

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 298 (2014), 60 – 63

CRITERION FOR CONNECTIVITY IN PARTIALLY ORDERED STRUCTURES

B. Sh. Kulpeshov

International University of information technologies, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Key words: model, base, number, language, element, table, natural, great number, infinitely, information.

Abstract. In the present work partially ordered structures with the condition of weak o-minimality are studied. A criterion for connectivity of the set of realizations of every complete 1-type over the universe in partially ordered structures of finite width has been obtained.

УДК 510.67

КРИТЕРИЙ СВЯЗНОСТИ В ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ СТРУКТУРАХ

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: модель, база, число, язык, элемент, таблица, натуральные, множество, бесконечно, информация.

Аннотация. В настоящей работе исследуются частично упорядоченные структуры с условием слабой о-минимальности. Получен критерий связности множества реализаций каждого полного 1-типа над основным множеством в частично упорядоченных структурах конечной ширины.

Понятие о-минимальности возникло более двадцати лет назад [1] и доказало свою полезность и важность. С тех пор появились многочисленные обобщения о-минимальности. Отметим только некоторые из них: слабая о-минимальность [2, 3], квази-о-минимальность [4, 5], циклическая минимальность [6], слабая циклическая минимальность [7], о-стабильность [8, 9]. Первые два понятия относятся к линейно упорядоченным структурам, а следующие два понятия – к циклически упорядоченным структурам, и основная идея этих обобщений состоит в том, что определяемые множества соответствующих моделей предполагаются представимыми в виде булевой комбинации достаточно простых множеств. Понятие о-стабильности (или упорядоченной стабильности) является обобщением о-минимальности несколько в другом русле, а именно в том, что любое сечение имеет малое число расширений до полных 1-типов. Вспомним, что любое сечение в о-минимальной структуре расширяется единственным образом до полного 1-типа [1], а в слабо о-минимальной структуре имеет самое большее два расширения [10].

Естественно попытаться обобщить понятие о-минимальности на частично упорядоченные структуры, что и было сделано первоначально в работе [11]. Структура вида $\langle M, =, <, \dots \rangle$, где $\langle M, < \rangle$ – частично упорядоченное множество, называется *частично упорядоченной структурой*. В каждой частично упорядоченной структуре, не являющейся линейно упорядоченной, появляется отношение несравнимости элементов \diamond , т.е.

$$x \diamond y := \neg(x = y) \wedge \neg(x < y) \wedge \neg(x > y).$$

Любое семейство попарно несравнимых элементов частично упорядоченной структуры называется *антицепью*. Множество $A \subseteq M$ называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ условие $a < c < b$ влечет $c \in A$. Выпуклыми являются, в частности, точки и интервалы, определяемые обычным образом:

$$(a, b) = \{x \in M: a < x < b\},$$

$(a, b]$, $[a, b]$, (a, ∞) , $(-\infty, b]$, где $a, b \in M$. Очевидно, что антицепи также являются выпуклыми множествами.

Слабо частично о-минимальной (или *слабо р.о-минимальной*) структурой называется частично упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \dots \rangle$ такая, что любое определенное (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M . Теорию T назовем *слабо частично о-минимальной*, если такова каждая ее модель.

В настоящей статье мы обсуждаем некоторые свойства слабо частично о-минимальных структур как находящиеся в контрасте со слабо о-минимальными структурами, так и совпадающие с ними. Например, мы можем построить слабо частично о-минимальную структуру, в которой имеется сечение, расширяющееся до любого конечного или бесконечного числа полных 1-типов, или слабо частично о-минимальную структуру, в которой алгебраическое замыкание подмножества структуры не совпадает с его определенным замыканием, и т.д.

Факт 1. Пусть $M = \langle M, \Sigma \rangle$ – слабо частично о-минимальная структура. Тогда любая параметрически определяемая линейно упорядоченная подструктура $M' = \langle M', \Sigma \rangle$ структуры M является слабо о-минимальной структурой.

Множество $A \subseteq M$, где M – частично упорядоченная структура, назовем *связным*, если A выпукло и для любых элементов $a, b \in A$ $\neg(a \diamond b)$. Ранее в слабо о-минимальном случае [10] было показано, что множество реализаций любого полного 1-типа над множеством является выпуклым (которое является связным в частично упорядоченной постановке). В слабо частично о-минимальном случае это свойство не выполняется.

Пример 2. Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ – частично упорядоченная структура, где $M = D_1 \cup D_2 \cup A$, D_i есть копия $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$ для каждого $1 \leq i \leq 2$, A есть копия Q , $D_1 \diamond D_2$, $A < D_i$ для каждого $1 \leq i \leq 2$.

Можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Очевидно, что она имеет ширину 2. Рассмотрим следующие формулы:

$$\psi(x) := \forall z_1 \forall z_2 (z_1 < x < z_2 \rightarrow \exists t_1 \exists t_2 (z_1 < t_1 < x < t_2 < z_2))$$

$$\phi(x) := \exists y (y < x \wedge \psi(y))$$

Пусть $p(x) := \{x > a \mid a \in A\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$. Очевидно, что p определяет тип над A , т.е. $p \in S_1(A)$. Нетрудно понять, что $p(M)$ является объединением двух связных множеств.

