N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 74 – 80

FORMAL MODEL OF MORPHOLOGICAL RULES OF AGGLUTINATIVE LANGUAGES

A. A. Sharipbayev, G. T. Bekmanova, A. S. Mukanova, B. Zh. Yergesh

L. N. Gumilyov Eurasian national university, Astana, Kazakhstan.
E-mail: sharalt@mail.ru; gulmira-r@mail.ru; asel_ms@bk.ru; saturn_banu@mail.ru

Key words: ontology, morphological rules, semantic hypergraph, morphological analysis.
Abstract. The paper presents the ontological models of Kazakh language morphology in the form of semantic hypergraph.

УДК 004.89

ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ МОРФОЛОГИЧЕСКИХ ПРАВИЛ КАЗАХСКОГО ЯЗЫКА

А. А. Шарипбаев, Г. Т. Бекманова, А. С. Муканова, Б. Ж. Ергеш

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Ключевые слова: онтология, морфологические правила, семантический гиперграф, морфологический анализ.
Аннотация. В работе приводятся онтологические модели морфологических правил в казахском языке в виде семантических гиперграфов.

Очевидная сложность обработки естественно-языковых процессов вызвана трудностью их формализации. Сложность заключается в невозможности словоизменения слов для какой-либо части речи по заданной траектории без предварительной обработки словаря начальных форм, поскольку существует зависимость словоизменения слова от его смысла, то есть от его семантического содержания. В связи с этим необходимо было выбрать формальные средства представления знаний, которые позволяют описать не только структуру, но и семантические признаки языковых единиц.

Одним из формальных средств представления знаний является язык семантических гиперграфов, в котором можно в зависимости от типов связей реализовывать классифицирующие, функциональные, ситуационные, структурные сети и сценарии. Семантический гиперграф является расширением семантических сетей, где естественным образом представляются n-арные отношения, которые позволяют задавать не только атрибуты объектов, но и представлять их структурные, «целостные» описания [2,3].

Гиперграф $\boldsymbol{H}$ определяется парой ($\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{R}$), где $\boldsymbol{V}$= $\{v_i\}$ – множество вершин; $\boldsymbol{R}$= $\{r_j\}$ – множество ребер; i = 1, 2, …, n; j = 1, 2, ..., m; каждое ребро представляет собой пару из элементов множество V, т.е. $r = \{(v_{j_s}, v_{j_t})\}$, $j_s \neq j_t$, s, t – натуральные числа.

В настоящее время онтология является мощным и распространенным инструментом моделирования отношений между объектами различных предметных областей. Принято классифицировать онтологии по степени зависимости от задач или прикладной области, по модели представления онтологических знаний и его выразительным возможностям и другим параметрам [4, 5]. Прикладные онтологии описывают концепты, которые зависят как от онтологии задач, так и от онтологии предметной области.

Прикладная онтология разрабатывается на основе общих принципов построения онтологий, но с учетом использования в качестве модели представления знаний семантических гиперграфов. Данный формализм позволят определить онтологию $\boldsymbol{O}$ в виде тройки: $(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{R}, \boldsymbol{K})$,где $\boldsymbol{V}$ – множество понятий проблемной среды (вершины гиперграфа), $\boldsymbol{R}$ – множество отношений между понятиями (дуги и ребра гиперграфа), а $\boldsymbol{K}$– множество имен понятий и отношений в данной предметной области.

В данной статье предлагается использовать семантические гиперграфы для представления описания не только атрибутов, но и структуры морфологических единиц казахского языка с учетом их семантики.

Морфологический анализ в казахском языке. Казахский язык относится к тюркской группе языков и характеризуется большим числом словоформ для каждого слова, образованных путем добавления к его концу суффиксов и окончаний. Для него определен строгий порядок аффиксов. В начале к корню слова прибавляются суффиксы затем окончания множественности, притяжательные окончания, падежные окончания, окончания спряжения [6].

Процесс словоизменения основывается на детальном анализе начальной формы слова с целью выделения его морфологических признаков и считывания его семантических признаков из базы знаний. Далее определяется траектория словообразования и словоизменения, происходит сам процесс словообразования исловоизменения на основе семантического гиперграфа.

Морфологические признаки в казахском языке выделяются по следующему принципу. Определяется последняя буква начальной формы слова и относится к одной из категорий. В соответствии с этими признаками осуществляется добавление того или иного окончания. Морфологические признаки казахского языка представлены на рисунке 1.

