

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 307 (2016), 173 – 183

NUMERICAL STUDY OF THE FORMATION OF THE PLASTIC ZONE AND STRESS WAVE DISCHARGE IN A ROD OF FINITE LENGTH BY GRID-CHARACTERISTIC METHOD**Sh. M. Mamayev, R.N. Danyarbek**(Taraz Innovative Humanitarian University, Taraz, Kazakhstan)
sch_mamaev@mail.ru**Keywords:** elastic plastic waves, unloading wave, residual deformation, characterization, differential relations, difference equations**Abstract.** The influence of the nature of dynamic loading on the formation of the plastic zone and wave discharge in a rod of finite length is numerically investigated in the paper. The numerical solution of the problem is obtained by grid-characteristic method. It has been shown that a decrease in the rate of decrease of the external load the area of plastic deformation expands and the level of permanent deformation increases, and with the increase in the rate of increase of external load area of plastic deformation is converted into a narrow border region at rigidly fixed end. By load reduction rate increase the nature of the spread of the unloading wave changes.

ӘОЖ 539.374+519.67

ҰЗЫНДЫҒЫ ШЕКТЕЛГЕН СТЕРЖЕНЬДЕ ПЛАСТИКАЛЫҚ ОБЛЫСТЫҢ ЖӘНЕ КЕРНЕУДІ ЖЕҢІЛДЕТУ ТОЛҚЫНДАРЫНЫҢ ҚҰРЫЛУЫН ТОРЛЫҚ-ХАРАКТЕРИСТИКА ӘДІСІМЕН ЗЕРТТЕУ**Ш.М. Мамаев, Р.Н. Даниярбек**

(Тараз инновациялық-гуманитарлық университеті, Тараз, Қазақстан)

Түйін сөздер: серпімді-пластикалық толқындар, жеңілдету толқындары, қалдық деформация, характеристика, дифференциалдық байланыстар, айырымдық теңдеулер.**Аннотация.** Жұмыста ұзындығы шектелген стерженьде пластикалық облыстың және кернеуді жеңілдету толқынының құрылымына динамикалық жүктеудің түрінің әсері сандық зерттеледі. Есептің сандық шешімі торлық-характеристика әдісімен алынған. Сыртқы жүктеменің кему жылдамдығының азаюынан пластикалық деформацияланған облыс кеңейеді, қалдық деформацияның деңгейі өседі, ал сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығының көбеюінен пластикалық деформация облысы стерженьнің қатты бекітілген ұшының маңында тар шекаралық облысқа айналады. Сыртқы жүктеменің кему жылдамдығының өсуінен кернеуді жеңілдету толқынының таралуы өзгереді.

Нақты механикалық процестерде сыртқы динамикалық екпінді жүктемені тиеу және алу жылдамдықтары бір айқын аралықтарда өзгеруі мүмкін. Белсенді жүктеу және жеңілдету облыстарында осьтік кернеу және деформацияның арасындағы байланыстары бір-бірінен өзгеше болғандықтан, сыртқы динамикалық жүктеу жылдамдығының пластикалық облыстың және кернеуді жеңілдету толқынының құрылымына әсерін зерттеу ғылыми маңызы бар және практикалық қызығушылық танытатын мәселе болады. Зерттеліп отырған процесте белсенді жүктеу облысын жеңілдету облысынан бөлетін кейбір жылжымалы шекаралық бет бар. Бұл белгісіз жылжымалы шекаралық беттің құрылуы және жылжуы, жүктеу шарты және шекаралық шарты берілген есепті, екі түрлі квазисызықты және сызықты гиперболалық теңдеулер жүйесін белсенді жүктеу және жеңілдету облысында шешу кезінде анықталады. Серпімді-пластикалық

жүктеу толқыны және кернеуді жеңілдету толқындарының таралу есебінің шешімін кейбір жеке жағдайларда ғана жүктеу заңы және $\sigma \sim \varepsilon$ диаграммасының түріне байланысты аналитикалық әдістермен шешуге болады. Сондықтан көп жағдайларда бұндай есептердің шешімдері ақырлы-айырымдық әдістермен алынады. Бұл есептің кейбір жеке жағдайларда характеристикалық әдіспен және графаналитикалық әдіспен алынған аналитикалық шешімдері Шапиро-Бидерманның [1] монографиясында берілген. Бұл әдістердің ары қарай дамуы [2] монографияда берілген. [3] ыдырау-үзіліс әдісімен серпімді-пластикалық толқындардың жартылай шектелген стерженьде таралу есебінің сандық шешімі алынған, жеңілдету толқыны тұрғызылған, шектелген стерженьнің қатты бөгетке соғылу есебінің сандық шешімі алынған, тұтқырлықтың кернеу толқындарының таралуына әсері зерттелген. [4] жартылай шектелген серпімді-пластикалық стерженьнің динамикалық деформациялануы туралы есебі үшін жеңілдету толқыны туралы есептің екі түрлі шешу әдісі ұсынылған, бұның әрқайсысында ізделініп отырған теңдеу алгебралық көпмүшелікпен аппроксимацияланып шекаралық шарттары берілген классикалық емес дифференциалдық есеп шешіледі. Деформациялау жылдамдығына сезімтал денелерге ұсынылған анықтаушы байланысты [5] пайдаланып, [6] деформациялау жылдамдығының жартылай шектелген стерженьде серпімді-тұтқыр-пластикалық толқындардың таралуына әсері зерттелген.

Бұл жұмыста ұзындығы шектелген стерженьнің қатты бекітілген ұшынан шағылысқан толқынның әсерінен, серпімді-пластикалық жүктеу және кернеуді жеңілдету толқындарының таралуының кейбір ерекшеліктері сандық зерттеледі. Зерттеліп отырған өзгешелік сыртқы жүктеменің өзгеру сипатымен байланысты. Сыртқы жүктемені тиеу жылдамдығы және алу жылдамдығына байланысты стерженнің қатты бекітілген ұшының маңайында келесі кезеңде жеңілдетілетін пластикалық деформацияланған кең облыс құрылады, ал жүктеу жылдамдығы жоғарырақ болғанда пластикалық облыс тар шекаралық облысқа айналады. Бұл басқарылатын пластикалық деформацияланған облыс металдардың бетін өңдеуде кең техникалық қолданыс табуы мүмкін.

