N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 168 – 172

PARAMETRIZATION METHOD FOR SOLVING TRANSCEDENTAL EQUATIONS

D. Maylebayeva, D. Tilegenova

Republic Mathematics and Physics School, Almaty, Republic of Kazakhstan
e-mail: maylebaeva@gmail.com , didara_tilegenova@mail.ru

Key words: transcendental equation, parameterization, exponential function, logarithmic function

Abstract. Since there is no general method of solution for transcendental equations, this type of equations is quite difficult. Often transcendental equations often do not have closed-form solutions, we can only solve it approximately (Dichotomy method, Newton's method). In practice, solving transcendental equations we should extremely know the equation has a solution or not and what the number of roots it has (it's more important than knowledge of exact values of roots). E.g., for polynomials this problem can be solved by using Sturm's theorem).

In our work based on the method of parameterization we investigated what number of roots various types of transcendental equations have. We consider three type of equations in which the left-hand side is an exponential or logarithmic function and the right-hand side is a linear or quadratic function. Obtained results are presented in Theorems 1-3.

МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ТРАНСЦЕДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. Майлебаева, Д. Тилегенова

Республиканская физико-математическая школа, Алматы, Республика Казахстан

Ключевые слова: трансцендентное уравнение, параметризация, показательная функция, логарифмическая функция.

Аннотация. Трансцендентные уравнения относятся к одному из сложных типов уравнений, так как отсутствует общий алгоритм решения. В каждом конкретном случае используется свой приём. Зачастую трансцендентное уравнение удаётся решить только приближённо (метод дихотомии, метод Ньютона (касательных) и др.) Для практического применения более важным является вопрос существования корней и их количества в зависимости от параметра, чем конкретное значение этих корней (например, для многочленов с этой задачей справляется метод Штурма отделения корней).

Используя метод параметризации, мы провели анализ трёх типов трансцендентных уравнений (содержащих показательную или логарифмическую функции в одной части уравнения, и линейную или квадратичную функцию в другой) на количество корней в зависимости от параметра. Результаты исследования изложены в теоремах 1-3.

В нашей работе нами показана возможность применения метода параметризации для решения трансцендентных уравнений. Нами исследовано несколько типов трансцендентных уравнений на количество корней в зависимости от параметра.

Введение

Трансцендентное уравнение – это уравнение, не являющееся алгебраическим. Обычно это уравнения, содержащие показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические функции. При решении трансцендентных уравнений зачастую возникает трудность в том, что нет общего алгоритма решения, а, зачастую, невозможно точно найти корни этого уравнения.

Существуют различные методы решения трансцендентных уравнений, которые делятся на прямые и итерационные. Прямые методы позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения или в виде формулы. Итерационные методы приближенными методами.

Эти методы с момента создания и по сей день не теряют своей актуальности, так как необходимость решать трансцендентные уравнения присутствует в различных областях знания. При этом и для прямых, и для итерационных методов необходимо, прежде всего, знать количество корней.

В нашей работе используется метод параметризации для решения трансцендентных уравнений. Нами исследовано несколько типов трансцендентных уравнений на количество корней в зависимости от параметра.

1.Уравнения с показательной и линейной функциями

Пусть даны функции $f(x) = e^x,\ g(x) = -x$.

Рассмотрим функцию:

$$L_\alpha(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)g(x) = \alpha e^x + (\alpha - 1)x,$$

где $\alpha \in \boldsymbol{R}$– параметр.

Отметим, что эта функция определена и бесконечно дифференцируема на $\boldsymbol{R}$, следовательно, непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Выясним, сколько корней в зависимости от α имеет уравнение

$$L_\alpha(x) = 0. \tag{1.1}$$

Вычислим первую и вторую производную этой функции

$$L'_\alpha(x) = \alpha e^x + (1-\alpha)(-1) = \alpha e^x + (\alpha - 1),\ L''_\alpha(x) = \alpha e^x. \tag{1.2}$$

Рассмотрим различные случаи значения параметра α.

Случай 1.1 : $\alpha < 0$.