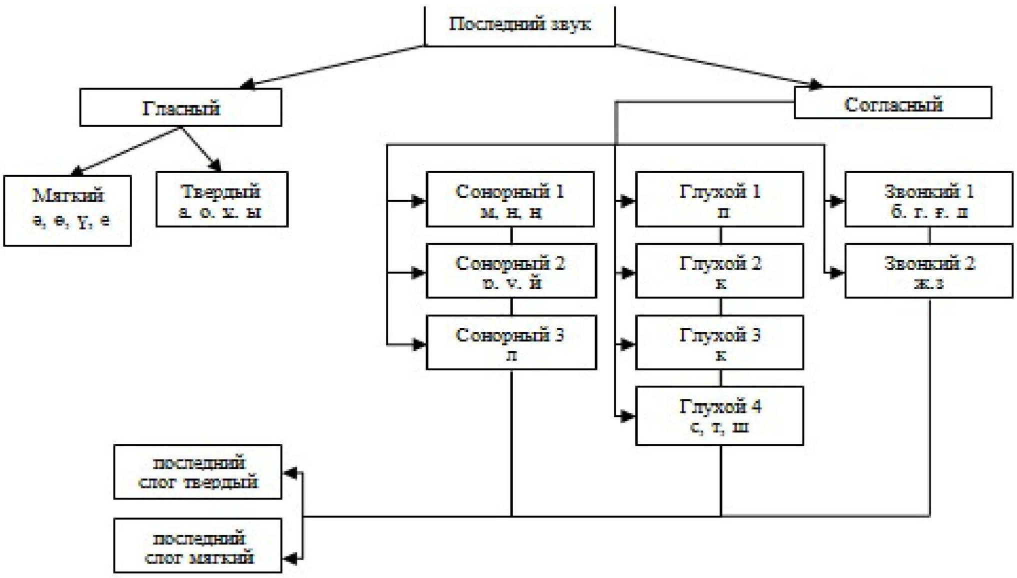

Рисунок 1 – Дерево морфологических признаков

С помощью семантического гиперграфа формализуются правила добавления суффиксов и окончаний к основам. На основе такого гиперграфа генерируются словоформы казахского языка и порождается структура словаря начальных форм в виде синхронизированного дерева.

Синхронизированное дерево представляется с помощью линейных скобочных записей в виде строк, содержащих символы, помечающие узлы дерева, а также открывающие и закрывающие круглые скобки. Между деревьями и их линейными скобочными записями существует взаимно однозначное соответствие. На рисунке 2 приводятся примеры деревьев и соответствующие им линейные скобочные записи.

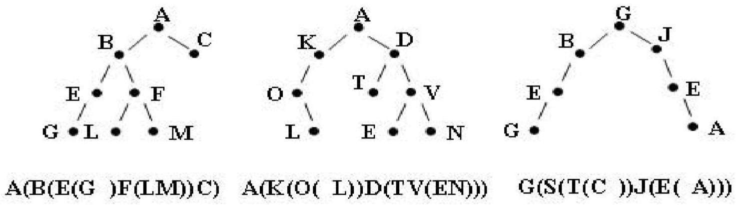

Рисунок 2 – Деревья и линейные скобочные записи

В казахском языке существует 9 частей речи (*имя существительное*(zaes), *прилагательное*(syes), *числительное*(saes), *глагол*(etis), *местоимение*(esim), *наречие*(uste), *союзы*(shyl), *послеслоги*(elsz), *междометие*(odag)), 5 из которых словоизменяются по падежам, лицам, числам. Ниже подробно будем рассматривать для этих частей речи онтологические модели и формальные правила образованные через скобочную запись, которые необходимы для морфологического синтеза слов казахского языка.

Анализ имен существительных. Для имен существительных в качестве семантических признаков начальных форм выступают одушевленность(jand) и неодушевленность (jans) имен существительных. В зависимости от этого признака и определяется траектория словоизменения имени существительного. Имя существительное в казахском языке спрягается (jikt) и изменяется по падежам (sept), а также числам (kopt) и имеет притяжательную форму (taul). На рисунке 3 показана онтологическая модель имени существительного с учетом семантических признаков.

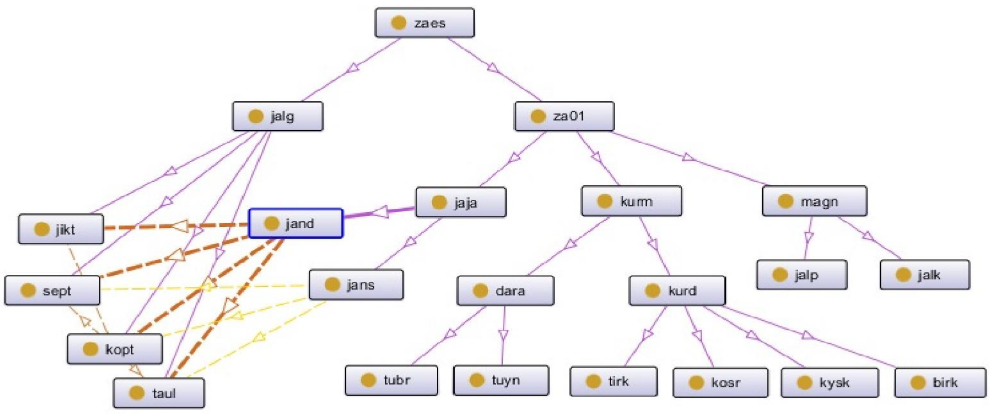

Рисунок 3 – Онтологическая модель имени существительного

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

V={jand, jans},

E ={(jand, jikt), (jand, sept), (jand, kopt), (jand, taul), (jans, sept), (jans, kopt), (jans, taul)}.