Негізгі теңдеулер жүйесі. Жазық бойлық толқындардың жінішке стерженьде таралуы осьтік кернеу $\sigma(x, t)$, кішкентай бөлшектердің жылдамдығы $v(x, t)$ және осьтік деформация $\varepsilon(x, t)$ арқылы бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесімен жазылады

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = F(\sigma, \xi, \chi). \end{cases} \quad (1)$$

Мұнда E - серпімділік модулі, ρ - материалдың тығыздығы, ξ - деформация жылдамдығы, χ - жиналған пластикалық деформация, ал соңғы теңдеудің оң жағы тұтқырлық әсері жоқ болған жағдайда пластикалық деформацияны көрсетеді

$$F(\sigma, \xi, \chi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \sigma \leq \sigma_s(\xi, \chi), \\ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t} & \text{при } \sigma > \sigma_s(\xi, \chi), \end{cases} \quad (2)$$

$E_k = d\sigma/d\varepsilon$ – деформациялау қисығының ($\sigma \sim \varepsilon$) жанама модулі.

Өлшемсіз айнымалы шамаларды енгіземіз

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{t} = \frac{tc}{l}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_s^c}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s^c}, \quad \bar{v} = \frac{v}{c\varepsilon_s^c}, \quad (3)$$

мұнда $c = (E/\rho)^{0.5}$ серпімді толқынның таралу жылдамдығы, $\sigma_s^c, \varepsilon_s^c$ – статикалық деформациялау қисығындағы серпімділік шегіне сәйкес кернеу және деформация, l – стерженнің ұзындығы. Өлшемсіз айнымалы шамалар бойынша (1) -ші теңдеулер жүйесін векторлық түрде былай жазуға болады

$$\bar{U}_{,t} + A\bar{U}_{,x} + \bar{B} = 0. \quad (4)$$

Мұнда \bar{U} - ізделінді айнымалылардың векторы, \bar{B} - шешімге \bar{U} байланысты теңдеудің оң жағының векторы, A - теңдеулер жүйесінің коэффициенттерінің матрицасы, индекстің алдындағы үтір сол айнымалы бойынша туындыны көрсетеді

$$\bar{U} = \{v, \varepsilon, \sigma\}^T, \bar{B} = \{0, 0, F\}^T, A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad (5)$$

T – транспонирлеу белгісі. (4)-ші векторлық теңдеу, сызықтық емес мүшесі \bar{B} ізделінді айнымалылардың σ, ε, ξ функциясы болатын, жартылай сызықты бірінші ретті дербес туындылы теңдеулерге жатады. Бұл теңдеулердің жалпы теориясы [7, 8] баяндалған.

Характеристикалық бағыттарды анықтайтын A матрицасының меншікті сандары λ_i характеристикалық теңдеуден анықталады

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1 \quad (6)$$

мұнда I – бірлік матрица. A матрицасының меншікті мәндері нақты сандар және әртүрлі болғандықтан (4)-ші теңдеулер жүйесі гиперболалық типке жатады [7, 8]. Бұл теңдеулер жүйесінің үш үйір нақты характеристикалары болады

$$\frac{dx}{dt} = 0, \frac{dx}{dt} = -1, \frac{dx}{dt} = 1. \quad (7)$$

Әрбір нүкте арқылы үш характеристикалық бағытқа сәйкес, үш характеристика өтеді (1-сурет). Теңдеулер жүйесін характеристикалық түрге келтіру үшін A матрицасының сол векторларын табамыз

$$\bar{l}^{(i)} A = \lambda_i \bar{l}^{(i)} \quad (8)$$

(8)-ші теңдеуді шешіп үш меншікті мәндер λ үшін, меншікті векторларды табамыз

$$\bar{l}^{(1)} = (0, -1, 1), \bar{l}^{(2)} = (1, 0, 1), \bar{l}^{(3)} = (-1, 0, 1). \quad (9)$$

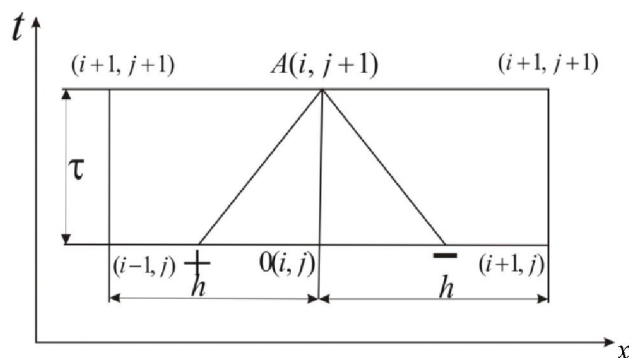
Векторлық теңдеуді (4) сол меншікті векторларына көбейтіп, теңдеулер жүйесін характеристикалық түрге келтіріп, характеристикалардың бойындағы дифференциалдық қатынастарды аламыз

$$dx=0, d\varepsilon - d\sigma = F(\sigma, \xi, \chi) dt, \quad (10)$$

$$dx=-dt, d\sigma + dv = -F(\sigma, \xi, \chi) dt, \quad (11)$$

$$dx=dt, d\sigma - dv = -F(\sigma, \xi, \chi) dt. \quad (12)$$

Сонымен характеристика әдісін қолданып бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін характеристикалардың бойымен оған эквивалентті жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесімен (10-12) алмастыруға болады, яғни (4)-ші теңдеулер жүйесін интегралдауды (10-12) теңдеулерді характеристикалық сызықтың (7) бойымен интегралдауға алмастыруға болады.



1-сурет

Шешуші теңдеулердің шектеулі-айырымдық түрі. (10-12) дифференциалдық қатынастарды характеристикалардың бойымен интегралдап, қарастырылып отырған уақыт қабатында $(j+1)$ белгісіз айнымалы шамаларды σ , ε , ν анықтау үшін, олардың алдыңғы уақыт қабатындағы j белгілі мәндері бойынша шектеулі-айырымдық теңдеулер жүйесін алуға болады

$$\begin{cases} (\sigma - \nu)_i^{j+1} - (\sigma - \nu)_+^j = -\frac{\tau}{2}(F_i^{j+1} + F_+^j), \\ (\sigma + \nu)_i^{j+1} - (\sigma + \nu)_-^j = -\frac{\tau}{2}(F_i^{j+1} + F_-^j), \\ (\varepsilon - \sigma)_i^{j+1} - (\varepsilon - \sigma)_i^j = \frac{\tau}{2}(F_i^{j+1} + F_i^j). \end{cases} \quad (13)$$

Мұнда “+” және “-” белгілері жоғарғы уақыт қабатының зерттеліп отырған нүктесінен $A(i, j+1)$ жүргізілген характеристикалардың төменгі уақыт қабатымен қиылысу нүктелерін (шаблонның түйіндік емес нүктесі) көрсетеді. σ_{\pm}^j , ν_{\pm}^j , F_{\pm}^j шамалары осы функциялардың характеристикалардың төменгі уақыт қабатымен қиылысу нүктелеріндегі мәндері (1-ші суретті қара).

