

УДК 550.832

В.А. КРАСНОПЕРОВ¹, Д. Р. СЕЙФУЛЛИН²

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВЯЗЕЙ В КОМПЛЕКСЕ С ЯДЕРНО-ГЕОФИЗИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ (ЯГФМ) КАРОТАЖА ПРИ ОПРОБОВАНИИ СРЕД СЛОЖНОГО СОСТАВА

Кендер мен жыныстарды өзіне араластырып алып кешенді зерттеу мүмкіншілігін арттыратын кен сынағымен салыстырыла отырып каротаждың ядролық-геофизикалық өдістерінің нақты басымдықтары талқыланған. Қолайлы ядролық қасиетке ие емес элементтер құрамын бағалау қажеттігінің кейбір жағдайлары қарастырылған. Осы жағдайда **кристаллхимиялық** және **парагенетикалық** тәжірибелік байланысты пайдаланып геологиялық ортаның химиялық және минералдық компоненттері ЯГФЭ анықталды.

Обсуждаются определенные преимущества ядерно-геофизических методов (ЯГФМ) каротажа по сравнению с кеновым опробованием, которые повышают возможности комплексного исследования руд и вмещающих пород. Рассмотрены случаи, когда необходимо оценить содержания элементов, не обладающих благоприятными ядерными свойствами. При этом используются *кристаллохимические и парагенетические* эмпирические зависимости между химическими или минеральными компонентами изучаемых геологических сред в комплексе с ЯГФМ каротажа.

The certain advantages of nuclear-geophysical methods (NGM) logging are discussed in comparison with core approbation which raise opportunities of complex research of ores and containing breeds. Cases when it is necessary to estimate maintenances of the elements which are not having favorable nuclear properties are considered. Thus are used *crystalchemic and paragenetic empirical dependences between chemical or mineral components of investigated geological environments in a complex with NGM logging.*

Определенные преимущества ЯГФМ каротажа по сравнению с кеновым опробованием повышают возможности комплексного исследования руд и вмещающих пород. В случаях, когда необходимо оценить содержания элементов, не обладающих благоприятными ядерными свойствами, используются эмпирические зависимости между химическими или минеральными компонентами изучаемых геологических сред, которые по своей природе могут быть **кристаллохимическими и парагенетическими**.

Первые дают устойчивую, практически функциональную зависимость химических элементов в соединении (минерале), вторые объединяют минералы, образующиеся в одних геологических условиях, дают менее устойчивую корреляционную связь, зависящую от размеров элементов опробования, местоположения изучаемого участка и т.д. [3-7, 8-11, 14-18, 19, 20, 21, 25, 27, 28, 31]. Наиболее устойчивыми из парагенетических являются связи минеральных компонент в закрытых системах, характеризующихся посто-

янством их суммы. К таким системам относятся, в частности, кварц-карбонат-флюоритовые руды, пластовые фосфориты, фосфато-карбонаты, фосфато-кремнистые породы, карбонатно-терригенные образования.

Более чем вековая история развития учения о парагенезисе свидетельствует о неослабевающим интересе исследователей к этому разделу геологических знаний, оцененному В.И. Вернадским, как одно из крупнейших обобщений прошлого века, сыгравшего принципиально важную роль в создании основ генетической минералогии и современной геохимии. Отражая одну из кардинальных закономерностей природы - устойчивое сонахождение определенных минералов и химических элементов, парагенезис сейчас широко используется как мощное средство теоретического познания многокомпонентных минералогических и геохимических систем. Парагенетический метод в процессе изучения сложных природных объектов включает следующие этапы геологических исследований [31]:

¹ Казахстан, 050043, г. Алматы, ул. Торайгырова, 19, Университет Сулеймана Демиреля.

² Казахстан, 050012, г. Алматы, ул. Богенбай батыра, 156А, Казахстанский Ядерный Университет, НАК КАЗАТОМПРОМ.

1) постановку задачи с формированием общей цели исследований и выбором средств исследования;

2) определение компонентного состава геологического объекта, его описание как системы, выделение парагенезисов минералов и элементов;

3) генетическое истолкование результатов, конструирование модели объекта, формирование гипотез;

4) испытания моделей в реальных ситуациях, проверка гипотез практикой, превращение их в рабочую теорию для прогнозирования новых свойств объекта исследования.

Во многочисленных публикациях, посвященных парагенезису, чаще всего исследуются закономерные сообщества минералов и значительно реже - химических элементов. Это вполне закономерно, т.к. в породах химические элементы представлены в виде соединений-минералов. И практически один элемент может присутствовать в нескольких минералах, имеющих разные условия образования и составляющих изучаемую геологическую природную среду-породу. Поэтому в большинстве случаев целесообразно искать связи в геологических системах между минеральными компонентами, а не между элементами.

В работе Б.И. Смирнова [31] парагенезис рассмотрен как системное явление. Необходимость системного подхода в геологии обосновывалась в работах Ю.А. Косыгина, В.А. Соловьева, П.Ф. Иванкина, И.П. Шарапова, Р.А. Жукова, В.И. Оноприенко, Б.И. Смирнова. Характер системобразующих связей определяется, если рассматривать систему с наиболее общих позиций как взаимодействие элементов между собой, так и взаимодействие системы и среды. Единство компонентного состава и структурная однородность определяют целостность системы. Выбор методов обнаружения и описания связей между системными элементами существенно облегчается, если принять следующие определения системы: «...система - это множество объектов, на котором реализуется отношение с заранее заданным свойством» [31]. Формальная запись определения системы имеет вид:

$$S = \text{def } [R(m)] \cdot P$$

где S - символ системы, def - дефиниция (определение); m - системообразующие элементы, R - некоторые фиксированные свойства, регули-

рующее выбор систематообразующего отношения R и играющее в связи с этим роль системной концепции. Процедуру конструирования системы можно представить в виде:

$$P \rightarrow R \rightarrow \{m\} = S$$

Таким образом, чтобы определить систему, вначале следует задать некоторое свойство P , исходя из смысла решаемой задачи; затем на его основе найти класс отношений, обладающих этим свойством - R и перечислить множество элементов $\{m\}$, на которых реализованы отношения $R : \{m\} = S$.

Выбор P , вообще говоря произволен. Поэтому на одном и том же множестве, можно построить целый ряд различающихся систем:

$$\{P_1S_1; P_2S_2; P_3S_3; \text{ и т.д. } \}$$

Множество вещественных компонентов $\{m\}$ - субстрат системы, R - ее структура, P - базовое свойство, системная концепция. Выбор P имеет определяющее значение для успеха практической реализации системных исследований.