Из указанного семантического гиперграфа можно получить формальные правила с помощью скобочной записи. Количество формальных правил для имени существительного 4500. Далее для одного одушевленного существительного с помощью формальных правил автоматически генерируется 93 словоформы (словарных статей), а для неодушевленного существительного генерируется 82 словоформы. Также имя существительное возможно образовать из других частей речи.

Пример словоизменения одушевленного существительного «бала» - «ребенок» содержит все словоформы данного существительного и их морфологическую информацию, которая содержит в сокращенном обозначении информацию о том, в каком числе, падеже находится существительное, от какого лица происходит действие и его принадлежность тому или иному лицу. В таблице 1 приведено изменение по падежам существительного «бала».

Таблица 1 – Изменение по падежам существительного «бала».

Правила	Explanation	Пример
((зежа01))!ат0 ((зежа01)ның)!іл ((зежа01)ға)!ба ((зежа01)ны)!та ((зежа01)да)!жс ((зежа01)дан)!шы ((зежа01)мен)!кө	(зат есім, жанды, 01 дауысты)! атау септік ((зат есім, жанды, 01 дауысты)ның)! ілік септік ((зат есім, жанды, 01 дауысты)ға)! барыс септік ((зат есім, жанды, 01 дауысты)ны)! табыс септік ((зат есім, жанды, 01 дауысты)да)! жатыс септік ((зат есім, жанды, 01 дауысты)дан)! шығыс септік ((зат есім, жанды, 01 дауысты)мен)! Көмектес септік	((бала)) ((бала)ның) ((бала)ға) ((бала)ны) ((бала)да) ((бала)дан) ((бала)мен)

Анализ имен прилагательных. Для имен прилагательных в качестве семантических признаков начальных форм выступают возможности образования из него сравнительной и/или превосходной степени прилагательного, а также выступают такие признаки, как относительные (kats) и качественные (sapa),простые(dara), сложные (kurd), производные (tuyn) и т.д. Онтологическая модель имени прилагательного представлена на рисунке 4.

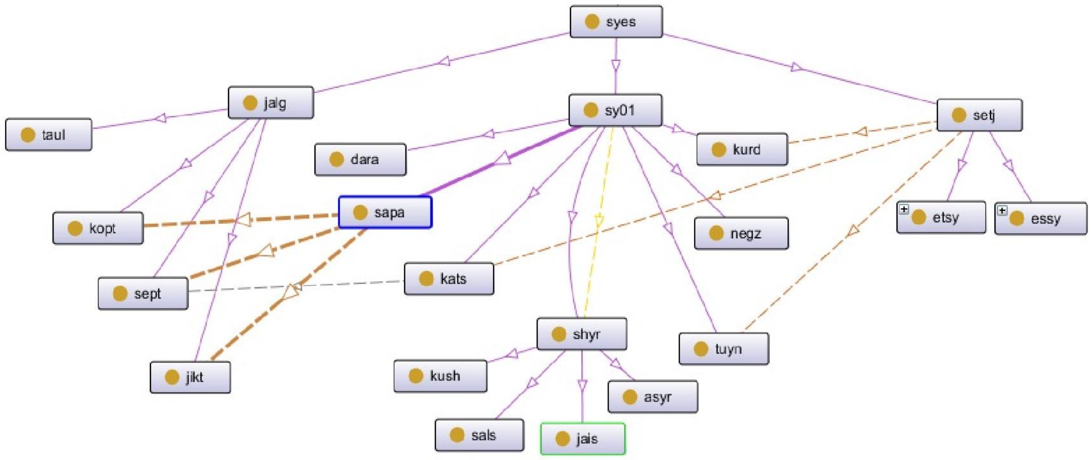

Рисунок 4 – Онтологическая модель имени прилагательного

Определить, возможно ли из данного прилагательного образовать сравнительную степень прилагательного и с помощью каких конкретно суффиксов, может только эксперт. Это касается и возможности использования вспомогательных слов при образовании превосходных степеней прилагательных. В данном случае разметку семантических признаков в базе знаний осуществлял специалист-лингвист.

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

V={kats, sapa},

E ={(kats, sept), (sapa, sept), (sapa, kopt), (sapa, jikt)}.

