N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 299 (2015), 5 – 13

BINARY CONVEXITY RANK IN WEAKLY O-MINIMAL STRUCTURES

B. Sh. Kulpeshov

International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

Key words: weak o-minimality, countable categoricity, convexity rank, orthogonality of types, unary function.

Abstract. In this work countably categorical weakly o-minimal structures are studied. A criterion for equality of the binary convexity ranks of non-weakly orthogonal types in terms of behavior of a unary function has been obtained.

УДК 510.67

БИНАРНЫЙ РАНГ ВЫПУКЛОСТИ В СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ

Б. Ш. Кулпешов

Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, ранг выпуклости, ортогональность типов, унарная функция.

Аннотация. В настоящей работе исследуются счетно-категоричные слабо о-минимальные структуры. Найден критерий равенства бинарных рангов выпуклости не слабо ортогональных типов в терминах поведения унарной функции.

1. Предварительные сведения.

Настоящая работа касается понятия слабой о-минимальности, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз, когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, ... \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности.

Определение 1.1. [2] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x,\overline{a}),\overline{a}\in M$ – произвольная формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x,\overline{a})$ ($RC(\phi(x,\overline{a}))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x,\overline{a}))\geq 0$, если $M\models\exists x\phi(x,\overline{a})$.

2) $RC(\phi(x,\overline{a}))\geq 1$, если $\phi(M,\overline{a})$ бесконечно.

3) $RC(\phi(x,\overline{a}))\geq\alpha+1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ такое, что существуют $b_i, i\in\omega$, которые удовлетворяют следующему:

– Для любых $i,j\in\omega$, всякий раз, когда $i\neq j$ мы имеем $M\models\neg E(b_i,b_j)$

– Для каждого $i\in\omega$ $RC(E(x,b_i))\geq\alpha$ и $E(M,b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M,\overline{a})$

4) $RC(\phi(x,\overline{a}))\geq\delta$, если $RC(\phi(x,\overline{a}))\geq\alpha$ для всех $\alpha\leq\delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x,\overline{a}))=\alpha$ для некоторого α, то мы говорим, что $RC(\phi(x,\overline{a}))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x,\overline{a}))\geq\alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x,\overline{a}))=\infty$.

Определение 1.2. (Байжанов Б.С., [3]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A,B\subseteq M$, M – $|A|^+$-насыщенна, $p,q\in S_1(A)$ – неалгебраические. Будем говорить, что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют A-определимая формула $H(x,y),\alpha\in p(M)$ и β_1, $\beta_2\in q(M)$ такие что $\beta_1\in H(M,\alpha)$ и $\beta_2\notin H(M,\alpha)$.

Лемма 1.3. ([3], Corollary 34 (iii))} Отношение неслабой ортогональности 1-типов является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y\subset M^{n+1}$ – $\varnothing$-определимо, пусть $\pi:M^{n+1}\to M^n$ – проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z:=\pi(Y)$. Для каждого $\overline{a}\in Z$ пусть $Y_{\overline{a}}:=\{y:(\overline{a},y)\in Y\}$. Предположим, что для каждого $\overline{a}\in Z$ множество $Y_{\overline{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ – $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\overline{a}\sim\overline{b} \text{ для всех } \overline{a},\overline{b}\in M^n\setminus Z, \text{ и } \overline{a}\sim\overline{b}\ \Leftrightarrow \sup Y_{\overline{a}}=\sup Y_{\overline{b}}, \text{ если } \overline{a},\overline{b}\in Z$$

Пусть $\overline{Z}:=Z/\sim$, и для каждого кортежа $\overline{a}\in Z$ мы обозначаем через $[\overline{a}]$ $\sim$-класс кортежа $\overline{a}$. Существует естественный $\varnothing$-определимый линейный порядок на $M\cup\overline{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\overline{a}\in Z$ и $c\in M$. Тогда $[\overline{a}]<c$ тогда и только тогда, когда $w<c$ для всех $w\in Y_{\overline{a}}$. Если кортежи $\overline{a}$ и $\overline{b}$ не эквивалентны относительно $\sim$, то существует некоторый $x\in M$ такой, что $[\overline{a}]<x<[\overline{b}]$ или $[\overline{b}]<x<[\overline{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M\cup\overline{Z}$. Мы называем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\varnothing$-определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ – Дедекиндово пополнение структуры M, и обозреваем $\overline{Z}$ как естественно вложенную в $\overline{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 1.4. [1] Пусть M – линейно упорядоченная структура, $D\subseteq M$ – бесконечно, $K\subseteq\overline{M}$, $f:D\to K$ – функция. Будем говорить, что f является *локально возрастающей* (*локально убывающей, локально константой*) на D, если для любого $x\in D$ существует бесконечный интервал $J\subseteq D$, содержащий x, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Будем также говорить, что функция f является *локально монотонной* на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D.

