УДК 917.928

Д. Н. НУРГАБЫЛ[1] *, А. Б. УАИСОВ*[2]

([1]Жетысуский государственный университет им. И. Жансугурова, Талдыкорган,
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация. В настоящей работе описан алгоритм построения асимптотического разложения решения краевой задачи для дифференциальных уравнений высшего порядка с малым параметром при производных.

Найдено аналитическое представления решения вырожденной краевой задачи. Построено равномерное асимптотическое приближение решения сингулярно возмущенной краевой задачи с точностью до произвольного порядка при стремлении малого параметра к нулю. Установлен рост производных решения возмущенной краевой задачи при $\varepsilon \to 0$. Описан явление начального скачка.

Ключевые слова: асимптотика, краевая задача, дополнительное характеристическое уравнение, возмущенные и невозмущенные задачи, явление начального скачка.

Тірек сөздер: асимптотика, шекаралық есеп, қосымша характеристикалық теңдеу, туындалған және ауытқыған есептер, бастапқы секіріс құбылысы.

Key words: asymptotic, boundary value problem, additional characteristic equation, perturbed and no perturbed problems, initial jump phenomenon.

1.Постановка задачи. Для широкого класса сингулярно возмущенных начальных краевых задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений выбор надлежащего метода для построения решений или их асимптотических приближений без предварительного исследования оказывается весьма затруднительным. Анализ показывает, что к таким задачам, можно отнести и краевые задачи, для которых характерно наличие явления начального скачка. Наибольшие общие результаты в этом направлении получены в [1-5].

Однако в указанных работах рассматривается случай, когда малый параметр содержится только при старшей производной. Естественно возникает вопрос о рассмотрении краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, обладающих явлением начального скачка.

В [6] выделен класс краевых задач для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. При этом были установлены оценки, выражающие связь между решением $\bar{y}(t)$ вырожденной краевой задачи и решением $y(t,\varepsilon)$ исходной сингулярно возмущенной задачи. Из этих оценок видно, что $\bar{y}^{(q)}(t)\,(q=\overline{0,n_1-1})$ можно использовать в качестве асимптотического приближения к $y^{(q)}(t,\varepsilon)\,(q=\overline{0,n_1-1})$, имеющего равномерную точность на всем отрезке [0,1], производные $y^{(n_1+j)}(t,\varepsilon)$, $j=\overline{0,m-1}$ в точке $t=0$ отличаются от $\bar{y}^{(n_1+j)}(t)$, $j=\overline{0,m-1}$ на конечные величины Δ^j, а производные $y^{(q)}(t,\varepsilon)\,(q=m+n_1,m+n_1+1,\ldots)$ в точке $t=0$ имеют полюс по параметру ε. Следовательно, $\bar{y}^{(q)}(t)\,(q=m+n_1,m+n_1+1,\ldots)$ в некоторой окрестности точки $t=0$ не может служить равномерным асимптотическим приближением для $y^{(q)}(t,\varepsilon)\,(q=m+n_1,m+n_1+1,\ldots)$.

Следовательно, естественно поставить вопрос о построении равномерного асимптотического приближения решения краевой задачи для дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, обладающих явлением начального скачка с точностью до произвольного порядка.

Итак, рассмотрим линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с малым параметром при производных

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \sum_{r=1}^{m}\varepsilon^r A_{n+r}(t)\frac{d^{n+r}y}{dt^{n+r}}+\sum_{k=0}^{n}A_k(t)\frac{d^k y}{dt^k}=h(t),\ 0\le t\le 1, \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\frac{d^i y}{dt^i}\Big|_{t=0}=\alpha_i,\ i=\overline{0,l-1},\quad \frac{d^i y}{dt^i}\Big|_{t=1}=\beta_i,\ i=\overline{0,p-1}, \tag{2}$$

где $\varepsilon>0$ – малый параметр, α_i,β_i – постоянные, $A_{n+m}(t)=1$, $m+n=l+p$.

Потребуем выполнения следующих условий.

1^0. Функции $A_i(t) \in C^{n+N+1-n_1}([0,1])$, $i=\overline{0,n+m}$; $h(t)\in C([0,1])$.

