N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 141 – 146

ABOUT ROGERS SEMILATTICES OF TWO ELEMENT FAMILIES OF DIFFERENCE OF C.E. SETS

B.S. Kalmurzaev

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
birzhan_mm@mai.ru

Key words. Rogers semilattice, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, positive numberings, decidable numberings.

Abstract. In the work it was constructed an example of Σ_2^{-1}-computable family $\mathcal{S}$ such that Rogers semilattices $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ and $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ are one-element. And an example of Σ_2^{-1}-computable family $\mathcal{S}$ such that Rogers semilattice $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ is one-element, and $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ is not one-element.

УДК 510.54

О ПОЛУРЕШЕТКАХ РОДЖЕРСА ДВУХЭЛЕМЕНТНЫХ СЕМЕЙСТВ РАЗНОСТЕЙ В. П. МНОЖЕСТВ

Б.С. Калмурзаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: полурешетка Роджерса, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, позитивная нумерация, разрешимая нумерация.

Аннотация. В работе приведен пример Σ_2^{-1}-вычислимого семейства $\mathcal{S}$ такого, что полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ и $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ одноэлементны. А также приведен пример Σ_2^{-1}-вычислимого семейства $\mathcal{S}$ такого, что полурешетка Роджерса $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ одноэлементна, а $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ не одноэлементна.

Исследование вычислимых семейств множеств иерархии Ершова было инициировано работами [1], [2], в которых был предложен общий подход к введению понятия вычислимой нумерации для широкого класса семейств конструктивных объектов и сформулирована программа их изучения в терминах свойств так называемых полурешеток Роджерса.

Полученные к настоящему времени результаты о полурешетках вычислимых нумераций семейств множеств иерархии Ершова выявили новые феномены, не присущие классическим вычислимым нумерациям семейств вычислимо перечислимых (в.п.) множеств. В частности, было доказано существование семейств, состоящих из двух вложенных множеств, полурешетка Роджерса которых одноэлементна [3].

Приведем некоторые понятия из теории вычислимости, используемые в работе. Понятие n-вычислимо перечислимого (n-в.п.) множества было предложено C.J. Ash, J.F. Knight в индуктивной форме [4]:

Определение 1. 1-*в.п.* множества – это в точности в.п. множества, а каждое $(n+1)$-*в.п.* множество – это разность некоторого вычислимо перечислимого и некоторого n-в.п. множеств.

Таким образом, 2-в.п. множества имеют вид $R_1 \setminus R_2$, где R_1, R_2 – в.п. множества, поэтому их еще называют разностями в.п. множеств (кроме того можно утверждать, что $R_1 \subseteq R_2$), 3-в.п. множества имеют вид $R_1 \setminus (R_2 \setminus R_3) = (R_1 \setminus R_2) \cup R_3$, где $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$ и R_1, R_2, R_3 – в.п.

множества и т.д. -в.п. множества образуют уровень Σ_n^{-1} иерархии Ершова [5], о них также говорят как о Σ_n^{-1}-множествах.

Теперь приведем некоторые понятия из теории нумераций. Сюръективное отображение α множества натуральных чисел ω на непустое множество $\mathcal{A}$ называется нумерацией множества $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ – семейство множеств из класса Σ_n^{-1}, $n \geq 1$, иерархии Ершова. Нумерация $\alpha: \omega \to \mathcal{A}$ называется Σ_n^{-1}-*вычислимой*, если

$$\{\langle x, n\rangle \mid x \in \alpha(n)\} \in \Sigma_n^{-1}.$$

Понятие Σ_1^{-1}-вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации семейства рекурсивно перечислимых множеств [4]. Множество всех Σ_n^{-1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$. Нумерация α семейства $\mathcal{A}$ *сводится* к нумерации β этого семейства (символически $\alpha \leq \beta$), если существует рекурсивная функция f, для которой $\alpha(x) = \beta\big(f(x)\big)$ для всех $x \in \omega$. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$). Обозначим через $\deg(\alpha)$ *степень нумерации* α, т.е. совокупность нумерации $\{\beta \mid \beta \equiv \alpha\}$. Отношение сводимости нумерации является предпорядком на $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$ и индуцирует отношение частичного порядка на множестве степеней нумерации из $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$, которое также будем обозначать через $\leq$. Частично упорядоченное множество