Пусть f – A-определимая функция на $D \subseteq M$, E – A-определимое отношение эквивалентности на D. Мы говорим, что f – *строго возрастающая* (*убывающая*) *на* D/E, если для любых $a, b \in D$ с условием $\neg E(a,b)$ мы имеем $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$).

Определение 1.5. (Вербовский В.В., [4, 5]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, B, $D \subseteq M$, $A \subseteq \overline{M}$ – B-определимый сорт и $f : D \to A$ – B-определимая функция, являющаяся локально возрастающей (убывающей) на D. Будем говорить, что функция f *имеет глубину* n на множестве D, если существуют отношения эквивалентности $E_1(x,y),...,E_n(x,y)$, разбивающие D на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что для любого $2 \le i \le n$ каждый E_i-класс разбивается на бесконечное число бесконечных выпуклых E_{i-1}-подклассов и выполняется следующее:

– f является строго возрастающей (убывающей) на каждом E_1-классе

– f является локально убывающей (возрастающей) на D/E_k для любого нечетного $k \le n$

– f является локально возрастающей (убывающей) на D/E_k для любого четного $k \le n$

– f является строго монотонной на D/E_n.

В этом случае функцию f будем называть *локально возрастающей* (*убывающей*) *глубины* n.

Очевидно, что строго возрастающая (убывающая) функция является *локально возрастающей* (*убывающей*) *глубины* 0.

Теорема 1.6. (Вербовский В.В., [5]) Пусть T – слабо о-минимальная теория. Тогда любая функция в определимый сорт имеет конечную глубину.

Мы естественным образом расширяем Определение 1.5, вводя понятие *локально константной функции глубины* n, если в Определении 1.5 функция f является константой на каждом E_1-классе. Заметим, что в этом случае функция f может быть как локально возрастающей, так и локально убывающей на D/E_1. В нижеследующих примерах M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура, а функция f является локально константой.

Пример 1.7. (Example 2.6.1, [1]) Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q, упорядоченной как обычно, а P_1 с $Q \times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m)) = n$ для всех $(n,m) \in Q \times Q$.

Пусть $p := \{P_1(x)\}$, $q := \{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p, q \in S_1(\varnothing)$. Возьмем произвольный $a \in p(M)$. Тогда существует единственный $b \in q(M)$ такой, что $f(a) = b$, т.е. $b \in dcl(\{a\})$.

Рассмотрим следующую формулу: $E(x,y) := P_1(x) \wedge P_1(y) \wedge \exists z [P_2(z) \wedge f(x) = z \wedge f(y) = z]$

Можно понять, что $E(x,y)$ – $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов. Утверждаем, что f – локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, т.е. f – константа на каждом E-классе и f – строго возрастающая на $P_1(M)/E$.

Пример 1.8. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, E_1^q, f^1 \rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при

этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с $Q \times Q \times Q$, упорядоченной лексикографически, а P_2 с $Q \times Q$, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x,y)$ и $E_2^p(x,y)$ – это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (n_1, m_1, l_1), y = (n_2, m_2, l_2) \in Q \times Q \times Q$ $E_1^p(x,y) \Leftrightarrow n_1 = n_2 \wedge m_1 = m_2$ и $E_2^p(x,y) \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Аналогично определяется интерпретация бинарного предиката $E_1^q(x,y)$: это отношение эквивалентности на $P_2(M)$ такое, что для всех $x = (n_1, m_1), y = (n_2, m_2) \in Q \times Q$

$$E_1^q(x,y) \Leftrightarrow n_1 = n_2$$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m,l)) = (-n,m)$ для всех $(n,m,l) \in Q \times Q \times Q$.

Утверждаем, что функция f является локально константой глубины 2 на $P_1(M)$, т.е. f – константа на каждом E_1^p-классе, f – строго возрастающая на каждом $E_2(a,M)/E_1$, где $a \in p(M)$, и f – строго убывающая на $p(M)/E_2$.

