N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 3, Number 307 (2016), 208 – 213

УДК 512.81

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА (α, β) – КОММУТАТИВНЫХ АЛГЕБР

К.М. Туленбаев, Ж.Н. Шаймарданова, Б. Габдуллин

Университет им. Сулеймана Демиреля, Алматы, Казахстан

Ключевые слова и фразы: свободная часть, полиномиальная часть, коммутативные, коммутирующие алгебры.

Аннотация. В данной статье вычислены полилинейная и свободные части (α, β) - Бикоммутативных алгебр. Доказана ассоциативность и нильпотентность A^2. Одной из важных проблем современной алгебры является изучение свободной алгебры, удовлетворяющие некоторые тождества. Построение базовых элементов, нахождение последовательности характера, построения полилинейной части и нахождения размер или асимптотических рост являются частями этой проблемы. На этой точке зрения многообразий ассоциативных алгебр, разновидностей ассоциативной и коммутативной алгебры и многообразия алгебры Ли хорошо изучены. Например, свободная ассоциативная коммутативные алгебры полиномиальные алгебры. Соединения однородных многочлен и симметричных полином используются во многих ветви математики и физики.

Свободная ассоциативная алгебра является тензорная алгебра, ее полилинейная часть изоморфна регулярным модуль симметрической группы. Есть много других интересных классов алгебр для того, что проблемы на свободных алгебр остается как сложная задача. Например, очень мало известно о свободном альтернативные алгебры, свободные алгебры Мальцева, даже свободные коммутативные алгебры.

Пусть $com = t_1 t_2 + t_2 t_1$, $acom = t_1 t_2 - t_2 t_1$, коммутативными и анти-коммутативных многочленов $ass = (t_1, t_2, t_3) = t_1(t_2 t_3) - (t_1 t_2) t_3$ ассоциатор быть или ассоциативный полином. Алгебра с единицей $com = 0$ называется анти-коммутативной. Коммутативные алгебры определяются тождеством $acom = 0$ и ассоциативной алгебры $ass = 0$.

Как мы уже упоминали почти все известно свободных алгебр в ассоциативном случае. Свободно коммутативные или анти-коммутативные алгебры менее понятны.

Последний раз стали популярными следующие обобщения коммутативности и ассоциативности тождества

$$lcom = t_1(t_2 t_3) - t_2(t_1 t_3) \text{ (левая-коммутативная),}$$

$$rsym = ass(t_1, t_2, t_3) - ass(t_1, t_3, t_2) \text{ (правая-симметричная).}$$

Аналогично определяется некоммутативную неассоциативную полиномы

$$rcom = (t_1 t_2) t_3 - (t_1 t_3) t_2 \text{ (правая-коммутативная),}$$

$$lsym = ass(t_1, t_2, t_3) - ass(t_2, t_1, t_3) \text{ (левая-симметричная).}$$

Алгебра с идентичностей $lsym = 0$, $rsym = 0$ называется асимметричным. Основы свободных правых коммутативной алгебры и правого симметричных алгебры могут быть описаны в терминах корневых деревьев. Последовательности характера правого симметричных алгебр и правой коммутативных алгебр равны.

Алгебра с идентичностей $lcom = 0$ и $rcom = 0$ называется Новиков.

Лексикографические порядок диаграмм Юнга индуцирует порядок на таком основании свободные алгебры Новикова. Этот порядок индуцирует фильтрацию и сортировку в свободные алгебры Новикова.

Связь между бикоммутативные алгебры и фильтрация и классификация свободных алгебр Новикова дает нам мотивацию изучить бикоммутативные алгебры.

Алгебра с идентичностей $lcom = 0$, $rcom = 0$ называется бикоммутативным.

Основные понятия гомологической алгебры являются комплексы, граничные отображения и циклы. Если мы будем рассматривать свободную алгебру на квантовом генераторов и требуют, чтобы умножение слева границей отображение мы будем иметь $\beta = -1$ для бикоммутативной идентичности.

Для случая умножения справа мы будем иметь $\alpha = -1$ в течение бикоммутативной идентичности.

UDC 512.81

STRUCTURE PROPERTIES OF (α, β) – BICOMMUTATIVE ALGEBRAS

K.M. Tulenbaev, Zh.N. Shaimardanova, B. Ghabdullin

Suleyman Demirel University, Almaty, Kazakhstan
tulen75@hotmail.com, zhadyra.shaimardanova@gmail.com, gabdo_bakha@mail.ru

Key words and phrases: free part, polynomial part, commutativity, bicommutative algebras.