Основным видом геохимической информации являются сведения о количестве атомов того или иного химического элемента в некотором заданном объеме геологического объекта. Существуют различные формы фиксации этих сведений, наиболее распространено представление в виде весовых процентов. Обычно объем геохимической пробы исчезающе мал в сравнении с размерами геологического объекта, что позволяет рассматривать ее как точку в этом объекте.

Следуя [31], обозначим символом J множество точек, в которых произведены измерения концентрации химических элементов ($J\{i\}$), символом A - множество химических элементов, обнаруженных в исследуемом геохимическом объекте

$$A = \{a_R : R=1, \dots, P\}$$

Содержание R -го элемента в i -й точке объекта обозначим как y_{ir} ; совокупность значений y_{ir} , относящихся к определенному элементу, образует множество

$$Y_R = \{y_{ir} : i \in J\}$$

Существует также более широкое множество: $Y = \{Y_R : R=1, 2, \dots, P\}$

Таким образом, содержания элементов являются единственным объективно фиксируемым результатом эволюции любого геохимического объекта.

Значение концентрации R -го элемента в i -й точке объекта зависит как от величины текущих воздействий (x_i), так и от состояния системы (C_i). Множество $C = \{C_i : i \in J\}$ может трактоваться как совокупность **внутренних** факторов; в геохимических системах такими факторами являются состояния химических элементов, которые регулируются свойствами их атомов. Множество $X = \{x_i : i \in J\}$ объединяет **внешние** факторы, действие которых связано с изменением условий среды.

Поскольку оценить степень участия каждого из множеств X и C в формировании y_{ir} затруднительно, то обычно оперируют объединенным множеством факторов F :

$f = CUX$, $F = \{F_g : g = 1, 2, 3, \dots, m\}$; $F_g = \{f_{gi} : i \in J\}$, где F_g - множество значений некоторого природного фактора, управляющего поведением геохимического объекта (температура, давление, водородный показатель и т.п.), f_{gi} - значения g -го фактора в i -той точке объекта, в принципе $\{f_{gi}\}$ с алгебраической точки зрения может рассматриваться как множество действительных чисел. Можно полагать, что концентрации элементов, различающихся по химическим и физическим свойствам, формируются под воздействием различных факторов. Подмножество F_g , объединяющее факторы, общие для некоторой группы элементов, выступает в качестве регулятора и если его вклад в F достаточно велик, то соответствующая группа элементов приобретает черты системного объекта. Непосредственно оценить количество и вес факторов в F^s практически невозможно, но в то же время, чем больше вклад факторов F^s в эволюцию геохимического объекта, тем выше степень общности геологической истории составляющих ее элементов. В свою очередь поведение химических элементов в геологических процессах во многом регулируется особенностями строения их атомов. Так формируются группы элементов, управляемых одними и теми же факторами, что фиксируется, в частности, сопряженностью их концентраций. Это позволяет рассматривать совокупность подобных элементов как геохимические системы. Понятие геохимической системы в соответствии с [7, 31] формируется как: "... группа сонаходящихся в конкретном геологическом объекте химических элементов, характеризующихся сопряженностью их концентраций".

В символах системного анализа это определение можно записать как:

$$A^s = \text{def } [R(a_R)] \cdot P$$

где A^s - геохимическая система.

Применительно к геохимическим системам свойство P , отражающее особый характер взаимодействия системных элементов с внешними и внутренними факторами, сформулировано как **сопряженность** концентраций химических элементов.

Для объединения элементов в парагенетическую ассоциацию требования сопряженности явно недостаточно, необходимо еще одно дополнительное условие, а именно **однаправленность** изменения содержаний ассоциирующих химических элементов при тех или иных изменениях параметров среды. Именно при одновременном выполнении этих требований можно ожидать устойчивого появления одних и тех же наборов парагенетический связанных элементов в сходных геохимических обстановках. Элементы, реакция которых на одни и те же воздействия среды противоположна по знаку, характеризуются разнонаправленным изменением их концентраций и образуют «запрещенные» парагенезисы, состоящие из элементов антагонистов. Итак, в соответствии с [31], «под парагенетической ассоциацией будем понимать группу сонаходящихся в конкретном геологическом объекте элементов, сходно (как по интенсивности, так и по знаку) реагирующих на изменения параметров среды и характеризующихся в связи с этим сопряженностью и однаправленностью изменения их содержаний в пространстве объекта».

Используя терминологию теории определений, можно отметить, что геохимическая система и парагенетическая ассоциация химических элементов соотносятся как родовое и видовое понятия. Это позволяет рассматривать парагенетическую ассоциацию как особым образом организованную геохимическую систему. Исходя из вышеизложенного, парагенетическая ассоциация может быть представлена в виде системы:

$$A^{\Pi} = \text{def } [R^{\Pi}(a_R)] \cdot P^{\Pi}$$

Здесь a_R - элементы геохимической системы A^s , слагающие парагенетическую ассоциацию $a_R \in A^{\Pi} \subseteq A^s$.

Концепция P дополняется при переходе к парагенетическим ассоциациям требованием, что-

бы элементы, объединяемые в A^{Π} , должны реагировать на изменения внешней среды сходным образом. Целостность геохимических систем обусловлена действием общих факторов F^S . При переходе к парагенетическим ассоциациям, не все факторы из множества F^S сохраняют системообразующие свойства. В связи с этим, возникает необходимость выделения из F^S подмножества F^{Π} , объединяющего только те факторы, которые обеспечивают однонаправленность изменения состояния $a_r \in A^{\Pi}$.

Таким образом, целостность и степень структурной однородности парагенетической ассоциации как системы особого рода определяется величиной вклада, связанного с действием факторов типа F^{Π} . Специфика факторов F^{Π} обуславливает сужение семейства системообразующих отношений. Если в геохимических системах допустима любая форма зависимости между концентрациями $a_r \in A^S$ (как результат действия общих факторов F^S), то для парагенетических ассоциаций, удовлетворяющих приведенному выше определению, приемлем только класс **монотонных зависимостей**. Обычно оперируют линейными зависимостями, использование которых в парагенетическом анализе вполне обосновано, т.к. факторы F^{Π} имеют причинный статус [1,6, 18, 20, 21, 25, 30, 31,32]. Благодаря внедрению в практику геологических исследований математических методов и ЭВМ выделение парагенезисов и определение связей между их элементами все чаще осуществляется с помощью корреляционного и регрессионного методов.