Разряды прилагательного, субстантивируясь, изменяются по падежам, спрягается по лицам и принимают аффиксы принадлежности. В таблице 2 приведено изменение прилагательного «ақылды» – «умный».

Таблица 2 – прилагательное «ақылды» - «умный».

Правила	Объяснение	Пример
((сы011р)рақ)!сыса	сын есім, дауысты, рақ жұрнақ	(ақылды)рақ – «умнее»
((сы014л)лау)!сыса	салыстырмалы шырай	(ақылды)лау – «умнее» өте ақылды – «очень умный»
((сы01)ның)!іл	сын есім, ілік септік	(ақылды)ның – «умного»
((сы01)мын)!жк11	сын есім, I-жақ жіктік жалғау	(ақылды)мын – «я умный»
((сы01)сың)!жі22	сын есім, II-жақ жіктік жалғау	(ақылды)сың – «ты умный»

С помощью добавления 135 суффиксов образуется имя прилагательное из других частей речи. В результате из 45000 слов словаря генерируется 66000 прилагательных.

Анализ имен числительных. Имена числительные по составу в казахском языке разделяют на простые(dara) и сложные (kurd). Например, простые: бір - один, он - десять, жүз - сто, мың - тысяча; сложные: он бес - пятнадцать, бес жүз - пятьсот, елу мың - пятьдесят тысяч.

Словообразование сложных имен числительных возможно реализовать автоматически, поскольку в большинстве случаев они образуются из простых числительных путем всевозможных сочетаний разряда числительного и простых числительных.

Пример. Образование сложного числительного «он бір» – «одиннадцать» происходит путем соединения числительных «он» – «десять» и «бір» – « один». Сложное числительное «жүз он бір» – «сто одиннадцать» происходит путем соединения числительных «жүз» – «сто», «он» – «десять» и «бір» – «один» .

По значению имена числительные делятся на шесть групп, которые образуются из простого или сложного числительного путем присоединения соотвествующих окончаний или суффиксов. В большинстве случаев все группы числительных автоматически образуются из количественных путем присоединения суффиксов. Онтологическая модель имени числительного представлена на рисунке 5.

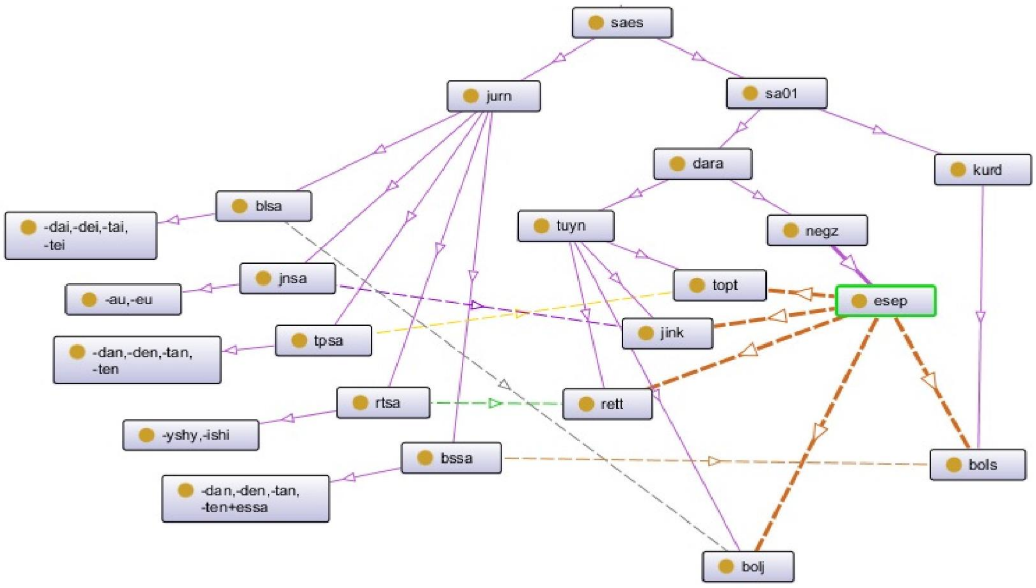

Рисунок 5 – Онтологическая модель имени числительного

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

V={esep, jurn},

E={(esep, topt), (esep, jink), (esep, rett), (esep, bolj), (esep,bols)}.

Словоизменение и словообразование глаголов. Глагол наряду с именем существительным – сложная для словообразования и словоизменения часть речи. Словообразование и словоизменение происходит как автоматически, так и по результатам заполненной лингвистом базы знаний.

Необходимо отметить, что глаголы словоизменяются по лицам и числам, а также происходит словообразование новых видов глаголов из других частей речи. Онтологическая модель глагола представлена на рисунке 6.

