УДК 531.1+629.19

М. Д. ШИНИБАЕВ[1], *А. А. БЕКОВ*[1], *С. С. ДАЙЫРБЕКОВ*[2], *Ж. С. КУКИЕВ*[2], *К. С. СЕРИКБАЕВА*[3], *М. П. ДУЙСЕМБЕК*[3]

([1]Институт космических исследований имени академика У.М.Султангазина АО «НЦКИТ», г.Алматы;
[2]Университет Сыр-Дария, г.Джетысай;
[3]Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г.Шымкент)

ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ОРБИТА ПРОБНОГО ТЕЛА В КВАДРАТУРАХ

Аннотация. Известно, что разложения силовой функции притяжения Земли имеют сложные проблемы, возникающие из-за особенностей распределения масс внутри Земли и сложности рельефа ее поверхности. Поэтому при решении задачи о движении спутника в поле тяготения Земли разбивают потенциал на две части – нормальную и аномальную части.

Нормальный потенциал содержит в себе основные возмущения от сжатия Земли, а аномальная часть учитывает остальные неравенства. Движение спутника в нормальном поле тяготения является главной проблемой теории движения спутников Земли.

Эта проблема решается или методом промежуточных орбит, или методом теории возмущений [1].

В данной статье построена новая промежуточная орбита в квадратурах, которая решает главную проблему теории движения спутников Земли. Эта промежуточная орбита представляет собой математическую модель пространственного орбитального движения ИСЗ в поле тяготения Земли и внешнего тела. Задача решена в сферической системе координат, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции Земли.

Силовая функция промежуточной орбиты имеет вид [2]:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu' r^2 + \frac{1}{2}(\nu - \nu')r^2 \cos^2 \varphi, \qquad (1)$$

где μ – гравитационный параметр, первое слагаемое характеризует поле тяготения центрального тела (Земли), а остальные слагаемые характеризуют поле тяготения внешнего тела и сжатия Земли; φ – широта спутника; r – модуль радиуса-вектора спутника; ν и ν' – постоянные параметры.

Общее решение дифференциальных уравнений промежуточной орбиты получено методом Гамильтона-Якоби в квадратурах. Найденные квадратуры учитывают вековые возмущения первого порядка от сжатия центрального тела, и не имеют особенностей при нулевых наклонах и эксцентриситетах, позволяют избежать проблем критического наклона, не содержат в себе вековых и смешанных членов.

Полученные квадратуры позволяют построить теорию неуправляемого движения ИСЗ, что важно при реанимации станции и спутников в нештатных ситуациях.

Ключевые слова: динамика, орбиты, силовое поле, силовая функция, параметры орбиты.

Тірек сөздер: динамика, орбиталар, тартылыс өрісі, күш функциясы, орбиталық параметрлер.

Keywords: dynamics, the orbits, the force field, the force function, the orbital parameters.

Пусть ИСЗ совершает орбитальное движение в поле тяготения Земли и внешнего тела. Кинетическая энергия ИСЗ в выбранной системе координат имеет вид [3]:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\lambda}^2), \tag{2}$$

Выполним замену в (1)

$$(v - v') = \frac{D}{r^4}, \quad D < 1,$$

тогда имеем

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}v'r^2 + \frac{1}{2}\frac{D}{r^2}\cos^2\varphi. \tag{3}$$

Запишем функцию Гамильтона с учетом (2) и (3)

$$H = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\lambda}^2) - \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}v'r^2 + \frac{1}{2}\frac{D}{r^2}\cos^2\varphi. \tag{4}$$

Вычислим импульсы, учитывая (2)

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial\dot{r}} = \dot{r}, \quad p_\varphi = \frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}, \quad p_\lambda = \frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}} = \dot{\lambda}r^2\cos^2\varphi. \tag{5}$$

Из (4) следует, что

$$\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0, \quad H = h_1 = const, \tag{6}$$

и с учетом (5) имеем

$$\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\lambda^2\right) - \frac{2\mu}{r} - v'r^2 - \frac{D}{r^2}\cos^2\varphi = 2h_1. \tag{7}$$

