N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 299 (2015), 64 – 69

ORGANIZATION OF LIMITATIONS AT DECISION OF TASKS OF ROUTING

G. I. Salgarayeva, A. S. Akhmetova

Kazakh State Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: gulnaz_sal@mail.ru

Key words: route, great number, oriented count, spring, cycle, top, wavefront.

Abstract. In article formalization of restrictions of routing is considered. These restrictions are divided into three groups and formulated in terms of the theory of counts. In the first group of restrictions it is told about structure and length of a route. The second group of restrictions on calculation of routes of the count is connected with weighing of the count of routes and calculation of scales of edges of the count, and the third group of restrictions – routing calculation, the column of routes formulated in terms of a costal coloring.

ГРАФ МАРШРУТЫН ЕСЕПТЕУДЕ ШЕК ҚОЮДЫ ҰЙЫМДАСТЫРУ

Г. И. Салғараева, А. С. Ахметова

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: маршрут, жиын, бағытталған граф, тізбек, цикл, ілгек, толқын мөлшері, төбе.

Аннотация. Мақалада маршруттауға шек қоюды ұйымдастыру туралы қарастырылады. Қойылатын шектер үш топқа бөлінген және олар графтар теориясының терминінде сипатталған. Шек қоюдың бірінші тобында маршруттың құрылымы мен ұзындығы қарастырылады. Граф маршрутын есептеуде шек қоюдың екінші тобы граф маршрутын өлшеу және граф қабырғаларының салмағын есептеумен байланысты. Маршруттауды есептеудің үшінші тобы – граф маршрутының қабырғаларын бояу терминдерінде сипатталған маршруттауды есептеу.

R жиынындағы жұпталған төбелердің маршрутының жиындарынан тұратын G_{v_i}бағытталған графы құрылатын шек қоюдың бірінші тобын қарастырайық. Маршруттардың негізінде салынған, мен жұп төбелер арасының маршруты, жиынның құраушысы болып табылады және шектеулердің бірінші тобын осыған сәйкес сипаттайық.

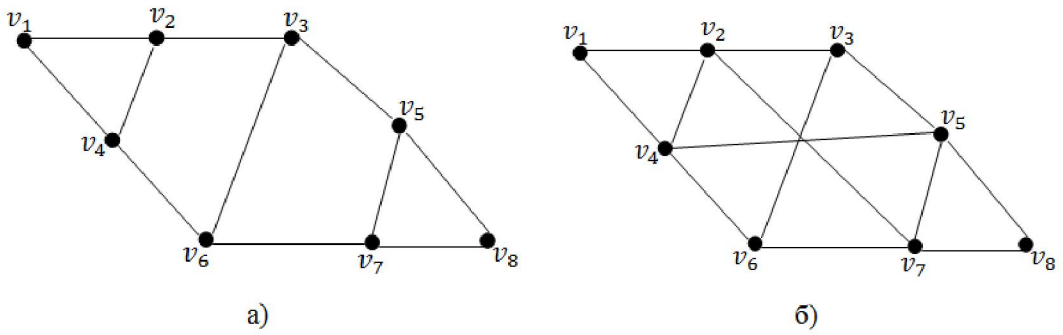
$(u, v) \in R$әрбір төбе жұбы үшін төмендегідей маршруттар құрылуы керек:

1. Кез келген аралық төбелер саны шектелген, яғни: $0 \leq L(u, v) \leq T$;
2. Кез келген маршрут G графының қарапайым тізбегі болып табылады, оның ішінде егер олардың аралық төбелері бар болса, онда олар V_2 жиынына жатады.

Кейбір есептердегі осындай маршруттарды салғанда, $T = 2$ мәні есептерге қойылып, олар шешілген болатын, яғни, V_2 жиынында, G графының компоненті анықталған жағдайда, $|V_2|$-байланыстырушы болып табылады. Мұндай жағдайда шектеуді алып тастап есепке болжам жасалады, олай болса әрбір қарастырылып отырған графтың төбесі қалған барлық төбелермен байланысқан, яғни олар G графына байланысты болып табылады. G графының құрамындағы маршруттың саны мен ұзындығы, $k(G)$санына тәуелді болады және оның төбелеріне байланысты анықталады. Сонымен қатар, желінің сенімділігін күшейту үшін, G графына сәйкес, маршруттың ұзындығын азайту

үшін, G графының байланыстырушы деңгейін күшейту керек немесе V_2жиынында салынған ішкі графты қолдану қажет. Кез келген байланыстырушы ішкі графтың байланысын арттырғанда, олардың байланысын дәлелдеу қиынға соқпайды және де байланысқан графтың маршрут саны, алдындағы графта артатын болады да, оның ең кіші маршрут ұзындығы керісінше кемитін болады.