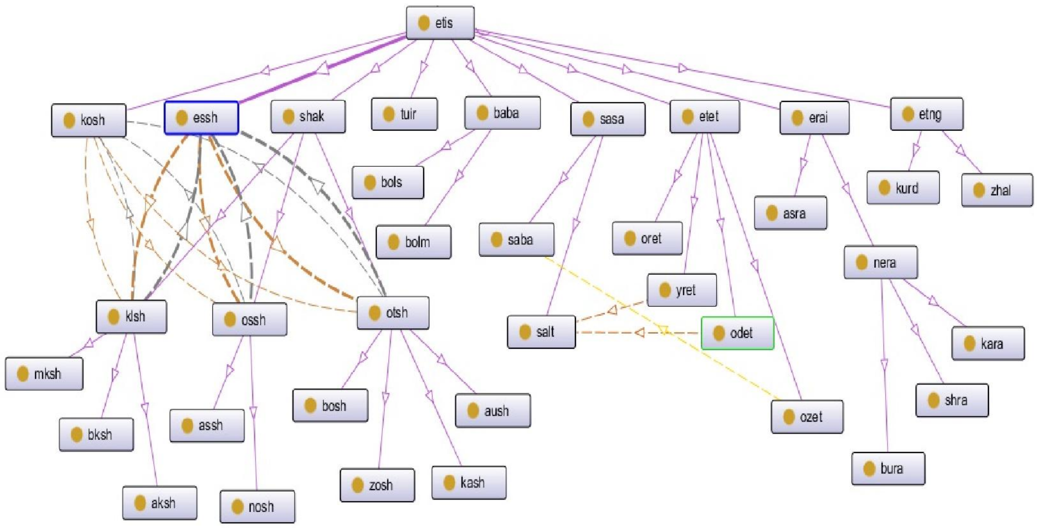

Рисунок 6 – Онтологическая модель глагола

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:

V={essh,kosh,saba,salt},

E={(essh, klsh), (essh, ossh), (essh, otsh), (kosh, klsh), (kosh, ossh), (kosh, otsh),(saba,oset), (salt,yret), (salt,odet)}.

Ниже приведены формальные правила словоизменения и словообразования глагола:

((((етот01)п) отыр)мын)!окжі11
((((етот01)п) отыр)мыз)!окжі11
((((етот01)п) отыр)сың)!окжі22
((((етот01)п) отыр)сыңдар)!окжі22
((((етот01)п) отыр)сыз)!окжі2*
((((етот01)п) отыр)сыздар)!окжі2*
((((етот01)п) отыр))!окжі33
((((ет01)т)қыз)дыр)!өг
((((ет01)т)қыз)ғыз)!өг
(((((ет01)т)тыр)т)қыз)!өг
((((((ет01)т)тыр)т)қыз)дыр)!өг
(((((ет01)т)қыз)дыр)т)!?г
(((((((ет01)т)тыр)т)қыз)дыр)т)!өг
(((ет01)т)ты)!өе
(((ет01)т)қан)!өе
(((ет01)т)атын)!өе
(((ет01)т)ар)!ке

С помощью формальных правил образуются новые глаголы и отглагольные формы из других частей речи. В результате из 45000 слов словаря генерируется 395 000 глаголов.

Словоизменение местоимений. В качестве семантических признаков начальных форм для местоимения является деление в зависмости от его значения на 7 групп: личные, указательные, вопросительные, возвратные, неопределенные, отрицательные, определительные.

Онтологическая модель местоимений представлена на рисунке 7.

Личные, указательные и возвратные местоимения склоняются по правилам, определенным для каждой группы. Местоимения других групп склоняются лишь частично, некоторые местоимения вообще не склоняются. Для них определен семантический признак склонения или несклонения. Притяжательная форма (тәуелдік жалғау(taul)) и форма спряжения (жіктік жалғау(jikt)) существует только для некоторых местоимений.

Таким образом, в качестве семантических признаков местоимений можно выделить склонение местоимений, существование притяжательной формы, формы спряжения и принадлежность к той или иной группе местоимений.

