

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 307 (2016), 124 – 134

**THE EFFECTIVE APPLICATION OF THE MAXWELL EQUATIONS
AND OHM'S LAW OF NUMERICAL SIMULATION
OF TWO-PHASE PROCESS OF MAGNETOHYDRODYNAMICS**

K.B.Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: jakupovKB@mail.ru

Key words: induction, intensity, liquid, air, magnetic field

Abstract. It was established inconsistency in MHD systems of hyperbolic equations and parabolic types for induction and magnetic and electric fields. It is proved the direct application of Maxwell's equations and Ohm's law to the MHD. Particular attention is paid to the construction of explicit difference schemes for Maxwell's equations, taking into account the long-range electromagnetic fields. The results of numerical calculations of two-phase flows: jets of conductive liquids in non-conductive channel air. It was found that for large numbers Hartmann imposed magnetic field stops and holds in a fixed configuration entered mass of conductive liquids.

УДК 533.532.516

**ЭФФЕКТИВНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА
И ЗАКОНА ОМА В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ
ДВУХФАЗНЫХ ПРОЦЕССОВ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ**

К. Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК

Ключевые слова: индукция, напряженность, жидкость, воздух, магнитное поле.

Аннотация. Установлена противоречивость в МГД систем с уравнениями гиперболического или параболического типов для индукций и напряженностей магнитного и электрического полей. Обосновано непосредственное применение уравнений Максвелла и закона Ома в МГД. Особое внимание уделяется построению явных разностных схем для уравнений Максвелла с учетом дальнего действия электромагнитных полей. Приведены результаты численных расчетов двухфазных течений: струй *электропроводящей* жидкости в *электронепроводящем* воздухе канала. Установлено, что при больших числах Гартмана наложенное магнитное поле останавливает и удерживает в неподвижной конфигурации введенную массу электропроводной жидкости.

В [1], [2], [3], [4] и других источниках *дифференцированиями* уравнений Максвелла и закона Ома выводятся гиперболического или параболического типа уравнения для индукции и напряженности магнитного поля, т.е. первого порядка уравнения электродинамики заменяются уравнениями 2-го порядка, что требует дополнительных начальных и граничных условий. Аналогичные уравнения получаются для напряженности и индукции электрического поля. Доказывается неприменимость данных уравнений 2-го порядка в численном моделировании из-за неэквивалентности уравнениям Максвелла и закону Ома.

Целью настоящей работы является обоснование прямого применения уравнений Максвелла и закона Ома в численном моделировании МГД.

1. Уравнения магнитной гидродинамики. В уравнениях динамики электропроводящей жидкости [1]:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \sum_k \frac{\partial \vec{\pi}_k}{\partial x_k} + [\vec{j}, \vec{B}], \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \vec{q} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{\pi}_k, \vec{v}) + \rho (\vec{F}, \vec{v}) + (\vec{j}, \vec{E}) \quad (2)$$

плотность электрического тока \vec{j} , индукция магнитного поля \vec{B} и напряженность электрического поля \vec{E} определяются законом Ома

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}$$

законом сохранения электрического заряда [4]:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3)$$

и уравнениями Максвелла [4]:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (4)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (8)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (9)$$

здесь \vec{D} - индукция электрического поля, ρ_e - плотность электрических зарядов, \vec{H} - напряженность магнитного поля, $\varepsilon_0 = 1/(36\pi \cdot 10^9) \text{ Ф/м}$ - электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ - магнитная постоянная.

2. Противоречивость систем уравнений для индукции и напряженностей магнитного и электрического полей. При этом дифференцируются закон Ампера-Максвелла (8)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \text{ закон Фарадея (9)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ и закон Ома } \vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}. \text{ Получается система:}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mu_0 \mu} \Delta \vec{B} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \{ \sigma \cdot \operatorname{rot} [\vec{v}, \vec{B}] + \operatorname{rot} (\rho_e \vec{v}) \}, \quad (10)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (11)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}, \quad (13)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \quad (14)$$

В уравнении (10) положено $\sigma = \text{const}, \varepsilon_0 \varepsilon = \text{const}, \mu_0 \mu = \text{const}$, при переменных значениях оно дополняется их производными. Полезность уравнения гиперболического типа (10) в том, что подтверждается волновой характер распространения магнитного поля. В вакууме $\varepsilon \equiv 1, \mu \equiv 1$ магнитные волны распространяются со скоростью света, так как

$$\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mu_0 \mu} = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} = c^2.$$

Есть другой подход. В [3] и др. пренебрегается токами смещения $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \equiv 0$. Но тогда закон Ампера-Максвелла (8) принимает вид $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}$, в силу чего уравнение сохранения электрического заряда должно иметь вид $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{div} \vec{j} = 0$, следовательно вытекает $\frac{\partial \rho_e}{\partial t} \equiv 0$. В результате получается система

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma \cdot \mu_0 \mu} \Delta \vec{B} + \operatorname{rot}[\vec{v}, \vec{B}] + \frac{1}{\sigma} \operatorname{rot}(\rho_e \vec{v}), \quad (15)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E},$$

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v}, \quad \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho_e \quad (15')$$

Уравнение параболического типа (15) соответствует диффузионному распространению индукции магнитного поля.