2^0. Функция $A_n(t)$ удовлетворяет неравенству $A_n(t)\neq 0, \quad 0\le t\le 1$.

3^0. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^m + A_{n+m-1}(t)\,\mu^{m-1} + \ldots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0$$

имеет m различных корней $\mu_1,\ldots,\mu_m$ с отрицательными вещественными частями, причем $m<l$. Пусть $l-m=n_1$.

4^0. Справедливо

$$\bar{J}_0 = \det\left\|\sigma_{ij}\right\| \neq 0, \tag{3}$$

где элементы $\sigma_{ij} = u_{j0}^{(i-1)}(0), j=\overline{1,n}, i=\overline{1,l}$, $\sigma_{l+i,j} = u_{j0}^{(i-1)}(1), j=\overline{1,n}, \ i=\overline{1,p}$ составлены на основе фундаментальной системы решений $u_{10}(t), u_{20}(t),\ldots,u_{n0}(t)$ уравнения

$$L_0\bar{y} = 0. \tag{4}$$

Пусть $\overline{W}(t)$ – вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (3), тогда $\overline{W}(t)\neq 0, \quad t\in[0,1]$.

2. Построение асимптотического разложения. Из выше сказанного заключаем, что асимптотическое разложение решения краевой задачи (1), (2) следует искать в виде:

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + \varepsilon^{n_1} u_\varepsilon(\tau), \ \ \tau = t/\varepsilon, \tag{5}$$

где

$$y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon\, y_1(t) + \ldots, \tag{6}$$

$$u_\varepsilon(\tau) = u_0(\tau) + \varepsilon\, u_1(\tau) + \ldots. \tag{7}$$

Подставляя (5) в (1) и приравнивая выражения, зависящие от t и τ по отдельности, получим уравнения относительно $y_\varepsilon(t)$ и $u_\varepsilon(\tau)$:

$$\begin{gathered} A_n(t)y_\varepsilon^{(n)}(t) + A_{n-1}(t)y_\varepsilon^{(n-1)}(t) + A_{n-2}(t)y_\varepsilon^{(n-2)}(t) + \ldots + A_1(t)y'_\varepsilon(t) + A_0(t)y_\varepsilon(t) = h(t) - \\ - \varepsilon A_{n+1}(t)y_\varepsilon^{(n+1)}(t) - \varepsilon^2 A_{n+2}(t)y_\varepsilon^{(n+2)}(t) - \ldots - \varepsilon^m A_{n+m}(t)y_\varepsilon^{(n+m)}(t), \end{gathered} \tag{8}$$

где верхний значок (i) выражения $y_\varepsilon^{(i)}$ означает i – ую производную по t от $y_\varepsilon(t)$;

$$\begin{gathered} A_{n+m}(\varepsilon\tau)u_\varepsilon^{(n+m)}(\tau) + A_{n+m-1}(\varepsilon\tau)u_\varepsilon^{(n+m-1)}(\tau) + \ldots + A_{n+1}(\varepsilon\tau)u_\varepsilon^{(n+1)}(\tau) + A_n(\varepsilon\tau)u_\varepsilon^{(n)}(\tau) + \\ + \varepsilon A_{n-1}(\varepsilon\tau)u_\varepsilon^{(n-1)}(\tau) + \varepsilon^2 A_{n-2}(\varepsilon\tau)u_\varepsilon^{(n-2)}(\tau) + \ldots + \varepsilon^n A_0(\varepsilon\tau)u_\varepsilon(\tau) = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где верхний значок (i) выражения $u_\varepsilon^{(i)}$ означает i – ую производную по τ от $u_\varepsilon(\tau)$.