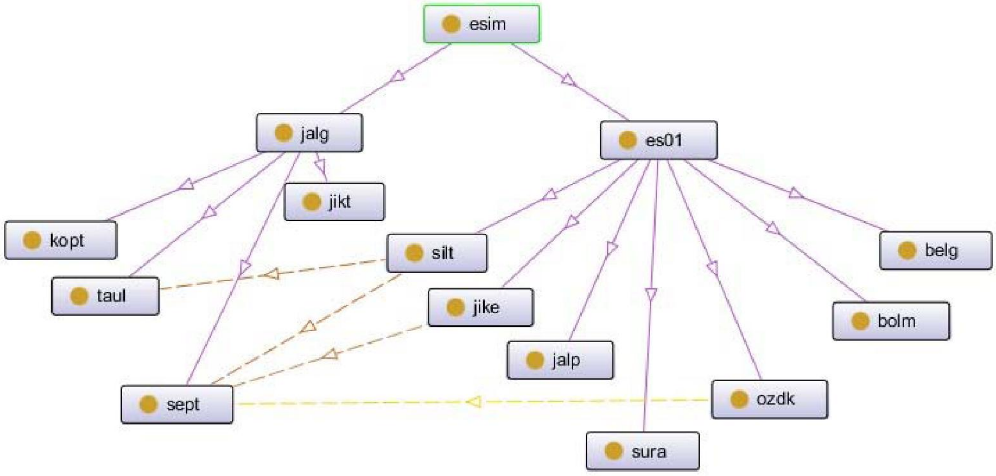

Рисунок 7 – Онтологическая модель местоимений

Если представить онтологию в виде гиперграфа, то его вершины и ребра будут:
V={silt,jike,ozdk},
E ={(silt, taul), (silt, sept), (jike, sept), (ozdk, sept)}.

Вывод. Построены онтологические модели морфологических правил казахского языка, что позволило записать формальные правила словоизменения и словообразования каждой части речи для автоматической генерациибазы данных объемом более 3 200 000 словоформ (словарных статей) из базы знаний (база знаний содержит семантические признаки, расставленные лингвистом) объемом 40 000 начальных форм слов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Chomsky N. The Logical Structure of Linguistic Theory. – Plenum Press, 1975. – P. 573.
[2] Berge C.C. Graphs and Hypergraphs. – Elsevier Science Ltd., 1985
[3] Vizing V.G. About a coloring of intsidentor in the hypergraph // Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, 14:3, 2007. – P. 40-45.
[4] Gruber T.R. A Translation Approach to Portable Ontology Specifications // Knowledge Acquisition, 5(2), 1993. – P. 199-220.
[5] Gruber T.R.Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing. International Journal Human-Computer Studies. – 1995. – Vol. 43, Issues 5-6. – P. 907-928.
[6] Қазақ грамматикасы. Фонетика, сөзжасам, морфология, синтаксис. – Астана, 2002.

REFERENCE

[1] Chomsky N. *The Logical Structure of Linguistic Theory. Plenum Press,* **1975**. P. 573.
[2] Berge C.C. *Graphs and Hypergraphs,* Elsevier Science Ltd. **1985.**
[3] Vizing V.G. *About a coloring of intsidentor in the hypergraph*. Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1, 14:3, **2007**. P. 40-45.
[4] Gruber T.R. *A Translation Approach to Portable Ontology Specifications*. Knowledge Acquisition, 5(2), **1993**. P. 199-220.
[5] Gruber T.R. *Toward Principles for the Design of Ontologies Used for Knowledge Sharing.* International Journal Human-Computer Studies. **1995**. Vol. 43, Issues 5-6. P. 907-928.
[6] Kazakh grammar. *Phonetics, word formation, morphology, syntax.* Astana, **2002** (In Kazakh).

ҚАЗАҚ ТІЛІНІҢ МОРФОЛОГИЯЛЫҚ ЕРЕЖЕЛЕРІНІҢ ФОРМАЛДЫ МОДЕЛІ

А. Ә. Шәріпбаев, Г. Т. Бекманова, Ә. С. Мұқанова, Б. Ж. Ергеш

Л. Н. Гумилев атындағы Еуразиялық ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Аннотация. Жұмыста қазақ тілінің морфологиялық ережелерінің онтологиялық модельдері семантикалық гиперграфтар түрінде көрсетіледі.

Поступила 26.11.2014 г.

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 81 – 85

ABOUT THE THEOREM OF LIVSHITS

I. O. Orazov, A. Sh. Shaldanbaev

M. Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan

Key words: Livshits Theorem, eigenvalues, dissipative operator, completely continuous operator.
Abstract. In this paper, we obtain some identities recalling trace formula operators.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛИВЩИЦА

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Ключевые слова: теорема Ливщица, собственные значения, диссипативный оператор, вполне непрерывный оператор.
Аннотация. В работе получены некоторые тождества, напоминающие формулы следов операторов.

В работе [1] была получена следующая теорема.

ТЕОРЕМА (М. С. Ливщиц). Пусть *A* – простой диссипативный или вполне непрерывный оператор причем $s_p\left(A_j\right) < \infty.$

Для того чтобы система корневых векторов оператора *A* было полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1} Im\lambda_j(A) = s_p\left(A_j\right), \tag{1}$$

где $A_j = \dfrac{A - A^*}{2i}, \lambda_j(A)$ – собственные значения оператора *A*, $s_p A_j$ – матричный след оператора A_j [см. 2, 127].

Напомним, что ограниченный оператор, определенный в гильбертовом пространстве *H*, называется диссипативным, если его мнимая компонента $A_j = \dfrac{(A - A^*)}{2i}$ является неотрицательным оператором.

