

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 307 (2016), 163 – 167

UDC 514.753

SOLITON DEFORMATIONS OF THIRD ORDER ENNEPER'S SURFACE**D.M.Kurmanbaev**al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan
kurmanbaev.damir@gmail.com**Keywords:** Dirac operator, modified Veselov-Novikov equation, Mutard transformations, Enneper's surface, deformation of surface, inversion.**Abstract.** Modified Veselov-Novikov equation was introduced in [1]. A method for constructing exact solutions of this equation by Mutard transformations was proposed in [6] and in [5] it was obtained a geometric interpretation of Mutard transformations. In this paper it was applied this transformations for mVN equation on the example of third order Enneper's surface and constructed deformation of this surface.

УДК 514.753

СОЛИТОННАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ЭННЕПЕРА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**Д.М.Курманбаев**

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Ключевые слова: оператор Дирака, модифицированное уравнение Веселова-Новикова, преобразование Мутара, поверхность Эннепера, деформация поверхности, инверсия.**Аннотация.** Модифицированное уравнение Веселова-Новикова было введено в [1]. Метод построения точных решений этого уравнения типа преобразования Мутара был предложен в [6], в работе [5] была получена геометрическая интерпретация преобразования Мутара. В данной работе применяется преобразование Мутара для уравнения мВН на примере поверхности Эннепера третьего порядка и строится деформация данной поверхности.*1. Деформация поверхности Эннепера третьего порядка.*Пусть Σ - поверхность Эннепера третьего порядка, построенная по $\psi_1 = z^3, \psi_2 = 1$ посредством представления Вейерштрасса [2]:

$$u^1(P) = \frac{i}{2} \int_{P_0}^P \left((\psi_1^2 + \bar{\psi}_2^2) dz - (\bar{\psi}_1^2 + \psi_2^2) d\bar{z} \right) + u^1(P_0),$$

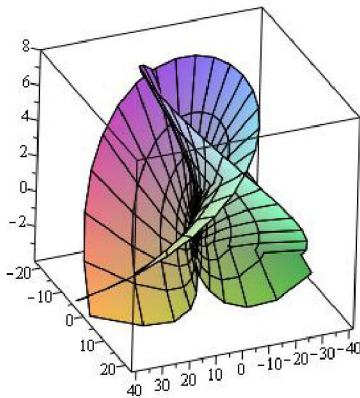
$$u^2(P) = \frac{1}{2} \int_{P_0}^P \left((\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2) dz + (\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2) d\bar{z} \right) + u^2(P_0), \quad (1)$$

$$u^3(P) = \int_{P_0}^P (\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z}) + u^3(P_0).$$

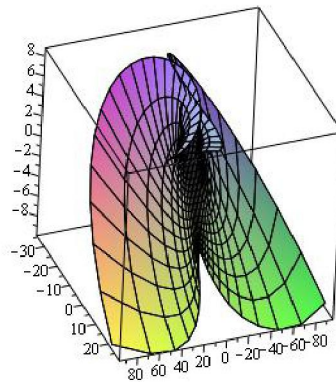
Так как голоморфные функции $\psi_1(z, \bar{z}, t) = z^3 + 6t, \psi_2(z, \bar{z}, t) = 1$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = \frac{\partial^3 \psi_2}{\partial \bar{z}^3}$$

то поверхность Σ_t , построенная по $\psi_1(z, \bar{z}, t), \psi_2(z, \bar{z}, t)$ с помощью представлений Вейерштрасса, задает солитонную деформацию поверхности Σ (рис.1).



Поверхность Эннепера 3-го порядка - Σ



Деформированная поверхность Эннепера 3-го порядка - Σ_t , при $C=0.5$.

Рисунок 1 - Деформация (изгиб) поверхности Эннепера третьего порядка на $x \in [-1, 1], y \in [-2, 2]$.

Построим по поверхностям Σ_t

$$u^1(x, y) = -y \left(x^6 - \frac{1}{7} y^6 + 36C^2 + 3x^2 y^4 - 5x^4 y^2 + 12Cx^3 + 1 \right) + 12Cxy^3,$$

$$u^2(x, y) = x \left(y^6 - \frac{1}{7} x^6 - 36C^2 + 3x^4 y^2 - 5x^2 y^4 - 3Cx^3 + 1 \right) - 3Cy^4,$$

$$u^3(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 - y^2)^2 - 2x^2 y^2 + 12Cx,$$

поверхности S_t как поверхности в пространстве мнимых кватернионов [4]:

$$S_0 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} (x^2 - y^2)^2 - 2ix^2 y^2 & s(x, y) \\ -\bar{s}(x, y) & -\frac{i}{2} (x^2 - y^2)^2 + 2ix^2 y^2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