Противоречивость состоит в том, что для индукции магнитного поля \vec{B} искусственно получаются 3 уравнения (10) и (11) или (15), (11). При определении \vec{B} из главных по типу уравнений (10) или (15) (именно с этой целью построены уравнения (10) и (15)) не будет выполняться уравнение непрерывности $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. При вычисленном из уравнений (10) или (15) индукции \vec{B} система уравнений $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \operatorname{div} \vec{D} = \rho_e, \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, не разрешима

относительно \vec{E} ! Такая же проблема стоит для плотности электрических зарядов ρ_e , для которой имеются 2 уравнения - эволюционное (13) и теорема Гаусса (14), также 2 уравнения (15') в системе (15).

Аналогичными противоречиями обладает система для напряженности магнитного поля:

$$-\Delta \vec{H} = -\sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \sigma \mu_0 \mu \text{rot} [\vec{v}, \vec{H}] + \text{rot} (\rho_e \vec{v}) - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + \mu_0 \mu [\vec{v}, \vec{H}]) + \rho_e \vec{v}, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\text{div} \vec{H} = 0, \quad \text{div} \vec{D} = \rho_e$$

Теорема 1. Закон Ампера-Максвелла (8) в искусственных системах (10)-(14), (15)-(15') или (16) не выполняется. Из данных систем вытекает уравнение $\text{rot} \vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{grad} C(\vec{r}, t)$,

где $C(\vec{r}, t)$ произвольная дифференцируемая функция. Искусственные системы с уравнениями гиперболического или параболического типа не эквивалентны уравнениям Максвелла.

Доказательством служит тот факт, что для вывода (10) или (16) применяется дифференциальный оператор «rot». Для индукции магнитного поля \vec{B} искусственно получены 3 дифференциальные уравнения (10) и пара (11). Если \vec{B} определяется из (10), то не будет выполняться уравнение $\text{div} \vec{B} = 0$. При вычисленной из уравнения (10) индукции \vec{B} для \vec{E} получается неразрешимая система из 2-х уравнений $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$, $\text{div} \vec{D} = \rho_e$, $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Усугубляет возникшую ситуацию введение функций $\vec{\Psi}$, $\vec{\Phi}$ для удовлетворения уравнений $\text{div} \vec{B} = 0$, $\text{div} \vec{H} = 0$:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{\Psi}, \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{\Phi}, \quad \text{div} \vec{B} = \text{div} \text{rot} \vec{\Psi} \equiv 0, \quad \text{div} \vec{H} = \text{div} \text{rot} \vec{\Phi} \equiv 0.$$

В результате (10) переходит в уравнение с производными 3-го порядка:

$$\frac{\partial^2 \text{rot} \vec{\Psi}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial \text{rot} \vec{\Psi}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mu_0 \mu} \Delta \text{rot} \vec{\Psi} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \{ \sigma \cdot \text{rot} [\vec{v}, \text{rot} \vec{\Psi}] + \text{rot} (\rho_e \vec{v}) \},$$

$$\frac{\partial^2 \text{rot} \vec{\Phi}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{\partial \text{rot} \vec{\Phi}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \cdot \mu_0 \mu} \Delta \text{rot} \vec{\Phi} + \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \cdot \{ \sigma \text{rot} [\vec{v}, \text{rot} \vec{\Phi}] + \frac{1}{\mu_0 \mu} \text{rot} (\rho_e \vec{v}) \}$$

Для них требуются дополнительные граничные условия, которые для системы Максвелла не предусмотрены.

Обратным ходом рассуждений уравнение (10) свертывается к виду

$$\text{rot} [\text{rot} \vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}] = 0$$

Это уравнение имеет очевидное решение

$$\text{rot} \vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \text{grad} C(\vec{r}, t),$$

где $C(\vec{r}, t) \neq 0$ произвольного вида, отличная от 0, дифференцируемая функция, поэтому закон Ампера-Максвелла (8) не выполняется

$$\text{rot} \vec{H} - \vec{j} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0.$$

Теорема доказана.

