N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 117 – 123

ON THE MODELING OF DYNAMICS OF VISCOUS FLUID EQUATIONS ROTOR SPEED AND STREAM FUNCTION

K.B.Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: jakupovKB@mail.ru

Key words: rotor, speed, pressure, flow function , non-equivalence.

Abstract. The theorem of non-equivalence of the equations of rotor speed equations of viscous flows was prooved. In calculations cavity and channel it was confirmed discrepancies of Helmholtz equations with Navier.

УДК 532.533

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ УРАВНЕНИЯМИ РОТОРА СКОРОСТИ И ФУНКЦИИ ТОКА

К.Б.Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: ротор, скорость, давление, функция тока, неэквивалентность.

Аннотация. Доказана теорема неэквивалентности уравнений ротора скорости уравнениям динамики вязкой жидкости.Численными расчетами течений в каверне и канале подтверждены расхождения решений уравнений Гельмгольца с решениями уравнений Навье.

Основная идея, впервые осуществленная Гельмгольцем в двумерных уравнениях динамики вязкой несжимаемой жидкости, заключается в исключении давления применением оператора «rot»:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \nabla P = \nu \Delta \vec{v} + \vec{F}, (\nabla, \vec{v}) = 0, \rho = const, P = \frac{p}{\rho}, \quad (1)$$

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{d}(\vec{r}), \vec{v}\big|_{\sigma} = \vec{\varphi}(\vec{r}, t), \vec{r} \in \sigma \quad (1')$$

В результате $rot \nabla P \equiv 0$ приводит к переопределенной системе из 2-х уравнений для скорости $\vec{v}$:

$$(\nabla, \vec{v}) = 0, \ \frac{\partial rot \vec{v}}{\partial t} + rot(\vec{v}, \nabla)\vec{v} = \nu \Delta rot \vec{v} + rot \vec{F} \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением 3-го порядка в силу $\nu \Delta rot \vec{v}$, следовательно, **необходимо дополнительное к (1') граничное условие для скорости.**

В системе (2) уравнение неразрывности является лишним, оно априори предназначено для вычисления давления. Вводится вектор ротора скорости

$$\vec{\omega} = rot\vec{v}\,, \tag{3}$$

$$(\nabla,\vec{v}) = 0,\;\; \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + rot(\vec{v},\nabla)\vec{v} = \nu\Delta\vec{\omega} + rot\vec{F} \tag{4}$$

Введением вектор-функции тока $\vec{\psi}$ уравнение неразрывности интегрируется точно:

$$\vec{v} = rot\,\vec{\psi},\;\; (\nabla,\vec{v}) = (\nabla, rot\,\vec{\psi}) \equiv 0 \tag{5}$$

В результате (3), (4) переходит в систему уравнений для 2-х функций

$$\vec{\omega} = rotrot\,\vec{\psi}, \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + rot\{(rot\,\vec{\psi},\nabla)rot\,\vec{\psi}\} = \nu\Delta\vec{\omega} + rot\vec{F} \tag{6}$$

с соответствующими (1') начальными и граничными условиями

$$rot\,\vec{\psi}\Big|_{t=0} = \vec{d}(\vec{r}), rot\,\vec{\psi}\Big|_{\sigma} = \vec{\varphi}(\vec{r},t), \vec{r}\in\sigma \tag{6'}$$

В граничные условия, кроме (6'), должно быть включено **необходимое дополнительное к (1') граничное условие для скорости.** Необходимость такого граничного условия вытекает из уравнения (6), записанного для $\vec{\psi}$:

$$\vec{\omega} = rotrot\,\vec{\psi}, \frac{\partial rotrot\,\vec{\psi}}{\partial t} + rot\{(rot\,\vec{\psi},\nabla)rot\,\vec{\psi}\} = \nu\Delta rotrot\,\vec{\psi} + rot\vec{F}$$

Данное **уравнение 4-го порядка,** следовательно, кроме краевого условия $rot\,\vec{\psi}\big|_{\sigma} = \vec{\varphi}(\vec{r},t)$, требуется еще одно краевое условие $\vec{\psi}$!!