σ_{\pm}^j , ν_{\pm}^j , F_{\pm}^j шамаларының шаблонның түйіндік емес нүктелеріндегі мәнін есептеу үшін функцияның мәнін олардың тордың түйіндік нүктелеріндегі мәндері арқылы интерполяциялаймыз. Сонда, уақыт бойынша бір қадамда енетін қателік σ , ν бойынша үшінші және одан жоғары ретті дәлдікпен және F бойынша қателік екінші ретті дәлдіктен төмен емес болса, онда ізделініп отырған шамалар бойынша екінші ретті дәлдікпен есептеу жүргізуді қамтамасыз етуге болады. σ_{\pm}^j , ν_{\pm}^j шамаларын есептеу үшін квадраттық интерполяциялау, ал F_{\pm}^j шамасын есептеу үшін сызықтық интерполяциялау формулаларын пайдалану керек. Сызықтық интерполяциялауда мына формула қолданылады

$$R_{i\pm}^j = R_i^j - \frac{c\tau}{h}(R_i^j - R_{i\mp 1}^j) + o(\tau^2). \quad (14)$$

Шаблонның ішкі нүктелерінде квадраттық интерполяциялау үшін есептеу басы орталық нүктеде болатын Лагранж формуласы [9] қолданылды

$$R_{i\pm}^j = \frac{c\tau(c\tau \pm h)}{2h^2} R_{i-1}^j - \frac{c^2\tau^2 - h^2}{h^2} R_i^j + \frac{c\tau(c\tau \mp h)}{2h^2} R_{i+1}^j + O(\tau^3). \quad (15)$$

Шекаралық нүктелерде квадраттық интерполяциялау үшін есептеу басы шекараға сәйкес шеткі нүктеде болатын Лагранж формуласы қолданылды

$$R_{i\pm}^j = \frac{(c\tau - h)(c\tau - 2h)}{2h^2} R_i^j - \frac{c\tau(c\tau - 2h)}{h^2} R_{i\mp 1}^j + \frac{c\tau(c\tau - h)}{2h^2} R_{i\pm 2}^j + O(\tau^3). \quad (16)$$

Сонымен ізделініп отырған функцияның түйіндік нүктедегі $(i, j+1)$ мәнін есептеу үшін айнымалының алдыңғы уақыт қабатындағы түйіндік нүктелердегі $(i-1, j)$, (i, j) , $(i+1, j)$ белгілі мәндері қолданылды. Көрсетілген нүктелер жиынтығы төрт нүктеден тұратын шаблон құрайды.

Көрсетілген есептеу алгоритмі айқын шектік-айырымдық схемаға жатады, ол мына шарт $c\tau/h \leq 1$ орындалғанда орнықты болады [10].

Есептеу схемасы. Ішкі нүктелерді есептеу. Ішкі нүктелерде белгісіз шамалар $\sigma_i^{j+1}, \varepsilon_i^{j+1}, v_i^{j+1}$ сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесінен (13) анықталады

$$\begin{cases} \sigma_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[(\sigma - v)_+^j + (\sigma + v)_-^j - \frac{\tau}{2} (2F_i^{j+1} + F_+^j + F_-^j) \right], \\ v_i^{j+1} = \frac{1}{2} \left[(\sigma + v)_-^j - (\sigma - v)_+^j - \frac{\tau}{2} (F_-^j - F_+^j) \right], \\ \varepsilon_i^{j+1} = \sigma_i^{j+1} + (\varepsilon - \sigma)_i^j + \frac{\tau}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j). \end{cases} \quad (17)$$

Шекаралық нүктелерді есептеу. Әдетте шекарада кернеу σ немесе кішкентай бөлшектердің жылдамдығы v беріледі. Шекаралық шарттарды жалпы түрде былай жазуға болады

$$x = 0, \quad A_1 \cdot \sigma(0, t) + B_1 \cdot v(0, t) = Q_1(t), \quad (18)$$

$$x = L, \quad A_2 \cdot \sigma(L, t) + B_2 \cdot v(L, t) = Q_2(t). \quad (19)$$

мұнда A_1, B_1, A_2, B_2 – кейбір тұрақтылар. A_i, B_i – тұрақтыларының белгілі бір мәндеріне байланысты әр түрлі шекаралық шарттарды жазуға болады.

Шекаралық нүктелерде характеристикалардың біреуі қарастырылып отырған облыстың шекарасынан шығып қалады. Осыған байланысты (13) теңдеулер жүйесінде осы характеристикаға сәйкес теңдеуді қолдануға болмайды. Егер қалған екі теңдеуге (18) немесе (19) шекаралық шарттардың біреуін қоссақ, онда ізделініп отырған шамаларға σ, ε, v байланысты шекаралық нүктеде жабық теңдеулер жүйесін аламыз.

Есептің қойылымы. Ұзындығы шектеулі l стерженьде жазық бойлық серпімді-пластикалық толқынның таралуы зерттеледі. Стерженнің ұшында $x=0$ стационар емес жүктеме әсер етеді

$$\sigma(0, t) = f(t) \quad \text{егер } x = 0, \quad (20)$$

ал стерженнің басқа ұшы $x=l$ қатты бекітілген

$$v(l, t) = 0 \quad \text{егер } x = l. \quad (21)$$

Стержень алғашқы уақыт кезеңінде тыныштық күйінде болады

$$\sigma(x, 0) = v(x, 0) = \varepsilon(x, 0) = 0 \quad \text{егер } t=0 \text{ и } 0 \leq x \leq l. \quad (22)$$

$t > 0$ болғанда бастапқы қимадан $x=0$ серпімді толқынның жылдамдығымен кернеу тарала бастайды. Толқынның таралу бағытының алдыңғы фронтында стерженнің нүктелері тыныштық күйде болады, яғни

$$\sigma(x, t) = v(x, t) = \varepsilon(x, t) = 0 \quad \text{егер } x \geq t \quad (23)$$

Сыртқы динамикалық жүктеме $f(t)$ алдымен t_0 уақыт кезеңіне дейін сызықты өседі, одан кейін нольге дейін сызықты кемиді, яғни

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{нпу } t \leq t_0, \\ At_0 - B(t - t_0) & \text{нпу } t_0 < t \leq t_1, \\ 0 & \text{нпу } t > t_1. \end{cases} \quad (24)$$

Мұнда A, B – сыртқы жүктеменің өсу және кему жылдамдықтарын сипаттайтын тұрақтылар, t_0 – сыртқы жүктеменің максимум мәнін қабылдайтын уақыты, t_1 – сыртқы жүктеменің әсер ету уақыты. Есепті шешу шекаралық шарттарды (20, 21, 23) және бастапқы шартты (22) қанағаттандыратын (4) теңдеулер жүйесін интегралдауға келеді.