Подставим теперь разложения (6) в (8) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. В результате получаем

$$L_0 y_0(t) \equiv A_n(t)\, y_0^{(n)} + A_{n-1}(t) y_0^{(n-2)} + \ldots + A_0(t) y_0 = h(t), \tag{10}$$

$$L_0 y_k(t) \equiv A_n(t)\, y_k^{(n)} + A_{n-1}(t) y_k^{(n-2)} + \ldots + A_0(t) y_k = F_k(t), \tag{11}$$

где

$$F_k(t) = -\sum_{i=1}^{k} A_{n+i}(t) y_{k-i}^{(n+i)}(t), \quad k = \overline{1,m},$$
$$F_k(t) = -\sum_{i=1}^{m} A_{n+i}(t) y_{k-i}^{(n+i)}(t), \; k = m+1,\, m+2, \ldots \tag{12}$$

Подставляя (7) в (9), представляя $A_i(\varepsilon\tau)$ в ряды по степеням ε и собирая члены с одинаковыми степенями ε, получим

$$L_{n+m} u_0 \equiv A_{n+m}(0) u_0^{(n+m)}(\tau) + \ldots + A_{n-1}(0) u_0^{(n+1)}(\tau) + A_n(0) u_0^{(n)}(\tau) = 0, \tag{13}$$

$$L_{n+m} u_k \equiv A_{n+m}(0) u_k^{(n+m)}(\tau) + \ldots + A_{n-1}(0) u_k^{(n+1)}(\tau) + A_n(0) u_k^{(n)}(\tau) = H_k(\tau), \tag{14}$$

где

$$H_k(\tau) = -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{A_{n+m-i}^{(k-j)}(0)\tau^{k-j}}{(k-j)!} u_{k-j}^{(n+m-j)}(\tau) - \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-r} \frac{A_{n-r}^{(j)}(0)\tau^{j}}{j!} u_{k-r-j}^{(n-r)}(\tau), \; k = \overline{1,n-1},$$
$$H_k(\tau) = -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{A_{n+m-i}^{(k-j)}(0)\tau^{k-j}}{(k-j)!} u_{k-j}^{(n+m-j)}(\tau) - \sum_{r=1}^{n}\sum_{j=0}^{k-r} \frac{A_{n-r}^{(j)}(0)\tau^{j}}{j!} u_{k-r-j}^{(n-r)}(\tau), \; k = n, n+1, \ldots \tag{15}$$

Чтобы из полученных уравнений определить члены разложений (6), (7), нужно задать условия. Для этого подставим (5), (6), (7) в исходные краевые условия (2):

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^{(k)}(0) + \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^k} \sum_{i=0}^{\infty} u_i^{(k)}(0) = \alpha_k, \quad k = \overline{0, n_1 + m - 1}. \tag{16}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства (16). Тогда получим:

$$y_0^{(j)}(0) = \alpha_j, \; j = \overline{0, n_1 - 1}, \qquad y_0^{(j)}(1) = \beta_j, \; j = \overline{0, p-1}; \tag{17}$$

$$u_0^{(n_1)}(0) = \alpha_{n_1} - y_0^{(n_1)}(0), \qquad u_0^{(n_1+j)}(0) = 0, \; j = \overline{1, m-1}; \tag{18}$$

$$y_1^{(j)}(0) = 0, \; j = \overline{0, n_1 - 2}, \qquad y_1^{(n_1-1)}(0) = -u_0^{(n_1-1)}(0), \qquad y_1^{(j)}(1) = 0, \; j = \overline{0, p-1}; \tag{19}$$

$$u_1^{(n_1)}(0)=-y_1^{(n_1)}(0),\quad u_1^{(n_1+1)}(0)=\alpha_{n_1+1}-y_0^{(n_1+1)}(0),\quad u_1^{(n_1+j)}(0)=0,\quad j=\overline{2,m-1}\,; \tag{20}$$

при $k=\overline{1,n_1-1}$:

$$\begin{gathered} y_k^{(j)}(0)=0,\ j=\overline{0,\ n_1-k-1}\,;\quad y_k^{(n_1-k+j)}(0)=-u_j^{(n_1-k+j)}(0),\quad j=\overline{0,k-1}, \\ y_k^{(j)}(1)=0,\ j=\overline{0,p-1} \end{gathered} \tag{21}$$

при $k=n_1,n_1+1,\ldots$:

$$y_k^{(j)}(0)=-u_{k-n_1+j}^{(j)}(0),\quad j=\overline{0,n_1-1},\quad y_k^{(j)}(1)=0,\ j=\overline{0,p-1}\,; \tag{22}$$