Abstract. We find free and multilinear part of (α, β) – Bicommutative algebra. Also, we provethat A^2 is nilpotent with index nilpotency equal to 3. One of important problems of modern algebra is to study free algebras satisfying some identities. Constructing of base elements, finding of cocharacter sequence, constructing multilinear part and finding dimensions or asymptotics of growth are parts of this problem. On this point of view varieties of associative algebras, varieties of associative and commutative algebras and varieties of Lie algebras are well studied. For example, free associative commutative algebras are polynomial algebras. Connections of homogeneous polynomials and symmetric polynomials are used in many branches of mathematics and physics.

Free associative algebra is a tensor algebra, its multilinear part is isomorphic to a regular module of symmetric group. There are many other interesting classes of algebras for what problems on free algebras are remains as a difficult task. For example, very little are known about free alternative algebras, free Malcev algebras, even about free commutative algebras.

Let $com = t_1t_2 + t_2t_1$, $acom = t_1t_2 - t_2t_1$, be commutative and anti-commutative polynomials and $ass = (t_1, t_2, t_3) = t_1(t_2t_3) - (t_1t_2)t_3$ be associator or associative polynomial. Algebra with identity $com = 0$ is called anti-commutative. Commutative algebras are defined by the identity $acom = 0$ and associative algebras by $ass = 0$.

As we mentioned almost all is known for free algebras in associative case. Free commutative or anti-commutative algebras are less understood.

Last time became popular the following generalizations of commutativity and associativity identities

$$lcom = t_1(t_2t_3) - t_2(t_1t_3) \text{ (left-commutative)},$$

$$rsym = ass(t_1, t_2, t_3) - ass(t_1, t_3, t_2) \text{ (right-symmetric)},$$

Similarly one defines non-commutative non-associative polynomials

$$rcom = (t_1t_2)t_3 - (t_1t_3)t_2 \text{ (right-commutative)},$$

$$lsym = ass(t_1, t_2, t_3) - ass(t_2, t_1, t_3) \text{ (left-symmetric)}.$$

Algebra with identities $lsym = 0$, $rsym = 0$ is called assocymmetric. Bases of free right-commutative algebras and right-symmetric algebras can be described in terms of rooted trees. Cocharacter sequences of right-symmetric algebras and right-commutative algebras are equal. Algebra with identities $lcom = 0$ and $rsym = 0$ is called Novikov. Lexicographic order in Young diagrams induces order on such base of free Novikov algebras. This order induces filtration and grading in free Novikov algebras. Connection between bicommutative algebras and filtration and grading of free Novikov algebras gives us motivation to study bicommutative algebras.

Algebra with identities $lcom = 0$, $rcom = 0$ is called *bicommutative.*

Basic notions of homological algebra are complexes, boundary mappings and cycles. If we will consider free algebra on q generators and require that multiplication by left is boundary mapping we will have $\beta = -1$ for bicommutative identity. For case multiplication by right we will have $\alpha = -1$ for bicommutative identity.

Introduction. Authors are grateful for academician A. S. Dzhumadil'daev for formulation of the problem of given article. One of important problems of modern algebra is to study free algebras satisfying some identities. Constructing of base elements, finding of cocharacter sequence, constructing multilinear part and finding dimensions or asymptotics of growth are parts of this problem. On this point of view varieties of associative algebras, varieties of associative and commutative algebras and varieties of Lie algebras are well studied. For example, free associative commutative algebras are polynomial algebras. Connections of homogeneous polynomials and symmetric polynomials are used in many branches of mathematics and physics.

Interesting problem is to find homology of free (α, β) – Bicommutative algebras.

Let $A = (A, \circ)$ be an algebra over field with characteristic $p \geq 0$ and $A \times A \to A, (a,b) \mapsto a \circ b,$ is product. An algebra $A = (A, \circ)$ is called (α, β) - *Bicommutative*, if

$$(a \circ b) \circ c = \alpha (a \circ c) \circ b (RC)$$
$$a \circ (b \circ c) = \beta b \circ (a \circ c)(LC)$$

for any $a, b, c \in A.$

Let A be (α, β)- Bicommutative algebra, when (α, β) are equal $+1$ or -1 or $\alpha = -1, \beta = -1.$ If both are equal 1 we have bicommutative algebras. Bicommutative algebras were introduced in [1]. First interesting case is $\alpha = 1, \beta = -1.$ We prove the following theorem in our article.