Есеп келесі берілгендер бойынша шешілді: $h = \tau = 0.015$, $l = 100h$, $A = 3$, $B = 2$, $t_0 = 20\tau = 0.3$, $t_1 = 50\tau = 0.75$. Мұнда h , τ – координата және уақыт бойынша қадамдар, l – стерженнің ұзындығы, $\sigma_s = \varepsilon_s = l$ – кернеу және деформация бойынша серпімділік шектері. $f(t_0) = 0.9$ – сыртқы жүктеменің максимал мәні. Сыртқы жүктеменің максимал мәні толқын стерженнің қатты бекітілген ұшынан шағылысқанда ғана, пластикалық деформацияланған облыс құрылатындай етіп алынды. Стерженнің материалының сызықтық емес қасиеті кестелік түрде экспериментальды деформациялау қисығымен берілді (кесте 1). Материалдың серпімділік модулі $E = 200 \text{ ГПа}$, тығыздығы $\rho = 7.9511 \cdot 10^{-10} \text{ кгсек}^2/\text{мм}^4$.

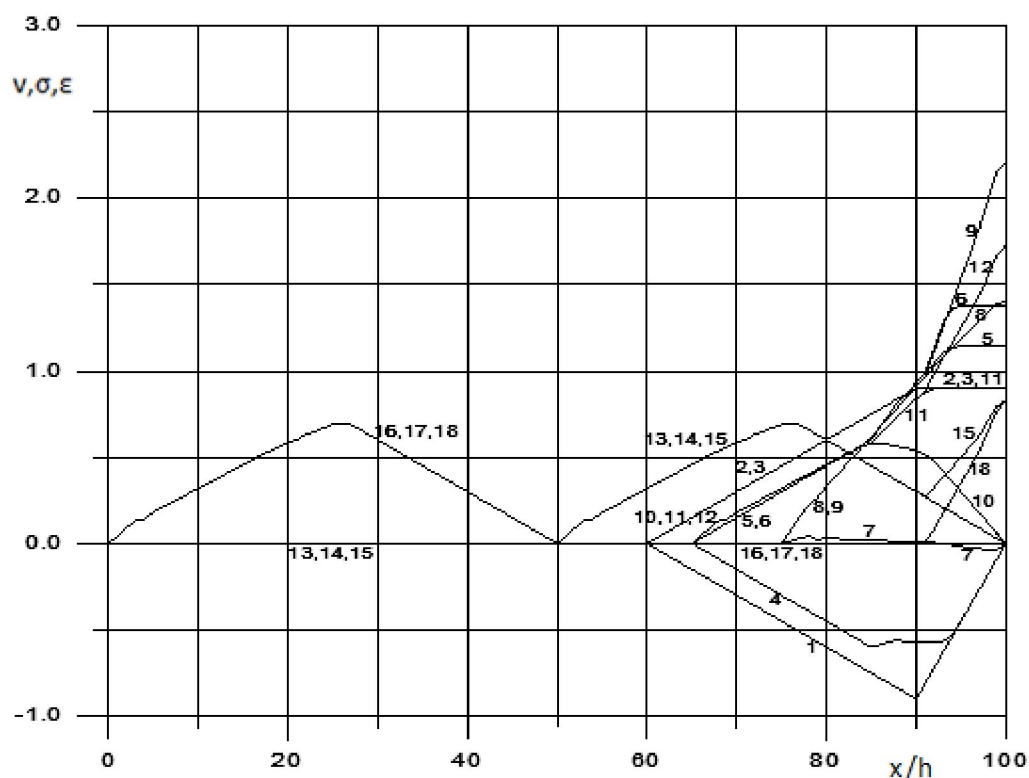
Сандық нәтижелерді талдау. 2-суретте кішкентай бөлшектердің жылдамдығының v (қисықтар $1+3k$; $k=0,1,2,3,4,5$), кернеудің σ ($2+3k$), деформацияның ε ($3+3k$) жеке белгіленген уақыт кезеңдеріндегі $t = \text{const}$: $t=110\tau$ ($k=0$), $t=115\tau$ ($k=1$), $t=125\tau$ ($k=2$), $t=135\tau$ ($k=3$), $t=150\tau$ ($k=4$), $t=200\tau$ ($k=5$) стерженнің ұзындығы бойынша өзгеруі көрсетілген.

