N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 298 (2014), 40 – 43

SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTICITY PROBLEMS WITH PROVISION OF CHANGING TRANSVERSE DEFORMATION COEFFICIENT

R. Zh. Zhadrayev

Kazakh academy of transport and communications named after M. Tynyshpayev, Almaty, Kazakhstan

Key words: three-dimensional problem of elasticity, theory, transverse deformation coefficient, differential equation, Cauchy formula, marginal problem.

Abstract. In the article three-dimensional problem of thermoelasticity with provision of changing transverse deformation coefficient is explored. The differential equation is found in displacement and border conditions of the main marginal problems for sought additives in decisions of the thermoelasticity problems. These additives depend from Puasson coefficient change to some fixed meaning. Hereinafter differential equations in displacement with provision of Cauchy formula and meaning of deformation from physical dependency are definitively replaced by equivalent differential equations in voltages.

УДК 539.31.4 (075.8)

РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОПЕРЕЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Р. Ж. Жадраев

Казахская Академия транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: трехмерная задача теории упругости, коэффициент поперечной деформации, дифференциальное уравнение, формула Коши, краевая задача.

Аннотация. В статье исследована трехмерная задача термоупругости с учетом изменения коэффициента поперечной деформации. Найдены дифференциальное уравнение в перемещениях и граничные условия основных краевых задач для искомых добавок в решениях задач термоупругости. Эти добавки зависят от изменения коэффициента Пуассона по отношению к некоторому фиксированному значению. Далее дифференциальные уравнения в перемещениях, с учетом формулы Коши и значения деформаций из физической зависимости, заменены окончательно эквивалентными дифференциальными уравнениями в напряжениях.

Положим, что найдено решение u_i в перемещениях трехмерной несвязанной задачи термоупругости при некотором фиксированном значении ν коэффициента Пуассона[*].

Требуется найти аддитивное изменение в решении u_i при изменении коэффициента Пуассона термоупругой среды на величину $\nu_* - \nu$, где ν_* - новое его значение.

[*] Купрадзе В.Д. и др. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

Полагаем также, что решение u_i^* той же задачи, но при значении ν_* коэффициенты Пуассона также найдено.

Следовательно, сформулированную задачу можно определить в следующем виде. Требуется найти разность решений:

$$u_i^б = u_i - u_i^*, \; u_i^{б*} = u_i - u_i^*, \tag{1}$$

где добавочные перемещения $u_i^б$ приписываются термоупругой среде, имеющей коэффициент Пуассона ν, а добавки $u_i^{б*}$ приписываются среде с коэффициентом ν_*.

Всюду в дальнейшем будем обозначать через E - модуль Юнга, α - температурный коэффициент линейного расширения среды, K_i - массовую силу, T – температуру среды (известная функция координат и времени), x_i, i = 1, 2, 3 – декартовые координаты, Δ - оператор Лапласа, υ - относительное изменение объема, Θ - первый инвариант тензора напряжений.

При обоих введенных выше коэффициентах Пуассона дифференциальное уравнение равновесия термоупругой среды в перемещениях записывается так:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} = \frac{2\alpha(1+\nu)}{1-2\nu}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu)}{E}K_i$$
$$\Delta u_i^* + \frac{1}{1-2\nu_*}\frac{\partial \vartheta^*}{\partial x_i} = \frac{2\alpha(1+\nu_*)}{1-2\nu_*}\frac{\partial T}{\partial x_i} - \frac{2(1+\nu_*)}{E}K_i \tag{2}$$

Вычитая уравнения (2) одно из другого, будем учитывать следующие очевидные соотношения:

$$\frac{1}{1-2\nu_*} - \frac{1}{1-2\nu} = \frac{2(\nu_*-\nu)}{(1-2\nu)(1-2\nu_*)}, \qquad (1+\nu_*)-(1+\nu)=(\nu_*-\nu),$$
$$\frac{1+\nu_*}{1-2\nu_*} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} = \frac{3(\nu_*-\nu)}{(1-2\nu)(1-2\nu_*)} \tag{3}$$