при $k=n_1,n_1+1,\ldots$:

$$y_k^{(j)}(0)=-u_{k-n_1+j}^{(j)}(0),\quad j=\overline{0,n_1-1},\quad y_k^{(j)}(1)=0,\ j=\overline{0,p-1}\,; \tag{22}$$

при $k=\overline{1,m-2}$:

$$\begin{gathered} u_k^{(n_1+j)}(0)=-y_{k-j}^{(n_1+j)}(0),\ j=\overline{0,k-1},\quad u_k^{(n_1+k)}(0)=\alpha_{n_1+k}-y_{k-j}^{(n_1+k)}(0),\quad j=k\,, \\ u_k^{(n_1+j)}(0)=0,\ j=\overline{k+1,m-1}, \end{gathered} \tag{23}$$

при $k=m-1,m,m+1,\ldots$:

$$u_k^{(n_1+j)}(0)=-y_{k-j}^{(n_1+j)}(0),\ j=\overline{0,\ m-1}. \tag{24}$$

Рассмотрим задачу (10), (17). Решение $y_0(t)$ задачи (10), (17) согласно результатом работы [6] существует на отрезке [0,1], единственно и выражается формулой:

$$\begin{gathered} y_0(t)=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_{i-1}\overline{\Phi}_i(t)+\sum_{i=1}^{p}\beta_{i-1}\overline{\Phi}_{n_1+i}(t)-\sum_{i=1}^{p}\overline{\Phi}_{n_1+i}(t)\int_0^1\frac{\overline{K}_t^{(i-1)}(1,s)}{A_n(s)}h(s)ds+ \\ +\int_0^t\frac{\overline{K}(t,s)}{A_n(s)}h(s)ds\,, \end{gathered} \tag{25}$$

где $\overline{K}(t,s)=\dfrac{\overline{W}(t,s)}{\overline{W}(s)}$ – функция Коши, $\overline{\Phi}_k(t)=\dfrac{\overline{J}_k(t)}{\overline{J}_0}$, $k=1,\ldots,n$ – граничные функции [6] краевой задачи (10), (17), $\overline{W}(t,s)$ получается из $\overline{W}(s)$ заменой n-ой строки строкой $u_{10}(t),u_{20}(t),\ldots,u_{n0}(t)$, $\overline{J}_k(t)$-определитель n-го порядка, полученный из $\overline{J}_0$ заменой k-ой строки строкой $u_{10}(t),u_{20}(t),\ldots,u_{n0}(t)$.

Рассмотрим уравнение (13). Составим характеристическое уравнение

$$\mu^n(A_{n+m}(0)\mu^m + A_{n+m-1}(0)\,\mu^{m-1} + \ldots + A_{n+1}(0)\mu + A_n(0) = 0\,. \qquad (26)$$

Тогда, опираясь на 3^0 получим, что общее решение уравнения (13) представимо в виде

$$u_0(\tau) = c_1 + c_2\tau + \ldots + c_n\tau^{n-1} + c_{n+1}\,\mathrm{e}^{\mu_1\tau} + \ldots + c_{n+m}\,\mathrm{e}^{\mu_m\tau},\quad \tau \ge 0\,.$$

Так как функция $u_0(\tau)$ должна стремиться к нулю при $\tau \to +\infty$, то постоянные $c_k, k = \overline{1,n}$ нужно положить равными нулю т.е. $c_k \equiv 0,\ k = \overline{1,n}$. Тогда имеем

$$u_0(\tau) = c_{n+1}\,\mathrm{e}^{\mu_1\tau} + \ldots + c_{n+m}\,\mathrm{e}^{\mu_m\tau},\quad \tau \ge 0\,. \qquad (27)$$

Подставляя (27) в (18), получим

$$\begin{aligned} &\mu_1^{n_1}\ c_{n+1} + \ldots + \mu_m^{n_1}\ \ c_{n+m} = \alpha_{n_1} - y_0^{(n_1)}(0),\\ &\mu_1^{n_1+1}c_{n+1}\ + \ \ldots\ + \ \mu_m^{n_1+1}c_{n+m} = 0\,,\\ &\mu_1^{n_1+m-1}c_{n+1} + \ldots + \mu_m^{n_1+m-1}c_{n+m} = 0\,. \end{aligned} \qquad (28)$$