В рамках системного подхода наиболее типична ситуация, когда неизвестны ни значения факторов F , ни реакция объекта на их воздействия. Неопределенность поведения объекта (с точки зрения исследователя) достигает крайних пределов. Но и в этом случае можно существенным образом снизить степень неопределенности, если от функциональных связей типа $Y_r = \varphi(F)$ (строго детерминированная модель) перейти к менее четким, но более реальным соотношениям типа:

$$\Pi(F) \rightarrow \Pi(Y),$$

где $\Pi(F)$ - множество подмножеств множества значений F , $\Pi(Y)$ - множество подмножеств множества выходных результатов Y . Описание предложенной модели осуществляется на основании специально вводимой меры - вероятности P . До-

пустимость вероятностной трактовки содержащий элементов, составляющих множества F и Y , определяется, с одной стороны их случайным характером, а с другой - относительно устойчивым появлением подмножества выходных результатов $\hat{Y} \in \Pi(Y)$ при неоднократной реализации некоторого комплекса внешних условий $\hat{F} \in \Pi(F)$. В геохимических системах в качестве случайности выступает частичная непредсказуемость результата эксперимента (при отборе и анализе проб). Действительно, истинное значение концентрации элемента в определенной точке геологического объекта совершенно определенное и является закономерным результатом геохимических процессов.

Но при отборе и анализе проб (данный комплекс условий эксперимента) мы в каждой конкретной точке получаем значения концентраций, колеблющихся с определенной надежностью около определенного значения, т.е. имея многократное повторение процесса опробования можно рассматривать колеблющиеся в определенных пределах значения концентраций как случайные события. Рассматривая концентрации как случайные величины, можно выделить два случая:

а) изучаемая величина по своей природе не является случайной, но методы ее измерения (комплекс условий) обладают некоторой погрешностью, которая приводит к случайным значениям. Примером может служить анализ одной и той же пробы без расхода аналитического материала (ядерно-физический способ). Погрешность способа анализа будет выступать в качестве случайности в получении результата. Это классический пример применения вероятностных методов к теории ошибок, впервые изложенный Далласом [33];

б) Изучаемая величина является случайной относительно общего комплекса условий по своей природе. Задача определения среднего содержания в геологическом объекте по сериям отобранных проб при измерениях содержаний в отдельных пробах с абсолютной точностью. Колебания значений среднего содержания по сериям в этом случае также будут иметь место.

Таким образом, в геохимии имеют место случайные события, и это совершенно не противоречит физико-химическому подходу к изучению геологических объектов.

В общем случае значения концентраций в геохимических системах из-за частичной непредсказуемости результатов по вышеуказанным причинам могут рассматриваться как случайные величины, к которым применимы вероятностные методы изучения, с помощью статистических моделей, которые бывают двумерными и многомерными [18, 20].

Для кристаллохимических связей характерна двумерная модель, в которой объект исследования рассматривается как двумерная статистическая совокупность с двумерной функцией распределения случайных величин X и Y . В данном случае связи близки к функциональным, элемент случайности возникает из-за ошибок измерений коррелируемых величин. Между двумя случайными величинами проявляются стохастические (вероятностные) связи, когда заданному значению случайной величины $X = x$ соответствует не определенное значение Y , а некоторый набор ее значений $- y_1, y_2, y_3 \dots y_n$; каждое из которых характеризуется определенной вероятностью $- p_1, p_2, p_3 \dots p_n$. Функция распределения величины Y , соответствующая значению $X=x$ характеризуется математическим ожиданием \bar{y}_x и дисперсией V_y^2 . Распределения величины Y соответствующие выбранным значениям величины X , называются условными распределениями, а дисперсии условными дисперсиями. Геометрическое место точек, соответствующих центрам условных распределений \bar{y}_x называется регрессионной зависимостью, а уравнение ее - уравнением регрессии. Аналогично каждому значению распределения величина $Y=y$ соответствует некоторая функция распределения величины X с математическим ожиданием \bar{x}_y и дисперсией, V_x^2 .

Система из двух случайных величин всегда будут соответствовать две регрессионных зависимости:

$$y_x = f(x) \text{ и } x_y = f(y)$$

В частном случае зависимости могут быть линейными, в общем случае - нелинейными.

Для линейной регрессии система уравнений имеет вид: $y = a_1 + v_1 x$ (регрессия y на x); $x = a_2 + v_2 y$ (регрессия x на y).

Уравнения нелинейной регрессии соответствуют более сложной зависимости, но практически всегда могут быть аппроксимированы по

частям уравнениями прямых или полиномами до третьего порядка.

В общем, регрессия может быть однозначно описана, если известней вид уравнения и значения коэффициентов при неизвестных. Остановимся на анализе линейной регрессии. В системе двух уравнений линейной регрессии коэффициенты a_1 и a_2 , определяют положения начальных точек уравнений и называются коэффициентами пересечения или свободными членами уравнений [1, 18]. При $a_1 = a_2 = 0$ уравнения исходят из начала координат.

Степень зависимости (тесноты связи) случайных величин определяется коэффициентами линейной регрессии - v_1 и v_2 , геометрически они представляют собой тангенсы углов наклона прямых регрессии к осям абсцисс и ординат (α и β). В общем случае прямые регрессии имеют общую точку пересечения с координатами в виде математических ожиданий величин X и Y , а угол γ между ними изменяется в пределах $(0-90^\circ)$ и характеризует также связь между величинами (чем меньше γ , тем теснее связь, $\gamma = 0$ связь - функциональная, т.к. обе линии сливаются, $v_1 = 1 / v_2$ или $v_1 \cdot v_2 = 1$).

Основными числовыми характеристиками двумерного распределения случайных величин являются показатели их связи: для линейной регрессии - коэффициент корреляции и корреляционный момент (ковариация); для нелинейной регрессии - корреляционное отношение [1, 18, 30].

Коэффициентом корреляции ρ между случайными величинами x и y называется математическое ожидание произведения их нормированных отклонений:

$$\rho = M \left(\frac{x - M_x}{\sigma_x} \cdot \frac{y - M_y}{\sigma_y} \right)$$

где M_x и M_y - центры распределения величин x и y , V_x^2 и V_y^2 - их дисперсии. Коэффициент корреляции ρ может быть представлен в следующей форме:

$$\rho = \frac{1}{\sigma_x \cdot \sigma_y} M(x - M_x)(y - M_y) = \frac{M(xy) - M_x \cdot M_y}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

Величина $M(x - M_x)(y - M_y)$ называется корреляционным моментом (ковариацией) - COV ($x; y$).

Коэффициент корреляции - величина безразмерная с пределами изменения - ± 1 . При $\rho = 0$ линейная связь полностью отсутствует. Знак

ρ (+) или (-) указывает на характер связи (прямая или обратная).