$$\mathcal{R}_n^{-1}(\mathcal{A}) \rightleftharpoons \langle\{\deg(\alpha) \mid \alpha \in \mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})\}, \leq\rangle$$

является верхней полурешеткой, которая называется полурешеткой Роджерса семейства $\mathcal{A}$.

Определение 3 ([6]). Нумерацию α назовем *позитивной*, если множество $\{\langle n, m\rangle \mid \alpha(n) = \alpha(m)\}$ является вычислимо перечислимым (и *разрешимой*, если указанное множество вычислимо).

Ясно, что всякая разрешимая нумерация является позитивной.

Следующая теорема утверждает, что существуют Σ_2^{-1}-вычислимые семейства такие, что полурешетка Роджерса 2-го и 3-го уровня иерархии Ершова этого семейства не изоморфны.

Теорема 1. *Найдется двухэлементное семейство* Σ_2^{-1}-*множеств* $\mathcal{S} = \{A, B\}$ *такое, что* $\left|\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})\right| = 1$ *и* $\left|\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})\right| > 1$.

Доказательство. Строим разрешимую Σ_2^{-1}-нумерацию α следующим образом: $\alpha(0) = A$ и $\alpha(x) = B$ для всех $x = 1,2, \ldots$. Строим еще Σ_3^{-1}-вычислимую нумерацию β так, чтобы она не была позитивной. И этим мы обеспечим $\left|\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})\right| > 1$. Пусть π_k – все Σ_2^{-1}-вычислимые нумерации всех Σ_2^{-1}-вычислимых семейств ($k \in \omega$). Пусть $a(k, x, i)$ – произвольная 1-1-вычислимая всюду определённая функция. Будем строить множества A и B и функции g_k, ($k \in \omega$) удовлетворяющих следующим требованиям.

Требования

(1) Если π_k нумерация нашего семейства, то g_k всюду определено и сводит π_k к α.

(2) β – Σ_3^{-1}-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}$.

(3) β – не позитивная нумерация.

Стратегия для g_k

Перечисляем $a(k, x, 0)$ в A и $a(k, x, 0), a(k, x, 1)$ в B для любых $k, x \in \omega$. Ждём пока $a(k, x, 0)$ или $a(k, x, 1)$ не появятся в $\pi_k(x)$ для некоторых x и k.

Случай 1.1. Если $a(k, x, 1)$ появится в $\pi_k(x)$ и $g_k(x)$ не определено, то определяем $g_k(x) = 1$.

Случай 1.2. Если $g_k(x) = 1$ и $a(k, x, 1)$ исчезает из $\pi_k(x)$, то $a(k, x, 1)$ перечисляем в A.

Случай 2.1. Если случай 1.1. не произошёл и $a(k, x, 0)$ появляется в $\pi_k(x)$ и $g_k(x)$ не определено, то $a(k, x, 0)$ убираем из A.

Случай 2.2. Если случай 1.1. не произошёл и $a(k, x, 0)$ исчезает из $\pi_k(x)$ и $g_k(x)$ не определена, то определяем $g_k(x) = 0$.

Случай 3. Если вышеперечисленные случаи не произошли и функция $g_k(x)$ осталась неопределённой до бесконечности, то π_k не является нумерацией нашего семейства и требования удовлетворены.

Конструкция стратегии

Шаг 0. Пусть $A^0 = \emptyset$ и $B^0 = \emptyset$. Функция $g_k(x)$ не определена для всех k и x. Переходим к следующему шагу.