Для подтверждения выводов **теоремы 1** можно провести аналогию между искусственно образованными системами (10) - (14), (16) и уравнениями динамики вязкой несжимаемой жидкости:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} + \nabla p = \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{F}, \quad \text{div} \vec{v} = 0$$

В данной системе для искомых 2-х функций давления p и скорости \vec{v} существуют 2 уравнения, причем уравнение $\text{div} \vec{v} = 0$ предназначено для вычисления давления p . Такими же парадоксами и неэквивалентностью исходным уравнениям Максвелла обладает дифференцирование, полученная искусственная система для напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{grad} \text{div} \vec{E} &= \Delta \vec{E} - \mu_0 \mu \frac{\partial}{\partial t} \{ \sigma [\vec{v}, \vec{B}] + (\rho_e \vec{v}) \}, \\ \text{div} \vec{E} &= \frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad \text{div} \vec{B} = 0, \quad \text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0, \\ \vec{j} &= \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v} \end{aligned} \quad (17)$$

При этом для вывода уравнения гиперболического типа в (17) дифференцируется закон

Фарадея (9) $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ в системе Максвелла.

Изложенные противоречия служат обоснованием алгоритма непосредственного применения в МГД уравнений Максвелла и закона Ома.

3. Свойства уравнений Максвелла. Эффективному использованию уравнений Максвелла в МГД предназначены следующие теоремы.

Теорема 2. Закон сохранения электрического заряда (3) является следствием закона Ампера-Максвелла (8) и теоремы Гаусса (14).

Для доказательства применяется оператор div к обеим частям уравнения (8). Получаются:

$$\text{div} \text{rot} \vec{H} = \text{div} \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right), \quad \text{div} \text{rot} \vec{H} = 0, \quad \frac{\partial \text{div} \vec{D}}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

В силу теоремы Гаусса $\text{div} \vec{D} = \rho_e$ вытекает закон сохранения заряда [2]:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0$$

Для 6 искомых функций система (3) - (7), составленная из 7 уравнений, на первый взгляд кажется переопределенной. Но это не так, все нормально у Максвелла, что подтверждается следующей теоремой.

Теорема 3. Уравнение (7) непрерывности магнитных силовых линий является следствием закона Фарадея при начальных условиях

$$\vec{B}|_{t=0} = \text{const}, \quad \forall \vec{r}, \quad (18)$$

Уравнения (2)-(9) и закон Ома образуют замкнутую систему.

Для доказательства достаточно применить операцию div к обеим частям уравнения (9):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{E} \equiv 0, \quad \operatorname{div} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{div} \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$\int_{t=0}^t \frac{\partial \operatorname{div} \vec{B}}{\partial t} dt = \operatorname{div} \vec{B}|_t - \operatorname{div} \vec{B}|_{t=0} = 0$$

В силу любого из начальных условий (18) имеет место выполнение

$$\operatorname{div} \vec{B}|_t = 0, \quad \forall t$$

Таким образом, в системе Максвелла при нулевом начальном условии (18) уравнение (7) является следствием уравнения (9). Это очень важно и принципиально при численной реализации уравнений МГД без привлечения искусственных дифференцированиями образованных уравнений гиперболического или параболического типов.

4. Эффективный алгоритм численной реализации уравнений Максвелла и закона Ома в МГД. По теореме 3 для численного решения система уравнений Максвелла представляется в эквивалентном виде:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} + \sum_k \frac{\partial \vec{\pi}_k}{\partial x_k} + [\vec{j}, \vec{B}], \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0,$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) = -\operatorname{div} \vec{q} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{\pi}_k, \vec{v}) + \rho (\vec{F}, \vec{v}) + (\vec{j}, \vec{E})$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_e, \quad \vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{j} = \sigma (\vec{E} + [\vec{v}, \vec{B}]) + \rho_e \vec{v},$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \vec{B}|_{t=0} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Для данных уравнений необходимы начальные условия

$$\vec{v}|_{t=0} = \vec{d}_v(\vec{r}), T|_{t=0} = \vec{d}_T(\vec{r}), \rho|_{t=0} = \vec{d}_\rho(\vec{r}), D|_{t=0} = \vec{d}_D(\vec{r}), \vec{B}|_{t=0} = \vec{d}_B(\vec{r}),$$

причем начальное условие индукции магнитного поля подчиняется условию теоремы 3 $\operatorname{div} \vec{d}_B = 0$. Краевые условия для скорости и температуры должны соответствовать физике рассматриваемого течения.

Краевые условия напряженностей магнитного и электрического полей \vec{H} и \vec{E} должны учитывать их дальное действие, а также тот факт, что уравнения Максвелла составлены из 1-ых производных по всем переменным. В искусственно образованные уравнения гиперболического (10), (16), (17) и параболического (15) типов входят 2-ые производные, следовательно, должны быть априори поставлены краевые условия типа Дирихле или Неймана, что противоречит естественным уравнениям Максвелла и принципу дальнего действия полей. Для уравнений гиперболического типа (10), (16), (17) требуется второе начальное условие.