Кесте 1 – Экспериментальдық байланыс кернеу-деформация

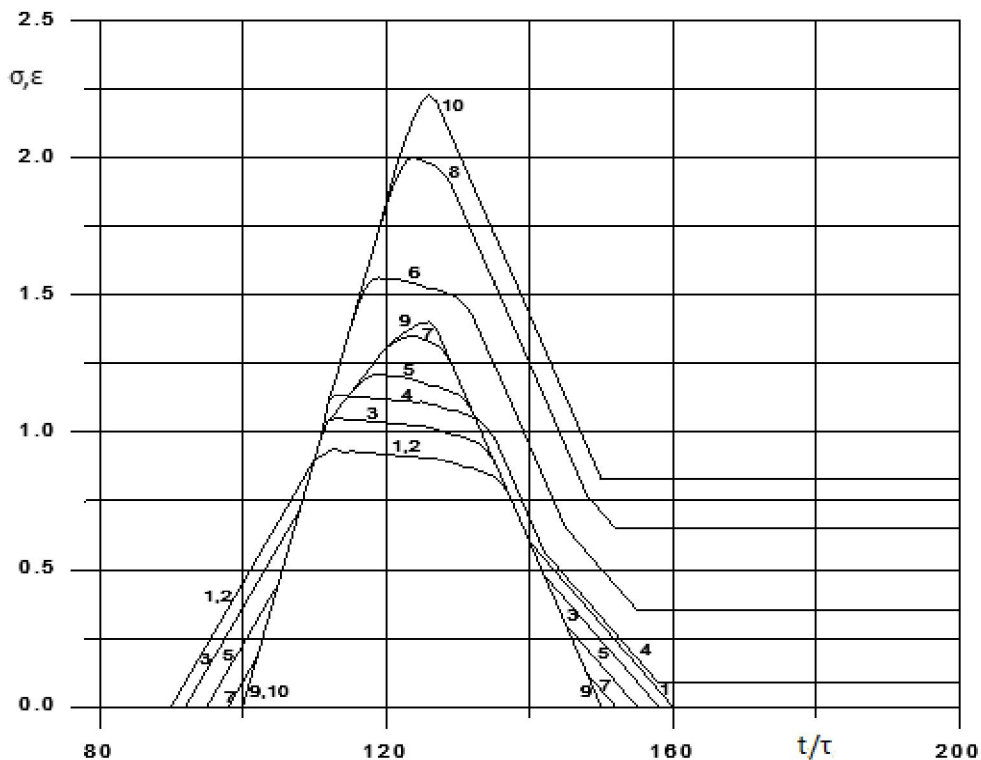
| $\varepsilon_i \cdot 10^4$ | $\frac{\sigma_i \text{ МПа}}{9.8}$ | $\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$ | $\varepsilon_i \cdot 10^4$ | $\frac{\sigma_i \text{ МПа}}{9.8}$ | $\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$ |
|----------------------------|------------------------------------|---|----------------------------|------------------------------------|---|
| 0 | 0 | 0 | 19 | 26.5 | 9.8429 |
| 4 | 8.00 | 2.9714 | 20 | 27.0 | 10.0286 |
| 6 | 12.00 | 4.4572 | 21 | 27.5 | 10.2143 |
| 8 | 16.00 | 5.9429 | 22 | 28.0 | 10.4000 |
| 10 | 20.00 | 7.4286 | 24 | 28.4 | 10.5486 |
| 11 | 20.75 | 7.7072 | 26 | 28.8 | 10.6972 |
| 12 | 21.50 | 8.2643 | 28 | 29.2 | 10.8458 |
| 13 | 22.25 | 8.2643 | 30 | 29.6 | 10.9943 |
| 14 | 23.00 | 8.5429 | 32 | 30.0 | 11.1429 |
| 15 | 23.75 | 8.8215 | 46 | 32.0 | 11.8858 |
| 16 | 24.50 | 9.1000 | 72 | 34.0 | 12.6286 |
| 17 | 25.25 | 9.3786 | 133 | 36.0 | 13.3715 |
| 18 | 26.00 | 9.6572 | 3600 | 74.0 | 27.4858 |

$1+3k$ қисықтарынан кішкентай бөлшектердің жылдамдығы v , $t=100\tau$ уақыт мезгілінде стерженнің қатты бекітілген ұшына жетіп, одан шағылысып таңбасын өзгертіп, кері бағытта қозғалатынын көруге болады.

$2+3k$ және $3+3k$ қисықтарынан $t=110\tau$ ($k=0$) уақыт мезгілінде бүкіл стержень серпімді жағдайда болады. Кернеудің және деформацияның деңгейі стерженнің қатты бекітілген ұшына тақалған облыста тұрақты болады. Бұл құбылыс түсетін және қатты бекітілген ұштан шағылысқан толқындардың интерференциясынан (түйіскенде өзара әсер етуінен) болуы мүмкін. $2+3k$ және $3+3k$ қисықтарынан $k=1,2$ және 3 болғанда толқындардың қатты бекітілген ұштан шағылысқанынан кейін, стерженнің қатты бекітілген ұшқа тақалатын бөлігі $91h \leq x \leq 100h$, пластикалық деформацияланған күйде болады ($\sigma > l$, $\varepsilon > l$), ал стерженнің қалған бөлігі $0 \leq x \leq 91h$ серпімді күйінде болады. $2+3k$ және $3+3k$ қисықтарынан $k=3,4$ және 5 болғанда бұл уақыт кезеңдерінде ($t \geq 135\tau$) кернеудің және деформацияның деңгейлері төмендейді және кернеуді жеңілдету процесі басталады.



2 сурет – σ , v , ϵ шамаларының белгіленген уақыт кезеңдеріндегі $t=const$: $t=110\tau$ (1- v , 2- σ , 3- ϵ), $t=115\tau$ (4- v , 5- σ , 6- ϵ), $t=125\tau$ (7- v , 8- σ , 9- ϵ), $t=135\tau$ (10- v , 11- σ , 12- ϵ), $t=150\tau$ (13- v , 14- σ , 15- ϵ), $t=200\tau$ (16- v , 17- σ , 18- ϵ) стерженьнің ұзындығы x бойынша өзгеруі



3 сурет – σ , ϵ шамаларының стерженьнің әр түрлі қималарындағы $x=90h$ (1- σ , 2- ϵ), $x=92h$ (3- σ , 4- ϵ), $x=95h$ (5- σ , 6- ϵ), $x=98h$ (7- σ , 8- ϵ), $x=100h$ (9- σ , 10- ϵ) мәндерінің уақытқа t байланысты өзгеруі.

3-суретте кернеудің σ (қисықтар $2k-1$; $k=1,2,3,4,5$) және деформацияның ε (қисықтар $2k$; $k=1,2,3,4,5$) стерженьнің әр түрлі нүктелеріндегі: $x=90h$ ($k=1$), $x=92h$ ($k=2$), $x=95h$ ($k=3$), $x=98h$ ($k=4$), $x=100h$ ($k=5$) мәндерінің уақытықа t тәуелділіктері (осциллограмма) келтірілген. 1,2 осциллограммалардан стерженнің $x=90h$ нүктесі барлық уақытта серпімді күйде ($\sigma < 1$, $\varepsilon < 1$), болатыны көрініп тұр. Басқа нүктелер, $x=90h$ нүктесінен оңға қарай орналасқан нүктелерде кернеу және деформацияның мәндері серпімділік шегінен $\sigma_s = \varepsilon_s = 1$ жоғары ($\sigma > 1$, $\varepsilon > 1$). Сондықтан стерженнің қатты бекітілген ұшқа тақалатын бөлігі $x > 90h$, пластикалық деформацияланады. $k \geq 2$ қисықтарынан стерженнің $x > 90h$ нүктелері пластикалық күйге бір уақытта түсетіні көрініп тұр. Бұл жағдай толқынның стерженнің қатты бекітілген ұшынан шағылысуынан кейін кернеудің бұл облыста үлестірілуі біраз уақыт аралығында бір қалыпты болуына байланысты. 2-суреттегі 2-ші қисық та бұл заңдылықты растайды. $k \geq 2$ қисықтарынан кернеудің және қалдық деформацияның деңгейі стерженнің нүктелері оның қатты бекітілген ұшына жақындаған сайын жоғарылайтыны көрініп тұр.