Шаг $t+1$. Пусть $m = l(t), k = l(m), x = r(m)$ и выполняем следующие инструкции.

Случай 1. Если t наименьший номер такой, что $l(t) = m$, тогда $a(k,x,0)$ перечисляем в A^{t+1} и $a(k,x,0), a(k,x,1)$ перечисляем в B^{t+1}. Переходим к следующему шагу.

Случай 2. Если найдется $t' < t$ такой, что $l(t') = m$ и $g_k^t(x)$ неопределена, тогда выполняем инструкции одного из следующих подслучаев.

Подслучай 2.1. Если $a(k,x,1) \in \pi_k^{t+1}(x)$, тогда пусть $g_k^{t+1}(x) = 1$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.2. Если $a(k,x,0) \in A^t \cap \pi_k^{t+1}(x)$ и $a(k,x,1) \notin \pi_k^{t+1}(x)$, тогда убираем $a(k,x,0)$ из A. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.3. Если $a(k,x,0), a(k,x,1) \notin A^t \cup \pi_k^{t+1}(x)$ и $a(k,x,0) \in \pi_k^s(x)$ для $s \le t$, тогда пусть $g_k^{t+1}(x) = 0$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.4. Если подслучаи 2.1-2.3 не выполняются, тогда ничего не предпринимаем и переходим в конец шага.

Случай 3. Если $g_k^t(x)$ определена, тогда выполняем инструкции одного из следующих подслучаев.

Подслучай 3.1. Если $g_k^t(x) = 1$ и $a(k,x,1) \notin \pi_k^{t+1}(x)$, тогда $a(k,x,1)$ перечисляем в A. Переходим в конец шага.

Подслучай 3.2. Если подслучай 3.1 не выполняется, тогда ничего не предпринимаем и переходим в конец шага.

Конец шага. Для всех m, y, если $g_m^t(y)$ определено, то пусть $g_m^{t+1}(y) = g_m^t(y)$. И для всех $x \ge 1$ пусть $\alpha^t(0) = A^{t+1}$ и $\alpha^t(x) = B^{t+1}$. И пусть для всех k

$$\beta^{t+1}(2k) = A^{t+1},$$

$$\beta^{t+1}(2k+1) = \begin{cases} A^{t+1}, \text{если } \langle 2k, 2k+1 \rangle \notin W_k^{t+1}; \\ B^{t+1}, \text{если } \langle 2k, 2k+1 \rangle \in W_k^{t+1}. \end{cases}$$

Переходим к следующему шагу.

Свойства конструкции

1. Для всех $i \ge 1$, $\alpha(i) = \alpha(1)$. В частности, $\mathcal{S} = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$.

2. $\mathcal{S} \subseteq \Sigma_2^{-1}$ и α является Σ_2^{-1}-вычислимой нумерацией семейства $\mathcal{S}$.

3. Для каждого $y \in \alpha(0) \cup \alpha(1)$, найдется $i \le 1$ и $k, x \in \omega$ такие, что $y = a(k,x,i)$.

4. Для всех k, x, множество $\alpha(0) \cap \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$ равняется одному из следующих множеств: $\emptyset, \{a(k,x,0)\}, \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$. А множество $\alpha(1) \cap \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$ равняется только $\{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$.

5. Для всех k, x, t, если $g_k^t(x)$ определена, тогда $g_k^s(x)$ определена и $g_k^t(x) = g_k^s(x)$ для всех $s \ge t$. В частности, каждая g_k является частично рекурсивной функцией.

6. Для каждого k, если π_k – нумерация семейства $\mathcal{S}$, тогда функция g_k всюду определена.

7. Для всех k, если π_k – нумерация семейства $\mathcal{S}$, тогда $\pi_k(x) = \alpha\big(g_k(x)\big)$ для всех $x \in \omega$.

8. $\alpha(0) \subset \alpha(1)$.

Свойства 1 – 8 доказываются аналогично, как свойства 1 – 8 в из [3].