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, r, \varphi, \lambda, \frac{\partial V}{\partial r}, \frac{\partial V}{\partial\varphi}, \frac{\partial V}{\partial\lambda}\right) = 0. \tag{8}$$

Тогда в силу (6) имеем следующее выражение для производящей функции

$$V = -h_1 t + W(r, \varphi, \lambda). \tag{9}$$

Учитывая (9), перепишем (6)

$$H\left(r, \varphi, \lambda, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial\varphi}, \frac{\partial W}{\partial\lambda}\right) = h_1. \tag{10}$$

Теперь, принимая во внимание (7), перепишем (10)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - v'r^2 - \frac{D}{r^2}\cos^2\varphi = 2h_1. \tag{11}$$

Используем метод разделения переменных, пусть

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda),$$

тогда (11) перепишется в виде:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - v'r^2 - \frac{D}{r^2}\cos^2\varphi = 2h_1. \tag{12}$$

Потребуем следующие соответствия:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dW_3}{d\lambda} = h_3,\\
&\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi} - D\cos^2\varphi = h_2^2,\\
&r^2\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + h_2^2 - 2\mu r - v' r^4 - 2h_1 r^2 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Из (13) имеем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dW_3}{d\lambda} = h_3,\\
&\frac{dW_2}{d\varphi} = \left(h_2^2 - \frac{h_3^2}{\cos^2\varphi} + D\cos^2\varphi\right)^{1/2},\\
&\frac{dW_1}{dr} = \left(\frac{v' r^4 + 2h_1 r^2 + 2\mu r - h_2^2}{r^2}\right)^{1/2}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Из (14) найдем W_1, W_2, W_3

$$\left.\begin{aligned}
&W_3 = h_3\lambda,\\
&W_2 = \int \frac{\sqrt{D\cos^4\varphi + h_2^2\cos^2\varphi - h_3^2}}{\cos\varphi}\cdot d\varphi,\\
&W_1 = \int \frac{\sqrt{v' r^4 - 2h_1 r^2 + 2\mu r - h_2^2}}{r}\cdot dr,
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

тогда имеем

$$W = \int \sqrt{v' r^4 + 2h_1 r^2 + 2\mu r - h_2^2}\cdot\frac{dr}{r} + \int \sqrt{D\cos^4\varphi + h_2^2\cos^2\varphi - h_3^2}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi} + h_3\lambda. \tag{16}$$

В соответствии с общей теорией метода Гамильтона-Якоби, общее решение канонических уравнений Гамильтона [3]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \frac{d\lambda}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\lambda},\quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi},\\
&\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r},\quad \frac{dp_\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \lambda},\quad \frac{dp_\varphi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi},
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

можно представить следующими квадратурами

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial h_1} = t + \beta_1,\quad \frac{\partial W}{\partial h_2} = \beta_2,\quad \frac{\partial W}{\partial h_3} = \beta_3,\\
&\frac{\partial W}{\partial r} = p_r,\quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = p_\lambda,\quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = p_\varphi,
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

где: t – время; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – постоянные интегрирования.

Перепишем (18) в явном виде

$$t+\beta_1=\int\frac{rdr}{\sqrt{v'r^4+2h_1r^2+2\mu r-h_2^2}}, \tag{19}$$

$$\beta_2=-\int\frac{h_2}{\sqrt{v'r^4+2h_1r^2+2\mu r-h_2^2}}\cdot\frac{dr}{r}+\int\frac{h_2\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{D\cos^4\varphi+h_2^2\cos^2\varphi-h_3^2}}, \tag{20}$$

$$\beta_3=-\int\frac{h_3}{\sqrt{D\cos^4\varphi+h_2^2\cos^2\varphi-h_3^2}}\cdot\frac{d\varphi}{\cos\varphi}+\lambda, \tag{21}$$