Логичным обобщением теоремы 1 служит следующее утверждение: дифференциальные уравнения, являющиеся математическими моделями законов физики, в принципе нельзя дифференцировать. Полученные дифференцированием уравнения имеют на единицу больший порядок, что требует постановки неадекватных физическому процессу граничных условий. Это приводит к неверным результатам из-за искажений естественных законов физики.

Для численной реализации вводится сеточная область по времени $t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots$, $\tau > 0$ шаг по времени, аналогично вводится согласованная прямоугольная сетка по пространственным переменным. Применение явных схем здесь вполне естественно.

Закон Ома реализуется просто

$$\vec{j}^n = \sigma(\vec{E}^n + [\vec{v}^n, \vec{B}^n]) + \rho_e^n \vec{v}^n,$$

в теореме Гаусса при аппроксимации 1-ых производных необходимо применять центральные разности во внутренних узлах:

$$\rho_e^n = D_{\tilde{x}\tilde{x}}^n + D_{\tilde{y}\tilde{y}}^n + D_{\tilde{z}\tilde{z}}^n,$$

в граничных узлах учитывать заданную плотность электрических зарядов или краевые условия. При отсутствии краевых условий плотность вычисляется из аппроксимаций данного уравнения с применением разностных производных назад или вперед:

$$\rho_e^n = \alpha_x D_{\tilde{x}\tilde{x}}^n + (1 - \alpha_x) D_{xx}^n + \alpha_y D_{\tilde{y}\tilde{y}}^n + (1 - \alpha_y) D_{yy}^n + \alpha_z D_{\tilde{z}\tilde{z}}^n + (1 - \alpha_z) D_{zz}^n,$$

что регулируется заданными весовыми коэффициентами

$$0 \leq \alpha_x \leq 1, 0 \leq \alpha_y \leq 1, 0 \leq \alpha_z \leq 1.$$

При $\alpha_x = 0, \alpha_y = 0, \alpha_z = 0$ применяются разностные производные вперед. При $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1, \alpha_z = 1$ получаются разностные производные назад. При $\alpha_x = 0,5, \alpha_y = 0,5, \alpha_z = 0,5$ применяются центральные разности, т.е. в зависимости от постановки граничных условий реализуются различные сочетания разностных производных.

Разностные схемы для уравнений законов Ампера-Максвелла и Фарадея в системе Максвелла должны быть построены по тому же принципу: замена 1-ых производных центральными разностями во внутренних узлах:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}^{n+1} - \vec{D}^n}{\tau} + \vec{j}^n &= \{H_{\tilde{y}\tilde{z}}^n - H_{y\tilde{z}}^n\} \vec{i} + \{H_{\tilde{x}\tilde{z}}^n - H_{\tilde{x}z}^n\} \vec{j} + \{H_{\tilde{y}\tilde{x}}^n - H_{\tilde{y}x}^n\} \vec{k}, \\ - \frac{\vec{B}^{n+1} - \vec{B}^n}{\tau} &= \{E_{\tilde{z}\tilde{y}}^n - E_{z\tilde{y}}^n\} \vec{i} + \{E_{\tilde{x}\tilde{z}}^n - E_{\tilde{x}z}^n\} \vec{j} + \{E_{\tilde{y}\tilde{x}}^n - E_{\tilde{y}x}^n\} \vec{k}, \end{aligned}$$

в граничных узлах учитывать заданные значения или условия векторов индукций магнитного и электрического полей. При отсутствии краевых условий для выполнения принципа дальнего действия векторы индукций магнитного и электрического полей вычисляются из аппроксимаций уравнений законов Ампера-Максвелла и Фарадея с применением разностных производных назад или вперед:

$$\begin{aligned} \frac{\vec{D}^{n+1} - \vec{D}^n}{\tau} + \vec{j}^n &= \{[\beta_y H_{\tilde{y}\tilde{z}}^n + (1 - \beta_y) H_{zy}^n] - [\beta_z H_{y\tilde{z}}^n + (1 - \beta_z) H_{yz}^n]\} \vec{i} + \\ &+ \{[\hat{\beta}_z H_{\tilde{x}\tilde{z}}^n + (1 - \hat{\beta}_z) H_{xz}^n] - [\tilde{\beta}_x H_{\tilde{x}z}^n + (1 - \tilde{\beta}_x) H_{zx}^n]\} \vec{j} + \\ &+ \{[\tilde{\beta}_x H_{\tilde{y}\tilde{x}}^n + (1 - \tilde{\beta}_x) H_{yx}^n] - [\hat{\beta}_y H_{\tilde{y}x}^n + (1 - \hat{\beta}_y) H_{xy}^n]\} \vec{k}, \\ - \frac{\vec{B}^{n+1} - \vec{B}^n}{\tau} &= \{[\gamma_y E_{\tilde{z}\tilde{y}}^n + (1 - \gamma_y) E_{zy}^n] - [\gamma_z E_{y\tilde{z}}^n + (1 - \gamma_z) E_{yz}^n]\} \vec{i} + \\ &+ \{[\hat{\gamma}_z E_{\tilde{x}\tilde{z}}^n + (1 - \hat{\gamma}_z) E_{xz}^n] - [\tilde{\gamma}_x E_{\tilde{x}z}^n + (1 - \tilde{\gamma}_x) E_{zx}^n]\} \vec{j} + \\ &+ \{[\tilde{\gamma}_x E_{\tilde{y}\tilde{x}}^n + (1 - \tilde{\gamma}_x) E_{yx}^n] - [\hat{\gamma}_y E_{\tilde{y}x}^n + (1 - \hat{\gamma}_y) E_{xy}^n]\} \vec{k}, \end{aligned}$$

что регулируется заданными весовыми коэффициентами

$$0 \leq \beta_x \leq 1; 0 \leq \beta_y \leq 1; 0 \leq \beta_z \leq 1; 0 \leq \gamma_x \leq 1; 0 \leq \gamma_y \leq 1; 0 \leq \gamma_z \leq 1$$

Далее реализуются связи: $\vec{E}^{n+1} = \vec{D}^{n+1}(\varepsilon_0 \varepsilon)^{-1}$, $\vec{H}^{n+1} = (\mu_0 \mu)^{-1} \vec{B}^{n+1}$

Для уравнений гидродинамики применяются полуневьяные схемы с аппроксимациями конвективных членов на пятиточечных шаблонах, что позволяет избежать влияния «схемной диффузии» на численные результаты [6]. Давление вычисляется итерациями из разностных аппроксимаций уравнения неразрывности.

5. Уравнения МГД в безразмерных переменных. Вводятся масштабы: линейных размеров « L », скоростей « U_∞ », времени $t^* = L/U_\infty$, другие масштабы обозначены звездочками.

В результате образуются следующие критерии подобия:

$$Eu = \frac{P}{\rho^* U_\infty^2}, Re = \frac{\rho^* U_\infty L}{\mu^*}, Fr = \frac{U_\infty^2}{gL}, He' = \frac{\sigma E^* L B^*}{\rho^* U_\infty^2}, Hr' = \frac{\rho_e^* L B^*}{\rho^* U_\infty},$$

$$\text{число Гартмана } Ha = B^* L \sqrt{\frac{\sigma}{\mu^*}}, De = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^*}{\rho_e^* L},$$

$$HM = \frac{B^*}{\mu_0 \mu \varepsilon_0 \varepsilon E^* U_\infty}, OMe = \frac{\sigma L}{\varepsilon_0 \varepsilon U_\infty}, OMv = \frac{\sigma B^* L}{\varepsilon_0 \varepsilon E^*},$$

$$OMr = \frac{\rho_e^* L}{\varepsilon_0 \varepsilon E^*}, Be = \frac{E^*}{B^* U_\infty}, B^* = \mu_0 \mu H^*, D^* = \varepsilon_0 \varepsilon E^*$$

Уравнения МГД в данных безразмерных принимают вид [6]:

$$\rho' \left(\frac{\partial v'_i}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} \right) + Eu \frac{\partial p'}{\partial x'_i} = \frac{\rho'}{Fr} F'_i + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_j} (\mu' m_i Ks_{m_i} v_i^{m_i-1} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j}) +$$

$$+ He' [\vec{E}', \vec{B}']_i + Ha^2 \frac{1}{Re} [[\vec{v}', \vec{B}'], \vec{B}']_i + Hr' [\rho'_e \vec{v}', \vec{B}']_i, i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + div \rho' \vec{v}' = 0,$$

$$\rho' \left(\frac{\partial T'}{\partial t'} + \sum_{j=1}^3 v'_j \frac{\partial T'}{\partial x'_j} \right) = \frac{\kappa}{Re \cdot Pr} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x'_j} (\lambda' \frac{\partial T'}{\partial x'_j}) -$$

$$- Eu \cdot M^2 \cdot \kappa (\kappa - 1) p' div \vec{v}' +$$

$$+ \frac{1}{Re} M^2 \kappa (\kappa - 1) \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu' m_i Ks_{m_i} v_i^{m_i-1} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} + \rho' Q',$$