9. Нумерация β является Σ_3^{-1}-вычислимой.

Доказательство. Заметим, что построенное множество A является Σ_2^{-1}-множеством а множество B является в.п. множеством и $A \subseteq B$. При переходе из A к B элементы B могут только перечисляться в β, так как B в.п. множество. И поэтому количество колебании элементов в β не превосходит 3. Значит, построенная нумерация β является Σ_3^{-1}-вычислимой.

10. Нумерация β не является позитивной.

Доказательство. Допустим, что β позитивная нумерация семейства $\mathcal{S}$. Значит множество $\{\langle n,m \rangle | \beta(n) = \beta(m)\}$ является в.п. множеством, и пусть $\{\langle n,m \rangle | \beta(n) = \beta(m)\} = W_e$ для некоторого $e \in \omega$. Тогда, если $\langle 2e, 2e+1 \rangle \in W_e$, то по конструкции $\beta(2e+1) = B$ и $\beta(2e) = A$. Следовательно, $\langle 2e, 2e+1 \rangle \notin \{\langle n,m \rangle | \beta(n) = \beta(m)\} = W_e$. Противоречие. А если $\langle 2e, 2e+1 \rangle \notin W_e$, то по конструкции $\beta(2e+1) = A$ и $\beta(2e) = A$. Следовательно $\langle 2e, 2e+1 \rangle \in \{\langle n,m \rangle | \beta(n) = \beta(m)\} = W_e$. Противоречие. Значит, нумерация β не является позитивной.

11. $\beta \not\le \alpha$ и $\left|\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})\right| > 1$.

Доказательство. Допустим, что $\beta \leq \alpha$. В силу того, что α разрешимая нумерация семейства $\mathcal{S}$ следует, что β так же разрешимая нумерация семейства $\mathcal{S}$. Это противоречит 10 свойству. Значит $\beta \nleq \alpha$. А это значит, что полурешетка $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ содержит как минимум два неэквивалентных нумерации семейства $\mathcal{S}$. Значит $\left|\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})\right| > 1$.

Следствие 1. *Существуют бесконечно много различных двухэлементных семейств таких, как в теореме 1.*

Доказательство. Различные такие семейства можно получать подбирая разные функции $a(k,x,i)$ в доказательстве теоремы 1.

В то же время не для всех двухэлементных семейств Σ_2^{-1}-вычислимых множеств утверждение теоремы 1 остаётся верной.

Теорема 2. *Найдется двухэлементное семейство Σ_2^{-1}-множеств $\mathcal{S} = \{A, B\}$ такое, что* $\left|\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})\right| = \left|\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})\right| = 1$.

Доказательство. Строим разрешимую Σ_2^{-1}-нумерацию α следующим образом: $\alpha(0) = A$ и $\alpha(x) = B$ для всех $x = 1,2,\ldots$. Пусть π_k – все Σ_3^{-1}-вычислимые нумерации всех Σ_3^{-1}-вычислимых семейств ($k \in \omega$). Пусть $a(k,x,i)$ – произвольная 1-1-вычислимая функция. Будем строить множества A и B и функции $g_k(k \in \omega)$, удовлетворяющих следующему требованию: если π_k – Σ_3^{-1}-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}$, тогда g_k всюду определена и сводит π_k к α.

Стратегия для g_k

Перечисляем $a(k,x,0)$ в A и $a(k,x,0), a(k,x,1)$ в B. Ждём пока $a(k,x,0)$ или $a(k,x,1)$ не появится в $\pi_k(x)$ для некоторых x и k.

Случай 1.1. Если $a(k,x,1)$ появится в $\pi_k(x)$ и $g_k(x)$ не определена, то определяем $g_k(x) = 1$.

Случай 1.2. Если $g_k(x) = 1$ и $a(k,x,1)$ исчезает из $\pi_k(x)$, то $a(k,x,1)$ перечисляем в A.