Ограниченный оператор *A*, заданный в гильбертовом пространстве *H* называется простым, если *A* и *A** не имеют общего инвариантного подпространства , на котором бы они совпали.

Подпространство $H_0 \subset H$ называется инвариантным подпространством оператора *A*, если для любого *f* из вектор *Af* также принадлежит H_0 .

Основная идея настоящей работы состоит в том, что если полнота корневых векторов оператора *A* нам известно из других соображений, то формулу (1) можем использовать для численных расчетов.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. Применив формулу (1) к оператору

$$L_k^{-1}f(x)=\frac{1}{2}\left[\int_0^x f(1-t)dt-\int_x^1 f(1-t)dt\right]+\left(k+\frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(t)dt, k\in C \qquad (2)$$

заданного в пространстве $H=L^2(0,1)$, получить числовые тождества, вроде формул следов [2, с. 125].

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

ЛЕММА 1. Оператор L_k^{-1}

а) самосопряжен тогда и только тогда, когда $Imk=0$;

б) диссипативен тогда и толька тогда, когда $Imk>0$;

в) нормален, самосопряжен и действительный одновременно ;

г) если $Imk<0$, то диссипативен оператор $(-L_k^{-1})$.

ЛЕММА 2. Для того чтобы система корневых векторов оператора L_k^{-1} была полной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} Im\lambda_j(L_k^{-1})=I_mk. \qquad (3)$$

Напомним, что вектор $\varphi\in H\quad(\varphi\neq 0)$ называется корневым вектором оператора A, отвечающим собственному числу λ_0 , если $(A-\lambda_0 I)^n\varphi=0$ при некотором натуральном числе n.

Оператор L_k^{-1} является обратным оператором к оператору L_k, для которого справедлива лемма 3.

ЛЕММА 3. Если

(а) $k^2+k+\frac{1}{2}\neq 0 \qquad (4)$

то спектральная задача

$$\begin{cases} L_k u=u'(1-x)=\mu u(x); \quad x\in(0,1) & (5)\\ (k+1)u(0)-ku(1)=0 & (6)\end{cases}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\{\mu_n^{+}\}=\left\{arc\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}+2n\pi\right\},\qquad n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots \text{при } Imk<0 \quad (7)$$

или

$$\{\mu_n^{-}\}=\left\{-acr\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}+2n\pi\right\},\qquad n=0,\pm1,\pm2\pm3,\ldots \text{при } Imk>0$$

и соответствующих им собственных векторов;

$$u_n^{\pm}=\frac{k\cos\mu_n^{\pm}x+(k+1)\sin\mu_n^{\pm}x}{\sqrt{k^2+k+\frac{1}{2}}}, n=0,\pm1,\pm2,\ldots. \qquad (8)$$

которые при $k\neq\bar{k}$ образуют базис Рисса пространства, переходящей при $Imk\to 0$ в ортонормированный базис.

(б) $k^2+k+\frac{1}{2}=0,$

то задача (5)-(6) не имеет собственных значений.

Из этой леммы следует, что корневые векторы оператори L_k^{-1} полны в пространстве H, учитывая вполне непрерывность оператора L_k^{-1} , мы получим утверждение леммы 2. Отметим, что эта лемма имеет независимое доказательство от результатов работы [1].

ЛЕММА 4. Если

(а) $k^2 + k + \frac{1}{2} \neq 0;$

(б) $Imk > 0$, и $Rek + \frac{1}{2} > 0$,

то имеет место формула

$$Imk = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(Im\arccos\left[(k^2 + k)/(k^2 + k + 1/2)\right]\right) / \left|2n\pi + \arccos\left[(k^2 + k)/(k^2 + k + 1/2)\right]\right|^2$$

ЛЕММА 5. Если

(а) $k^2 + k + \frac{1}{2} \neq 0;$

(б) $Imk > 0$, $Rek + \frac{1}{2} < 0$,

то имеет место формула

$$Imk = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im\arccos\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}}{2n\pi - \arccos\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} \qquad (10)$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

ТЕОРЕМА 1. Если k - вещественная величина, то имеет место формула

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(2n\pi + \arccos\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}\right)^2} = k^2 + k + \frac{1}{2}. \qquad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложно показать , что

$$\lim_{Imk \to 0} \frac{k - \bar{k}}{\mu_n^{\pm} - \overline{\mu_n^{\pm}}} = -\frac{\left|k^2 + k + \frac{1}{2}\right|}{|k|^2 + Rek + \frac{1}{2}},$$

где $\mu_n^{\pm}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.)$ собственные значения задачи (5)-(6).