Отметим, что $L'_\alpha(x) = \alpha e^x + (\alpha - 1) < 0$,

следовательно, функция $L_\alpha(x)$ убывает на $(-\infty, +\infty)$, при этом

$$\lim_{x\to+\infty} L_\alpha(x) = -\infty,\ \lim_{x\to-\infty} L_\alpha(x) = +\infty.$$

Функция, $L_\alpha(x)$ непрерывна, значит, уравнение (1.1) имеет один действительный корень.

Случай 2: $\alpha = 0$.

При $\alpha = 0$ функция $L_\alpha(x)$ имеет вид

$$L_\alpha(x) = L_0(x) = g(x) = -x.$$

Уравнение (1.1) имеет единственный корень $x = 0$.

Случай 3: $0 < \alpha < 1$.

В этом случае $L'_\alpha(x) = 0$

при

$$x = x_0 = \ln\frac{1-\alpha}{\alpha} = \ln\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) > 0.$$

Так как $L''_\alpha(x_0) = \alpha e^{x_0} = 1 - \alpha > 0$, то в точке $x = x_0$наблюдается минимум.

Отметим, что x_0 – единственная точка минимума, и

$$L_\alpha(x_0) = \alpha e^{x_0} + (\alpha - 1)x_0 = (1-\alpha) + (\alpha - 1)\ln\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) =$$

$$= (1-\alpha)\left(1 - \ln\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\right).$$

Найдём значение параметра $\alpha = \alpha_* \in (0,1)$при котором существует такая точка x_*, что

$$L_{\alpha_*}(x_*) = L'_{\alpha_*}(x_*) = 0.$$

Для этого решим систему

$$\begin{cases} L_{\alpha_*}(x_*) = 0, \\ L'_{\alpha_*}(x_*) = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_* e^{x_*} + (\alpha_* - 1)x_* = 0, \\ \alpha_* e^{x_*} + (\alpha_* - 1) = 0. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$(\alpha_* - 1)(x_* - 1) = 0$$

Так как $\alpha_* \in (0,1)$, то $\alpha_* - 1 \neq 0$.

Значит, $x_* = 1$.

Тогда из первого уравнения системы имеем

$$\alpha_* e^1 + (\alpha_* - 1)1 = 0 \quad \Leftrightarrow \alpha_*(e+1) = 1 \Leftrightarrow \alpha_* = \frac{1}{e+1} \in (0,1).$$

Значит, искомое значение $\alpha_* = \frac{1}{e+1} \approx 0{,}26954178$ при $x_* = 1$.

Случай 3а: $0 < \alpha < \alpha_*$.

В этом случае $\ln\left(\frac{1}{\alpha}-1\right) > \ln\left(\frac{1}{\alpha_*}-1\right) = \ln e = 1$.

Значит в единственно точке минимума

$$L_\alpha(x_0) = (1-\alpha)\left(1-\ln\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)\right) < 0.$$

Отсюда с учетом непрерывности функции $L_\alpha(x)$ и того, что

$$\lim_{x\to+\infty} L_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} L_\alpha(x) = +\infty,$$

уравнение (1.1) имеет два действительных корня.

Случай 3б: $\alpha = \alpha_*$.

Рассуждая аналогично случаю 3а с учетом того, что

$L_\alpha(x_0) = 0$ имеем, что уравнение (1.1)имеет единственный действительный корень $x = x_* = 1$.

Случай 3в: $\alpha_* < \alpha < 1$.

В этом случае $L_\alpha(x_0) > 0$и уравнение $L_\alpha(x) = 0$ не имеет действительных корней.

Случай 4: $\alpha = 1$.

При $\alpha = 1$ функция $L_\alpha(x)$ имеет вид

$$L_\alpha(x) = L_1(x) = f(x) = e^x.$$

Следовательно, уравнение (1.1) не имеет действительных корней.

Случай 5: $\alpha > 1$.

В этом случае для всех $L'_\alpha(x) = \alpha e^x + (\alpha-1) > 0$.

Следовательно, функция $L_\alpha(x)$ непрерывно возрастает. Исследуем поведение функции на бесконечности $lim_{x\to+\infty} L_\alpha(x)=+\infty$, $lim_{x\to-\infty} L_\alpha(x)=-\infty$.