Но здесь возникает проблема, связанная с необратимостью оператора "rot" для определения в 3-х мерных течениях начальных и граничных значений вектор-функции тока $\vec{\psi}\big|_{t=0}, \vec{\psi}\big|_{\sigma}$ из условий (6').

Таким образом, в 3-х мерных течениях вычисление $\vec{\psi}\Big|_{t=0}$ и $\vec{\psi}\Big|_{\sigma}$ через $\vec{d}(\vec{r})$ и $\vec{\varphi}(\vec{r},t)$ *неосуществимо* и не определено дополнительное краевое условие.

В двумерных течениях система (6) упрощается и известно как уравнение Гельмгольца:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y} = \nu\Delta\omega + f, \quad \Delta\psi = -\omega,$$

где $\psi \equiv \psi_z, \omega \equiv \omega_z, f \equiv (rot\vec{F})_z, u = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, v = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$.

Теорема. ***Скорость $\vec{v}_G$, вычисленная из искусственно образованной системы (6), не будет совпадать со скоростью $\vec{v}$, вычисленной в исходной системе (1) из уравнения Навье.***

1-я часть *доказательства.* Допустим, что плотность массовых сил не равна нулю $\vec{F} \neq 0$, но удовлетворяет условию $rot\vec{F} \equiv 0$.

Тогда уравнение (6) принимает укороченный вид

$$\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + rot\{(rot\,\vec{\psi},\nabla)rot\,\vec{\psi}\} = \nu\Delta\vec{\omega} \tag{7}$$

Соответственно, в двумерных уравнениях Гельмгольца свободный член обратится в нуль $f = (rot\vec{F})\big|_z \equiv 0$:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}=\nu\Delta\omega, \qquad \Delta\psi=-\omega \tag{8}$$

Таким образом, в уравнениях Гельмгольца на вычисление компонент скорости массовые силы $\vec{F}\neq 0$ не оказывают никакого влияния, в то время как в уравнениях Навье (1) их действие на определение компонент скорости $\vec{v}$ *сохраняется существенным образом.*

Данный факт уже указывает на *неэквивалентность уравнений с ротором скорости* уравнениям Навье в том смысле, что искусственно сконструированные системы (3), (4), (5), (6) и также двумерные уравнения Гельмгольца не адекватны законным уравнениям Навье (1).

2-я часть *доказательства.* В самом деле, пусть применена система с ротором скорости (3), (4), (5) для вычисления скорости $\vec{v}_G$:

$$\vec{\omega}=rot\vec{v}_G,\ \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}+rot(\vec{v}_G,\nabla)\vec{v}_G=\nu\Delta\vec{\omega}+rot\vec{F},\ \vec{v}_G=rot\vec{\psi} \tag{9}$$

Уравнение для ротора (4) после подстановки (3) переходит в уравнение типа (2), которое переписывается под знак одного оператора “rot”:

$$rot[\frac{\partial\vec{v}_G}{\partial t}+(\vec{v}_G,\nabla)\vec{v}_G-\nu\Delta\vec{v}_G-\vec{F}]=0 \tag{10}$$

В силу свойств “rot’ данное равенство выполняется для **произвольных значений комплекса,** стоящего под знаком “rot’:

$$\frac{\partial\vec{v}_G}{\partial t}+(\vec{v}_G,\nabla)\vec{v}_G-\nu\Delta\vec{v}_G-\vec{F}=-\nabla P_G+\nabla C+\vec{A}(t) \tag{11}$$

В правой части (11) обозначено $P_G=p_G/\rho$, поэтому p_G принимается за давление, далее $C=C(x,y,z)$ и $\vec{A}(t)$ произвольные дифференцируемые функции.