где $s(x, y) = ix \left(\frac{x^6}{7} - y^6 - 3x^4 y^2 + 5x^2 y^4 - 1 \right) - y \left(\frac{y^6}{7} - x^6 - 3x^2 y^4 + 5x^4 y^2 - 1 \right),$

$$S_t = S_0 + 3t \begin{pmatrix} 4ix & i(x^2 - y^2)^2 + 4xy(x^2 - y^2 - ixy) \\ i(x^2 - y^2)^2 + 4xy(y^2 - x^2 - ixy) & -4ix \end{pmatrix} +$$

$$+36t^2 \begin{pmatrix} 0 & ix+y \\ ix-y & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В свою очередь, поверхность S_t является солитонной деформацией поверхности Эннепера третьего порядка - S_0 по формуле (2) в той же пространстве. Для инверсированной поверхности S_t^{-1} отвечает потенциал \tilde{U} - как решение следующего модифицированного уравнения Веселова-Новикова (мВН)[1]:

$$U_t = U_{zzz} + 3U_z V + \frac{3}{2} U V_z + U_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} + 3U_{\bar{z}} \bar{V} + \frac{3}{2} U \bar{V}_{\bar{z}} \quad (4)$$

с условием для потенциала $V_z = (U^2)_z$.

С помощью преобразования Мутара [6] находим решения уравнения мВН \tilde{U}, \tilde{V} :

$$\tilde{U}(x, y, t) = -i \frac{|(x+iy)^3 + 6t| \bar{\alpha} - ((x-iy)^3 + 6t) \bar{\beta} + ((x+iy)^3 + 6t) \beta + \alpha}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}, \quad (5)$$

$$\tilde{V} = A^2 + 2(A\bar{B} - i\bar{C}\tilde{U}) \quad (6)$$

где

$$\alpha(x, y, t) = \frac{i}{2}(x^2 - y^2)^2 - 2ix^2y^2 + 12ixt, \beta(x, y, t) = s(x, y) + 3i(x^2 - y^2)^2t + 12xy(x^2 - y^2 - ixy)t + 36(ix+y)t^2,$$

$$A = -i \frac{((x+iy)^3 + 6t)(\bar{\alpha} - \alpha) - \bar{\beta} - ((x+iy)^3 + 6t)^2 \beta}{|\alpha|^2 + |\beta|^2},$$

$$B = -i \frac{3(x-iy)^2((x+iy)^3 + 6t)t}{|(x+iy)^3 + 6t|^2 + 1},$$

$$C = -i \frac{3(x-iy)^2}{|(x+iy)^3 + 6t|^2 + 1}.$$

2. Инверсия поверхности Эннепера третьего порядка.

Инверсия

$$x \rightarrow -\frac{x}{|x|^2},$$

переводит поверхности S_t определенный по (3), (который проходит через точку $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$ с нулевым потенциалом) в поверхности S_t^{-1} , в некоторый момент времени $t=C$ (в точке $x=y=0$ с производными потенциала \tilde{U}).

Частные производные потенциала \tilde{U} являются представлениями инверсированной поверхности S_t^{-1} , так как сам потенциал не имеет особенности в точке $x=t=0$:

$$\tilde{U} = -\frac{42y^2(y^6 + 7)}{4y^{12} - 7y^6 + 196}$$

следовательно, потенциал становится регулярным в точке $x=y=0$ с произвольным t . Но производная этого потенциала имеет особенность в точке $x=y=0$, так как поверхность Σ с образами начальных точек в $u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$ будет изгибаться в этой точке и на рис.1 можно

заметить динамику от изгиба $\Sigma_\varepsilon : u_1^0 = u_2^0 = u_3^0 = 0$ при малых $t = \varepsilon = 0.5$ до возникновения перегиба Σ_t поверхности Σ .

Кроме того, имеются следующие конечные пределы производных потенциала \tilde{U} :

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{U}(x, y, 0) = -9 \cos 2\varphi + 9 \cos 4\varphi - 3 \cos 6\varphi,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \text{const}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tilde{U}(x, y, 0) = 9 \cos 2\varphi + 9 \cos 4\varphi + 3 \cos 6\varphi,$$

откуда

$$\lim_{r \rightarrow 0, \varphi = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}} \Delta \tilde{U}(r, \varphi) = 0,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Из последнего равенства получаем, что для деформируемой поверхности

$$S_t = \{S_0(P) + S_1(P)t + S_2(P)t^2, P \in S\},$$

ее инверсия S_t^{-1} , в некоторый момент времени $t = C$ имеет следующий вид:

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \Delta S_t^{-1} = 0.$$

Здесь инверсированная минимальная поверхность в окрестности точки P_0 , показывает солитонную деформацию как "деформацию мембраны" с приложениями в физике. В общем случае это нелинейная деформация, которая описывается глобально (рис.2).

В зависимости от выбора начальных точек поверхности и параметра t , определяются слабая солитонная деформация (в точке изгиба) и гладкая деформация (в точке перегиба) потенциала представления инверсированной поверхности Эннепера третьего порядка. И этот потенциал становится регулярной, если выбрать начальные точки в $u_1^0 = a, u_2^0 = b, u_3^0 = c$ и произвольные t для гладкой деформаций уже движущейся поверхности Эннепера третьего порядка $\Sigma_t : u^1 \rightarrow u^1 - t, u^2 \rightarrow u^2 - t, u^3 \rightarrow u^3 - t$.