Значит уравнение (1.1) имеет один действительный корень.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Уравнение* $\alpha e^x + (1-\alpha)(-x) = 0$

а) при $\alpha < 0$ *имеет единственный отрицательный корень;*

б) при $\alpha = 0$ *имеет единственный корень* $x = 0$;

в) при $0 < \alpha < \frac{1}{e+1}$ *имеет два положительных корня;*

г) при $\alpha = \frac{1}{e+1} \approx 0{,}26954178$ *имеет один положительный корень;*

д) при $\frac{1}{e+1} < \alpha \le 1$ *не имеет действительных корней;*

е) при $\alpha > 1$ *имеет единственный отрицательный корень.*

Пример 1. Решить уравнение $2^x = 3x - 1$

Решение. Заметим, что $x = 1$, $x = 3$. Определим, имеются ли у данного уравнения другие корни. Найдём количество корней этого уравнения.

Исходное уравнение перепишем в виде

$$\mathrm{e}^{x\ln 2} = 3\left(x-\frac{1}{3}\right).$$

Сделав замену $\left(x-\frac{1}{3}\right)\ln 2 = u$, получим

$$\mathrm{e}^{\mathrm{u}}\cdot\sqrt[3]{2} = 3\frac{\mathrm{u}}{\ln 2}.$$

Отсюда $\alpha\mathrm{e}^{\mathrm{u}} + (1-\alpha)(-\mathrm{u}) = 0,$

где $\alpha = \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\ln 2}{\sqrt[3]{2}\cdot\ln 2+3} \approx 0{,}22547974$.

Согласно теореме 1 последнее уравнение имеет 2 положительных корня, значит, исходное уравнение имеет два корня $x = 1$ и $x = 3$.

2. Уравнения с показательной и квадратичной функциями

Пусть даны функции

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = -x^2.$$

Рассмотрев функцию

$$L_\alpha(x) = \alpha f(x) + (1-\alpha)g(x) = \alpha e^x + (1-\alpha)(-x^2),$$

($\alpha \in \boldsymbol{R}$– параметр) и проведя исследования, аналогичные как в п. 1 получим следующий результат.

Теорема 2. *Уравнение* $\alpha e^{x} + (1-\alpha)(-x^2) = 0$

а) при $\alpha < 0$ *не имеет действительных корней;*

б) при $\alpha = 0$ *имеет единственный корень* $x = 0$;

в) при $0 < \alpha < \frac{4}{4+e^2}$ *имеет три действительных корня (один отрицательный и два положительных);*

г) при $\alpha = \frac{4}{4+e^2} \approx 0{,}351214$*имеет два действительных корня (один отрицательный и один положительный* $x = 2$*);*

д) при $\frac{4}{4+e^2} < \alpha < 1$ *имеет единственный отрицательный корень;*

е) при $\alpha \geq 1$ *не имеет действительных корней.*

Пример 2. Решить уравнение $5^{x} = (x+3)^2$

Решение. Нетрудно заметить, что $x = 2$ – корень данного уравнения. Найдем количество корней. Сделав замену, $u = \ln 5\,(x+3)$, после несложных преобразований получим

$$бe^{u} + (1-б)(-u^2) = 0.$$

Здесь $\alpha = \frac{\ln^2 5}{5^3+\ln^2 5} \approx 0{,}02030162629$. По теореме 2 последнее уравнение имеет три действительных корня (один отрицательный и два положительных).

Таким образом, исходное уравнение имеет три действительных корня (один меньше -3, два других – больше -3). Одним из корней является $x = 2$, другие корни $x \approx -3.08362196540148, x \approx -2.90332082996586$ находятся с помощью приближенных методов.

3. Уравнения с логарифмической и линейной функциями

Рассмотрим уравнение $\ln x = kx + b.$

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x = e^{kx+b} = e^{kx} \cdot e^{b}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Сделаем замену $c = e^{b}$, $kx = t > 0$. Получим

$$\begin{cases} \dfrac{t}{k} = ce^{t} \\ \dfrac{t}{k} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ce^{t} + \dfrac{1}{k}(-t) = 0 \\ \dfrac{t}{k} > 0 \end{cases}.$$

Рассмотрим случай, когда $ck + 1 = 0$. Тогда

$$k = -\frac{1}{c} = -\frac{1}{e^{b}},$$

и система примет вид
$$\begin{cases} ce^{t} + \frac{1}{k}(-t) = 0 \\ \frac{t}{k} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{t} + t = 0 \\ \frac{t}{k} > 0 \end{cases}$$

Уравнение $e^{t} + t = 0$ имеет единственный отрицательный корень, значит, при $k > 0$ уравнение

$$\ln x = kx + b.$$

не имеет корней, а при $k < 0$ имеет единственный положительный корень.