Мысалы, G_1 және G_2 графтарын қарастырайық, ол 1а) және 1б) суретінде сәйкес көрсетілген.



1-сурет – G_1 және G_2 графтары

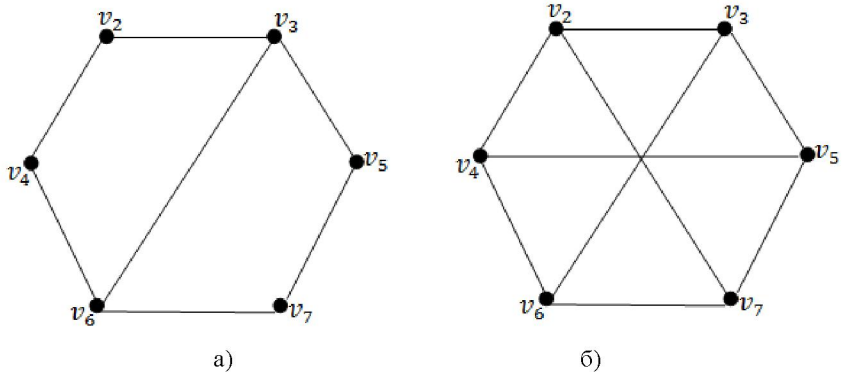
G_1 және G_2 графтары үшін $V_1 = \{v_1, v_8\}$ және $V_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ жиын төбелері болып табылады. Сонымен бірге, $T = 3$ мәні маршрут аралық төбелерінің ықтимал саны, ал R жиыны екі жұп төбеден, яғни $R = \{(v_1, v_8), (v_8, v_1)\}$ тұрады.

2-суретте ішкі графтар, яғни $G_1^{'}$және $G_2^{'}$ графтары көрсетілген, V_2 жиын төбесінен G_1 және G_2 графтары табылған (1-суретте). $k(G_1^{'}) = 2$, ал $k(G_2^{'}) = 3$, 2-суретте бейнеленген. G_1 графына барлық маршруттарды салатын болсақ, онда олар v_1 төбесінен v_8, яғни, $L(v_8, v_1)$ жиыны, (i) және (ii) шектеулеріне сәйкес болады. Мұндай маршруттардың өрнегі төмендегідей:

$$L(v_8, v_1) = \begin{Bmatrix} (v_1, v_2, v_3, v_5, v_8) \\ (v_1, v_4, v_6, v_7, v_8) \end{Bmatrix}$$

G_2 графы үшін, $L(v_8, v_1)$ жиыны мына түрде жазылады:

$$L(v_8, v_1) = \begin{Bmatrix} (v_1, v_2, v_3, v_5, v_8), \\ (v_1, v_4, v_6, v_7, v_8), \\ (v_1, v_2, v_7, v_8), \\ (v_1, v_4, v_5, v_8), \\ (v_1, v_2, v_4, v_5, v_8), \\ (v_1, v_2, v_7, v_5, v_8), \\ (v_1, v_4, v_2, v_7, v_8), \\ (v_1, v_4, v_5, v_7, v_8) \end{Bmatrix}.$$



2-сурет – $G_1^{'}$ және $G_2^{'}$ ішкі графтары

Соңғы жағдайда есептеу барысында барлық маршруттар алынды, яғни $L(v_8, v_1)$ жиыны G_1 графынан тұрады, сонымен қатар, қосымшалары бірнешеу, екеуі – (v_1, v_2, v_7, v_8) және (v_1, v_4, v_5, v_8) – кез келген G_1 графы, $L(v_8, v_1)$ жиынының маршруты болып табылады.

Лемма 1. Егер, $\mathrm{L(v_i)}$ жиынының барлық маршруттары, (1) және (2) шектеулерін қанағаттандыратын болса, онда $v_i \in V_i$ үшін барлық маршруттар **L** жиының (1) және (2) шектеулерін қанағаттандырады.