Систем (28) является линейной алгебраической системой из m уравнений относительно неизвестных $c_{n+k}, k = \overline{1,m}$, причем главный определитель этой системы отличен от нуля:

$$D = \mu_1^{n_1}\cdot\ldots\cdot\mu_m^{n_1}\,\omega(\mu) \ne 0\,, \qquad (29)$$

где $\omega(\mu)$ – определитель Вандермонда элементов $\mu_1,\ldots,\mu_m$. Следовательно, система (28) имеет единственное решение. Подставляя это решение в (27), получаем

$$u_0(\tau) = (\alpha_{n_1} - y_0^{(n_1)}(0))\frac{D_1(\tau)}{D}\,, \qquad (30)$$

где $D_1(\tau)$ – определитель m-го порядка, полученный из определителя D заменой первой строки на строку $\mathrm{e}^{\mu_1\tau},\ldots,\mathrm{e}^{\mu_m\tau}$. Очевидно, что $D_1^{(n_1)}(0) = D,\ D_1^{(n_1+j)}(0) = 0,\ j = 1,\ldots,m-1$. Таким образом, нулевое приближение полностью определено.

Из (30) следует, что существуют, очевидно, такие постоянные $K > 0$ и $\nu > 0$, что

$$\left|u_0^{(j)}(\tau)\right| \le K\cdot \mathrm{e}^{-\nu\tau}, j = \overline{0, n+m-1}, \tau \ge 0 \qquad (31)$$

Теперь рассмотрим задачу (19), (11) при $k = 1$. Решение $y_1(t)$ задачи (19), (11) согласно результатом работы [6] существует на отрезке [0,1], единственно и выражается формулой:

$$y_1(t) = -u_0^{(n_1-1)}(0)\overline{\Phi}_{n_1}(t) - \sum_{i=1}^{p}\overline{\Phi}_{n_1+i}(t)\int_0^1\frac{\overline{K}_t^{(i-1)}(1,s)}{A_n(s)}F_1(s)ds + \int_0^t\frac{\overline{K}(t,s)}{A_n(s)}F_1(s)ds\,. \qquad (32)$$

Рассмотрим уравнение (14). Учитывая (30), запишем функцию $H_1(\tau)$ из (15) в виде

$$H_1(\tau) = a_1(\tau)\mathrm{e}^{\mu_1\tau} + \ldots + a_m(\tau)\mathrm{e}^{\mu_m\tau},\quad \tau \ge 0\,, \qquad (33)$$

где $a_k(\tau)$ – многочлены первой степени относительно переменной τ. Тогда, в силу того, что характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения

$$L_{n+m}u_1 \equiv 0 \tag{34}$$

совпадает с (26), получаем, что общее решение уравнения (14) представимо в виде

$$u_1(\tau) = c_1 + c_2\tau + \ldots + c_n\tau^{n-1} + c_{n+1}\,\mathrm{e}^{\mu_1\tau} + \ldots + c_{n+m}\,\mathrm{e}^{\mu_m\tau} + B_1(\tau). \tag{35}$$

Здесь $B_1(\tau)$ частное решение неоднородного уравнения (14), которое представимо в виде

$$B_1(\tau) = \tau\,\widetilde{a}_1(\tau)\mathrm{e}^{\mu_1\tau} + \ldots + \tau\,\widetilde{a}_m(\tau)\mathrm{e}^{\mu_m\tau},$$

где $\widetilde{a}_k(\tau)$ – многочлены первой степени относительно переменной τ. Так как функция $u_1(\tau)$ должна стремиться к нулю при $\tau \to +\infty$, то постоянные $c_k, k=\overline{1,n}$ нужно положить равными нулю т.е. $c_k \equiv 0,\ k=\overline{1,n}$. Тогда имеем

$$u_1(\tau) = c_{n+1}\,\mathrm{e}^{\mu_1\tau} + \ldots + c_{n+m}\,\mathrm{e}^{\mu_m\tau} + B_1(\tau). \tag{36}$$