Случай 1.3. Если $g_k(x) = 1$ и $a(k,x,1)$ перечисляется в $\pi_k(x)$, то $a(k,x,1)$ убираем из A.

Случай 2.1. Если случай 1.1. не произошёл и $a(k,x,0)$ появляется в $\pi_k(x)$ и $g_k(x)$ не определена, то $a(k,x,0)$ убираем из A.

Случай 2.2. Если случай 1.1. не произошёл и $a(k,x,0)$ исчезает из $\pi_k(x)$ и $g_k(x)$ не определена, то определяем $g_k(x) = 0$.

Случай 2.3. Если $g_k(x) = 0$ и $a(k,x,0)$ перечисляется в $\pi_k(x)$, то $a(k,x,0)$ убираем из B.

Случай 3. Если вышеперечисленные случаи не произошли и функция $g_k(x)$ осталась неопределённой до бесконечности, то π_k нумерация не нашего семейства и требовании удовлетворены.

Конструкция стратегии

Шаг 0: Пусть $A^0 = \emptyset$ и $B^0 = \emptyset$. И $g_k^0(x)$ неопределена для всех k и x. Переходим к следующему шагу.

Шаг $t+1$: Пусть $m = l(t), k = l(m), x = r(m)$ и выполняем инструкции следующих случаев.

Случай 1. Если t наименьший номер такой, что $l(t) = m$, тогда $a(k,x,0)$ перечисляем в A и $a(k,x,0), a(k,x,1)$ перечисляем в B. Переходим в конец шага.

Случай 2. Если найдется $t' < t$ такой, что $l(t') = m$ и $g_k^t(x)$ неопределена, тогда выполняем инструкции одного из следующих подслучаев.

Подслучай 2.1. Если $a(k,x,1) \in \pi_k^{t+1}(x)$, тогда пусть $g_k^{t+1}(x) = 1$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.2. Если $a(k,x,0) \in A^t \cap \pi_k^{t+1}(x)$ и $a(k,x,1) \notin \pi_k^{t+1}(x)$, тогда убираем $a(k,x,0)$ из A. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.3. Если подслучай 2.1. не выполняется и $a(k,x,0) \notin A^t \cup \pi_k^{t+1}(x)$ и $a(k,x,0) \in \pi_k^s(x)$ для $s \leq t$, тогда пусть $g_k^{t+1}(x) = 0$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.4. Если подслучаи 2.1-2.3 не выполняются, тогда ничего не предпринимаем и переходим в конец шага.

Случай 3. Если $g_k^t(x)$ определена, тогда выполняем инструкции одного из следующих подслучаев.

Подслучай 3.1. Если $g_k^t(x) = 1$ и $a(k,x,1) \notin \pi_k^{t+1}(x)$, тогда $a(k,x,1)$ перечисляем в A. Переходим в конец шага.

Подслучай 3.2. Если $g_k^t(x) = 1$ и $a(k,x,1) \in \pi_k^{t+1}(x)$, тогда $a(k,x,1)$ убираем из A . Переходим в конец шага.

Подслучай 3.3. Если $g_k^t(x) = 0$ и $a(k,x,0) \in \pi_k^{t+1}(x)$, тогда $a(k,x,0)$ убираем из B. Переходим в конец шага.

Подслучай 3.4. Если подслучаи 3.1-3.3 не выполняются, тогда ничего не предпринимаем и переходим в конец шага.

Конец шага. Для всех m, y, если $g_m^t(y)$ определена, то пусть $g_m^{t+1}(y) = g_m^t(y)$.И для всех $x \geq 1$ пусть $\alpha^{t+1}(0) = A^{t+1}$ и $\alpha^{t+1}(x) = B^{t+1}$. Переходим к следующему шагу.

Свойства конструкции

1. Для всех $i \geq 1$, $\alpha(i) = \alpha(1)$. В частности, $\mathcal{S} = \{\alpha(0), \alpha(1)\}$.