Если в Примере 1.8 f определить следующим образом: $f((n,m,l)) = (n,-m)$ для всех $(n,m,l) \in Q^3$, то получим, что f – локально константа глубины 2 на $P_1(M)$, при этом f – константа на каждом E_1^p-классе, f – строго убывающая на каждом $E_2(a,M)/E_1$, где $a \in p(M)$, и f – строго возрастающая на $p(M)/E_2$.

Если же в Примере 1.8 f определить следующим образом: $f((n,m,l)) = (-n,-m)$ для всех $(n,m,l) \in Q^3$, то получим, что f – локально константа глубины 1 на $P_1(M)$, при этом f – константа на каждом E_1^p-классе и f – строго убывающая на $p(M)/E_1$.

Пример 1.9. Пусть $M = \langle M, <, P_1^1, P_2^1, E_1^p, E_2^p, ..., E_{n-1}^p, E_1^q, E_2^q, ..., E_{k-1}^q, f^1 \rangle$ (где $k < n$) – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M) < P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_1 с Q^n, упорядоченной лексикографически, а P_2 с Q^k, также упорядоченной лексикографически. Интерпретации бинарных предикатов $E_1^p(x,y), ..., E_{n-1}^p(x,y)$ – это отношения эквивалентности на $P_1(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in Q^n$ и для любого $1 \le i \le n-1$

$$E_i^p(x,y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{n-i} = y_{n-i}$$

Аналогично определяются интерпретации бинарных предикатов $E_1^q(x,y), ..., E_{k-1}^q(x,y)$: это отношения эквивалентности на $P_2(M)$ такие, что для всех $x = (x_1, x_2, ..., x_k), y = (y_1, y_2, ..., y_k) \in Q^k$ и для любого $1 \le i \le k-1$ $E_i^q(x,y) \Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{k-i} = y_{k-i}$

Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f) = P_1(M)$ и $Range(f) = P_2(M)$ и определяется посредством

$f((x_1, x_2, ..., x_n)) = ((-1)^{k-1} x_1, (-1)^{k-2} x_2, ..., (-1)^2 x_{k-2}, (-1)^1 x_{k-1}, x_k)$ для всех $(x_1, x_2, ..., x_n) \in Q^n$.

Очевидно, что $E_1^p(a,M) \subset E_2^p(a,M) \subset ... \subset E_{n-1}^p(a,M)$ для всех $a \in P_1(M)$ и $E_1^q(b,M) \subset E_2^q(b,M) \subset ... \subset E_{n-1}^q(b,M)$ для всех $b \in P_2(M)$. Утверждаем, что f – локально константа глубины k на $P_1(M)$, т.е. f – константа на каждом E_{n-k}^p-классе, f – строго

возрастающая на каждом $E^p_{n-k+1}(a,M)/E^p_{n-k}$, f – строго убывающая на каждом $E^p_{n-k+2}(a,M)/E^p_{n-k+1}$, …. И наконец, если $n-k$ – нечетное, то f – строго убывающая на $P_1(M)/E^p_{n-1}$; если же $n-k$ – четное, то f – строго возрастающая на $P_1(M)/E^p_{n-1}$.

2. Результаты.

Определение 2.1. [6] *Рангом выпуклости 1-типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В Примере 1.7 имеем p не слабо ортогонален q, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ и $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$, $RC(p) = 2, RC(q) = 1$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{bin}(\phi(x))$, если в Определении 1.1 параметрически определимые отношения эквивалентности заменим на $\varnothing$-определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности. Тогда очевидно, что в произвольной счетно категоричной слабо о-минимальной теории бинарный ранг выпуклости одноместной формулы конечен. Следовательно, для любого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\varnothing)$ выполняется $RC_{bin}(p) < \omega$.

Теорема 2.2. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, p не слабо ортогонален q, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ для некоторого $a \in p(M)$.

Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$

(2) Не существует $\varnothing$-определимой функции $f : p(M) \to q(M)$, являющейся биекцией $p(M)$ на $q(M)$

(3) $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для любого $b \in q(M)$

(4) Существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся локально константой на $p(M)$.

Доказательство Теоремы 2.2. Пусть для определенности $RC_{bin}(p) = n$. Тогда существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x,y),\ldots,E_{n-1}(x,y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}(a,M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Допустим противное: существует $\varnothing$-определимая функция $f : p(M) \to q(M)$, являющаяся биекцией $p(M)$ на $q(M)$. Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_1(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_1(t_1,t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$E'_{n-1}(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_{n-1}(t_1,t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

Очевидно, что $E'_1(x,y),\ldots,E'_{n-1}(x,y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_1(b,M) \subset \ldots \subset E'_{n-1}(b,M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n$, противореча условию.

