УДК 517.948.34

М. Қ. ДАУЫЛБАЕВ, М. Ж. ӘДІЛБЕКОВА

(Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы)

СИНГУЛЯРЛЫ АУЫТҚЫҒАН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ИНТЕГРАЛДЫ ШЕТТІК ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ АСИМПТОТИКАЛЫҚ БАҒАЛАУЫ

Аннотация. Екі үлкен туындысының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сызықты жай дифференциалдық теңдеулер үшін интегралды шеттік есепқосымша сипаттаушы теңдеулердің түбірлерінің теріс болғанда [1],қосымша сипаттаушы теңдеулердің түбірлерінің таңбалары қарама-қарсы болғанда [2] жұмыстарында қарастырылады. Осы есеп шешімінің аналитикалық формуласын алып, бағалаймыз.

Тірек сөздер:кіші параметр, асимптотика, бастапқы секіріс.

Ключевые слова:малый параметр, асимптотика, начальный скачок.

Keywords:small parameter, asymptotics, initial jump.

Екі үлкен туындыларының алдында кіші параметрі бар үшінші ретті сызықты келесі

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y''' + \varepsilon A(t) y'' + B(t) y' + C(t) y = F(t) \tag{1}$$

дифференциалдық теңдеуді $[0,1]$ кесіндісінде төмендегі интегралды шекаралық шарттармен қарастырайық:

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha,$$
$$h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y'(0,\varepsilon) = \beta,$$
$$h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) - \int_0^1 [a_0(x)y(x,\varepsilon) + a_1(x)y'(x,\varepsilon)]dx = \gamma, \qquad (2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ – кіші параметр, $\alpha,\beta,\gamma,a_i(x), i = 0,1 - \varepsilon$ – нан тәуелсіз белгілі тұрақтылар.

Бұл (1),(2) шекаралық есеп үшін төмендегі шарттар орындалсын:

I. $A(t),B(t),C(t),F(t)\in C^2[0,1]$.

II. $B(t) \neq 0, t \in [0,1]$.

III. $\mu_1(t) \neq \mu_2(t), \mu_i(t) < -\delta < 0,$ мұндағы $\mu_i(t), i = 1,2$ келесі қосымша «сипаттаушы» теңдеудің нақты теріс түбірлері:

$$\mu^2(t) + A(t)\mu(t) + B(t) = 0 \qquad (3)$$

IV. $\overline{\Delta} = a_1(0) - e^{-\int_0^1 \frac{C(s)}{B(s)}ds} + \int_0^1 (a_0(x) - \frac{a_1(x)C(x)}{B(x)})e^{-\int_0^x \frac{C(s)}{B(s)}}dx \neq 0.$

Лемма1. Егер I–III шарттар орындалса, онда (1.2.4) біртекті теңдеудің $y_i(t,\varepsilon), i = 1,2,3$ іргелі шешімдер жүйесі $\varepsilon \to 0$ туындыларымен келесі асимптотикалық түрде жазылады:

$$y_i^{(j)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^j} e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu_i(x)dx}(\mu_i^j(t)y_{i0}(t) + \varepsilon(j\mu_i^{j-1}(t)y_{i0}'(t) +$$
$$+\frac{j(j-1)}{2}\mu_i^{j-2}(t)\mu_i'(t)y_{i0}(t) + \mu_i^j(t)y_{i1}(t)) + O(\varepsilon^2)), j = \overline{0,2}, i = \overline{1,2},$$
$$y_3^{(i)}(t,\varepsilon) = y_{30}^{(i)}(t) + \varepsilon y_{31}^{(i)}(t) + O(\varepsilon^2), i = \overline{0,2}, \qquad (4)$$