Равенства $|\rho| = 1$ означает наличие линейной функциональной зависимости между величинами x и y .

Несмещенными и состоятельными оценками математических ожиданий $X = M_x$ и $Y = M_y$ служат эмпирические средние значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

Несмещенными и состоятельными оценками дисперсии V_x^2 и V_y^2 служат эмпирические дисперсии:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\bar{x})^2 \cdot n \right]$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \cdot (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - (\bar{y})^2 \cdot n \right]$$

Несмещенной и состоятельной оценкой корреляционного момента служит эмпирический корреляционный момент (ковариация)

$$\begin{aligned} \text{COV}(x, y) &= \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \\ &= \frac{1}{n-1} \cdot \left[\sum_{i=1}^n x_i y_i - \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot n \right] \end{aligned}$$

По этим оценкам определяют эмпирический коэффициент корреляции:

$$r = \frac{1}{S_x \cdot S_y} \cdot \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}),$$

который дает состоятельную, но смещенную оценку теоретического коэффициента корреляции

ρ (смещение $\Delta = \frac{\rho(1-\rho^2)}{2n}$, при $n > 50$ составляет менее 1%).

Значимость r проверяется путем сравнения величины $|r| \cdot \sqrt{n-1}$ с его критическими значениями N при заданной надежности ρ . При $|r| \cdot \sqrt{n-1} > N$ гипотеза о корреляционной связи подтверждается с надежностью ρ . Доверительные оценки r сложны и разработаны для случая нормального совместного распределения вероятностей величин X и Y . Для приближенных доверительных оценок истинного значения коэффициента корреляции имеются номограммы [13]. Эмпирический коэффициент r может быть оценен оперативно графическим способом [18]. До-

верительные интервалы для эмпирического коэффициента корреляции r , при малом количестве наблюдений n позволяет определить следующее преобразование, предложенное Р. Фишером:

$$Z = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r}$$

Величина Z при небольших n с хорошим приближением следует нормальному закону со средним $MZ \approx \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)}$ и дисперсией $DZ = \frac{1}{n-3}$

Это позволяет построить доверительный интервал $[Z_1, Z_2]$ для MZ по формуле:

$$Z_{1,2} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+r}{1-r} \pm \frac{t}{\sqrt{n-3}} - \frac{r}{2(n-1)}$$

откуда следует, что истинное значение r с той же доверительной вероятностью $(1-\alpha)$ заключено в пределах:

$$\text{th } Z_1 < r < \text{th } Z_2$$

где th - гиперболический тангенс аргумента, определяемый по таблицам. Использование Z - преобразованной величины r - оказывается более предпочтительным [30]. Параметры эмпирической прямой регрессии y на x оцениваются по формулам:

$$y - \bar{y} = r \cdot \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}), \quad e_{y/x} = r \cdot \frac{S_y}{S_x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2}$$

где $e_{y/x}$ - эмпирический коэффициент регрессии y на x .

Параметры линейной функции удовлетворяют принципу наименьших квадратов по y : сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от рассчитанных по уравнению прямой регрессии меньше, чем сумма квадратов отклонений их от любой другой прямой, т.е. имеет место не равенство:

$$\sum_{i=1}^n \left[y_i - \bar{y} - r \cdot \frac{S_y}{S_x} (x_i - \bar{x}) \right]^2 \leq \sum_{i=1}^n [y_i (Ax_i + B)]^2$$

Наименьшая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от линейной функции $Ax_i + B$, т.е. сумма квадратов отклонений их от значений $\bar{y} + r \cdot \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x})$, может быть выражена через эмпирический коэффициент регрессий по формуле:

$$\sum_{i=1}^n \left[y_i - \bar{y} - r \cdot \frac{S_y}{S_x} (x_i - \bar{x}) \right]^2 = (n-1) \cdot S_y^2 \cdot (1-r^2)$$

Аналогичен подход по оценке параметров прямой регрессии x на y . Доверительные оценки параметров прямой регрессии y на x (аналогично x на y) выполняются с использованием суммы квадратов отклонений измеренных значений y_j от рассчитанных по уравнению прямой регрессии. Принято, что все ошибки измерения независимы и следуют нормальному закону распределения около нуля с дисперсией σ^2 . Для теоретической прямой регрессии $y = \bar{y} - v_{y/x} (x - \bar{x})$ доверительными границами для \bar{y} служат:

$$\bar{y} \pm t \sqrt{\frac{S}{(n-2) \cdot n}} = \bar{y} \pm t \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \cdot \frac{S_y}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1-r^2}$$

а доверительными границами для $v_{y/x}$ служат

$$\sigma_{y/x} \pm t \sqrt{\frac{S}{n-2}} \cdot \frac{1}{S_x \sqrt{n-1}} = \sigma_{y/x} \pm t \cdot \frac{S_y \sqrt{1-r^2}}{S_x \sqrt{n-2}}$$

где t - значение коэффициента надежности из таблиц распределения Стьюдента при числе степеней свободы $R = n-2$.

Доверительные оценки отклонения теоретической прямой регрессии от эмпирической для фиксированных значений аргумента $x-x_0$ определяются как:

$$y = \bar{y} + \sigma_{y/x} (x - \bar{x}) \pm t \cdot \frac{1}{\sqrt{n-2}} \cdot \sqrt{1 + \frac{n(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)S_x^2}}$$

Необходимо отметить, что эта оценка значительно ухудшается при удалении от среднего значения $M_x - \bar{x}$, это указывает на опасность экстраполяции прямой регрессии за пределы интервала значений аргумента.

Для проверки гипотезы о том, что значения \bar{y}/x подсчитанные по уравнению для каждого x , лежат на прямой, проводят поинтервальную оценку. Для каждого интервала (их количество $l > 8-10$) подсчитывают условное среднее значение \bar{y}/x_j и условную дисперсию по формулам:

$$\bar{y}/x_j = \frac{1}{m_j} \cdot \sum_{i=1}^{m_j} y_{ij}, \quad S_{y/x_j}^2 = \frac{1}{m_j-1} \cdot \sum_{i=1}^{m_j} (y_{ij} - \bar{y}/x_j)^2,$$

где m_j - число точек (x_{ij}, y_{ij}) в j -том интервале, а затем вычисляют параметр:

$$F = \frac{\frac{1}{l-2} \cdot \sum_{j=1}^l m_j \left[\bar{y}/x_j - \bar{y} - r \cdot \frac{S_y}{S_x} (x_j - \bar{x}) \right]^2}{\frac{1}{n-l} \cdot \sum_{j=1}^n (m_j-1) \cdot S_{y/x_j}^2}$$

Если F превосходит критическое табличное значение при числе степеней свобода $K_1 = l-2$; $K_2 = n-l$ надежностью P гипотезу о линейном характере усредненной зависимости y от x следует поставить под сомнение [30].

