1}{4} k^2 + \dfrac{9}{64} k^4\right)\pi$, следовательно ρ, ϑ, z – ограниченные периодические функции, другими словами, эти формулы дают только часть гиперболической орбиты.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шинибаев М.Д. Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы: РИО ВАК РК, 2001. – 128 с.

[2] Чеботарев Г.А. Аналитические и численные методы небесной механики. – М.: Наука, 1965. – 367 с.

REFERENCES

[1] Shinibaev M.D. Postupatelnoe dvizhenie passivno gravitiruyzego tela v centralnom i necentralnom pole tyagotenia. Almaty: RIO VAK RK, 2001, 128 s.

[2] Chebotarev G.A. Analiticheskie i chislennye metody nebesnoi mehaniki. M.: Nauka, 1965. 367 s.

ХИЛЛ ӨРІСІНДЕГІ СЫНАУ ДЕНЕСІНІҢ ЦИЛИНДРЛІК КООРДИНАТТАРЫ

А. А. Беков[1], М. Д. Шыныбаев[2], С. К. Досыбеков[3], А. М. Тасқұлова[3], К. С. Астемісова[4], Д. И. Үсіпбекова[4]

[1]Академик Ө. М. Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты АҚ "ҰҒЗТО", Алматы, Қазақстан,
[2]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институті, Шымкент, Қазақстан,
[3]М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан,
[4]Қ. И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

Аннотация. Мақалада Хилл өрісіндегі сынау денесінің гипербола тәрізді қозғалысының цилиндрлік координаттарын анықтау әдісі берілген.

Поступила 26.11.2014 г.