$$\frac{1}{Re_{m_i}} = \frac{1}{Re} Ks_{m_i}, Ks_{m_i} = \left(\frac{U_\infty}{m_i} \right)^{m_i-1}, \mu' = \mu'(T'), \lambda' = \lambda'(T'),$$

$$|v'_i| < \frac{1}{9} \quad m_i = 1; \quad \frac{1}{9} \leq |v'_i| < \frac{3}{9} \quad m_i = 3; \quad \frac{3}{9} \leq |v'_i| < \frac{5}{9} \quad m_i = 5;$$

$$\frac{5}{9} \leq |v'_i| \leq \frac{7}{9} \quad m_i = 7; \quad \frac{7}{9} \leq |v'_i| \quad m_i = 9,$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu^* c_p}{\lambda^*}, p' = \frac{1}{\kappa \cdot Eu \cdot M^2} \rho' T', \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v}, \quad M = \frac{U_\infty}{a^*}, \quad a^* = \sqrt{kRT^*},$$

$$\vec{D}' = \vec{E}', \quad \vec{B}' = \vec{H}', \quad De \cdot \text{div} \vec{D}' = \rho'_e, \quad \text{div} \vec{B}'|_{t'=0} = 0,$$

$$\vec{j}' = OMe \cdot \vec{E}' + OMv \cdot [\vec{v}', \vec{B}'] + OMr \cdot \rho'_e \vec{v}',$$

$$HM \cdot \text{rot} \vec{H}' = \{OMe \cdot \vec{E}' + OMv \cdot [\vec{v}', \vec{B}'] + OMr \cdot \rho'_e \vec{v}'\} + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'},$$

$$Be \cdot \text{rot} \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

6. Удержание в канале электропроводящей жидкости наложенным поперечным магнитным полем. За характерные размеры взяты: ширина впускного зазора, скорость, напряженность электрического поля, плотность электрических зарядов во впускном зазоре, индукция наложенного поперечного магнитного поля, плотность и вязкость воздуха. Канал имеет электроизолированные стенки. Течение предполагается изотермическим ламинарным с малыми скоростями $m_i, \forall i$, что позволяет считать плотность воздуха постоянной. (Идея удержания магнитным полем плазмы в термоядерной реакции была выдвинута академиком Арцимовичем).

Моделирование двухфазного течения «жидкость-газ» проведено по VOF- методу [5], по которому плотность среды представляется суммой плотностей жидкости $\rho_{жс} = 7200 \text{ кг/м}^3$ и газа $\rho_2 = 1.293 \text{ кг/м}^3$, $\rho = c_2 \rho_2 + c_{жс} \rho_{жс}$, $c_2 + c_{жс} = 1$.

Аналогично другие параметры двухфазного течения:

$$\mu = c_2 \mu_2 + c_{жс} \mu_{жс}, \quad \sigma = c_2 \sigma_2 + c_{жс} \sigma_{жс}, \quad \varepsilon = c_2 \varepsilon_2 + c_{жс} \varepsilon_{жс}, \quad 1/\text{Re} = c_2 / \text{Re}_2 + c_{жс} / \text{Re}_{жс} \quad \text{т.д.}$$

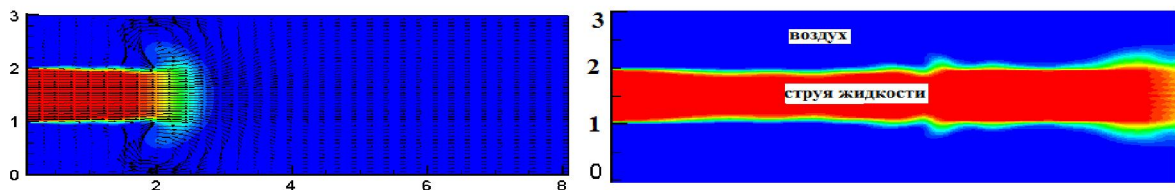
Воздух считается неэлектропроводной средой $\sigma_2 \equiv 0$.

В численных расчетах на сетке 250x150 было положено

$$Ha = 741619,847; F_x = F_y = 0; He' = 143,3925; Hr' = 25908,802;$$

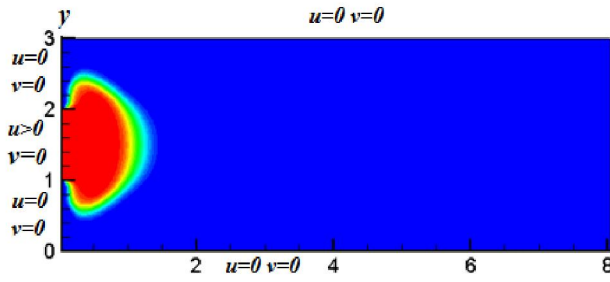
$$De = 0,86482; Eu = 1; HM = 8415572269 5,4857; OMe = 6,3995 \cdot 10^{-3};$$