В случае нелинейной корреляции в качестве меры тесноты связи, т.е. меры концентрации экспериментальных точек около усредненных кривых регрессии, применяется корреляционное отношение $\eta_{y/x}$ для зависимости y от x или $\eta_{y/x}$ для зависимости x от y .

Корреляционные отношения вычисляются по формулам:

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{\sum_{j=1}^l m_j (\bar{y}/x_j - \bar{y})^2}{(n-1) \cdot S_y^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^l (m_j-1) S_{y/x_j}^2}{(n-1) \cdot S_y^2}$$

$$\eta_{y/x}^2 = \frac{\sum_{j=1}^l m_j' (\bar{x}/y_j - \bar{x})^2}{(n-1) \cdot S_x^2} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^l (m_j'-1) S_{x/y_j}^2}{(n-1) \cdot S_x^2}$$

где обозначения, те же, что в приведенных выше выражениях, причем m_j' и l' имеют тот же смысл для x , какой m_j и l - для y . Корреляционные отношения удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leq |r| \leq \eta_{y/x} \leq 1; \quad 0 \leq |r| \leq \eta_{x/y} \leq 1;$$

При отсутствии корреляционной связи r , v , η равны нулю. Поэтому проверка гипотезы о наличии корреляционной связи заключается в расчете выборочных эмпирических оценок этих характеристик и значимости их отличия от нуля, причем из $\eta_{y/x} = 0$ еще не следует, что $\eta_{x/y} = 0$ [1, 30]. Для криволинейных зависимостей по строению кривых регрессии проводится также методом наименьших квадратов, при расчетах ограничиваются полиномами до третьей степени [30].

Уравнение кривой регрессии удобно записывать в виде разложения по ортогональным полиномам П.Л. Чебышева [30]:

$$y = v_0 \cdot p_0(x) + v_1 \cdot p_1(x) + \dots + v_n \cdot p_n(x), \quad \text{где } p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = (x - \bar{x}),$$

$$p_2(x) = x^2 - \frac{x^3 - x^2 \bar{x}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \cdot x + \frac{x^3 \cdot \bar{x} - (\bar{x})^2}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

Параметры v_j не зависят от степени искомого полинома и определяются по формуле:

$$e_j = \frac{\sum y_k \cdot P_j(x_k)}{\sum P_j^2(x_k)} \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

Истинные значения параметров v_j с надежностью P лежат в доверительных интервалах:

$$v_j \pm t_j \cdot \sqrt{\frac{S}{(n-j-1)H_j}}$$

где $t_j = t(P, R)$ из таблиц распределения при числе степеней свободы $R = n - j - 1$,

$S = \sum_{i=1}^n [y_i - e_0 P_0(x_i) - e_1 P_1(x_i) - \dots - e_r P_r(x_i)]^2$ есть сумма квадратов отклонений опытных точек от расчетных $H_j = \sum_{i=1}^n P_j^2(x_i)$.

Все измерения предполагаются равнозначными и независимыми с нормально распределенными ошибками. При оценке геохимических систем с парагенетическими корреляционными связями применяется метод множественной линейной корреляции для трех-шести компонент, уравнение множественной регрессии которого представляет линеаризованную функцию:

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^m a_j \cdot x_j, \text{ где } x_j - \text{значения } i\text{-ого признака.}$$

Найденное уравнение наилучшим образом, в смысле метода наименьших квадратов, соответствует имеющимся эмпирическим данным. Задача сводится к вычислению коэффициентов регрессии a_0, a_1, \dots, a_m по совокупности N наблюдений переменных x_1, x_2, \dots, x_m и зависимой переменной y . При вычислениях на ЭВМ определяются следующие показатели [18]:

1. Вычисление сумм взаимных произведений отклонений всех переменных

$$S_{jR} = \sum_{i=1}^n (x_{iY} - T_j)(x_{iR} - T_R) - \frac{\sum_{i=1}^n (x_{iY} - T_j) \sum_{i=1}^n (x_{iR} - T_R)}{n}$$

где $j=1, 2, 3, \dots, m$; $T_j = \frac{\sum_{i=1}^n x_{iY}}{n}$; $T_R = \frac{\sum_{i=1}^n x_{iR}}{n}$; $R=1, 2, 3, \dots, m$;

2. Вычисление средних для всех переменных

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{iY}$$

3. Вычисление парных эмпирических коэффициентов корреляции

$$r_{jR} = \frac{S_{jR}}{\sqrt{S_{jY}} \cdot \sqrt{S_{RR}}}$$

где $j=1, 2, 3, \dots, m$; $R=1, 2, 3, \dots, m$;

4. Вычисление стандартных отклонений для всех переменных

$$S_j = \sqrt{\frac{S_{jY}}{n-1}}$$

5. Подбор обратной матрицы парных эмпирических корреляционных коэффициентов, которая при умножении на данную матрицу дает единичную матрицу.

$$R \cdot R^{-1} = R^{-1} R = E$$

6. Вычисление коэффициентов регрессии

$$a_j = \frac{S_{jY}}{S_{jY}} \cdot \sum r_{jY} \cdot r_{jY}^{-1}$$

где S_{jY} - стандартное отклонение зависимой переменной; S_{jY} - стандартное отклонение J -ой независимой переменной; r_{ij} - парная корреляция i -ой независимой переменной с зависимой переменной; r_{ij}^{-1} - обратная корреляция независимых переменных.

7. Вычисление свободного члена

$$a_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^m a_j \cdot \bar{x}_j,$$

где \bar{y} - среднее значение зависимой переменной; \bar{x}_j - среднее значение j -той независимой переменной.