Подставляя (36) в (20), получим

$$\begin{aligned} \mu_1^{n_1}\ c_{n+1} + \ldots + \mu_m^{n_1}\ \ c_{n+m} &= -y_1^{(n_1)}(0) - B_1^{(n_1)}(0), \\ \mu_1^{n_1+1} c_{n+1} + \ldots + \mu_m^{n_1+1}\ c_{n+m} &= \alpha_{n_1+1} - y_0^{(n_1+1)}(0) - B_1^{(n_1+1)}(0), \\ \mu_1^{n_1+m-1}c_{n+1} + \ldots + \mu_m^{n_1+m-1}c_{n+m} &= -B_1^{(n_1+m-1)}(0). \end{aligned} \tag{37}$$

В силу (29) система (37) имеет единственное решение. Подставляя это решение в (36), получаем

$$u_1(\tau) = -y_1^{(n_1)}(0)\frac{D_1(\tau)}{D} + (\alpha_{n_1+1} - y_0^{(n_1+1)}(0))\frac{D_2(\tau)}{D} - \sum_{j=0}^{m-1} B_1^{(n_1+j)}(0)\frac{D_{1+j}(\tau)}{D} + B_1(\tau), \tag{38}$$

где $D_k(\tau)$ - определитель m-го порядка, полученный из определителя D заменой k-ой строки на строку $\mathrm{e}^{\mu_1\tau},\ldots,\mathrm{e}^{\mu_m\tau}$. Очевидно, что

$$D_i^{(n_1+j)}(0) = D,\ i = j+1,\ j=\overline{0,m-1},\ i=\overline{1,m},$$

$$D_i^{(n_1+j)}(0) = 0,\ \ j=\overline{0,m-1}\,,\ i=\overline{1,m}\,.$$

Из (38) следует, что существуют, очевидно, такие постоянные $K>0$ и $\nu>0$, что

$$\left|u_1^{(j)}(\tau)\right| \le K\cdot \mathrm{e}^{-\nu\tau}, j=\overline{0,n+m-1}, \tau \ge 0 \tag{39}$$

Таким образом, первое приближение полностью определено.

Совершенно аналогично определяются $y_k(t),\ \ u_k(\tau)$ из уравнений (11), (14) с помощью условий (21), (22), (23), (24):

$$y_k(t) = \sum_{i=1}^{n_1} y_k^{(j-1)}(0)\overline{\Phi}_i(t) - \sum_{i=1}^{p}\overline{\Phi}_{n_1+i}(t)\int_0^1 \frac{\overline{K}_t^{(i-1)}(1,s)}{A_n(s)}F_k(s)ds + \int_0^t \frac{\overline{K}(t,s)}{A_n(s)}F_k(s)ds, \tag{40}$$

где начальные значения $y_k^{(j-1)}(0)$ определяются из (21) и (22);

$$u_k(\tau)=u_k^{(n_1)}(0)\frac{D_1(\tau)}{D}+u_k^{(n_1+1)}(0)\frac{D_2(\tau)}{D}+...+u_k^{(n_1+m-)}(0)\frac{D_m(\tau)}{D}-$$

$$-\sum_{j=0}^{m-1}B_k^{(n_1+j)}(0)\frac{D_{1+j}(\tau)}{D}+B_k(\tau), \qquad (41)$$

где $u_k^{(n_1+j)}(0),\ j=\overline{0,m-1}$ однозначно определяются из (23), (24). Из (41) следует, что существуют, очевидно, такие постоянные $K>0$ и $\nu>0$, что

$$\left|u_k^{(j)}(\tau)\right|\le K\cdot \mathrm{e}^{-\nu\tau}, j=\overline{0,n+m-1}, \tau\ge 0. \qquad (42)$$

Итак, описанный алгоритм позволяет определить члены рядов (6) и (7) до любого номера k включительно, причем все $u_k(\tau)$ имеют экспоненциальную оценку.