$$OMv = 698,1317; OMr = 1,15630; Be = 9,166666 \cdot 10^{-6}.$$

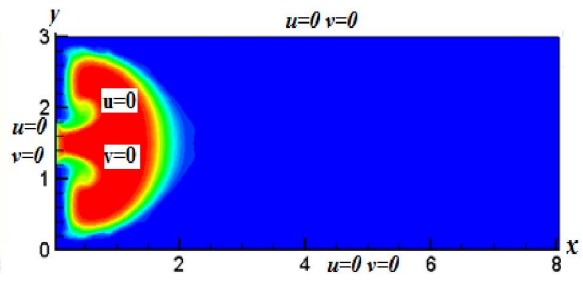


Фиг.1

Фигура 1 – соответствует вхождению и протеканию в канале неэлектропроводящей жидкости. Искривления свободной поверхности жидкости есть влияние вихрей образующихся в углах канала и далее развивающихся по течению

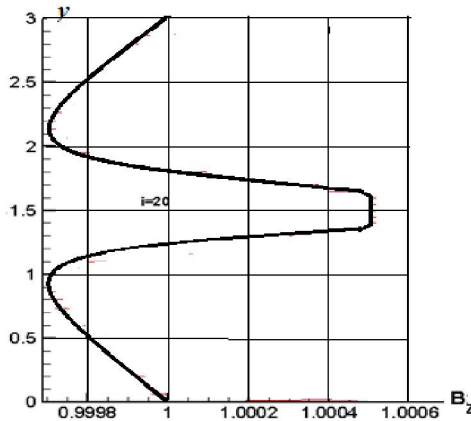


Фиг.2



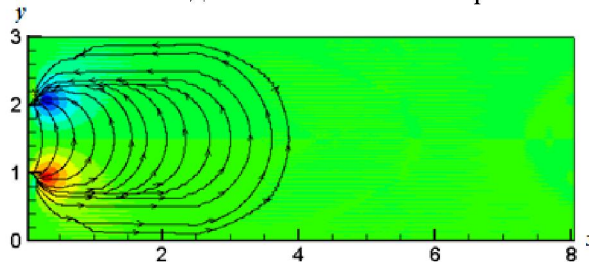
Фиг.3

На фиг.2 представлен начальный момент тормозящего действия наложенного поперечного магнитного поля \mathbf{B}'_z . Подача жидкости через определенное время прекращается. На фиг.3 отображена образовавшаяся под действием магнитного поля постоянная конфигурация остановившейся введенной порции жидкости, далее намагниченная жидкость останавливается, инерционное движение воздуха через некоторый промежуток времени тоже прекращается.

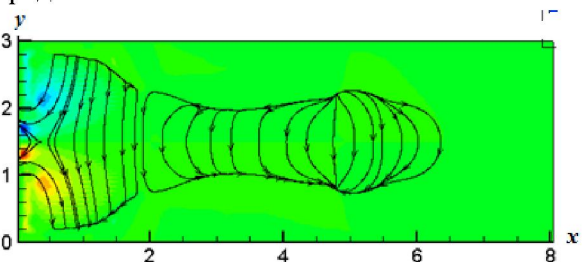


Фиг.4

На фиг.4 представлено изменение индукции магнитного поля \mathbf{B}'_z в поперечном сечении канала $x=1.6$ перед полной остановкой жидкости. В начальный момент времени $t=0$ по всему каналу магнитная индукция постоянна $\mathbf{B}'_z = 1$. В области жидкости индукция магнитного поля увеличивается под влиянием поля электрических зарядов.