Theorem 1. A^2 is associative. A^2 is anticommutative for case $\alpha = 1, \beta = -1.$ A^2 is commutative for case $\alpha = -1, \beta = -1.$

Moreover, for any three elements $x, y, z \in A^2$ we have $(x \circ y) \circ z = 0.$

Proof. Let us take elements $x = a \circ b$ and $y = c \circ d.$ Then

$$x \circ y = (a \circ b) \circ (c \circ d) = \beta \cdot c \circ ((a \circ b) \circ d) \text{ by LC.}$$

So,

$$\beta \cdot c \circ ((a \circ b) \circ d) = \beta \cdot \alpha \cdot c \circ ((a \circ d) \circ b) \text{ by RC.}$$

$$\beta \cdot \alpha \cdot c \circ ((a \circ d) \circ b) = \beta^2 \cdot \alpha \cdot (a \circ d) \circ (c \circ d) \text{ by LC.}$$

On other hand

$$(a \circ b) \circ (c \circ d) = \alpha \cdot (a \circ (c \circ d) \circ b) \text{ by RC.}$$

So we have

$$\alpha \cdot (a \circ (c \circ d) \circ b) = \alpha \cdot \beta \cdot (c \circ (a \circ d) \circ b) \text{ by LC.}$$

Another step is

$$\alpha \cdot \beta \cdot (c \circ (a \circ d) \circ b) = \alpha^2 \cdot \beta \cdot (c \circ d) \circ (a \circ d) \text{ by RC.}$$

Therefore

$$\beta^2 \cdot \alpha \cdot (a \circ d) \circ (c \circ b) = \alpha^2 \cdot \beta \cdot (c \circ d) \circ (a \circ d).$$

So

$$\beta \cdot (a \circ d) \circ (c \circ b) = \alpha \cdot (c \circ d) \circ (a \circ d).$$

For $\alpha = 1, \beta = -1$ we obtain A^2 is anticommutative. $\gamma = \alpha \cdot \beta$. For case $\alpha = -1, \beta = -1$ we have A^2 is commutative.

Now let us check associativity of A^2. First of all

$$((a \circ d) \circ (c \circ b)) \circ e = \alpha \cdot ((a \circ b) \circ e) \circ (c \circ d) \text{ by RC.}$$

Secondly

$$\alpha \cdot ((a \circ b) \circ e) \circ (c \circ d) = \alpha \cdot \gamma \cdot (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ e)$$

by commutative or anticommutative identities depending on γ.

Using LC,

$$\alpha \cdot \gamma \cdot (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ e) = \beta \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot (a \circ d) \circ ((c \circ b) \circ e) = \gamma^2 \cdot (a \circ b) \circ ((c \circ d) \circ e) = (a \circ b) \circ ((c \circ d) \circ e).$$

We have A^2 is associative.

Let $x = a \circ b$ and $y = c \circ d$ and $z = e \circ f$.

By associativity

$$((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ (e \circ f) = (a \circ b) \circ ((c \circ d) \circ (e \circ f)) = \beta \cdot (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ (e \circ f))$$

by LC.

On other hand by RC

$$((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ (e \circ f) = \alpha \cdot ((a \circ b) \circ (e \circ f)) \circ (c \circ d).$$

By commutative or anticommutative identities depending on γ.

$$\alpha \cdot ((a \circ b) \circ (e \circ f)) \circ (c \circ d) = \alpha \cdot \gamma \cdot ((e \circ f) \circ (a \circ b)) \circ (c \circ d).$$

By RC

$$\alpha \cdot \gamma \cdot ((e \circ f) \circ (a \circ b)) \circ ((c \circ d) = \alpha^2 \cdot \gamma \cdot ((e \circ f) \circ (c \circ d)) \circ (a \circ b).$$

By commutative or anticommutative identities depending on γ.

$$\alpha^2 \cdot \gamma \cdot ((e \circ f) \circ (c \circ d)) \circ (a \circ b) = \alpha^2 \cdot \gamma^2 \cdot ((c \circ d) \circ (e \circ f)) \circ (a \circ b).$$

Because $\alpha^2 = \gamma^2 = 1$ we obtain

$$(c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ (e \circ f)) = ((c \circ d) \circ (e \circ f)) \circ (a \circ b).$$

By RC

$$\beta \cdot (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ (e \circ f)) = \beta \cdot ((c \circ d) \circ ((a \circ b)) \circ (e \circ f).$$

By associativity

$$\beta \cdot (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ (e \circ f)) = \beta \cdot ((c \circ d) \circ ((a \circ b)) \circ (e \circ f).$$

So on

$$\beta \cdot (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ (e \circ f)) = \alpha \cdot ((c \circ d) \circ ((a \circ b)) \circ (e \circ f).$$

If $\beta = -1$ and $\alpha = 1$ we have

$$2 \cdot ((c \circ d) \circ ((a \circ b)) \circ (e \circ f) = 0.$$

For $char \neq 2$ we have $(x \circ y) \circ z = 0$. End of Proof.