Стерженьнің қатты бекітілген ұшының маңайында пайда болған пластикалық облыстың ұзындығының және кернеуді жеңілдету толқынының құрылу және таралу ерекшеліктерінің сыртқы жүктеменің сипаттамасына тәуелділігін анықтау үшін, сыртқы жүктеменің сегіз түрлі варианты қарастырылды

- | | |
|---|--|
| I. $A=3, B=3, t_0=20\tau, t_1=40\tau$; | II. $A=3, B=2, t_0=20\tau, t_1=50\tau$; |
| III. $A=3, B=1.5, t_0=20\tau, t_1=60\tau$; | IV. $A=3, B=1, t_0=20\tau, t_1=80\tau$; |
| V. $A=3, B=0.75, t_0=20\tau, t_1=100\tau$; | VI. $A=2, B=3, t_0=30\tau, t_1=50\tau$; |
| VII. $A=1.5, B=3, t_0=40\tau, t_1=60\tau$; | VIII. $A=1, B=3, t_0=60\tau, t_1=80\tau$. |

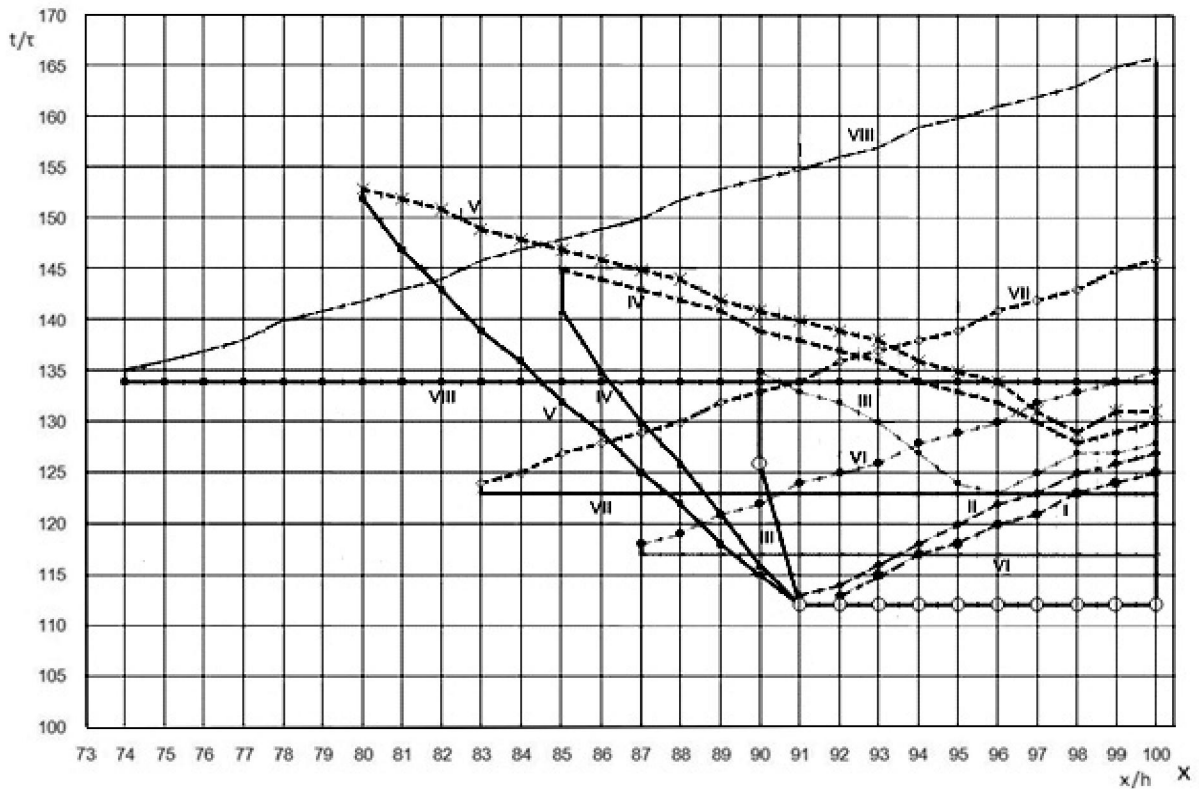
Қарастырылып отырған варианттарда сыртқы жүктеменің максимал мәні $f(t_0)=0.9$ тұрақты болып қалды, ал оның өсу және кему жылдамдықтары өзгеріп отырды, осыған сәйкес сыртқы жүктеменің әсер ету уақыты да өзгеріп отырды. I, II, III, IV, V варианттарда сыртқы жүктеменің кему жылдамдықтары өзгеріп отырды (B параметрі өзгереді, A тұрақты). I, VI, VII, VIII варианттерде сыртқы жүктеменің өсу жылдамдықтары өзгеріп отырды (A параметрі өзгереді, B тұрақты).

4-суретте толқындық қозғалыстардың көрсетілген варианттар үшін

(x, t) координаталарындағы көріністері келтірілген. Тұтас сызықтар пластикалық толқындардың алдыңғы фронтына сәйкес келеді. Үзілісті сызықтармен кернеуді жеңілдету толқындарының фронты белгіленген. Тұтас және үзілісті сызықтардың арасындағы (бірдей сандармен нөмірленген) облыс - пластикалық деформацияланған облыс болады.

I, VI, VII, VIII варианттарға сәйкес толқындық қозғалыстардың көріністерін салыстырудан көруге болады, сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығы азайғанда және кему жылдамдығы тұрақты болғанда пластикалық деформацияланған облыстың ұзындығы өседі, кеңейеді және бұл нүктелердің құрылған пластикалық облыста болу уақыты өседі. I, VI, VII және VIII қисықтарда келтірілген есептеулердің нәтижелерін талдаудан және интерполяциялаудан соққының жылдамдығына сәйкес параметрдің A мәні 4-тен жоғары болғанда қатты бекітілген ұштың маңында пластикалық облыс құрылмауы мүмкін. Сонымен сыртқы жүктеменің максимал мәні (біздің жағдайда 0.9) серпімділік шегінен төмен болғанда, пластикалық деформацияланған облыстың пайда болуы сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығына тәуелді болады.