Тогда для разности решения получается дифференциальное уравнение в двух вариантах:

$$\Delta u_i^б + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \vartheta^б}{\partial x_i} = \frac{2(\nu_*-\nu)}{E(1-2\nu)}\frac{\partial \Theta^*}{\partial x_i} + \frac{2(\nu_*-\nu)}{E}K_i$$
$$\Delta u_i^{б*} + \frac{1}{1-2\nu_*}\frac{\partial \vartheta^{б*}}{\partial x_i} = \frac{2(\nu_*-\nu)}{E(1-2\nu_*)}\frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \frac{2(\nu_*-\nu)}{E}K_i \tag{4}$$

Первое уравнение (4) определяет разность $u_i^б$ решений как перемещение среды с коэффициентом Пуассона ν, а второе уравнение (4) определяет эту разность как перемещения среды, имеющей коэффициент ν_*. Правые части уравнений (4) представлены известными функциями; эти функции, как будет показано ниже, нельзя представить как правые части уравнений (2) через какое бы то ни было поле температур и массовых сил.

Физически закон термоупругости был существенно использован для получения уравнений (2), а также для преобразования правой части уравнения (4). При двух значениях коэффициента Пуассона этот закон записывается так:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\nu\Theta}{E} + \delta_{ij}\alpha T, \; \vartheta = \frac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T,$$
$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) = \frac{1+\nu_*}{E}\sigma_{ij}^* - \delta_{ij}\frac{\nu_*\Theta}{E} + \delta_{ij}\alpha T, \; \vartheta^* = \frac{1-2\nu_*}{E}\Theta^* + 3\alpha T, \tag{5}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Вычитая друг из друга формулы (5), учитываем соотношения (3). Тогда получим два варианта физической зависимости между деформациями и напряжениями, которые соответствуют искомой разности решений u_i и u_i^*:

$$\varepsilon_{ij}^{б} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^{б} - \delta_{ij}\frac{\nu\Theta^{б}}{E} + \frac{\nu_* - \nu}{E}\left(\delta_{ij}\Theta^* - \sigma_{ij}^*\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{б}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{б}}{\partial x_i}\right),$$

$$\vartheta^{б} = \frac{1-2\nu}{E}\Theta^{б} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E}\Theta^*, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{ij}^{б*} = \frac{1+\nu_*}{E}\sigma_{ij}^{б*} - \delta_{ij}\frac{\nu_*\Theta^{б}}{E} + \frac{\nu_* - \nu}{E}\left(\delta_{ij}\Theta - \sigma_{ij}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^{б*}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{б*}}{\partial x_i}\right),$$

$$\vartheta^{б*} = \frac{1-2\nu_*}{E}\Theta^{б} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E}\Theta\,.$$

Уравнениям (4) нельзя придать смысл уравнений термоупругости. Однако это, конечно, не мешает нам решать уравнения (4), понимая под решением просто разность (1) для которой вводится физическая зависимость (6).

Кроме дифференциальных уравнений (4), добавочные перемещения $u_i^{б}$ или $u_i^{б*}$ должны удовлетворять граничные условия, которые необходимо здесь сформулировать.

В первой краевой задаче на границе S области V задаются значения f_i перемещений u_i или u_i^*:

$$(u_i)_S = f_i\,,\ (u_i^*)_S = f_i \tag{7}$$

Вычитая оба условия (7) друг из друга, получим для разности решений граничные условия первого типа:

$$(u_i^{б})_S = 0\,,\ (u_i^{б*})_S = 0 \tag{8}$$

Во второй краевой задаче на границе S термоупругой области задаются значения F_i вектора интенсивности внешних сил:

$$(p_i)_S = F_i,\ \left(p_i^*\right)_S = F_i \tag{9}$$

В среде с коэффициентом ν напряжения σ_{ij} вычисляем, применяя физически закон (5) и (6) в обратной форме.