Let us consider case $\beta = -1$ and $\alpha = -1$ separately. So we have A^2 is associative and commutative by Theorem 1.

Lemma 1. Let A be $(-1,1)$ – Bicommutative algebra. Then $\forall a,b,c,d,e \in A$ we have

$$((c \circ d) \circ ((a \circ b)) \circ (e \circ f) = 0.$$

Proof.

$$((a \circ b) \circ e) \circ (c \circ d) = -((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ e \text{ by RC.}$$

By commutativity

$$((a \circ b) \circ e) \circ (c \circ d) = (c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ e).$$

According to proof of associativity

$$(c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ e) = ((c \circ d) \circ (a \circ b)) \circ e.$$

By commutativity

$$(c \circ d) \circ ((a \circ b) \circ e) = ((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ e.$$

So we have

$$-((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ e = ((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ e).$$

For $char \neq 2$ we have

$$((a \circ b) \circ (c \circ d)) \circ e) = 0 \text{ QED.}$$

REFERENCES

[1] A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev, Bi-commutative algebras. Uspechi Math. Nauk.,2003, No.6, 149-150, Russian Math. Surv., P.1196 – 1197 (engl.transl.).

[2] Латышев В. Н. Об алгебрах Ли с тождественными соотношениями, Сиб. мат. журнал, 1963, Т. 4, №4, С. 821-829.

[3] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы I-III), М.: Мир, 1976, С. 496.

[4] Пихтильков С.А. О локально нильпотентном радикале специальных алгебр Ли, Фундаментальная и прикладная математика, 2002, Т. 8, Вып. 3, С. 769-782.

[5] Кучеров А.А., Пихтильков С.А., О гомологическом описании радикала Джекобсона для алгебр Ли, Чебышевский сборник.

[6] Херстейн И. Некоммутативные кольца, М.: Мир, 1972, С. 192.

[7] Джекобсон Н. Строение колец, М.: Изд-во иностр. литературы, 1961, С. 392.

[8] Marshall E. I. The Frattini subalgebras of a Lie algebra, J. London Math., Soc. 1967, V. 42,P. 416-422.

[9] Dzhumadil'daev A.S. Special identity for Novikov-Jordan algebras, Comm. Algebra, 2005, V.33, No.5, P.1279--1287.

[10] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.Гамильтоновы операторы и связанные с ними структуры, Функц. анализ прил, 1979, Т. 13, №4, С. 13-30.

[11] Балинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли, ДАН СССР, 1985, Том 283, №5, С. 1036-1039.

[12] Захаров А. С. Вложение алгебр Новикова-Пуассона в алгебры Новикова-Пуассона векторного типа, Алгебра и логика, 52, №3, 2013, С. 352-369.

[13] E.I. Zelmanov, A class of local translation-invariant Lie algebras, Dokl. Akad. Nauk SSSR, V. 292, 1987, no. 6, P. 1294--1297.

[14] A.S. Dzhumadil'daev, Algebras with %skew-symmetric identity of degree, J. Math.Sciences (Springer).

[15] M. Bremner, Classifying varieties of anti-commutative algebras, Nova Journal of Math., Game Theory and Algebra 4 , 1996, no. 2, P. 119-127.

[16] F. Chapoton, M. Livernet, em Pre-Lie algebras and the rooted trees operad, Inter. Math. Res. Notices, 2001, No.8, P.395-408.

[17] A.S. Dzhumadil'daev, K.M. Tulenbaev, Bi-commutative algebras, Uspechi Math. Nauk, V. 58, 2003, No.6, 149-150.

[18] A.S. Dzhumadil'daev, C. Lofwall, Trees, free right-symmetric algebras, free Novikov algebras and identities}, Homol, Homot. Appl., V. 4, №2, 2002, P. 165-190.

[19] A.S. Dzhumadil'daev, Codimensions growth and non-Koszulity of Novikov operad, Comm. Algebra, 2010.

[20] W.Fulton., Young tableux with applications to representation theory and geometry, Cambridge University Press 1997.

[21] V. A. Ginzburg and M. M. Kapranov, Koszul duality for operads, Duke Math. J. 76, 1994, P. 203-272.

КОММУТАТИВТІ АЛГЕБРАНЫҢ (α, β) ҚҰРЫЛЫМДЫҚ ҚҰРАМЫ

К.М. Туленбаев, Ж.Н. Шаймарданова, Б. Габдуллин
Сулейман Демирель атындығы Университет, Алматы, Қазақстан
tulen75@hotmail.com, zhadyra.shaimardanova@gmail.com, gabdo_bakha@mail.ru

Түйінді сөздер мен сөз тіркестерін: бос бөлік, полиномиальді бөлік, коммутативті алгебра, коммутттиттендіретін алгебра.