(2) $\Rightarrow$ (3). Поскольку $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$, то существуют $b \in q(M)$ и $\varnothing$-определимая формула $\phi(x,y)$ такие, что $M \models \exists! y\, \phi(a,y) \wedge \phi(a,b)$. Допустим противное: $dcl(\{b\}) \cap p(M) \neq \varnothing$. Поймем, что $a \in dcl(\{b\})$. Если это не так, то существует $a_1 \in p(M)$ такой, что $a_1 \neq a$ и $a_1 \in dcl(\{b\})$. Но тогда поскольку $b \in dcl(\{a\})$, мы имеем что $a_1 \in dcl(\{a\})$. Тогда можно доказать, что $dcl(\{a\})$ бесконечно, противореча счетной категоричности. Таким

образом, $a \in dcl(\{b\})$. Но тогда существует $\varnothing$-определимая формула $\phi'(x,y)$ такая, что $M \models \exists! y\, \phi'(a,y) \wedge \exists! x\, \phi'(x,b) \wedge \phi'(a,b)$.

Определим функцию f следующим образом: $f(a) = b \Leftrightarrow \phi'(a,b)$. Нетрудно понять, что f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, противореча нашему предположению.

(3) $\Rightarrow$ (4). Допустим противное: $f : p(M) \to q(M)$ – $\varnothing$-определимая функция и f не является локально константой на $p(M)$. Тогда f должна быть локально монотонной на $p(M)$, т.е. либо локально возрастающей, либо локально убывающей. Но тогда f биективно отображает $p(M)$ на $q(M)$, противореча ранее доказанному.

(4) $\Rightarrow$ (1). Пусть $f : p(M) \to q(M)$ – $\varnothing$-определимая функция, являющаяся локально константой на $p(M)$. Рассмотрим следующую формулу:

$$E(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge [x < y \to \forall t(x < t < y \to f(x) = f(t) = f(y)] \wedge$$
$$\wedge [x > y \to \forall t(x > t > y \to f(x) = f(t) = f(y)]$$

Нетрудно понять, что $E(x,y)$ – отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Очевидно, что для некоторого $1 \le i \le n-1$ $E(x,y) \equiv E_i(x,y)$. Тогда утверждаем, что $RC_{bin}(q) = n - i$. Действительно, f является константой на каждом E_i-классе. Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, где $a \in p(M)$. Она должна быть строго монотонной на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, иначе появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $\overline{E}(x,y)$ такое, что $E_i(a,M) \subset \overline{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$, противореча тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f является строго монотонной на каждом $E_{k+1}(a,M)/E_k$, где $i \le k \le n-2$ и f является строго монотонной на $p(M)/E_{n-1}$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_{i+1}(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_{i+1}(t_1,t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$

$$E'_{n-1}(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge E_{n-1}(t_1,t_2) \wedge f(t_1) = x \wedge f(t_2) = y]$$

Очевидно, что $E'_{i+1}(x,y),\dots,E'_{n-1}(x,y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_{i+1}(b,M) \subset \dots \subset E'_{n-1}(b,M)$, откуда $RC_{bin}(q) \ge n - i$. Далее, если существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E^q(b,M) \subset E'_{i+1}(b,M)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$\hat{E}(x,y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_q(t_1) \wedge U_q(t_2) \wedge E^q(t_1,t_2) \wedge f(x) = t_1 \wedge f(y) = t_2]$$

Очевидно, что $E_i(a,M) \subset \hat{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$, опять противореча тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что не существует $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающего $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_k(b,M) \subset E^q(b,M) \subset E'_{k+1}(b,M)$ для любого $i+1 \le k \le n-2$ или $E'_{n-1}(b,M) \subset E^q(b,M)$. Таким образом, $RC_{bin}(q) = n - i$. □