Уравнение (10) будет удовлетворено, что следует из подстановки

$$rot\{-\nabla P_G+\nabla C+\vec{A}(t)\}=rot(-\nabla P_G)+rot\nabla C+rot\vec{A}(t)\equiv 0,$$

так как $rot(-\nabla P_G)\equiv 0, rot\nabla C\equiv 0, rotA(t)\equiv 0.$

В результате (11) представляется в виде уравнения динамики

$$\frac{\partial\vec{v}_G}{\partial t}+(\vec{v}_G,\nabla)\vec{v}_G+\nabla P_G=\nu\Delta\vec{v}_G+\vec{F}+\nabla C+\vec{A}(t) \tag{12}$$

Уравнение (12), очевидно, не совпадает с уравнением *Навье.*

В системе Гельмгольца уравнение неразрывности выполняется в силу связи $\vec{v}_G=rot\vec{\psi}$:

$$(\nabla,\vec{v}_G)=(\nabla,rot\vec{\psi})\equiv 0 \tag{13}$$

Как известно, уравнение для давления является следствием закона сохранения массы и уравнения динамики. С этой целью уравнение неразрыв- ности дифференцируется по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla,\vec{v}_G)=(\nabla,\frac{\partial\vec{v}_G}{\partial t})=0 \tag{14}$$

Далее из уравнения (12) образуется выражение

$$\frac{\partial\vec{v}_G}{\partial t}=-(\vec{v}_G,\nabla)\vec{v}_G-\nabla P_G+\nu\Delta\vec{v}_G+\vec{F}+\nabla C+\vec{A}(t),$$

которое подставляется в (14). В результате получается выражение

$$(\nabla, \frac{\partial \vec{v}_G}{\partial t}) = (\nabla, -(\vec{v}_G, \nabla)\vec{v}_G - \nabla P_G + \nu\Delta\vec{v}_G + \vec{F} + \nabla C + \vec{A}(t) = 0,$$

из которого вытекает уравнение эллиптического типа

$$\Delta P_G = -(\nabla, (\vec{v}_G, \nabla)\vec{v}_G) + (\nabla, \nu\Delta\vec{v}_G) + (\nabla, \vec{F}) + \Delta C \tag{15}$$

Умножение (15) на $\rho = const$ дает уравнение для p_G :

$$\Delta p_G = -\rho(\nabla, (\vec{v}_G, \nabla)\vec{v}_G) + (\nabla, \mu\Delta\vec{v}_G) + (\nabla, \rho\vec{F}) + \rho\Delta C \tag{16}$$

В уравнениях Навье (1) совершенно аналогичным образом выводится уравнение для настоящего давления:

$$\Delta p = -\rho(\nabla, (\vec{v}, \nabla)\vec{v}) + (\nabla, \mu\Delta\vec{v}) + (\nabla, \rho\vec{F}) \tag{17}$$

Разница между уравнениями (16) и (17) очевидна и равна $\rho\Delta C$, где $C = C(x, y, z)$- произвольная дифференцируемая функция**.**

Следовательно, в силу различий между уравнениями (1) и (12) имеет место факт *несовпадения* решения уравнений с ротором скорости и уравнений Навье:

$$\vec{v}_G \neq \vec{v}, \quad p_G \neq p$$

Теорема доказана.

Для подтверждения справедливости теоремы проведены численные расчеты 2-х плоских течений: течения в канале и течения в каверне.

Применяются двумерные уравнения Навье несжимаемой жидкости в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u + \frac{1}{Fr}F_x, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v + \frac{1}{Fr}F_y, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

Из них исключением давления получаются уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega + \frac{1}{Fr}(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}), \quad \Delta\psi + \omega = 0$$

Проблема **необходимого дополнительного к (1’) граничного условия для скорости в уравнениях Гельмгольца также актуальна.**

Для численного решения применены пятиточечные аппроксимации конвективных членов, не содержащие «схемную диффузию». Решения разнос- тных уравнений для давления и функции тока находятся итерациями [3].