3. Обоснование асимптотики. Определим члены разложений (5), (6), (7) до номера $n-m_1+N$ включительно и образуем частичную сумму $Y_N(t,\varepsilon)$ разложения (5)- (7) в виде:

$$Y_N(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{N}\varepsilon^k y_k(t)+\varepsilon^{n_1}\sum_{k=0}^{n-n_1+N}\varepsilon^k u_k(t/\varepsilon). \qquad (43)$$

Лемма 1. Пусть выполняются условия 1)-4). *Тогда функция* $Y_N(t,\varepsilon)$, *выражаемая формулой* (43), *является приближенным решением сингулярной возмущенной задачи (1), (2) с точностью порядка* $O(\varepsilon^{N+1})$:

$$L_\varepsilon Y_N(t,\varepsilon)-h(t)=O(\varepsilon^{N+1}),\ 0\le t\le 1, \qquad (44)$$

$$\begin{gathered} Y_N^{(j)}(0,\varepsilon)-\alpha_j=O(\varepsilon^{N+n_1-j}),\quad j=\overline{0,n_1-1},\\ Y_N^{(j)}(1,\varepsilon)-\beta_j=O(\varepsilon^{N+n_1-j}\,\mathrm{e}^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}),\quad j=\overline{0,n_2-1} \end{gathered} \qquad (45)$$

Доказательство леммы непосредственно следует из самого построения функций $y_k(t),\ u_k(\tau)$.

Пусть $R(t,\varepsilon)=y-Y_N(t,\varepsilon)$, где $y(t,\varepsilon)$ решение задачи (1), (2). Подставляя $y=R(t,\varepsilon)+Y_N(t,\varepsilon)$ в (1), (2), в силу (44), (45), получим для $R(t,\varepsilon)$ задачу:

$$L_\varepsilon R(t,\varepsilon)=F(t),\quad 0\le t\le 1, \qquad (46)$$

$$\begin{gathered} R^{(j)}(0,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+n_1-j}),\quad j=\overline{0,n_1-1},\\ R^{(j)}(1,\varepsilon)=O(\varepsilon^{N+n_1-j}\,\mathrm{e}^{-\frac{\nu}{\varepsilon}}),\quad j=\overline{0,n_2-1} \end{gathered} \qquad (47)$$

где

$$F(t) = h(t) - L_\varepsilon Y_N(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{N+1}),\ 0 \le t \le 1.$$

Применяя теперь к задаче (46), (47) теорему 3 из [6], заключаем, что существует единственное решение задачи (1), (2) на $0 \le t \le 1$, и приходим к оценке

$$\left| R^{(q)}(t,\varepsilon) \right| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}, q = \overline{0, n+m-1}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2.6. Пусть выполнены 1)-4) . Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ *на сегменте* $0 \le t \le 1$ *решение задачи* (1), (2) *существует, единственно и удовлетворяет оценке*

$$\left| y^{(q)}(t,\varepsilon) - Y_N^{(q)}(t,\varepsilon) \right| \le K \cdot \varepsilon^{N+1}, \quad q = \overline{0, n+m-1}, \quad 0 \le t \le 1,$$

где K *- независящая от* t *и* ε *постоянная.*

В частности из (43), в силу экспоненциальных оценок (31), (39), (42), следует, что производные $y^{(n_1+m+j)}(t,\varepsilon),\ j = 0,1,...,p-1$ в точке $t = 0$ имеют полюсы по ε:

$$y^{(n_1+m)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^m}\right), ..., y^{(p+l-1)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{m+p-1}}\right),$$

а $y(t,\varepsilon)$ в точке $t = 0$ обладает явлением начального скачка n_1-го порядка, кратностью m, причем величина скачка определяется по формуле

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y^{(m_1+j)}(0,\varepsilon) - y_0^{(n_1+j)}(0) = \alpha_{n_1+j} - y_0^{(n_1+j)}(0) = \Delta_j,$$

что является одним из особенностей изучаемой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump // Ukrainian Mathematical Journal. V. 55. No. 11,(2003). P. 1777-1792.

2 *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations, Differential equations, V. 40. No. 4 (2004). P.597-607.

3 *Нургабыл Д.Н.* Построение решения сингулярно возмущенной краевой задачи имеющего начальный скачок // Вестник Кыргызского государственного Национального университета. – 2001.– Т.3. – № 6. – С.173-177.

4 *Дауылбаев М.К.* Асимптотические оценки решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром. // Математический журнал. Институт математики МОН РК. № 4(30). Т.8. 2008 г.