Граничное условие для добавочных усилий $p_i^{б}$, возникающих на S в среде с коэффициентом ν:

$$\left(p_i^{б}\right)_S = -p_i\left(\nu, u_i^*\right)_S + \frac{1+\nu_*}{1+\nu}F_i - n_i\frac{(\nu_* - \nu)\Theta^*}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{10}$$

Второй вариант граничного условия второй краевой задачи для добавочных усилий $p_i^{б*}$ в среде с коэффициентом ν_* через некоторые преобразования получим:

$$\left(p_i^{б*}\right)_S = p_i^*\left(\nu_*, u_i\right) - \frac{1+\nu}{1+\nu_*}F_i - n_i\frac{(\nu_* - \nu)\Theta}{(1+\nu_*)(1-2\nu_*)} \tag{11}$$

Таким образом, найдены дифференциальное уравнение (4) и граничные условия (8), (10), (11) основных краевых задач для искомых добавок $\overset{б}{u}_i$ и $\overset{б*}{u}_i$ в решениях задач термоупругости. Эти добавки зависят от изменения $\nu_* - \nu$ коэффициента Пуассона по отношению к некоторому фиксированному значению ν.

Заметим теперь, что, поскольку граничные условия (10), (11) даются в напряжениях, то может оказаться целесообразным, вместо дифференциальных уравнений (4) в перемещениях, получить и решать эквивалентные дифференциальные уравнения в напряжениях, к получению которых мы здесь и переходим.

Продифференцируем все члены уравнений (4) по координате x_j:

$$\Delta \frac{\partial \overset{б}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial^2 \vartheta^{б}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(\nu_* - \nu)}{E(1-2\nu)}\frac{\partial^2 \Theta^*}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E}\frac{\partial K_i}{\partial x_j},$$

$$\Delta \frac{\partial \overset{б*}{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{1-2\nu_*}\frac{\partial^2 \vartheta^{б*}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{2(\nu_* - \nu)}{E(1-2\nu_*)}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{2(\nu_* - \nu)}{E}\frac{\partial K_i}{\partial x_j}. \qquad (12)$$

С учетом формулы Коши и значения деформаций из физической зависимости (6) получим окончательно следующие дифференциальные уравнения:

$$\Delta \overset{б}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 \Theta^{б}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\nu_* - \nu}{1+\nu}\Delta \overset{*}{\sigma}_{ij} + \frac{\nu_* - \nu}{E}\left(\frac{\partial K_i}{\partial x_j} + \frac{\partial K_j}{\partial x_i}\right),$$

$$\Delta \overset{б*}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{1+\nu_*}\frac{\partial^2 \Theta^{б*}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\nu_* - \nu}{1+\nu_*}\Delta \sigma_{ij} + \frac{\nu_* - \nu}{E}\left(\frac{\partial K_i}{\partial x_j} + \frac{\partial K_j}{\partial x_i}\right) \qquad (13)$$

REFERENCES

Kupradze V.D. and others.Three-dimensional problems of mathematical bounce theory and thermobounce. M.: Science, 1976. 664 p.

КӨЛДЕНЕҢ ДЕФОРМАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТІНІҢ ӨЗГЕРУІН ЕСКЕРІП ҮШӨЛШЕМДІ ТЕРМОСЕРПІМДІЛІК ЕСЕБІН ШЕШУ

Р. Ж. Жадраев

М. Тынышбаев атындағы Қазақ көлік және коммуникациялар академиясы, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: үшөлшемді серпімділік теориясының есебі, көлденең деформация коэффициенті, дифференциалдық теңдеу, Коши формуласы, шеттік есеп.

Аннотация. Мақалада көлденең деформация коэффициентінің өзгеруін ескеріп үшөлшемді термосерпімділік есебі зерттелінген. Жылжудағы дифференциалдық теңдеу мен термосерпімділік есебін шешуде ізделінген қосымша үшін негізгі шеттік есептің шекаралық шарттары табылған. Бұл қосымшалар Пуассон коэффициентінің кейбір белгіленген мәніне қатысты өзгеруіне тәуелді. Коши формуласын және физикалық тәуелділіктен деформацияның мәнін ескеріп жылжудағы дифференциалдық теңдеулер барабар кернеудегі дифференциалдық теңдеулермен түпкілікті ауыстырылған.

Поступила 26.11.2014 г.