Пластикалық толқындардың алдыңғы фронтына сәйкес I, II және III, IV, V қисықтардан, стерженнің $91h \leq x \leq 100h$ аралығында жататын нүктелерінде пластикалық деформацияланған облыс бір уақытта $t=112\tau$ құрылатыны көрінеді. III, IV, V қисықтардан $80h \leq x \leq 90h$ аралығында пластикалық деформацияланған облыс кейінірек құрылатынын байқауға болады. Жоғарыда айтылған ерекшеліктер, түсетін және қатты бекітілген ұштан шағылысқан толқындардың интерференциясынан кернеудің деңгейі өсіп серпімділік шегінен асуынан және осы облыста орналасқан нүктелер оңнан солға қарай пластикалық облысқа кіретінінен шығады.



4 сурет – Толқындық қозғалыстардың көрінісі

4-суретте жоғарыда келтірілген жүктеу варианттарына сәйкес жеңілдету толқындарының көріністері көрсетілген. *I, II, VI, VII, VIII* (үзілісті сызықтар) жеңілдету толқындарының қисықтарынан, жеңілдету толқындары пластикалық облыстың басталу нүктесінен басталып пластикалық күйде болған нүктелерді біртіндеп жеңілдетіп қатты бекітілген ұшқа дейін жететіні және стержень түгелдей серпімді деформацияланған облысқа өтетіні көрінеді. Нүктелердің қатты бекітілген ұшқа жақындауына байланысты олардың пластикалық күйде болу уақыты өседі. Жеңілдету түсетін және қатты бекітілген ұштан шағылысқан толқындардың интерференциясынан нүктедегі кернеудің деңгейі төмендей бастауынан шығады. *III, IV, V* жеңілдету толқындарының қисықтарынан жеңілдету толқындарының кейбір ерекшеліктері көрінеді. Жеңілдету толқыны пластикалық облыстың ішкі нүктелерінен басталады және уақыт өткен сайын екі жаққа қарай қозғалады. Егер сыртқы жүктеменің кему жылдамдығы жоғары болса, онда жеңілдету толқыны пластикалық толқынның алдыңғы фронтынан басталып стерженьнің қатты бекітілген ұшына қарай жақындайды. Егер сыртқы жүктеменің кему жылдамдығы аз болса, онда жеңілдету толқыны қатты бекітілген ұштың маңында басталып екі жаққа қарай тарайды, қатты бекітілген ұшқа қарай және пластикалық толқынның алдыңғы фронтын қуалап кетеді. Кернеуді жеңілдету толқынының таралу жылдамдығы пластикалық толқынның таралу жылдамдығынан жоғары, сондықтан ол кейбір уақыт аралығынан кейін пластикалық толқынның алдыңғы фронтын қуып жетеді. Сыртқы жүктеменің кему жылдамдығы және әсер ету уақытын жеңілдету толқыны стерженьнің қатты бекітілген ұшынан басталатындай етіп алуға болады.

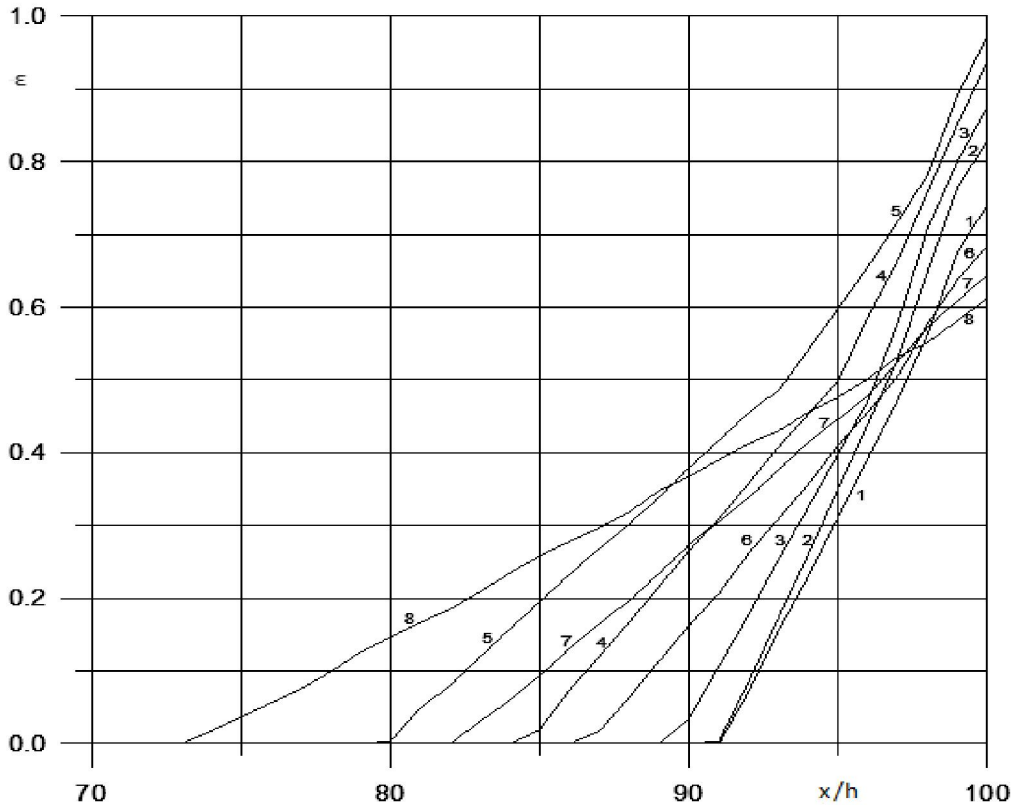
5 суретте жоғарыда қарастырылған *I – VIII* варианттар үшін қалдық деформацияның ε стерженьнің бойымен x өзгеру қисықтары келтірілген. *I, II, III, IV, V* қисықтардан сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығы тұрақты және кему жылдамдығы азайғанда пластикалық деформацияланған облыс кеңейеді, қалдық деформацияның деңгейі өседі. *I, VI, VII* және *VIII* қисықтардан сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығы жоғарылағанда және кему жылдамдығы тұрақты болғанда пластикалық деформацияланған облыс тарылады, қалдық деформацияның деңгейі өседі. Сонымен сыртқы жүктеменің өсу және кему жылдамдықтарын өзгерту арқылы

қалдық деформацияның деңгейінің және пластикалық деформацияланған облыстың өзгеруін басқаруға болады.