5 *Касымов К.А., Дауылбаев М.К., Атахан Н.* Асимптотическая сходимость решения краевых задач для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений. // Вестник КазНУ им. аль-Фараби, серия математика, механика, информатика. № 3 (74). 2012. С. 28-34.

6 *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N., Uaisov A.B.* Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives // Ukrainian Mathematical Journal. V. 65, No. 5 (2013). P. 694-708 .

REFERENCES

1 *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic Behavior of Solutions of Linear Singularly Perturbed General Separated Boundary-Value Problems with Initial Jump // Ukrainian Mathematical Journal. V. 55, No. 11,(2003). P. 1777-1792

2 *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N.* Asymptotic estimates of the solution of a singularly perturbed boundary value problem with initial jump for linear differential equations, Differential equations, V. 40 No. 4 (2004). P 597-607.

3 Nurgabyl D. N. Construction of solution of the singularly perturbed boundary problem with initial jump // Vestnik of Kirghiz State National University. – 2001. – V.3. № 6. – C.173-177.

4 *Dauylbaev M.K.* Asymptotic estimates of solutions of the integro-differential equations with small parameter // Mathematical Journal. V.8. No 4. (2008).

5 *Kasymov K.A., Dauylbaev M.K., Atahan N.* Asymptotic convergence of the solution of a singularly perturbed boundary value problem integro-differential equations // Vestnik KazNU. Ser. math., mech. Almaty, No 3(2012). – P. 28-34.

6 *Kasymov K.A., Nurgabyl D.N., Uaisov A.B.* Asymptotic estimates for the solutions of boundary-value problems with initial jump for linear differential equations with small parameter in the coefficients of derivatives // Ukrainian Mathematical Journal. V. 65. No. 5 (2013). – P.694-708.

Резюме

Д. Н. Нұрғабыл[1] *, А. Б. Уаисов*[2]

([1] І.Жансүгіров атындағы Жетісу мемлекеттік университеті, Талдықорған қ.;
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ)

ТУЫНДЫСЫНЫҢ ЖАНЫНДА КІШКЕНЕ ПАРАМЕТРІ БАР ШЕКАРАЛЫҚ
ЕСЕП ШЕШІМІНІҢ КІШКЕНЕ ПАРАМЕТР БОЙЫНША
АСИМПТОТИКАЛЫҚ ЖІКТЕЛІСІ

Бұл жұмыста туындыларының жанында кішкене параметрі бар жоғарғы ретті дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық есеп шешімінің асимптотикалық жіктелісін құрудың алгоритмі берілген. Туындалған шекаралық есеп шешімінің аналитикалық формуласы табылған. Кішкене параметр нөлге ұмтылғанда шекаралық есеп шешімінің бірқалыпты асимптотикалық жуықтауы кез келген дәлдікке дейін құрылған. Ауытқыған шекаралық есеп шешімінің туындысының $\varepsilon \to 0$ өсуі анықталған. Бастапқы секіріс құбылысы сипатталған.

Тірек сөздер: асимптотика, шекаралық есеп, қосымша характеристикалық теңдеу, туындалған және ауытқыған есептер, бастапқы секіріс құбылысы.

Summary

D. N. Nurgabyl[1]*, A. B. Uaissov*[2]

([1]Zhetysu State University Named after I. Zhansugurov. Taldykorgan;
[2]al-Farabi Kazakh national university, Almaty)

ASYMPTOTIC EXPANSION IN THE SMALL PARAMETER SOLUTION
OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH A SMALL PARAMETER WHEN DERIVATIVES

In this paper we describe an algorithm for constructing an asymptotic expansion of the solution of the boundary value problems for higher order differential equations with a small parameter of the derivatives. Found analytic representation of the solution a degenerate boundary value problem. Built uniform asymptotic approximation of the solution of singularly perturbed boundary value problem up to an arbitrary order in the small parameter tends to zero. Set growth of the derivatives solutions perturbed boundary value problem with $\varepsilon \to 0$. Described the of initial jump phenomenon.

Key words: asymptotic, boundary value problem, additional characteristic equation, perturbed and no perturbed problems, initial jump phenomenon