2. $\mathcal{S} \subseteq \Sigma_2^{-1}$ и α является Σ_2^{-1}-вычислимая нумерация семейства $\mathcal{S}$.

3. Для каждого $y \in \alpha(0) \cup \alpha(1)$, найдется $i \leq 1$ и $k, x \in \omega$ такие, что $y = a(k,x,i)$.

4. Для всех k, x, множество $\alpha(0) \cap \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$ равняется одному из следующих множеств: $\emptyset, \{a(k,x,0)\}, \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$. А множество $\alpha(1) \cap \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$ равняется одному из следующих множеств: $\{a(k,x,1)\}, \{a(k,x,0), a(k,x,1)\}$.

5. Для всех k, x, t, если $g_k^t(x)$ определена, тогда $g_k^s(x)$ определена и $g_k^t(x) = g_k^s(x)$ для всех $s \geq t$. В частности, каждый g_k является частично рекурсивной функцией.

Свойства 1 – 5 очевидны.

6. Для каждого k, если π_k – нумерация семейства $\mathcal{S}$, тогда функция g_k всюду определена.

Свойство 6 доказывается аналогично как следствие 6 из [3].

7. Для всех k, если π_k – нумерация семейства $\mathcal{S}$, тогда $\pi_k(x) = \alpha\big(g_k(x)\big)$ для всех $x \in \omega$.

Доказательство. Пусть π_k – нумерация семейства $\mathcal{S}$, и пусть x – произвольное число. По свойству 6 $g_k(x)$ определена и по конструкции $g_k(x) = 0$ или $g_k(x) = 1$.

Пусть $g_k(x) = 0$ и t_0 – шаг, когда она впервые определилась. Докажем, что $\pi_k(x) = \alpha(0)$. От противного, пусть $\pi_k(x) = \alpha(1) = B$ (по свойству 1 других вариантов у нас нет). Так как $\{a(k,x,0), a(k,x,1)\} \subseteq \alpha^{t_0}(x)$ и $a(k,x,0) \notin \pi_k^{t_0}(x)$, то найдется шаг $t_1 > t_0$ такой, что $\forall s \geq t_1$ $(a(k,x,0) \in \pi_k^s(x))$. То есть $a(k,x,0) \in \pi_k(x)$. Тогда по конструкции (по подслучаю 3.3) $a(k,x,0)$ убирается из B на некотором шаге $t' \geq t_1$ и $a(k,x,0) \notin B$. Значит, $a(k,x,0) \in \pi_k(x) \setminus B$. Это противоречит тому, что $\pi_k(x) = \alpha(1) = B$.

А теперь пусть $g_k(x) = 1$ и t_0 – шаг, когда она впервые определилась. Докажем, что $\pi_k(x) = \alpha(1)$. От противного, пусть $\pi_k(x) = \alpha(0) = A$ (по свойству 1 других вариантов у нас нет). Мы имеем $a(k,x,1) \in \pi_k^{t_0}(x)$ и это первое колебание элемента $a(k,x,1)$ в $\pi_k(x)$. Так как $a(k,x,1) \notin A$, то $a(k,x,1) \notin \pi_k^{t_1}(x)$ для некоторого шага $t_1 > t_0$. Но в этом случае по конструкции (по подслучаю 3.1) $a(k,x,1)$ перечислится в A и если $\forall s \geq t_1 \big(a(k,x,1) \notin \pi_k^s(x)\big)$, то $a(k,x,1) \in A \setminus \pi_k(x)$. Это противоречит тому, что $\pi_k(x) = \alpha(0) = A$. А если $a(k,x,1) \in \pi_k^{t_2}(x)$ для некоторого шага $t_2 > t_1$ (напомним, что это уже третья последняя колебания элемента $a(k,x,1)$ в π_k), то по конструкции (по подслучаю 3.2) $a(k,x,1)$ убирается из A. Тогда $a(k,x,1) \in \pi_k(x) \setminus A$. Это противоречит тому, что $\pi_k(x) = \alpha(0) = A$.