1^0. Течение в канале. В уравнениях Навье было положено $\mathrm{Re} = 100$, $Fr = 0.001$, $F_x = -v$, $F_y = u$, то есть $rot\,\vec{F} \equiv 0$. В силу этого уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\omega, \tag{20}$$

следовательно, массовые силы на решение уравнений Гельмгольца не оказывают никакого влияния, что отражено на рис.1 и рис. 3, в то время как их действие на решение уравнений Навье существенно изменяет поле скоростей, что показано на рис.2 и рис.4. Расчеты выполнены на сетках 200x100. Различие полей скорости показано на рис.1, 2 и рис.3, 4.

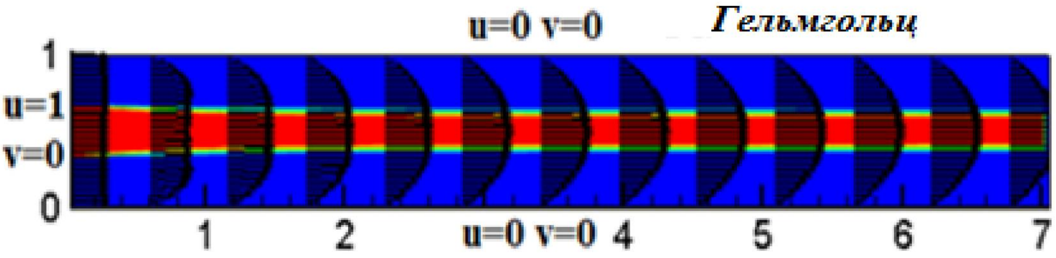

Рисунок 1

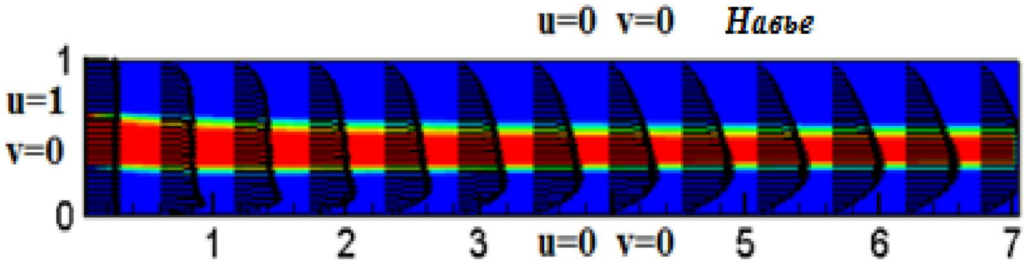

Рисунок 2

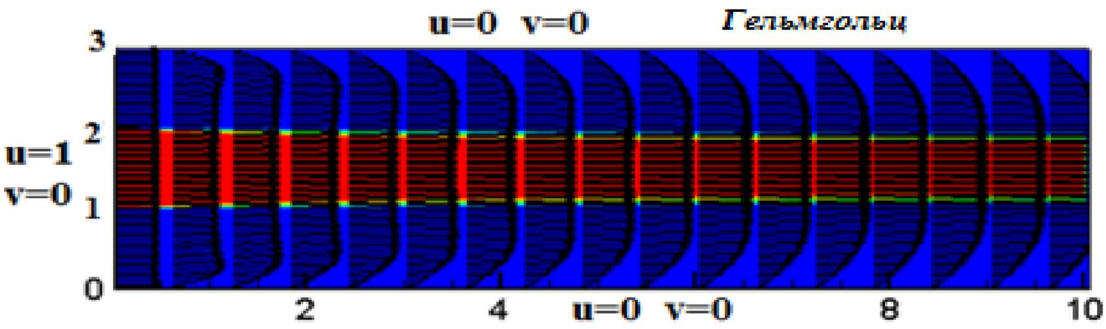

Рисунок 3

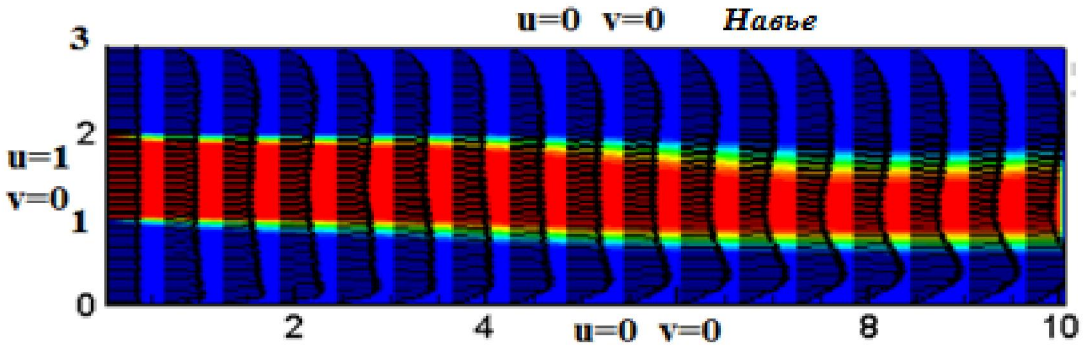

Рисунок 4

2^0. **Течение в каверне** образуется движением верхней плоскости.

В уравнениях Навье было положено $\mathrm{Re} = 10^3, Fr = 10^{-3},\ F_x = 0,\ F_y = -1.$

Расчеты выполнены на сетке 100x100.

На рис.5 и рис.6 представлены изолинии функции тока. Очевидно, на решение уравнений Гельмгольца (20) число Фруда не влияет, что противоречит решению уравнений Навье (18), (19), где число Фруда существенно.

На рис.7 приведен график продольной скорости по уравнению Навье, на рис.8 в том же сечении график продольной скорости по уравнениям Гельмгольца. Различие существенное.

На рис.9 приведен график поперечной скорости по уравнению Навье, на рис.10 в том же сечении график поперечной скорости по уравнениям Гельмгольца. Различие существенное.