$$\frac{dr}{dt}=\int\frac{2v'r^3+2h_1r+\mu}{\sqrt{v'r^4+2h_1r^2+2\mu r-h_2^2}}\cdot\frac{dr}{r}-\int\sqrt{v'r^4+2h_1r^2+2\mu r-h_2^2}\cdot\frac{dr}{r^2}; \tag{22}$$

$$\frac{d\lambda}{dt}r^2\cos^2\varphi=h_3, \tag{23}$$

$$r^2\frac{d\varphi}{dt}=\int\frac{D\cos^2\varphi+h_2^2}{\sqrt{D\cos^4\varphi+h_2^2\cos^2\varphi-h_3^2}}\cdot d(\cos\varphi)-$$

$$-\int\sqrt{D\cos^4\varphi+h_2^2\cos^2\varphi-h_3^2}\cdot\frac{d(\cos\varphi)}{\cos^2\varphi}. \tag{24}$$

Из (13) можно найти $r(t)$, посредством (20) можно вычислить $\varphi(t)$, а из (21) можно найти $\lambda(t)$, а из остальных квадратур можно найти $p_r, p_\varphi, p_\lambda$, следовательно, поставленная задача о движении ИСЗ в поле тяготения центрального и внешнего тела решена в замкнутой форме в квадратурах.

ЛИТЕРАТУРА

1 Итоги науки и техники. Серия: Исследование космического пространства. – М., 1980. – Т.15. – 160 с.

2 *Шинибаев М.Д.* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. – Алматы, 2001. –128 с.

3 *Шарлье К.Л.* Небесная механика. – М.: Наука, 1966. – 627 с.

REFERENCES

1 Itogi nauki i tehniki. Seria: Isledovania cosmicheskodo prostranstva. – M., 1980. – T.15. – 160 p. (in Russ.).

2 Shinibaev M.D. Postupatelnoe dvigenie passivno gravitirueshego tela v centralnom i necentralnom pole tyagoteniya. Almaty, 2001. 128 p. (in Russ.).

3 Charlie C.L. Nebesnay mehanika. – M.: Nauka, 1966. 627 p. (in Russ.).

М. Д. Шыныбаев[1], А. А. Беков[1], С. С. Дайырбеков[2], Ж. С. Кукиев[2],
К. С. Серікбаева[3], М. П. Дүйсембек[3]

([1]Академик Ө.М.Сұлтанғазин атындағы Ғарыштық зерттеулер институты
АҚ «ҰҒЗТО», Алматы қ.;
[2]Сыр-Дария университеті, Жетісай қ.;
[3]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты, Шымкент қ.)

СЫНАҚ ДЕНЕСІНІҢ КВАДРАТУРАЛАРМЕН БЕРІЛГЕН ОРТАЛЫҚ ОРБИТАСЫ

Резюме

Жердің массасы көлемінде күрделі түрде орналасуына байланысты, және Жер бетіндегі рельефтің ерекшеліктеріне байланысты тартылу күш функциясының қатарларға жіктелуі күрделі проблемаларға алып келеді. Осыған байланысты ЖЖС*-гінің Жердің күш өрісіндегі қозғалысын зерттеуде потенциалды (күш функциясын) екіге бөледі – нормал және аномал бөлігіне.

* ЖЖС – Жасанды Жер Серігі

Нормал потенциал Жердің фигурасын сипаттайды, ал аномал потенциал Жердің қалған теңсіздіктерін есепке алады. ЖЖС-гінің нормал күш өрісіндегі қозғалуы ЖЖС-нің бас проблемасы деп аталады. Бас проблема екі түрлі әдіспен шешілуі мүмкін. Ол әдістердің біреуі ауытқулар теориясына тәуелді, ал екіншісі орталық орбиталар әдісі [1].
келеді. Осыған байланысты ЖЖС^2-гінің Жердің күш өрісіндегі қозғалысын зерттеуде потенциалды (күш функциясын) екіге бөледі – нормал және аномал бөлігіне.