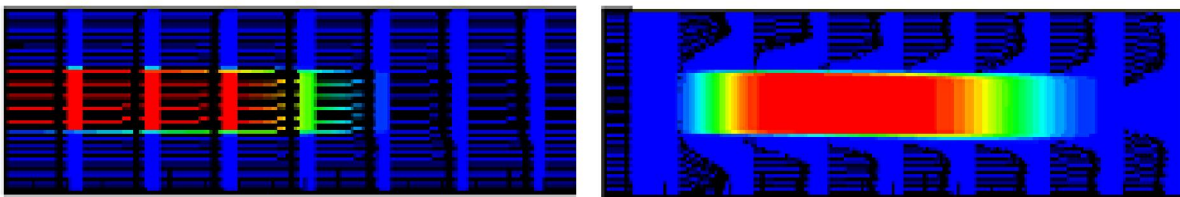


Фиг.5



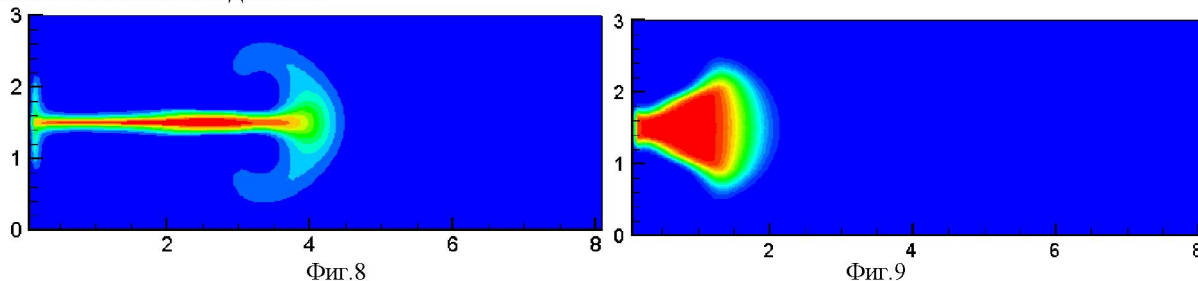
Фиг.6

На фиг.5 представлены линии вектора напряженности электрического поля \mathbf{E}' в канале. На фиг.6 соответствующие на тот же момент времени линии вектора плотности электрического тока \mathbf{j}' в канале.



Фиг.7

На левом рисунке фиг.7 представлен вход жидкости при отсутствии магнитного поля вместе с потоком воздуха по всей ширине канала. Введенная порция продолжает двигаться вместе с воздухом. Через некоторое время включается поперечное магнитное поле $B_z = 1$, под действием которого жидкость начинает останавливаться. На правом рисунке фиг.7 показан момент полной остановки жидкости, воздуха продолжает двигаться, испытывая торможение со стороны остановившейся жидкости.



На рис. 8 представлено влияние безразмерного числа He' на конфигурацию остановившейся порции жидкости. При увеличении He' жидкость вытягивается по длине.

На рис.9 представлено влияние безразмерного числа Hr' на конфигурацию остановившейся жидкости. При увеличении Hr' жидкость вытягивается и принимает колоколообразную форму.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ватажин А.Б., Любимов Г.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. -М.:«Наука»,1970г..С.672.
- [2] Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика.-М.: Физматгиз. 1962г. С.245.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред.-М.: «Наука» 1982г.- С.621.
- [4] Савельев И.В. Курс общей физики, том 2.- М.: «Наука», 1988г. С.496.
- [5] C.W.Hirt and B.D.Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries// J.Comput.Phys.,1981,Vol.39,pp.201-225.
- [6] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.- Алматы: Изд-во «Гылым ордасы». 2015г. С.408.

REFERENCES

- [1] Vatajin A.B., Liubimoff G.A. MHD flow in channels. -M : "Science" , 1970. S.672 .
- [2] Savelieff I.B. Course of general physics , including 2.- M .: "Science", 1988 . S.496 .
- [3] Kulikovski A.G., Liubimoff G.A. Liubimoff G.A. MHD-M.: Fizmatgiz . 1962g . P.245 .
- [4] Landau L.D., Lifshic E.M. Electrodynamics– M.: “Nauka”. 1982.P.621. (in Russ.)
- [5] C.W.Hirt and B.D.Nichols. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries// J.Comput. Phys., 1981, Vol.39,pp.201-225.
- [6] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «K2 », 2009. P.376

МАГНИТТІК ГИДРОДИНАМИКАДА МАКСВЕЛЛ ТЕНДЕУЛЕРІН ЖӘНЕ ОМ ЗАҢЫН ЕКІФАЗАЛЫ МАГНИТТІК ГИДРОДИНАМИКАДА САНДЫҚ МОДЕЛЬДЕУДЕ САПАЛЫ ҚОЛДАНУ

К.Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: индукция, кернеу, сұйықтық, ауа, магниттік өріс.

Аннотация. МГД-ның магниттік және электрлік өрістерінің гиперболалық немесе параболалық тендеулері бар жүйелерінің қайшылықтары көрсетілген. МГД-да Максвеллдің тендеулерін және Ом заңын тікелей пайдалану мәселесі негізделінген. Электромагниттік өрістердің алысқа әсер ететінін ескеретін Максвелл тендеулеріне айқын айырмдық схемалар құрастыруға ерекше көңіл бөлінген. Арнадағы екіфазалық, яғни, электрөткізгіш сұйықтықтың электрөткізбейтін ауадағы ағысының сандық нәтижелері келтірілген. Тыстан салынған магнит өрісі Гартман үлкен сандарында енгізілген электрөткізгіш сұйықтықтың массасын тоқтатады да, оны қозғалмас жағдайда ұстап қалады.

Поступила 17.06.2016 г.