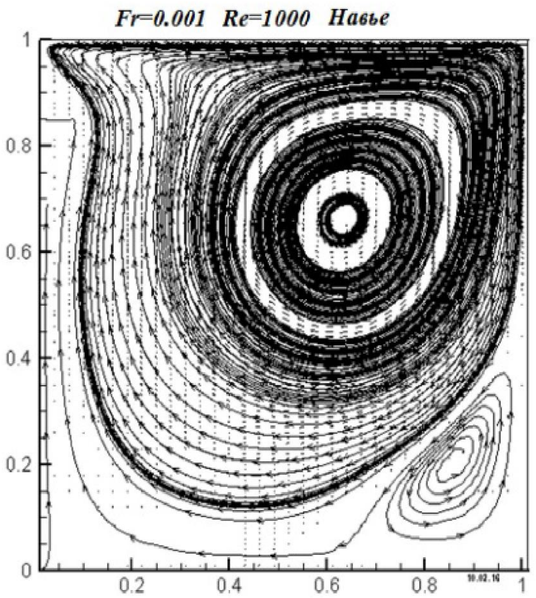

Рисунок 5

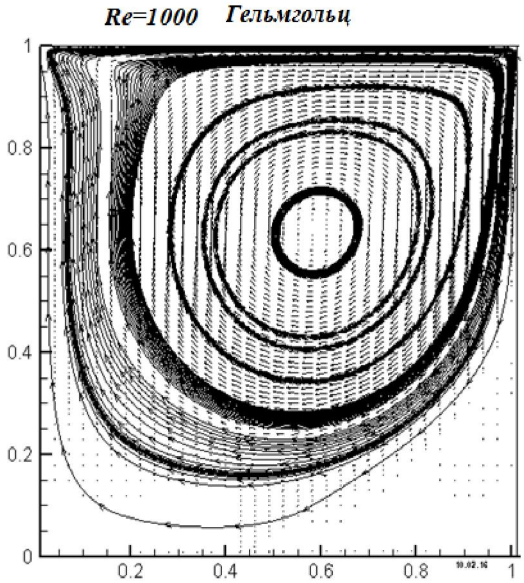

Рисунок 6

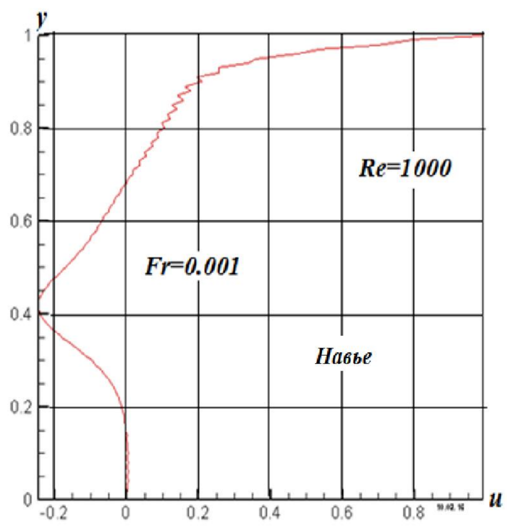

Рисунок 7

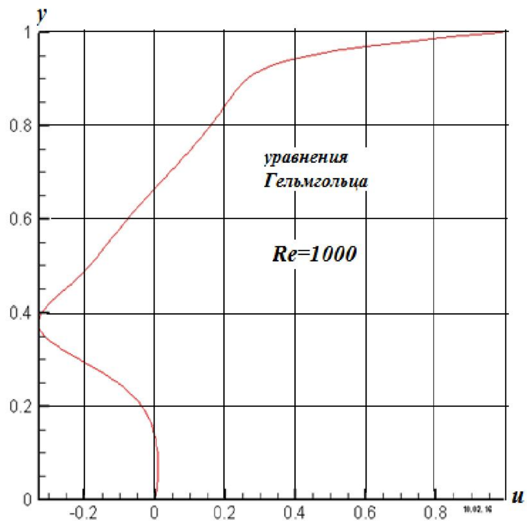

Рисунок 8

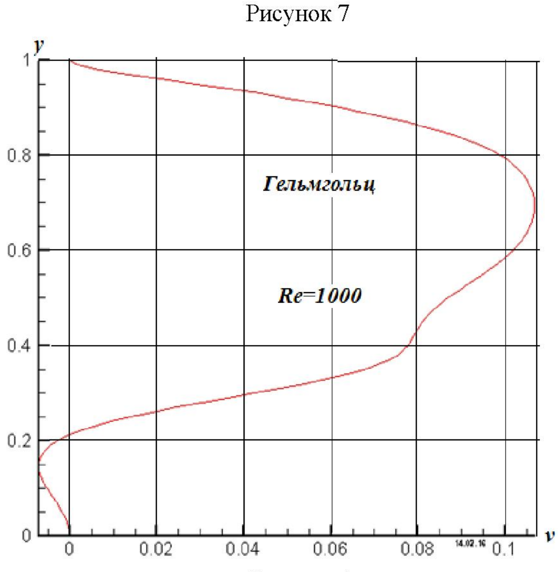

Рисунок 9

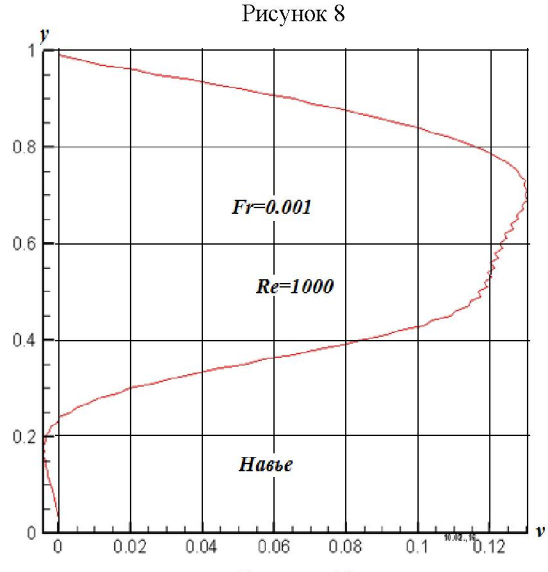

Рисунок 10

Примечание. Для уравнений Гельмгольца применялись традиционные разностные схемы [4]. Проблема необходимого дополнительного к (1') граничного условия для скорости в уравнениях Гельмгольца осталась открытой.

ВЫВОДЫ

Результаты теоремы и численные расчеты, представленные на рис.1- рис.10, показывают непригодность применения уравнений для ротора скорости и функций тока для исследований течений вязкой жидкости. Во-пер-вых, в пространственных (3-хмерных) течениях неосуществимы вычисления $\vec{\Psi}\big|_{t=0}, \vec{\Psi}\big|_{\sigma}$. Во-вторых, неосуществимо точное выполнение начальных и граничных условий для скорости $\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{d}(\vec{r}), \vec{v}\big|_{\sigma} = \vec{\varphi}(\vec{r},t), \vec{r} \in \sigma$

Например, в разностных схемах уравнений Гельмгольца граничные значения скорости $\vec{v}\big|_{\sigma} = \vec{\varphi}(\vec{r},t), \vec{r} \in \sigma$ удовлетворяются с погрешностями, определяемыми густотой сетки и разностными формулами типа Тома, Вудса, Кусковой и др).