Рассмотрим случай, когда $ck + 1 \neq 0$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{ck}{ck+1}e^{t} + \dfrac{1}{ck+1}(-t) = 0 \\ \dfrac{t}{k} > 0 \end{cases}$$

При $\alpha = \frac{ck}{ck+1}$ сводится к уравнению

$$бe^{t} + (1-б)(-t) = 0.$$

Используя результаты **Теоремы 1,** получим

Теорема 3. *Уравнение вида*

$$\ln x = kx + b$$

а) при $p \leq 0$ *имеет единственный корень;*

б) при $0 < p < \frac{1}{e}$, *имеет два положительных корня;*

в) при $p = \frac{1}{e}$, *имеет один положительный корень;*

г) при $p > \frac{1}{e}$ *не имеет действительных корней.*

Здесь $p = ke^b$.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2 x = x - 5$

Решение. Методом подбора находим один из корней уравнения $x = 8$. Далее необходимо найти количество корней.

Исходное уравнение перепишем в виде

$$\ln x = x \ln 2 - 5 \ln 2.$$

Обозначив $k = \ln 2,\quad b = -5 \ln 2$, вычислим

$$p = ke^b = \ln 2 \cdot \frac{1}{2^5} \approx 0{,}021.$$

Таким образом $0 < p < \frac{1}{e}$, значит, уравнение имеет два положительных корня. Один из корней $x = 8$ мы нашли, другой $x \approx 0.0319497793814306$ вычисляется приближённо.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 384 с.: с ил.

[2] https//ru.wikipedia.org/wiki/Трансцендентное_уравнение

[3] Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений (в 2-х томах). Том 2. – М: Государственное издательство физико-математической литературы, 1957. – 620 с.

[4] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. 3-е изд. испр. – М.: Наука, 1966. – 664с.

[5] Черкасов А. М. Численные методы. Решение задач. 2007. – 88с.

REFERENCES

[1] Sharygin I. F. Optional course in Mathematics. Solving problems. M.: Prosveshhenie, 1989. 384 p. (in Russ.)

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Transcendental_equation

[3] Berezin I. S., Zhidkov N. P. Computing methods (in 2 volumes). V. 2. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, 1957. 620 p. (in Russ.)

[4] Demidovich B. P., Maron I. A. Basics of Computational Mathematics. M.: Nauka, 1966. 664p. (in Russ.)

[5] Cherkasov A.M. Numerical methods. Solving problems.2007. 88p. (in Russ.)

ТРАНСЦЕНДЕНТТІК ТЕҢДЕУДІ ШЕШУДЕГІ ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІ

Д. Майлебаева, Д. Тилегенова

Республикалық физика-математика мектебі, Алматы, Қазақстан Республикасы

Түйін сөздер: трансценденттік теңдеу, параметрлеу, көрсеткіштік функция, логарифмдік функция.

Аннотация. Шешу жолының жалпы алгоритмі болмауы себебінен трансценденттік теңдеулер күрделі теңдеулер түріне жатады. Әрбір дербес жағдайда сәйкесінше әдістер қолданылады. Көп жағдайда трансценденттік теңдеуді тек жуықтап шеше аламыз (дихотомия әдісі, Ньютон (жанамалар) әдісі және т.б.). Түбірлердің нақты мәндерінен бұрын практикалық қолданыстарда түбірінің бар немесе жоқ екені және олардың санының параметрге байланыстылығы маңыздырақ (мысалы, көпмүшеліктерге қатысты бұл сұрақты түбірлерді бөлу Штурм әдісі шешеді).

Параметрлеу әдісін пайдалана отырып біз трансценденттік теңдеулердің түбірлерін үш түрінің (бір жағында логарифмдік немесе көрсеткіштік, ал екінші жағында сызықтық немесе квадраттық функция) түбірлерінің параметрге байланыстылығын зерттедік. Зерттеудің қорытындысы 1-3 теоремаларда көрсетілген.

Поступила 17.06.2016 г.