3. Основной результат.

Теорема.

1) Потенциалы \tilde{U}, \tilde{V} удовлетворяют уравнения мВН (4) и производная потенциала \tilde{U} имеет особенность в точке $x = y = t = 0$;

2) Солитонная деформация описывается следующим образом:
в начальный момент времени поверхность Σ_ε в точке $x = y = t = 0$ будет изгибаться для любого $\varepsilon > 0$, а слабая деформация потенциала представления инверсированной поверхности Эннепера третьего порядка S_t^{-1} имеет следующий вид:

$$\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \Delta S_t^{-1} = 0,$$

и в некоторый момент времени $t = C$, поверхность Σ_C^{-1} продолжается гладкой деформацией движущейся поверхности Эннепера третьего порядка Σ_t , для произвольной t .

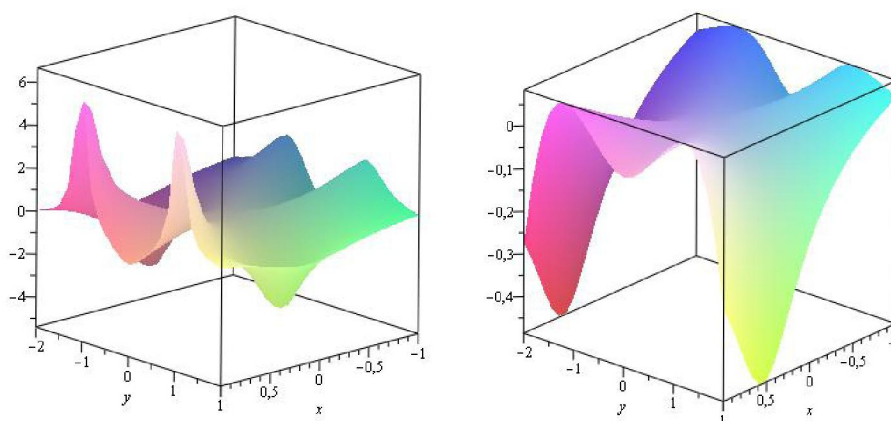


Рисунок 2 - Слабая солитонная и гладкая деформация потенциала представления инверсированной поверхности Эннепера третьего порядка Σ_t^{-1} на $x \in [-1, 1], y \in [-2, 2], t \in [10^{-1}, 0.5]$ и $x \in [-1, 1], y \in [-2, 2], t \in [1, 10]$ соответственно

Автор выражает благодарность академику РАН И.А.Тайманову за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Bogdanov L.V. "Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation". Theor. Math. Phys. 70,1987,309-314.
- [2] I. A. Taimanov "Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces". Russian Math. Surveys 61 2006, no. 1, 79-159.
- [3] Konopelchenko B.G. "Induced surfaces and their integrable dynamics", Stud. Appl. Math.,96:1,1996, 9-51.
- [4] И.А.Тайманов "Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселов-Новикова и минимальные поверхности". Теоретическая и математическая физика. 2015, Т. 182, N. 2. С. 213-222.
- [5] И.А.Тайманов "Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса". Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 1, С. 129-141.
- [6] Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang "Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation". J. of Physics A 35 ,2001, 3779-3785.

REFERENCES

- [1] Bogdanov L.V. "Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation". Theor. Math. Phys. 70,1987,309-314.
- [2] I. A. Taimanov "Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces". Russian Math. Surveys 61 2006, no. 1, 79-159.
- [3] Konopelchenko B.G. "Induced surfaces and their integrable dynamics", Stud. Appl. Math.,96:1,1996, 9-51.
- [4] I.A.Taimanov "Blowing up solutions of the modified Novikov-Vesekov equation and minimal surfaces" . Theor. Math. Phys. 2015, V182, N. 2. p. 213-222.
- [5] И.А.Тайманов "The Moutard transformations of two-dimensional Dirac operators and Mebius geometry". Mat.Zametki. 2015. V. 97, Issue 1, p. 129-141.
- [6] Delong Yu, Q.P. Liu, and Shikun Wang "Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation". J. of Physics A 35 ,2001, 3779-3785.

ҮШІНШІ РЕТТІ ЭННЕПЕР БЕТІНІҢ СОЛИТОНДЫ ДЕФОРМАЦИЯСЫ

Д.М. Құрманбаев

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

Түйін сөздер: Дирак операторы, модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуі, Мутар түрлендіруі, Эннепер беті, беттің деформациясы, инверсия.

Аннотация. Модификацияланған Веселов-Новиков теңдеуі [1] мақалада енгізілген. Бұл теңдеудің дәл шешімін Мутар түрлендіруінің көмегімен табу әдісі [6] енгізілген, ал осы түрлендірудің геометриялық интерпретациясы [5] алынған. Бұл мақалада үшінші ретті Эннепер бетінің мысалы арқылы мВН теңдеуіне Мутар түрлендіруі қолданылады және аталған беттің деформациясы құрастырылады.

Поступила 17.06.2016 г.