1 леммасына қатысты **L** жиынынан (1) және (2) шектеулеріне сәйкес маршруттар салу керек, осыған сәйкес, әрбір олардың әрбір төбелеріне $v_i \in V_i$, $\mathrm{L(v_i)}$ жиынының маршрутын салайық, бірақ олар қанағаттандыратын шектеулерге байланысты болады. Сол себепті болашақтағы алынатын барлық нәтижелерде кейбір $v_i \in V_i$ төбелер сипатталатын болады.

$\mathrm{FW_m^i} = \mathrm{FW_m(v_i)}$ етіп белгілейік, толқын мөлшерінің тәртібі m төбесі $\mathrm{v_i}$ болсын, сонымен қатар $\mathrm{FW_0^i} = \{v_i\}$ жиынының қабырғаларын енгіземіз және саламыз.

$$A_{v_i}^i = \{(u, v) \in E: u \in FW_{i+1}^i, v \in FW_i^i\} \tag{1}$$

Кез келген төбелер үшін, $u \in V_1' \cup V_2'$, $u \in FW_i^i$, төбелердің тізбектелуі болып табылады. Ол $x_1, \dots, x_n \in V_2'$ маршрутын, $l(u, x_1, \dots, x_n, v_i)$ қарапайым тізбекті білдіреді және $L(u, v_i) \leq t$ болып жазылады. [1]

Лемма 2. G графының барлық маршруты v_i төбесінің аяқталуымен оларды қанағаттандыратын (1) және (2) шектеулері G_{v_i} графында орналасқан болса, онда, ол төмендегідей сипатталады:

$$V^i = \cup_{t=0}^{T} FW_t^i \tag{2}$$

және

$$A_{v_i} = \cup_{t=0}^{T} A_{v_i}^t \tag{3}$$

Дәлелдеу. $\mathrm{G_{v_i}^{(t)}} = \left(\mathrm{W_i^{(t)}}, \mathrm{A_{v_i}^{(t)}}\right), \mathrm{t} \geq 0$ бағытталған ішкі графты **G** етіп белгілейік, v_i төбесінің аяқталуы барлық маршруттарды құрайды, мұндай маршруттардың төбелерінің аралық сандары **t** мәнінен аспайды. $\mathrm{W_{v_i}^{(t)}}$жиынының төбелерін $\mathrm{G_{v_i}^{(t)}}$ графы түрінде көрсетейік:

$$\mathrm{W_{v_i}^{(t)}} = \{u: u \in FW_m^i \backslash FW_{m-1}^i, m = \overline{1, t}\} =$$

$$= \{u: u \in FW_m^i \backslash FW_{m-1}^i, m = 1, \overline{t-1}\} \cup FW_t^i = \mathrm{W_{v_i}^{(t-1)}} \cup FW_t^i, t \geq 1 \tag{4}$$

$\mathrm{W_{v_i}^{(0)}} = \{\mathrm{v_i}\}$ етіп саламыз. $\mathrm{G_{v_i}^{(t)}}$ граф жиының қабырғасы төмендегідей түрде жазылады [2]:

$$\mathrm{A_{v_i}^{(t)}} = \{(\mathrm{u, v}) \in \varepsilon: \mathrm{u} \in \mathrm{FW_{m+1}^i}, \mathrm{v} \in \mathrm{FW_m^i}, \mathrm{m} = \overline{0, \mathrm{t}}\}, \mathrm{A_{v_i}^{(0)}} = \varnothing.$$

$\mathrm{A_{v_i}^{(t)}}$ жиынын тұрғызу үшін оны мына қатынаста пайдалануға болады:

$$\mathrm{A_{v_i}^{(t)}} = \{(u, v) \in E: u \in \mathrm{FW_{m+1}^i}, \mathrm{v} \in \mathrm{FW_m^i}, \mathrm{m} = 0, \mathrm{t}-1\} \cup \{(u, v) \in E: u \in \mathrm{FW_{t+1}^i}, \mathrm{v} \in \mathrm{FW_i^i}\} =$$

$$= \mathrm{A_{v_i}^{(t-1)}} \cup \mathrm{A_{v_i}^{(t)}}, \mathrm{t} \geq 1 \tag{5}$$