Далее понадобится понятие (p_1, p_2)-секатора, введенное в [6]. Пусть $A \subseteq M, p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические, p_1 не слабо ортогонален p_2. Мы говорим что A-определимая формула $\phi(x,y)$ является (p_1, p_2)-*секатором*, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi(a,M) \subset p_2(M)$, $\phi(a,M)$ выпукло и $\phi(a,M)^- = p_2(M)^-$. Если $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ – (p_1, p_2)-секаторы, то мы говорим что $\phi_1(x,y)$ меньше чем $\phi_2(x,y)$, если существует $a \in p_1(M)$ такой, что $\phi_1(a,M) \subset \phi_2(a,M)$. Очевидно что если $p_1, p_2 \in S_1(A)$ – неалгебраические, p_1 неслабо ортогонален p_2, тогда существует (p_1, p_2)-секатор и множество всех (p_1, p_2)-секаторов линейно упорядочено. Также очевидно что для любого (p_1, p_2)-секатора $\phi(x,y)$ $f(x) := \sup \phi(x,M)$ не является константой на $p_1(M)$.

Теорема 2.3. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, p неслабо ортогонален q. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$

(2) Для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом E-классе.

Доказательство Теоремы 2.3. Пусть для определенности $RC_{bin}(p) = n$. Тогда существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1(x,y),\ldots,E_{n-1}(x,y)$, разбивающие $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_1(a,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}(a,M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

($\Rightarrow$) Предположим, что $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$. Допустим противное: существует (p,q)-секатор $R(x,y)$ такой, что для любого $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$, разбивающего $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, функция $f(x) := \sup R(x,M)$ не является константой на каждом E-классе. Тогда f не является константой на каждом E_1-классе. Но тогда f должна быть строго монотонной (строго возрастающей или строго убывающей) на каждом E_1-классе. Действительно, f не может локально монотонной (не строго монотонной) на каждом E_1-классе, иначе появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_0(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $E_0(a,M) \subset E_1(a,M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$, противореча тому, что $E_1(x,y)$ – минимальное среди $\varnothing$-определимых нетривиальных отношений эквивалентности на $p(M)$.

Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_2(a,M)/E_1$, где $a \in p(M)$. Она должна быть строго монотонной на каждом $E_2(a,M)/E_1$, иначе появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $\overline{E}(x,y)$ такое, что $E_1(a,M) \subset \overline{E}(a,M) \subset E_2(a,M)$, противореча тому, что E_2 является непосредственным последователем отношения E_1 среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f является строго монотонной на каждом $E_{k+1}(a,M)/E_k$, где $1 \le k \le n-2$ и f является строго монотонной на $p(M)/E_{n-1}$.

Рассмотрим следующие формулы:

$$E_1'(x,y) := [x \le y \to \exists t_1 \exists t_2 (E_1(t_1,t_2) \wedge f(t_1) < x \le y < f(t_2))] \wedge$$
$$[x > y \to \exists t_1 \exists t_2 (E_1(t_1,t_2) \wedge f(t_1) < y < x < f(t_2))]$$

… … … … … …

$$E_{n-1}'(x,y) := [x \le y \to \exists t_1 \exists t_2 (E_{n-1}(t_1,t_2) \wedge f(t_1) < x \le y < f(t_2))] \wedge$$

$$[x > y \to \exists t_1 \exists t_2 (E_{n-1}(t_1, t_2) \wedge f(t_1) < y < x < f(t_2))]$$

Можно понять, что $E'_1(x,y),...,E'_{n-1}(x,y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_1(b,M) \subset ... \subset E'_{n-1}(b,M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n$, противореча нашему предположению.

($\Leftarrow$) Пусть для любого (p,q)-секатора $R(x,y)$ существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом E-классе. Поймем, что $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$. Возьмем произвольный (p,q)-секатор $R(x,y)$. Согласно предположению существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, так что $f(x) := \sup R(x,M)$ является константой на каждом E-классе. Предположим, что $E(x,y)$ – максимальное с таким свойством. Очевидно что для некоторого $1 \leq i \leq n-1$ $E(x,y) \equiv E_i(x,y)$. Далее рассмотрим поведение функции f на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, где $a \in p(M)$. Функция f не может быть константой на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, иначе f – константа на каждом E_{i+1}-классе, противореча максимальности E_i с таким свойством. Следовательно, f должна быть строго монотонной на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, иначе если она локально монотонная (не строго монотонная) на каждом $E_{i+1}(a,M)/E_i$, то появится $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $\overline{E}(x,y)$ такое, что $E_i(a,M) \subset \overline{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$, противореча тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что f является строго монотонной на каждом $E_{k+1}(a,M)/E_k$, где $i \leq k \leq n-2$ и f является строго монотонной на $p(M)/E_{n-1}$. Рассмотрим следующие формулы:

$$E'_{i+1}(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge (E_{i+1}(t_1,t_2) \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge$$
$$\wedge f(t_1) < y < f(t_2)]$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$E'_{n-1}(x,y) := U_q(x) \wedge U_q(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [U_p(t_1) \wedge U_p(t_2) \wedge (E_{n-1}(t_1,t_2) \wedge f(t_1) < x < f(t_2) \wedge$$
$$\wedge f(t_1) < y < f(t_2)]$$