Пример 3. Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ – частично упорядоченная структура, где $M = \bigcup_{i < \omega} D_i \cup A$, D_i есть копия $\omega^* + \omega + Q + \omega^* + \omega$ для каждого $i < \omega$, A есть копия Q , $D_i \diamond D_j$ для любых $i, j: i \neq j$, $A < D_i$ для каждого $i < \omega$.

Можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Очевидно, что она имеет бесконечную ширину. Рассматривая в качестве $\psi(x), \phi(x)$ и p те же самые формулы и тип как в Примере 2, мы видим, что $p(M)$ является объединением бесконечного числа связных множеств.

Пусть $q(x) := \{x \diamond c \mid c \in M\} \cup \{\psi(x)\} \cup \{\phi(x)\}$. Очевидно, что q определяет тип над M , т.е. $q \in S_1(M)$. Очевидно, что для каждого $n < \omega$ существует элементарное расширение N структуры M такое, что $q(N)$ является объединением n связных множеств; а также существует элементарное

расширение структуры M , в котором множество реализаций типа q является объединением бесконечного числа связных множеств.

Теорема 4. Пусть M – частично упорядоченная структура конечной ширины. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) M слабо частично о-минимальна.

(2) Множество реализаций каждого полного 1-типа над M является связным в любом элементарном расширении структуры M .

Доказательство Теоремы 4. (1) \Rightarrow (2). Пусть M – слабо частично о-минимальна. Рассмотрим произвольную M -определимую формулу $\phi(x)$. В силу слабой частичной о-минимальности $\phi(M)$ есть объединение конечного числа выпуклых множеств, каждое из которых является определимым над M . Действительно, в силу того что M имеет конечную ширину, существует M -определимая формула $\phi'(x)$ такая, что $\phi'(M) = \phi(M)$ и $\phi'(M)$ есть объединение конечного числа связных M -определимых множеств: $\phi'(x) \equiv \bigvee_{i=1}^k \phi'_i(x)$, $\phi'_i(M)$ связно для каждого $i \leq k$, $\phi'_i(M) \cap \phi'_j(M) = \emptyset$ для любых $i, j: i \neq j$.

Пусть p – произвольный 1-тип над M . Очевидно, что $\phi'(x) \in p \Leftrightarrow$ существует единственный номер $i \in \{1, \dots, k\}$ такой, что $\phi'_i(x) \in p$. Также ясно, что $\phi'_i(x)$ – связная формула тогда и только тогда, когда

$$M \models \forall x \forall y [\phi'_i(x) \wedge \phi'_i(y) \rightarrow \neg(x \diamond y) \wedge (x < y \rightarrow \forall t (x < t < y \rightarrow \phi'_i(t)))]$$

т.е. это свойство является элементарным и поэтому имеет место в любом элементарном расширении структуры M . Откуда имеем, что $p(N)$ связно в любом элементарном расширении N структуры M .

(2) \Rightarrow (1). Допустим противное: M не слабо частично о-минимальна. Следовательно, существует M -определимая формула $\phi(x)$ такая, что $\phi(M)$ есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств. Так как M имеет конечную ширину, то существует бесконечно линейно упорядоченное множество $M' \subset M$ такое, что $\phi(M')$ есть объединение бесконечного числа выпуклых множеств. Тогда M' не является слабо о-минимальной структурой, противоречия Теореме 3.1 [10].

В слабо о-минимальном случае алгебраическое замыкание любого подмножества структуры совпадает с его определимым замыканием. Однако в слабо частично о-минимальном случае это свойство также не выполняется.

Пример 5. Пусть $M = \langle M, =, < \rangle$ – частично упорядоченная структура, где M есть непересекающееся объединение $Q_0, \{a\}, N_1$ и N_2 , Q_0 имеет тип Q , N_1 и N_2 имеют тип ω , причем $Q_0 < a < N_1$, $Q_0 < a < N_2$, $N_1 \diamond N_2$.

Можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Рассмотрим следующую формулу:

$$\phi(x) := \forall y [y < x \rightarrow \exists z (y < z < x)] \wedge \exists t [t > x \wedge \forall u (t \geq u \geq x \rightarrow u = t \vee u = x)]$$

Очевидно, что $M \models \phi(a) \wedge \exists! x \phi(x)$, т.е. $a \in dcl(\emptyset)$. Рассмотрим для каждого $n < \omega$ следующую формулу:

$$D_n(x, a) := x > a \wedge \exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i=1}^n (x > x_i > a) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j) \wedge \forall y (x > y > a \rightarrow \bigvee_{i=1}^n y = x_i))$$

Очевидно, что для каждого $n < \omega$ существуют $b_1^n \in N_1, b_2^n \in N_2$ такие, что

$$M \models D_n(b_1^n, a) \wedge D_n(b_2^n, a),$$

т.е. $b_1^n, b_2^n \in acl(\emptyset)$. Очевидно, что не существует \emptyset -определимой формулы, различающей эти элементы, т.е. $b_1^n, b_2^n \notin dcl(\emptyset)$, откуда алгебраическое замыкание пустого множества не совпадает с его определимым замыканием.