Мұндағы $y_{i0}(t)$, $y_{i1}(t)$, $i = \overline{1,3},$ коэффициенттері сәйкесінше келесі есептердің шешімдері:

$$(3\mu_i^2(t) + 2A(t)\mu_i(t) + B(t))y_{i0}'(t) + (3\mu_i(t)\mu_i'(t) + A(t)\mu_i'(t) + C(t))y_{i0}(t) = 0, y_{i0}(0) = 1,$$
$$(3\mu_i^2(t) + 2A(t)\mu_i(t) + B(t))y_{i1}'(t) + (3\mu_i(t)\mu_i'(t) + A(t)\mu_i'(t) + C(t))y_{i1}(t) =$$
$$= -(3\mu_i(t) + A(t))y_{i0}''(t) - 3\mu_i'(t)y_{i0}'(t) - \mu_i''(t)y_{i0}(t), y_{i1}(0) = 0, i = 1,2,$$
$$B(t)y_{30}'(t) + C(t)y_{30}(t) = 0, y_{30}(0) = 1,$$
$$B(t)y_{31}'(t) + C(t)y_{31}(t) = -A(t)y_{30}''(t), y_{31}(0) = 0.$$
$$K(t,s,\varepsilon), 0 \le s \le t \le 1$$

функциясы келесі есептің шешімі болсын:

$L_\varepsilon K(t,s,\varepsilon) = 0, K(s,s,\varepsilon) = 0, K'(s,s,\varepsilon) = 0, K''(s,s,\varepsilon) = 1.$

Теорема 1. Егер I-III шарттар орындалса, онда Коши функциясы $K(t,s,\varepsilon), 0 \le s \le t \le 1$ облысында бар, жалғыз және төмендегі формуламен анықталады:

$$K(t,s,\varepsilon) = \frac{1}{W(s,\varepsilon)}W_3(t,s,\varepsilon), \qquad (5)$$

мұндағы $W(s,\varepsilon) \neq 0 - y_1(s,\varepsilon), y_2(s,\varepsilon), y_3(s,\varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесінің вронскианы, ал $W_3(t,s,\varepsilon)$ вронскиан $W(s,\varepsilon)$ үшінші жатық жолын $y_1(t,\varepsilon), y_2(t,\varepsilon), y_3(t,\varepsilon)$ іргелі шешімдер жүйесімен алмастырғанда алынатын анықтауыш.

$\Phi_i(t,\varepsilon), i = \overline{1,3}$ функциялары келесі есептің шешімі болсын:

$$L_\varepsilon \Phi_i(t,\varepsilon)=0, h_k\Phi_i(t,\varepsilon)=\delta_{ki}, k=\overline{1,3}, i=\overline{1,3}.$$

$\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ функциялары шекаралық функциялар деп аталады.

$\Delta(\varepsilon)$ анықтауышы (4) көмегімен $\varepsilon\to 0$ келесі асимптотикалық түрде өрнектеледі:

$$\Delta(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}[(\mu_1(0)-\mu_2(0))\overline{\Delta}+O(\varepsilon)]\neq 0.$$

Теорема 2. Егер I-Iv шарттары орындалса, онда $\Phi_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ шекаралық функциялары $0\le t\le 1$ кесіндісінде бар, жалғыз және төмендегі формуламен өрнектеледі:

$$\Phi_i(t,\varepsilon)=\frac{\Delta_i(t,\varepsilon)}{\Delta(\varepsilon)}, i=\overline{1,3} \tag{7}$$

мұндағы $\Delta_i(t,\varepsilon)$ анықтауышы $\Delta(\varepsilon)\neq 0$ анықтауышынан оның I-ші жатық жолын $y_i(t,\varepsilon), i=\overline{1,3}$ іргелі шешімдер жүйесімен алмастырғаннан алынған анықтауыштар.

Теорема 3. Егер I-Iv шарттар орындалса, онда (1), (2) есептің $[0,1]$ кесіндісінде шешімі бар, жалғыз және келесі формуламен өрнектеледі:

$$y(t,\varepsilon)=\alpha\Phi_1(t,\varepsilon)+\beta\Phi_2(t,\varepsilon)+[\gamma-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^1 H(s,\varepsilon)F(s)ds]\Phi_3(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K(t,s,\varepsilon)F(s)ds. \tag{9}$$

Мұндағы $H(s,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}K(1,s,\varepsilon)-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^1(a_0(x)K(x,s,\varepsilon)+a_1(x)K'(x,s,\varepsilon))dx$