Следует ***кардинальный вывод:*** законы физики должны выполняться неукоснительно в естественной форме типа (1). При любом дифференцировании естественные законы физики ликвидируются, образуются уравнения типа (2). Таким образом, использование производных от законов физики в различных сочетаниях приводит к искусственным уравнениям, не являющимися адекватными математическими моделями исследуемого процесса. Дифференцирование законов физики есть преднамеренное их нарушение.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л.Д., Лифщиц Е.М. Гидродинамика - М.: «Наука». 1982г. С.621.
[2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: "Наука",1973г. С.847.
[3] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.- Алматы: Изд-во «Ғылым ордасы», 2015г. С.376.
[4] Джакупов К.Б. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэротермодинамики.- Алматы: Изд-во КазНУ им.аль-Фараби, 2004г. С.246

REFERENCES

[1] Landau L.D., Lifchic E.M. *Gidrodinamik* – M.: "Nauka". 1982.P.621. (in Russ.)
[2] Loitsiansky L.G. Fluid Mechanics.-M.: "Nauka". 1982.P.621. (in Russ)
[3] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «K2 », 2009. P.376
[4] Jakupov K.B. Простые разностные схемы для уравнений гидроаэротермодинамики.- Almaty:: : publishing house "КазНУ им.Аль-Фараби", 2004. P.246

ЖЫЛДАМДЫҚ РОТОРЫНЫҢ ЖӘНЕ АҒЫС ФУНКЦИЯСЫНЫҢ ТЕҢДЕУЛЕРІМЕН ТҰТҚЫРЛЫ СҰЙЫҚТЫҚТАРДЫҢ ҚОЗҒАЛЫСЫН МОДЕЛЬДЕУ

К.Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: ротор, жылдамдық, қысым, ағыс функциясы, эквиваленттсіздік.

Аннотация. Жылдамдықтың ротор теңдеулерінің тұтқырлы сұйықтықтардың қозғалысының теңдеулеріне эквиваленттсіздігі туралы теорема дәлелденген. Гельмгольцтың теңдеулерінің шешімдері Навье теңдеулерінің шешімдерімен ажырасатындығы сандық түрде көрсетілген.

Поступила 17.06.2016 г.