(4) және (5) формуласына сәйкес, барлық маршруттарды тұрғызу $\mathrm{G_{v_i}^{(t)}}$ графы үшін, v_i төбесінің аяқталуында циклдар мен ілгектер болмайды және де бұл маршруттардың аралық сандарының төбесі **t** мәнінен аспайды. $V^i = W_{v_i}^{(T)}, A_{v_i} = A_{v_i}^{(T)}$соңында келтіріген қатынастар қалады және лемма дәлелденді.[3]

Енді, шектеудің екінші тобын қарастырайық. G_{v_i} графының әрбір қабырғасы үшін,мәндердің өлшемді функциясын анықтайтын p(. , .)мен оның маршруттауда басым болатынына қатыстысын қарастырайық. Бірінші шектеуден алатынымыз, маршруттаудың тәртібі бойынша желі қызметінің қалыпты шартқа байланыстысы алдындағы бірінші негізгі бағытта қолданылған.

Қорыта келгенде, $G_{\mathrm{v_i}}[P]$ өлшенген графты тұрғызу міндетіміз, p(. , .) өлшенген бүтін санды функцияны есептеумен байланысты және де олар (iii) және (iv) шектеулерімен есептеледі.

$D_p^{'}$ жиынын белгілейік, ал G_{v_i} графы барлық төбелерді құрайтын, u көршілес төбеге және қысқа маршруттар u төбесі арқылы v_i төбесіне, сонымен қатар ол p-ға сәйкес бағытта болу керек. Келтірілген жиын мына түрде жазылады:

$$D_p^{'}(u) = \{y: p(u,y) = p; y \in D^{'}(u)\}, p \in P, u \in V_1^{'} \cup V_2^{'} \text{ мен}$$

$$D_{p_1}^{'}(u) \cap D_{p_2}^{'}(u) = \emptyset \text{егер } p_1 \neq p_2.$$

Төмендегі жиынды енгізейік,

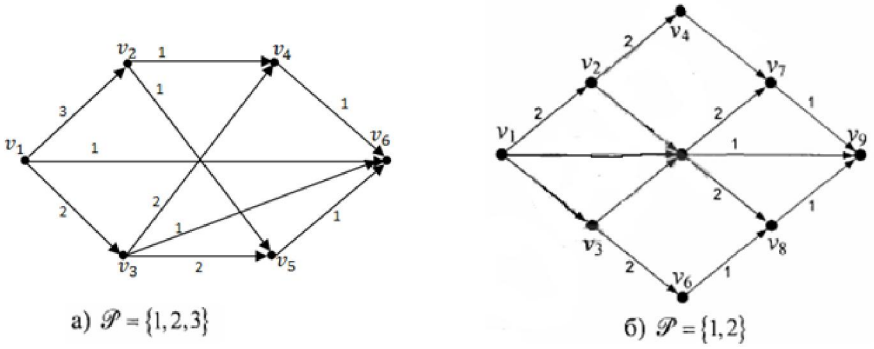
$$F_p^i(u) = \{y: p(u,y) > p; y \in D^{'}(u)\}, \tag{6}$$

және байқағанымыздай, келесі арақатынас орнын алады:

$$F_p^i(u) = D^{'}(u) \backslash \bigcup_{q=1}^{p} D_q^{'}(u) = F_{p-1}^i(u) \backslash D_p^i(u) \tag{7}$$

Мұндағы, $F_0^i(u) = D^{'}(u)$.

$G_{v_i}[\mathcal{P}] = (\mathcal{V}^i, A_{v_i}, \mathcal{P})$ белгісін бағытталған өлшенген графты(iii)және (iv)қанағаттандыратын шектеулермен бірге белгілеу үшін пайдаланамыз, яғни, $\mathcal{P} = \{1, \dots, P\}$ бұл G_{v_i} графының жиынында өлшенген қабырға болуы мүмкін және желі дабылдамасының көптеген белгілері мен таңдау бағытын беру осы жиынға сәйкестендіріледі.(iii)және (iv) шектеулерінің орындалуы, 3а) және 4б) суретінде көрсетілген.