Бұл мақалада ЖЖС-нің бас проблемасын квадратуралар арқылы шешетін орталық орбита соғылады. Орталық орбита ЖЖС-нің орталық және сыртқы күш өрісіндегі қозғалысының математикалық моделін береді. Мәселе сфералық координаттық жүйеде қойылып шешілді. Координаттық жүйе орталық дененің бас инерциялық орталық өстері ретінде алынды.

Орталық орбитаның күш функциясы мына түрде жазылды [2]:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}v'r^2 + \frac{1}{2}(v - v')r^2\cos^2\varphi, \tag{1}$$

мұнда μ – гравитациялық параметр, өрнектегі бірінші мүше Жер потенциалын сипаттайды, ал қалған мүшелер Жердің фигурасын және сыртқы дененің әсерін есепке алады; φ – ЖЖС-нің бойлық бұрышы; r – ЖЖС-нің радиус-векторының модулі; ν, ν' – тұрақты параметрлер.

Орталық орбитаның дифференциалдық теңдеулерінің жалпы шешімі Гамильтон-Якоби әдісімен квадратураларда алынды.

Алынған квадратуралар Жердің фигурасына байланысты 1-ші реттік ғасырлық ауытқуларды есепке алады және бұл квадратураларда нөлге тең көлбеулікте, эксцентриситетте ерекшеліктер болмайды, және мұнда қатерлі көлбеулік проблемасы туындамайды. Шешімдерде ғасырлық және аралас мүшелер жоқ, демек бұл квадратуралар басқарылмайтын ЖЖС-нің қозғалыс теориясын соғуға септігін тигізеді. Бұл жағдай өте маңызды, өйткені бағдарламадан тыс қалған станциялар, ЖЖС-рі осы теория арқылы іске қайтадан қосу жолдарын береді.

Тірек сөздер: динамика, орбиталар, тартылыс өрісі, күш функциясы, орбиталық параметрлер.

M. D. Shinibayev[1], A. A. Bekov[1], S. S. Daiyrbekov[2], Z. S. Kukiyev[1], K. S. Serikbaeva[3], M. P. Duysembek[3]

(The Institute of Space Research named after U.M. Sultangazyn[1])
JSC «NCKIT», Almaty city.;
Syrdarya University, Zhetysai city;
(South Kazakhstan State Pedagogical University Shymkent city)

THE INTERMEDIATE ORBIT OF THE TRIAL BODY IN QUADRATURES

Summary

It is known that the decomposition of a force function of an attraction of Earth has complex problems arising because of a mass distribution features in Earth and complexity of its surface relief. Therefore at the solution of the task on satellite movement in a gravitational field of Earth the potential is divided into two parts – normal and the abnormal ones.

The normal potential contains the main indignations from Earth compression, and the abnormal part considers other inequalities. Satellite moving in the normal gravitational field is the main problem of the theory of satellite movements of the Earth.

This problem is solved either by the method of the intermediate orbits, or the method of perturbation theory [1].

There are constructed the new intermediate orbit in quadratures which solves the main problem of the theory of driving of satellites of Earth in this article. This intermediate orbit represents mathematical model of space orbital movement artificial satellite in a gravitational field of Earth and an external body. The task is solved in spherical system of the coordinates, the axes of which coincide with the main axes of gravity of inertia of the Earth.

The force function of the intermediate orbit appears as[2]:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}v'r^2 + \frac{1}{2}(v - v')r^2\cos^2\varphi, \tag{1}$$

μ is a gravitational parameter , the first item characterizes gravitation field of the Earth, the remained items

characterize the gravity field of external body and Earth compressiona; φ is satellite altitude; r is radium vector of the satellite module; ν и ν' are permanent parameters.

the common decision of the differential equations of the intermediate orbit is received by Hamilton Jacobi method in quadratures. The found quadratures consider century indignations of first order from compression of the central body, and have no features at zero inclinations and eccentricities, allow to avoid problems of a critical inclination and do not contain the century and mixed terms. The received quadratures allow to construct the theory of uncontrollable movement artificial satellite that is important at reanimation of station and satellites in contingencies.

Поступила 2014 г.