8. $\big|\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})\big| = \big|\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})\big| = 1$

Доказательство. Построенная нумерация α является разрешимой. По 2 свойству она Σ_2^{-1}-вычислима. По 7 свойству все Σ_3^{-1}-вычислимые нумерации семейства $\mathcal{S} = \{A, B\}$ сводятся к разрешимой Σ_2^{-1}-нумерации этого семейства. Это значит, что полурешетка $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ одноэлементна. Так как полурешетка $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ одноэлементна, то $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ так же одноэлементна. Если бы $\big|\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})\big| > 1$, тогда $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ была бы так же не одноэлементна, так как полурешетка $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ сохраняет все нумерации из $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$.

Следствие 2. *Существует бесконечное множество различных двухэлементных семейств, таких как в теореме 2.*

Следствие 2 доказывается так же, как следствие 1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гончаров С.С., Сорби А. Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика – 1997. Т. 36 – №6. – С. 621-641.

[2] Badaev S.A., Goncharov S.S. Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications – 2000. P. Cholack (ed.) et al. (Contemp. Math. – Т. 257), Providence, RI, Am. Math. Soc., – С. 23-38.

[3] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov // Goncharov, S.S. (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005). – 2006. NJ, World Scientific. – С. 17-30.

[4] Ash C.J., Knight J.F. Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy, (Stud. Logic Found. Math., – Т. 144), Amsterdam etc., Elsevier Sci. B.V.,– 2000. – 346 p.

[5] Ершов Ю.Л. Об одной иерархии множеств I // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7, – №1. – С. 47-74.

[6] Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

REFERENCES

[1] Goncharov S.S., Sorbi A. Obobchenno vicheslimie numerasii I netrivialnie polurechetki Rodgersa. Algebra i Logika. 1997. **36**, №6. s. 621-641. (in Russ.)

[2] Badaev S.A., Goncharov S.S. Theory of numberings: open problems. Computability theory and its applications. 2000. P. Cholack (ed.) et al. (Contemp. Math. **257**), Providence, RI, Am. Math. Soc., p. 23-38. (in Eng.)

[3] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov. Goncharov, S.S. (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005). 2006. NJ, World Scientific. p. 17-30. (in Eng.)

[4] Ash C.J., Knight J.F. Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy, (Stud. Logic Found. Math., **144**), Amsterdam etc., Elsevier Sci. B.V. 2000. 346 p. (in Eng)

[5] Ershov Ju.L. Ob odnoi ierarhii mnozhestv I. Algebra i logika. 1968. **7**, №1. s. 47-74. (in Russ.)

[6] Ershov Ju.L. Teoria numerasii. M.: Nauka, 1977. 416 s. (in Russ.)

Р.С. ЖИЫНДАР АЙЫРЫМДАРЫНАН ТҰРАТЫН ЕКІ ЭЛЕМЕНТТІ ҮЙІРДІҢ РОДЖЕРС ЖАРТЫТОРЛАРЫ ТУРАЛЫ

Б.С. Калмурзаев

. Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті , Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: Роджерс жартыторы, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, позитивті нөмірлеулер, шешілімді нөмірлеулер.

Аннотация. Бұл жұмыста $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ және $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ Роджерс жартыторлары бір элементті болатындай Σ_2^{-1}-есептелімді $\mathcal{S}$ үйірдің мысалы келтірілген. Сонымен қатар $\mathcal{R}_2^{-1}(\mathcal{S})$ Роджерс жартыторы бір элементті және $\mathcal{R}_3^{-1}(\mathcal{S})$ Роджерс жартыторы бірнеше элементті болатындай Σ_2^{-1}-есептелімді $\mathcal{S}$ үйірдің мысалы келтірілген.

Поступила 17.06.2016 г.