Тағы бір жүктеу варианты қарастырылды

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{при } t \leq t_0, \\ At_0 & \text{при } t_0 < t \leq t_1, \\ At_0 - B(t - t_1) & \text{при } t_1 < t \leq t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Қарастырылып отырған вариантта сыртқы жүктеменің максимал мәні $f(t_0)=0.9$. Сыртқы жүктеме $t=t_0=20\tau$ уақыт кезеңіне дейін сызықты өседі, одан кейін $t=t_1=30\tau$ уақыт кезеңіне дейін тұрақты болады, ал одан кейін сызықты кеміп $t=t_2=50\tau$ уақыт кезеңінде нөлге айналады. Есептеулердің нәтижесін II варианттың нәтижелерімен салыстырып, қарастырылып отырған жағдайда зерттеліп отырған нүктелерде кернеудің және қалдық деформацияның максимал мәндері олардың II вариантта алынған мәндерінен жоғары болатынын көреміз. Сәйкес нәтижелерді салыстырып кернеудің және деформацияның мәндері тұрақты болатын облыстың өсетінін көруге болады. Сонымен максимал жүктеменің әсер ету уақытының ұзақтығы қатты бекітілген ұштың маңында пластикалық деформацияланған облыстың құрылуына және деңгейінің өсуіне алып келеді.



5 сурет – Әр түрлі жүктеу варианттарында 1($t_0=20\tau, t_1=40\tau$), 2($t_0=20\tau, t_1=50\tau$), 3($t_0=20\tau, t_1=60\tau$), 4($t_0=20\tau, t_1=80\tau$), 5($t_0=20\tau, t_1=100\tau$), 6($t_0=30\tau, t_1=50\tau$), 7($t_0=40\tau, t_1=60\tau$), 8($t_0=60\tau, t_1=80\tau$) қалдық деформацияның стерженьнің бойымен өзгеруі

Қорытынды. Стерженнің қатты бекітілген ұшының маңында пластикалық облыстың құрылуына жүктеудің сипаттамасының әсері зерттелген. Зерттеу нәтижесі мынаны көрсетті:

- сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығы тұрақты және кему жылдамдығы азайғанда пластикалық деформацияланған облыс кеңейеді, қалдық деформацияның деңгейі өседі,
- сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығы жоғарылағанда, ал кему жылдамдығы тұрақты болғанда қалдық деформацияның деңгейі өседі, пластикалық облыс тар шекаралық облысқа

айналады, бұл техникалық есептерді шығарғанда металдардың бетін өндеуде кеңінен қолданылуы мүмкін,

- сыртқы жүктеменің кему жылдамдығы өскенде жеңілдету толқынының таралу сипаттамасы өзгереді.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. - М., 1961. 400с.
- [2] Рахматуллин Х.А., Жубаев Н., Ормонбеков Т. Распространение волн деформаций.- Фрунзе «Илим», 1985. 148с.
- [3] Жубаев Н.Ж., Калыц А.Л., Карымсаков К.У. и др. Численные методы исследования двухмерных волн напряжений. - Алма-Ата: Издательство «Наука», 1988. 215с.
- [4] Тарабрин Г.Т., Кострюков Г.Е. Два метода построения волны Рахматуллина // Известия вузов. Строительство.2003, №8. С. 25-32.
- [5] Мамаев Ш. Об одном варианте определяющего соотношения для материалов, чувствительных к изменению скорости деформаций // Известия НАН КР. - 2012. - №3. - С. 17-24.
- [6] Мамаев Ш., Игумнов Л.А., Каримбаев Т.Д. Влияние скорости нагружения на распространение плоской продольной упруго-вязко-пластической волны в полубесконечном стержне // Вестник Нижегородского ГУ. – 2013. - №1(3). - С.130-136.
- [7] Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830с.
- [8] Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971. – 416 с.
- [9] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
- [10] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы.-М.: Наука. 1988, 288с.

REFERENCES

- [1] Rahmatullin H.A., Dem'janov Ju.A. Prochnost' pri intensivnyh kratkovremennyh nagruzkah. - M., 1961. 400s.
- [2] Rahmatullin H.A., Zhubaev N., Ormonbekov T. Rasprostranenie voln deformatsij.- Frunze «Iim», 1985. 148s.
- [3] Zhubaev N.Zh., Kal'c A.L., Karymsakov K.U. i dr. Chislennye metody issledovaniya dvuhmernyh voln naprjazhenij. - Alma-Ata: Izdatel'stvo «Nauka», 1988. 215s.
- [4] Tarabrin G.T., Kostjukov G.E. Dva metoda postroeniya volny Rahmatullina // Izvestija vuzov. Stroitel'stvo.2003, №8. S. 25-32.
- [5] Mamaev Sh. Ob odnom variante opredelajushhego sootnosheniya dlja materialov, chuvstvitel'nyh k izmeneniju skorosti deformatsij // Izvestija NAN KR. - 2012. - №3. - S. 17-24.
- [6] Mamaev Sh., Igumnov L.A., Karimbaev T.D. Vlijanie skorosti nagruzheniya na rasprostranenie ploskoj prodol'noj uprugovo-vjazko-plasticheskoj volny v polubeskonechnom sterzhne // Vestnik Nizhegorodskogo GU. – 2013. - №1(3). - S.130-136.
- [7] Kurant R. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi. – M.: Mir, 1964. – 830с.
- [8] Godunov S.K. Uravneniya matematicheskoy fiziki. – M.: Nauka, 1971. – 416 s.
- [9] Samarskij A.A., Gulin A.V. Chislennye metody. – M.: Nauka, 1989. – 430 s.
- [10] Magomedov K.M., Holodov A.S. Setochno-harakteristicheskie chislennye metody.-M.: Nauka. 1988, 288s.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗОНЫ И ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕРЖНЕ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ СЕТОЧНО-ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Ш.М. Мамаев, Р.Н. Даниярбек

(Таразский инновационно-гуманитарный университет, Тараз,Казахстан)

Аннотация. В работе численно исследуется влияние характера динамического нагружения на формирование пластической зоны и волны разгрузки в стержне конечной длины. Численное решение задачи получено сеточно-характеристическим методом. Показано, что с уменьшением скорости убывания внешней нагрузки область пластических деформаций расширяется и уровень остаточной деформации возрастает, а с увеличением скорости возрастания внешней нагрузки область пластических деформации преобразуется в узкую приграничную область у жестко закрепленного конца. С возрастанием скорости снижения нагрузки изменяется характер распространения волны разгрузки.

Ключевые слова: упругопластические волны, волна разгрузки, остаточная деформация, характеристика, дифференциальные соотношения, разностные уравнения.

Поступила 17.06.2016 г.