Аннотация. Бұл мақалада (α, β) бикоммутативты алгебраның бос және көпсызықты бөлігі есептелген. Ассоциативностілік мен нильпотентностілік A^2 дәлелделген. Қазіргі заманғы алгебра маңызды проблемалардың бірі еркін зерттеу болып табылады. Кейбір қанағаттандыратын тождествам алгебра. базалық элементтерін салу, характер ретпен анықтау туралы, полилинейное бөлігін салу және өсу өлшемдерін немесе асимптотику табу осы бөліктері болып табылады мәселе. Ассоциативті алгебра қарау сорттарын осы тұрғыдан алғанда, ассоциативті және коммутативті алгебраның және сорттарын сорттары Ли алгебрасының жақсы зерттелген. Мысалы, тегін ассоциативті коммутативті алгебра шелі алгебра болып табылады. Қосылымдар туралы біртекті полиномы және симметриялық полиномы көптеген пайдаланылады математика және физика филиалдары.

Еркін ассоциативті алгебра болып табылатын тензор алгебрасы, оның полисызықты бөлігі тұрақты изоморфна симметриялық топ модуль. Басқа да көптеген қызықты класстары бар еркін алгебра қандай да проблемалар үшін алгебра ретінде қалдықтары болып табылатын күрделі міндет. Мысалы, өте аз еркін туралы белгілі тіпті еркін туралы баламалы алгебра, еркін Малкев алгебра, коммутативті алгебра.

Коммутативті болуы $com = t_1t_2 + t_2t_1$, $acom = t_1t_2 - t_2t_1$, берсін және қарсы коммутативті полиномы және $ass=(t_1,t_2,t_3)=t_1(t_2t_3)-(t_1t_2)t_3$ болуы ассоциаторное немесе полиномиалдық қауымдастық. Алгебра сәйкестілікпен $com = 0$ қарсы коммутативті деп аталады. Коммутативті алгебра $acom = 0$ және $ass = 0$ ассоциативті алгебра сәйкестілікпен айқындалады .

Айтылғандай барлық дерлік ассоциативті жағдайда еркін алгебра белгілі. Еркін коммутативті немесе анти-коммутативті алгебра аз зерттелген.

Соңғы рет мынадай жалпылау танымал болды коммутативности және қауымдастық сәйкестілік

$$lcom = t_1(t_2t_3) - t_2(t_1t_3) \text{ (сол-коммутативті),}$$

$$rsym = ass(t_1, t_2, t_3) - ass(t_1, t_3, t_2) \text{ (оң-симметриялық).}$$

Сол сияқты бір емес коммутативті емес ассоциативті полиномы анықтайды

$$rcom = (t_1t_2)t_3 - (t_1t_3)t_2 \text{ (оң-коммутативті),}$$

$$lsym = ass(t_1, t_2, t_3) - ass(t_2, t_1, t_3) \text{ (сол-симметриялық).}$$

Алгебра $lsym = 0$, $rsym = 0$ сәйкестігімен ассиметриялық деп аталады . Оң жақ еркін түймешігімен коммутативті алгебраның және оң-симметриялы негіздерін алгебра терең ағаштар тұрғысынан сипаттауға болады. Оң - симметриялы алгебра және оң-коммутативті алгебрасының бірізділік характері тең. Алгебра $lcom = 0$ және $rsym = 0$ сәйкестілігімен Новиков деп аталады . Жас диаграммалар лексикографиялық тәртібі осындай негізінде бұйрық шақырады еркін Новиков алгебра. Осы бұйрық сүзу және жіктеу шақырымен еркін Новиков алгебра. Бикоммутативті алгебраның арасындағы байланыс және еркін Новиков алгебраларының сүзу және бағалау бізге мотивациясын береді бикоммутативті алгебра зерттеу.

Алгебра $lsym = 0$, $rsym = 0$ сәйкестігімен бикоммутативті деп аталады .

Гомологикалық алгебраның негізгі ұғымдар кешендер, шекаралық бейнелеу және циклдар болып табылады. Егер біз Q генераторлар еркін алгебра қарайды және талап болса солға қарай көбейту біз β = –1 бикоммутативті сәйкестігіне ие болады шекара картографиялық болып табылады. Оң жақтан көбею кезінде α = –1 бикоммутативті сәйкестікке ие болады.

Поступила 17.06.2016 г.