8. Вычисление множественного коэффициента корреляции $R = \sqrt{1 - \frac{|L|}{a_{11} \cdot |L'|}}$,

$$\text{где } |L| - \text{определитель ковариационной матрицы; } a_{11} - \text{первый член ковариационной матрицы; } |L'| - \text{определитель ковариационной матрицы без первого столбца и первой строки.}$$

Такова рекомендуемая схема вычислений для оценки парагенетических связей в многокомпонентных геохимических системах. Для настоящей работы наиболее интересен случай трех величин: $x = \{x_i\}$, $y = \{y_i\}$, $z = \{z_i\}$. Рассмотрим зависимости эмпирической регрессии z на x и y . Плоскость регрессии z на (x, y) описывается уравнением:

$$z - \bar{z} = b_{zx}(x - \bar{x}) + b_{zy}(y - \bar{y}),$$

где коэффициенты регрессии b_{zx} , b_{zy} определяются через коэффициенты, корреляции пар (x, y) , (x, z) и (y, z) .

$$b_{z/x} = \frac{r_{zx} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{S_z}{S_x}; \quad b_{z/y} = \frac{r_{yz} - r_{xy} \cdot r_{zx}}{1 - r_{xy}^2} \cdot \frac{S_z}{S_y}$$

где S_x , S_y , S_z - эмпирические дисперсии при n результатах. Мерой связи Z и (x, y) служит сводный (множественный) коэффициент корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{r_{zx}^2 + r_{yz}^2 - 2r_{xy} \cdot r_{zx} \cdot r_{yz}}{1 - r_{xy}^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{(n-1)S_z^2} \sum_{i=1}^n [Z_i - \bar{Z} - b_{z/x}(x_i - \bar{x}) - b_{z/y}(y_i - \bar{y})]^2}$$

$$0 \leq R \leq 1.$$

При $R=0$ между z и величинами x , y нет линейной корреляционной зависимости (но может быть нелинейная). При $R=1$ (все точки лежит в плоскости (регрессии) имеет место случай линейной функциональной зависимости величины z от x и y . Для изучения корреляции между двумя компонентами (например x и z после устранения влияния y) можно ввести парциальный (частный) коэффициент корреляции:

$$r_{zx/y} = \frac{r_{zx} - r_{xy} \cdot r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xy}^2} \cdot \sqrt{1 - r_{yz}^2}}$$

Таким образом, изложенные выше по литературным источникам рецепты указывают, что прикладная математика располагает достаточно мощным аппаратом для количественного анализа геохимических систем, и в частности для выявления, оценки и количественного выражения зависимостей между компонентами состава сложных сред.

При изучении состава геологических объектов, как геохимических систем, используется принцип относительной элементарности, представляющий собой общий методологический прием научного исследования материального мира. В соответствии с этой концепцией, объект исследования рассматривается в качестве сложной системы, состоящей из множества условно неделимых элементов, объединенных между собой совокупностью внутренних связей. Выявление взаимосвязей и пространственных взаимоотношений элементов неоднородности системы обес-

печивает понимание ее структуры. При изучении Земли как планеты в качестве дискретных, условно неделимых элементов, рассматриваются ее оболочки. Для литосферы структурными элементами являются региональные участки пород различного состава. На уровне горной породы в качестве элементов выступают отдельные минералы, а на уровне минералов - слагающие их химические элементы. Таким образом, наличие нескольких дискретных, качественно различных уровней в строении геологических объектов является их объективным природным свойством [18, 19, 29, 33].

При более детальных исследованиях геологических объектов в рамках каждого качественного однородного уровня появляется необходимость выделения уровней, различающихся по совокупности количественных критериев: состав и свойства. Подобную элементарность Л.И. Четвериков называет «количественной элементарностью» и отметил, что она определяется не только состоянием вещества сложной системы, но и зависит от задачи исследований и детальности наблюдений. Специфика заключается в диспропорции между размерами дискретных наблюдений и размерами геологических элементов. Ослаблению неоднородности способствуют стабильные физико-химические условия процессов минералообразования, спокойная тектоника, хорошая проницаемость и выдержанность рудоподводящих и рудо локализирующих структур. Для моделирования тел полезных ископаемых при решении различных геологоразведочных задач упрощенное формализованное представление об их строении было предложено Л.И. Четвериковым [33]. Условно им выделено пять структурных уровней: минерализованной зоны, тела полезного ископаемого, морфологически обособленного участка, текстуры руд и минерального агрегата. В соответствии с природными структурными уровнями при изучении месторождений определены уровни опробования, соответствующие этапам промышленного изучения: поисково-разведочному, предварительной, детальной и эксплуатационной разведкам; а также уровни отдельного замера (размера пробы). Изучение связей между компонентами должно выполняться на каждом уровне опробования с учетом конкретных задач в соответствии с этапами изучения объекта. Причем сила и характер связей, осо-

бенно парагенетических, могут меняться в зависимости от уровня опробования.

Детальность выявления структуры изучаемого объекта зависит от густоты сети дискретных наблюдений. Чем детальней эта сеть, тем более глубокий уровень в строении природных геологических образований может быть выявлен путем анализа и соответствующего группирования результатов единичных наблюдений.

Если группа единичных наблюдений располагается в пределах одного элемента неоднородности (структурного уровня, уровня опробования), то между значениями изучаемого признака в смежных пунктах наблюдений возникнут более или менее отчетливые автокорреляционные связи, а в характеристике наблюдаемой изменчивости признака отчетливо проявится неслучайная ее составляющая. Если ее проводить наблюдения по более редкой сети так, чтобы смежные пункты приходились на различные элементы неоднородности, корреляционные связи между значениями изучаемого признака в них ухудшатся или не проявятся, а в характеристике изменчивости признака будет доминировать случайная ее составляющая. Таким образом, изменчивость свойств одного и того же природного геологического объекта может быть оценена как случайная и как неслучайная после сгущения этой сети. Еще более заметное влияние на представления об изменчивости изучаемых свойств природных геологических образований оказывают размеры отбираемых проб. С увеличением размеров проб, их длины, наблюдаемая изменчивость значительно снижается. В частности, выравнивание средних содержаний происходит по закону «больших чисел» за счет резкого увеличения общего количества входящих в пробу элементов неоднородности.

Зависимость частных значений изучаемых признаков от густоты сети наблюдений и от размеров отбираемых проб свидетельствует о том, что задача полноценного и всестороннего количественного описания природной изменчивости свойств геологических образований практически невыполнима. Природная изменчивость существует объективно, отражая комплекс геологических и физико-химических условий формирования изучаемого объекта и представляет собой явление весьма сложного и многопланового ха-

рактера. *При решении конкретных геологических задач из всех возможных проявлений природной изменчивости оцениваются только те, знание которых необходимо для решения поставленных задач и только на тех уровнях строения, которые выявляются при данном масштабе проводимых исследований.* Следовательно, понятие наблюдаемой изменчивости принципиально отличается от широко распространенного понятия природной изменчивости свойств геологических образований.

Наблюдаемая изменчивость отражает **детальность наших представлений** об изменчивости реально существующего геологического образования в зависимости не только от его природной сложности, но также и от условий экспериментальных наблюдений, положенных в основу ее характеристики.