Заметим , что

$$\mu_n^{+} = 2n\pi + \arccos\frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}, \quad \overline{\mu_n^{+}} = 2n\pi + \overline{\arccos\frac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}}$$

$$\mu_n^{+} - \overline{\mu_n^{+}} = \arccos\frac{\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} - \overline{\arccos\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} = 2\, Im\arccos\left(k^2 + k\right)}{k^2 + k + \frac{1}{2}}$$

при $Rek + \frac{1}{2} > 0$, и

$$\mu_n^{-} - \overline{\mu_n^{-}} = -\arccos\frac{\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}} + \overline{\arccos\dfrac{k^2 + k}{k^2 + k + \frac{1}{2}}} = -2\, Im\cos\left(k^2 + k\right)}{k^2 + k + \frac{1}{2}},$$

при $Rek + \frac{1}{2} < 0$

Следовательно,

$$\lim_{Imk\to 0}\frac{k-\bar{k}}{\mu_n^+-\overline{\mu_n^+}}=\lim\frac{2Imk}{2Im\mu_n^+}=\lim_{Imk\to 0}\frac{Imk}{Im\,\mu_n^+}=$$

$$=\lim_{Imk\to 0}\frac{Imk}{Im\,arc\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}}=-\sum_{+\infty}^{-\infty}\frac{1}{\left|2n\pi+arc\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}\right|^2}=$$

$$=-\frac{\left|k^2+k+\frac{1}{2}\right|}{|k|^2+Rek+\frac{1}{2}}.$$

Поскольку после перехода к пределу k – вещественно, то

$$k^2+k+\frac{1}{2}=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4},\Rightarrow\left|k^2+k+\frac{1}{2}\right|=k^2+k+\frac{1}{2},$$

$$|k|^2=k^2,\qquad Rek=k,$$

поэтому

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left|2n\pi+arc\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}\right|^2}=k^2+k+\frac{1}{2}.\tag{11}$$

Это есть искомая формула.

Теперь пусть $k\to-\frac{1}{2}$, тогда

$$\frac{\lim\limits_{k\to-\frac{1}{2}}\dfrac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}=\lim\limits_{k\to-\frac{1}{2}}\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}=-1,\to arc\cos(-1)=\pi,$$

следовательно

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n\pi+\pi)^2}=\frac{1}{4}.\tag{12}$$

В самом деле известна [3.,с.270] формула

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

следовательно

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n\pi+\pi)^2}=\frac{1}{\pi^2}\left[\sum_{-\infty}^{-1}+\sum_{0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=$$

$$\frac{\pi}{\pi^2}\times\left[\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=$$

что совпадает с формулой (12).

Если $k=0$, то $arc\cos 0=\frac{\pi}{2}$, поэтому из формулы (11) имеем $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$;

Эти формулы также совпадают с формулами из [3.,с.270].

ТЕОРЕМА 2. Если k – вещественная величина, то имеет место формула

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n\pi+\varphi)^2}=\frac{1}{2(1-\cos\varphi)},$$

где

$$\varphi=arc\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы

$$\varphi=arc\cos\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}$$ имеем, $$\cos\varphi=\frac{k^2+k}{k^2+k+\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, полагая $\mathbf{k}^2+\mathbf{k}=\mathbf{z}$, получим

$$\cos\varphi=\frac{z}{z+\frac{1}{2}},\qquad \frac{z+\frac{1}{2}}{z}=\frac{1}{\cos\varphi},\qquad 1+\frac{1}{2z}=\frac{1}{\cos\varphi},$$

$$z=\frac{\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)},\rightarrow\quad k^2+k=\frac{\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)}.$$

Тогда ,в силу формулы (11) , имеем

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2n\pi+\varphi)^2}=\frac{\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)}+\frac{1}{2}=\frac{\cos\varphi+1-\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)}=\frac{1}{2(1-\cos\varphi)}.$$

ТЕОРЕМА 3. Если $0<x\le\frac{\pi}{2}$, то имеет место формула

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лившиц М.С. О спектральном разложений линейных несамосопряженных операторов // Матем.сборник. – 34 (76): 1 (1954). – С. 145-198.

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965. – 448 с.

[3] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1969. – 544 с.

REFERENCES

[1] Livshic M.S. O spektral'nom razlozhenii lineinyh nesamosopryazhennyh operatorov. Matem. sbornik. 34 (76): 1 (1954). 145-198 (in Russ.).

[2] Gohberg I.C., Krein M.G. Vvedenie v teoriyu lineinyh nesamosopryazhennyh operatorov v gil'bertovom prostranstve. M.: Nauka, 1965. 448 (in Russ.).

[3] Demidovich B.P. Sbornik zadach I uprazhnenii po matematicheskomu analizu. M.: Nauka, 1969. 544 (in Russ.).

ЛИВЩИЦТІҢ БІР ТЕОРЕМА ТУРАЛЫ

И. О. Оразов, А. Ш. Шалданбаев

М. О. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

Аннотация. Еңбекте операторлардың іздер формуласына ұқсас тепе-теңдіктер алынды.

Поступила 26.11.2014 г.