Очевидно, что $E'_{i+1}(x,y),...,E'_{n-1}(x,y)$ – отношения эквивалентности, разбивающие $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_{i+1}(b,M) \subset ... \subset E'_{n-1}(b,M)$, откуда $RC_{bin}(q) \geq n-i$. Далее, если существует $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E^q(b,M) \subset E'_{i+1}(b,M)$, то рассмотрим следующую формулу:

$$\hat{E}(x,y) := U_p(x) \wedge U_p(y) \wedge \exists t_1 \exists t_2 [E^q(t_1,t_2) \wedge f(x) < t_1 < f(y) \wedge f(x) < t_2 < f(y)]$$

Очевидно, что $E_i(a,M) \subset \hat{E}(a,M) \subset E_{i+1}(a,M)$, опять противореча тому, что E_{i+1} является непосредственным последователем отношения E_i среди всех $\varnothing$-определимых отношений на $p(M)$. Аналогично доказывается, что не существует $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E^q(x,y)$, разбивающего $q(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем $E'_k(b,M) \subset E^q(b,M) \subset E'_{k+1}(b,M)$ для любого $i+1 \leq k \leq n-2$ или $E'_{n-1}(b,M) \subset E^q(b,M)$. Таким образом, $RC_{bin}(q) = n-i$, т.е. $RC_{bin}(p) > RC_{bin}(q)$. □

Следствие 2.4. Пусть T – счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $p, q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические, p неслабо ортогонален q. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $RC_{bin}(p) = RC_{bin}(q)$

(2) Существует (p,q)-секатор $R(x,y)$ такой, что для любого $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$, разбивающего $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, функция $f(x) := \sup R(x,M)$ не является константой на каждом E-классе.

(3) Существует (p,q)-секатор $R(x,y)$ такой, что функция $f(x) := \sup R(x,M)$ является локально монотонной (не локально константой) на $p(M)$.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК №0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны» (подприоритет «Фундаментальные исследования в области математики, механики, физики»).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Macpherson H.D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society. – 2000. – 352. – P. 5435-5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic. – 1998. – 63. – P. 1511-1528.

[3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic. – 2001. – 66. – P. 1382-1414.

[4] Вербовский В.В. О глубине функций слабо о-минимальных структур и пример слабо о-минимальной структуры без слабо о-минимальной теории // Proceedings of Informatics and Control Problems Institute. – 1996. – С. 207-216.

[5] Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures // Algebra and Model Theory / A. G. Pinus and K. N. Ponomaryov, editors. – Novosibirsk, 1997. – P. 209-223.

[6] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic. – 2007. – N 2(45). – P. 354-367.

REFERENCES

[1] Macpherson H.D. Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields. Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties. The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528

[3] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicate. The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414

[4] Verbovskiy V.V. About the depth of functions of weakly o-minimal structures and example of weakly o-minimal structure without weakly o-minimal theory. Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, 1996, pp. 207-216.

[5] Verbovskiy V.V. On formula depth of weakly o-minimal structures. Algebra and Model Theory, (A.G. Pinus and K.N. Ponomaryov, editors). Novosibirsk, 1997, pp. 209-223.

[6] Kulpeshov B.Sh. Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories. Annals of Pure and Applied Logic. 2007. N 2(45). P. 354-367.

ӘЛСІЗ О-МИНИМАЛДЫҚ ҚҰРЫЛЫМДАРДА БИНАРЛЫҚ ДӨҢЕСТІК РАНГІ

Б. Ш. Кулпешов

Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: әлсіз о-минималдық, есептік категориялық, дөңестік рангі, типтердің ортогоналдығы, унарлық функция.

Аннотация. Жұмыста есептік-категориялық әлсіз о-минималдық құрылымдар зерттеленеді. Унарлық функцияның жүріс-тұрыс терминдерді қолданып әлсіз ортогоналдық емес типтердің бинарлық дөңестік рангілері тең болу критерийі табылды.

Поступила 27.01.2015 г.