Пример 6. Пусть $M = \langle M, =, <, f^1 \rangle$ – частично упорядоченная структура, где M есть непересекающееся объединение Q_1, Q_2 и Q_3 , где Q_i имеет тип Q для каждого $1 \leq i \leq 3$, $Q_i \diamond Q_j$ для любых $i \neq j$. Функция f – отображение $Q_1 \cup Q_2$ на Q_3 , сохраняющее порядок, причем f биективно отображает Q_i на Q_3 для каждого $1 \leq i \leq 2$.

Также можно доказать, что структура M является слабо частично о-минимальной. Нетрудно понять, что $\text{acl}(\emptyset) = \text{dcl}(\emptyset)$, но для любого элемента $a \in Q_3$ $\text{acl}(a) \neq \text{dcl}(a)$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures I // Transactions of the American Mathematical Society. – 1986. – Vol. 295, N 2. – P. 565-592.
- [2] Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings // Proceedings of the 3rd Easter Conference on Model Theory. – Berlin: Humboldt University, 1985. – P. 64-88.
- [3] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. – Vol. 352, N 12. – P. 5435-5483.
- [4] Belegradek O., Petersil Ya., Wagner F. Quasi-o-minimal structures // The Journal of Symbolic Logic/ – 2000. – Vol. 65, N 3. – P. 1115-1132.
- [5] Belegradek O., Verbovskiy V., Wagner F. Coset-minimal groups // The Annals of Pure and Applied Logic. – 2003. – Vol. 121, N 2. – P. 113-143.
- [6] Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality // The Annals of Pure and Applied Logic. – 1996. – Vol. 79, N 2. – P. 165-209.
- [7] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. – 2005. – Vol. 51, issue 4. – P. 377-399.
- [8] Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные группы // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 84-127.
- [9] Байжанов Б.С., Вербовский В.В. Упорядоченно стабильные теории // Алгебра и Логика. – Т. 50, № 3. – С. 303-325.
- [10] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – Vol. 63, N 4. – P. 1511-1528.
- [11] Кудайбергенов К.Ж. Обобщение о-минимальности на частичные порядки // Математические труды. – 2012. – Т. 15, № 1. – С. 86-108.

REFERENCES

- [1] Pillay A., Steinhorn Ch. Definable sets in ordered structures I. Transactions of the American Mathematical Society. 1986. Vol. 295, N 2. P. 565-592.
- [2] Dickmann M. Elimination of quantifiers for ordered valuation rings. Proceedings of the 3rd Easter Conference on Model Theory. Berlin: Humboldt University, 1985. P. 64-88.
- [3] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn Ch. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of the American Mathematical Society. – 2000. Vol. 352, N 12. P. 5435-5483.
- [4] Belegradek O., Petersil Ya., Wagner F. Quasi-o-minimal structures. The Journal of Symbolic Logic/ – 2000. Vol. 65, N 3. P. 1115-1132.
- [5] Belegradek O., Verbovskiy V., Wagner F. Coset-minimal groups. The Annals of Pure and Applied Logic. 2003. Vol. 121, N 2. P. 113-143.
- [6] Macpherson H.D., Steinhorn Ch. On variants of o-minimality. The Annals of Pure and Applied Logic. 1996. Vol. 79, N 2. P. 165-209.
- [7] Kulpeshov B.Sh., Macpherson H.D. Minimality conditions on circularly ordered structures. Mathematical Logic Quarterly. 2005. Vol. 51, issue 4. P. 377-399.
- [8] Verbovskij V.V. Uporjadochenno stabil'nye grupy. Matematicheskie trudy. 2010. T. 13, N 2. S. 84-127.
- [9] Bajzhanov B.S., Verbovskij V.V. Uporjadochenno stabil'nye teorii. Algebra i Logika. T. 50, N 3. S. 303-325.
- [10] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some their properties. The Journal of Symbolic Logic. 1998. Vol. 63, N 4. P. 1511-1528.
- [11] Kudajbergenov K.Zh. Obobshhenie o-minimal'nosti na chastichnye porjadki. Matematicheskie trudy. 2012. T. 15, N 1. S. 86-108.

ЖАРТЫЛАЙ РЕТТЕЛГЕН ҚҰРЫЛЫМДАРЫНДА ҚИСЫНДЫЛЫҚ КРИТЕРИЙІ

Б. Ш. Кулпешов

Тірек сөздер: модель, база, сан, тіл, элемент, кесте, көпшілік, шексіз, ақпарат.

Аннотация. Осы мақалада босаң о-минималдық шартты бар жартылай реттелген құрылымдар зерттеледі. Шекті ені жартылай реттелген құрылымдарында негізгі жиынмен анықталатын кез келген толық 1-типтің орындалу жиынның қисындылық критерийі табылды.

Поступила 26.11.2014 г.