При проведении статистической обработки экспериментальных геологических данных всегда следует помнить о том, что характеристики изменчивости, а также функции распределения изучаемых свойств отражают не только природную изменчивость, но и условия проводимого эксперимента. Это отчетливо видно при анализе распределения содержаний в объектах с повышенной степенью неравномерности (золото, ртуть, вольфрам). В работе [18] по материалам Д.А. Зенкова показано, что гиперболовидное распределение золота по секционным бороздовым пробам сменяется ассиметричным логнормальным для проб по подсечениям и почти симметричным для «площадных». Поэтому выводы по виду статистических характеристик необходимо делать с учетом уровня опробования и уровня проб.

При использовании методов корреляционного и регрессионного анализов при разведке также необходимо учитывать влияние геометрии проб - их объемов, размеров и ориентировки на количественные характеристики выборочных оценок связи. *Для выявления характера и силы связей между содержаниями следует пользоваться данными анализов проб, геометрия которых отвечает решению практической задачи.*

Если характеристики связи определяются для целей подсчета одного элемента по содержанию другого в подсчетных блоках (вредные приме-

си, попутные полезные компоненты), то должны использоваться средние содержания исследуемых элементов в подсчетных блоках. Если нас интересует характер связи между элементами на уровне локального обособления (единичной рядовой пробы) в задачах оконтуривания, детализации, то для целей корреляционного анализа и построения уравнений регрессии должны быть использованы данные по единичным пробам (штуфы, керн, борозда). В большей степени все сказанное относится к парагенетическим связям, зависимость которых от природно-структурных уровней строения более существенна. Для кристаллохимических связей (на уровне минерала) зависимости более стабильны в объеме геологических объектов, их нарушение может быть вызвано лишь сменой физико-химических условий. В нашей работе изучены кристаллохимические связи, основанные на изоморфных замещениях элементов в минералах и парагенетические связи в системах с постоянной суммой изучаемых компонент. Уравнения регрессии и коэффициенты корреляции практически одинаковы для выборок из рядовых, «сквозных» проб по керну и групповых для подсчетных блоков [22, 23]. При этом необходимо указать на ведущую роль геологического анализа на всех уровнях использования математических методов. Перед математической обработкой данные должны быть оценены и систематизированы с геологической точки зрения. Все изучаемые объекты-массивы горных пород, скопления полезных ископаемых, их участки или блоки должны быть проверены на геологическую однородность, а для совокупностей, не однородных в геологическом отношении, должны быть установлены границы. Для каждого массива цифровых данных по однородным геологическим совокупностям должна быть проверена однотипность условий эксперимента и степени представительности результатов отдельных испытаний (идентичность способов пробоотбора, размеров, ориентировки и объемов проб), а также методическое соответствие пространственного расположения проб для решения поставленной геологической задачи.

Геологический анализ должен оказывать влияние не только на оценку и систематизацию цифровых данных, но и на обоснование возможности применения конкретной математической моде-

ли. С его помощью, в зависимости от полноты геологической изученности объекта, должны определяться те задачи, которые могут быть решены на данной стадии исследования с применением математических методов.

Таким образом, использование математического анализа для решения конкретных геологических задач возможно только на геологической основе. В качестве основы для математического моделирования с помощью геологического анализа создается геологическая модель изучаемого объекта, адекватная ему на соответствующем уровне изучения. По образцу геологической модели строится математическая модель, с помощью которой обрабатывается исходная цифровая информация.

Статистические модели являются схемами, упрощенными по сравнению с реальностью, они предполагают некоторую однородность исследуемого явления, т.е. статистическую устойчивость, однородность или регулярность [1, 18, 25].

В случае геологических объектов - это пространственная однородность. Правда, понятие статистической однородности может быть несколько шире, чем понятие геологической однородности. Исследуемая с помощью статистической модели *некоторая числовая характеристика должна сохраняться*.

В то же время вряд ли можно ожидать от реальных объектов идеальной статистической однородности, но чем более однороден рассматриваемый объект, тем ближе полученное решение к реальности. Если объект неоднороден, можно, используя формальные методы, попытаться разделить его на однородные участки, но лучше для этой цели воспользоваться разделением, получающимся при геологическом изучении объекта, и считать, что *примерно однородные геологические участки однородны и статистически*. Особенно необходимо быть осторожным при нарушении геологической непрерывности, т.к. в этом случае могут быть нарушены и статистические связи.

При геолого-математическом моделировании необходимо четко определить границы исследуемой геологической совокупности, ее элементарные составляющие, а также выбрать свойства элементарных составляющих, подлежащих изменению. Определение границ геологической совокупности и составляющих ее элементов произ-

водится исходя из конкретных задач. **Результаты статистических исследований можно распространять только на исследуемую совокупность.** Правомерность перенесения полученных выводов на более широкий круг объектов или явлений должна быть обоснована с геологических позиций.

При изучении свойств геологических объектов как пространственных переменных выбор математической модели зависит от размерности пространства. Сложность математического моделирования и вычислительных операций значительно увеличивается при переходе от одномерного пространства (случайные последовательности) к n -мерному (геохимические системы). В процессе моделирования необходимо стремиться к снижению размерности пространства за счет перехода к усредненным числовым характеристикам или разделению общей задачи на несколько частных.

Сведение многомерных случайных величин к комбинации трех, а еще лучше двумерных моделей позволяет кроме аналитических методов широко использовать простые графические методы исследования. Для этого простые характеристики свойств объекта заменяются комбинированными; произведение, отношение, сумма. При изучении рудных тел часто в качестве пространственной переменной исследуется произведение мощности рудного тела на содержание полезного компонента (продуктивность или линейный запас). При изучении геохимических систем вместо содержаний отдельных элементов используют отношения содержаний элементов, их

требует внимательного применения и постоянно-го контроля при малейших признаках изменения геологической обстановки. При наличии на разведываемых объектах достаточно тесных эмпирических корреляционных связей между химическими или минеральными компонентами возможен случай комплексной количественной оценки необходимых компонент через другие, определяемые с помощью ЯГФМ каротажа [2, 22 - 24]. Точность оценки компонент расчетными косвенными методами зависит от следующих факторов: точности и правильности используемого уравнения регрессии и погрешностей входных данных ЯГФМ каротажа. Для количественных определений к подсчету запасов вредных и сопутствующих компонент теснота связи должна быть не хуже ($|r| \geq 0,8$; $|\eta| \geq 0,8$). Для оценки петрогенных компонент, петрофизических параметров при расчленении разрезов скважин теснота связи может быть несколько слабее ($|r| \geq 0,6$; $|\eta| \geq 0,6$).