$H(s,\varepsilon)$ функциясының (6) көмегімен асимптотикалық сипаты келесі түрде болады:

$$\begin{aligned}H(s,\varepsilon)=&\frac{a_1(s)-y_{30}(1)+\int_s^1(a_0(x)y_{30}(x)+a_1(x)y_{30}'(x))dx}{y_{30}(s)\mu_1(s)\mu_2(s)}+\\&+\frac{y_{20}(1)-a_1(1)}{y_{20}(s)\mu_2(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_2(x)dx}-\\&-\frac{y_{10}(1)-a_1(1)}{y_{10}(s)\mu_1(s)(\mu_2(s)-\mu_1(s))}e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu_1(x)dx}+O(\varepsilon).\end{aligned} \tag{10}$$

Теорема 4. Егер I - Iv шарттары орындалса, онда қарастырып отырған (1), (2) шекаралық есептің шешімінің [0,1] кесіндісінде асимптотикалық бағалаулары төмендегі формулалармен өрнектеледі:

$$\left|y^{(j)}(t,\varepsilon)\right|\le C|\alpha\cdot a_1(0)-\gamma|+\varepsilon^2|\beta|+\max|F(t)|)+\frac{1}{\varepsilon^2}(|\alpha|+\varepsilon|\beta|+|\gamma|+\max|F(t)|)e^{-\delta\frac{t}{\varepsilon}}, j=\overline{0,2}, \tag{11}$$

Бұл теоремадан $y^{(j)}(0,\varepsilon)=O(1), j=0,1,\quad y''(0,\varepsilon)=O(\frac{1}{\varepsilon^2})$. екендігі шығады.

ӘДЕБИЕТ

1 Касымов К.К., Шарипова Ж.У. Асимптотические оценки решения краевой задачи для сингулярно возмущенных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка // Вестник КазГУ. серия мат. 1994. Вып.1. С.146.

2 Нургабыл Д.Н., Уаисов А.Б. О граничных скачках линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных // Вестник ЖГУ им.И.Жансугурова.2012. № 4. С.17-21.

REFERENCES

1 Kasymov K.A.,Sharipova Zh.U. Asimptoticheskiye otsenki resheniya kraevoy zadachi dlya singulyarno vozmushchennykh lineynykh differentsialnykh uravneny tretyego poryadka // Vestnik KazGU,seriya mat. 1994. Vyr.1. P.146.

2 Nurgabyl D.N.,Uaisov A.B. O granichnykh skachkakh lineynykh differentsialnykh uravneny s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh // Vestnik ZhGU im.I.Zhansugurova.2012. № 4. P.17-21.

Резюме

М. Қ. Дауылбаев, М. Ж. Адильбекова

(Казахский национальный университет им.аль-Фараби, Алматы)

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРАЛЬНО КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается интегральная краевая задача для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка с малым параметром при двух старших производных. Построены фундаментальная система решений, функция Коши и граничные функций сингулярно возму-щенного однородного дифференциального уравнения, а также их асимптотические представления по малому параметру. Находим аналитическую формулу решения для этой задачи и оцениваем ее.

Ключевые слова: малый параметр, асимптотика, начальный скачок.

Summary

M. K. Dauylbayeb, D. N. Nurgabyl, M. Zh. Adil'bekova

ASIMPTOTIC ESTIMATE OF SOLUTIONS OF INTEGRAL BOUNDARY VALUE FOR SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS

An integral boundary value problem for linear ordinary differential equations of the third order with a small parameter in the two highest derivatives is considered when roots of additional characteristic equation are negative. A fundamental system of solutions, Cauchy function and boundary functions for a singularly perturbed homogeneous differential equation and their asymptotic representations with respect to small parameter are constructed. An explicit formula of the solution of the considered integral boundary value problem is obtained using Cauchy function and boundary functions. Asymptotic estimates of the solution and its derivatives of considered integral boundary value problem are obtained. An asymptotic behavior of the solution and order of growth of its derivatives with respect to small parameter are determined. It is shown that the solution of the integral boundary value problem at the left end of given segment has the phenomenon of an initial jump of zero order and second power. The modified unperturbed integral boundary value problem with initial jumps of solution and integral terms of the boundary conditions is constructed. Found the value of the initial jump of the integral terms. Theorem about asymptotic estimation of the difference between the solutions of the singularly perturbed and the corresponding modified unperturbed problem is proved. The asymptotic convergence of the solution of the singularly perturbed integral boundary value problem to solving of a modified unperturbed problem are proved.

Keywords:small parameter, asymptotics, initial jump.

Поступила 2014 г.