Точность полученного уравнения регрессии определяется: ошибками определения компонент за счет анализа, обработки и отбора проб; величиной обрабатываемой выборки (геологической совокупности), ошибками аппроксимации при подборе зависимости, геологическими факторами (уровень изучения объекта, геометрические характеристики сети наблюдений и проб). **Особое внимание необходимо обращать на правильность полученной зависимости, т.е. на приведение систематических погрешностей к требуемому уровню.**

Материалы данной статьи выставлялись на

сайте SciTech Library по от 22 апреля 2003 года.

ЛИТЕРАТУРА

1. Урманца Г. А. Статистическое исследование зависимости. М.: Металлургия, 1968. - 227 с.
2. Калита М. И. Обработка результатов измерений в условиях неопределенности. М.: Недра, 1965. - 210 с.
3. Черепанов А. П. Статистические соотношения и корреляционная зависимость в рудных материалах. Зап. Вост. зап.-сибир. ун-та. Сер. Геол. науки, 1951, № 8, с. 94-107.
4. Черепанов А. Ф. Корреляционные связи между элементами в рудных материалах. Математические методы в геологии. Докл. сов. геологов на XIII сессии Междунац. Карьеровед. М.: Наука, 1968, с. 157-163.
5. Черепанов А. Ф., Черепанов И. А. Рудоведение по расчету рудных запасов. - Нева, 1964. - 224 с.
6. Черепанов А. Ф. Методы корреляции и группировки параметров в задачах зависимости взаимосвязанных факторов в геологии. М.: Недра, 1970, с. 43-58-132.

7. Бурков Ю.К. Оценка иерархий ассоциаций химических элементов для выявления условий формирования и металлогенической специализации горных пород. - Вестник Львовского ун-та: Математические методы в геологии, - Львов, 1973, с.89-90.
8. Васильев В.И., Драгунов В.И., Рундквист Д.В. Парагенезис минералов и формация в ряду образований различных уровней организации. - Зап. Всес. минералог. об-ва, 1972, ч.101, вып. 3, с. 281-289.
9. Вернадский В.И. Парагенезис химических элементов в земной коре. - Избр. соч., 1954, т.1, - 696 с.
10. Вистелиус А.Б. Проблемы математической геологии. Модели процессов и парагенетический анализ. - Геология и геофизика, 1963, с.3-16.
11. Вистелиус А.Б., Белоусова В.Т. О применении коэффициента корреляции при исследовании парагенезисов в терригенных отложениях. Докл. АН СССР, 1947, т.35, №4, с.343-345
12. Воронин Ю.А., Еганов З.А. Фации и формации. Парагенезис: Тр. ин-та геологии и геофизики, вып. 146. - Новосибирск, 1972, 120с.
13. Езекиэл М., Фоке К.А. Методы анализа корреляций и регрессий. - М.: Статистика, 1966, - 559 с.
14. Жариков В.А. Парагенезис минералов, фации и формации. - Зап. Всес. минералог. об-ва, 1968, вып. 4, ч.97, с.510-514.
15. Иванов Д.Н. Линейные парагенезисы главных породобразующих элементов гранитов Центрального Казахстана. - Докл. АН СССР, 1963, т.150, Я 2, с.392-395.
16. Иванов О.П. Некоторые замечания к определению понятий «парагенезис», «генерация минерала» и «стадия минерализации». - Зап. Всес. минералог. об-ва, 1972, ч.101, вып.5, с.329-335.
17. Измененные околорудные породы и их поисковое значение. - Сб. под ред. Н.Н. Курска. - М.: Госгеолтехиздат, 1954, - 272 с.
18. Каждан А.Б., Гуськов О.И., Шиманский А.А. Математическое моделирование в геологии и разведке полезных ископаемых, - М.: Недра, 1979. - 168 с.
19. Каллистов П.Д. Изменчивость оруденения и плотность наблюдений при разведке и опробовании. - Советская геология, 1956, № 53, С.118-151.
20. Канторович А.Э., Кройгардт Е.В., Садиков М.А. Понятие «оптимальная система» в геологии. - В кн.: Математизация и автоматизация в геологических исследованиях: Краткие тез. докл. к со- • вещанию. - Л., 1972, с.17.
21. Коржинский Д.С. Теоретические основы анализа парагенезисов минералов. - М.: Наука, 1973. - 288 с.
22. Краснощёров В.А. Ядерногеофизические методы бескерновой документации скважин на полиметаллы и барит в карбонатно-терригенно-глинистых разрезах в Большом Каратау (Южный Казахстан). - Известия АН КазССР. Сер. геол., 1983, Л 4, с.85. - Полностью рукопись депонирована в КазНИИНТИ, № 408-83 Деп. - 133 с.
23. Краснощёров В.А., Кошелев И.П., Шишакин О.В., Беленко Р.Д. Использование корреляционных связей при применении ядерного каротажа на флюоритовых месторождениях. - Сб.: Геофизические поиски рудных месторождений (ядерная геофизика). /Мингео СССР, Казфилиал ВИРГ.- Алма-Ата, 1971, с.3-7.
24. Краснощёрова В.Н., Краснощёров В.А. К вопросу определения основных петрогенных компонент осадочных карбонатных отложений методами каротажа. - Сб.: Тез. докл. совещ.: Условия локализации и закономерности размещения стратиформных свинцово-цинковых и медных месторождений. - Алма-Ата, КазИМС, 1982, с. 106-107.
25. Крамбейн У., Грейбилл Ф. Статистические модели в геологии. - М.: Мир, 1969. - 397 с.
26. Минералы и парагенезис минералов горных пород. - М.: Наука, 1973. - 334 с.
27. Мягков В.Ф. О геохимическом принципе исследования минеральных парагенезисов магматогенных месторождений. - Геохимия, 1963, №4, с.641-644.
28. Петровская Н.В. О понятии «парагенетическая минеральная ассоциация». - Геол. рудн. месторождений, 1967, Л 2, с.69-78.
29. Рац М.В. Неоднородность горных пород и их физических свойств. - М.: Недра, 1968. 83 с.
30. Румшицкий Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента. - М.: Наука, 1971, - 192 с.
31. Смирнов Б.И. Корреляционные методы при парагенетическом анализе. - М.: Недра, 1981. - 176 с.
32. Тюленев А.Е. Ассоциации химических элементов в коре выветривания по данным корреляционного анализа. - Докл. АН СССР, 1969, т.187, №2, с.436-439.
33. Четвериков Л.И. Методологические основы опробования пород и руд. - Воронеж, ВГУ, 1980, - 124с.