3-сурет – (iii) және (iv) шектеулерінің орындалуының мысалы

Шектеудің үшінші тобы маршрутты салу кезіндегі, яғни жалпы басы мен жалпы ақыры арасындағы маршруттың бірдей бөлікке бөлінуіне байланысты болуы керек. Қарастырылып отырған шектеулер, $\widetilde{G_{v_i}} = (V^i, \overline{A_{v_i}})$ мультиграфын салуға арналған, ал өлшенген бағытталған графта $G_{v_i}[\mathcal{P}] = (\mathcal{V}^{'}, \mathcal{A}_{v_i}, \mathcal{P})$. $\tilde{G}$ мультиграфының желі дабылдамасында, оның әрбір мультиқабырғасының қабырға санын есептеу әдісі ұсынылған. Қазір, талапқа сай желі дабылдамасының бірдей етіп бөлу жүктемесі оның графтық моделіне әрбір граф үшін $\widetilde{G_{v_i}} 2^H$ түстерін бірдей етіп, әрбір төбеге, төбе және мультиқабырғалар бойынша бөлу керек және маршруттың құраушысы оның көзі мен оның ағуын құрау үшін керек. [4]

Қарастырылып отырған топтың шектеуін тұжырымдау үшін, төмендегілерді ескере отырып есептеу керек:

(а) әрбір u төбесінің бағытталған графы $2^{\alpha(u)}$үшін мультиқабырғадан шығу болады, ол $0 \leq \alpha(u) \leq H$ болып табылады;

(б) мультиқабырғаның (u,x) әрбір қабырға саны $2^{\beta(u,x)}$, $0 \leq \beta(u,x) \leq H$;

(в) тек мультиқабырға үшін бір уақытта өрнектің ρ салмағы жасалады.

$\widetilde{G_{v_i}}$мультиграф қабырғасының өрнегінің әдісін тұжырымдау үшін белгі енгізейік. $D(u)$ – u төбесінің бейнесі, ал $B(u,x)$ – мультиқабырғаның басы. u төбесі мен x төбесінің ақыры (келесілерде (u,x) мультиқабырға) жиын қабырға болып табылады.

(u,x) мультиқабырғаның барлық қабырғасын қайта нөмірлейік, 0-ден бастап, $N(u,x)$ – 1 нөмірі, $N(u,x) = |B(u,x)|$ және $B(u,x)$ жиынын мына түрде көрсетейік:

$$B(u,x) = \{b_0(u,x), b_1(u,x), \dots, b_{N(u,x)-1}(u,x)\}, \quad (8)$$

$\widetilde{G_{v_i}}$ граф қабырғасының өрнегі үшін, $\mathcal{G}$ жиынның қайта нөмірленген түстерін енгізейік, 0 санынан бастап қойылған есептің сәйкестенуі мен алынған жиынның түрі төмендегідей:

$$\mathcal{G} = \{0,1,\dots,2^H - 1\} \quad (9)$$

$\mathcal{G}(u,x) \subseteq \mathcal{G}$ түс жиынын(u,x) мультиқабырға өрнегі үшін белгілейік, және кез келген u төбесі үшін, келесі қатынас орындалуы керек:

$$\mathcal{G}(u,x) \cap \mathcal{G}(u,y) = \emptyset, x \neq y, x,y \in D(u), \quad (10)$$

$$\mathcal{G} = \bigcup_{x \in D(u)} \mathcal{G}(u,x) \quad (11)$$

$b_1(u,x)$қабырғасының өрнегі үшін $\mathcal{G}_1(u,x) \subseteq \mathcal{G}(u,x)$ жиын түстерін енгізейік. Осы салдардан, түстер, қабырға өрнектері үшін қолданылған әр түрлі нөмірлер бір-бірімен ұқсас болмауы керек, және ол келесі қатынас түрінде болады:

$$\mathcal{G}_1(u,x) \cap \mathcal{G}_m(u,x) = \emptyset, l \neq m, l,m \in \mathcal{N}(u,x) \quad (12)$$

$$\mathcal{G}(u,x) = \bigcup_{l \in \mathcal{N}(u,x)} \mathcal{G}_1(u,x) \quad (13)$$

(12) және (13) формуласы мен жоғарыда енгізілген белгіні пайдаланып, шектеуді тұжырымдайық, ол үшін $\widetilde{G_{v_i}}$ мультиграф қабырғасының өрнегі 1 дабылдама жүктемесінің бөлінуіне сәйкес болуы керек.

a) $(\bigcup_{x \in D(u)} \bigcup_{l \in \mathcal{N}(u,x)} \mathcal{G}_1(u,x) = \mathcal{G}$, т.с. барлық түстер $\mathcal{G}$ жиынының барлық қабырғалардың өрнегі u төбесінен басталып қолдануы керек.

b) $|\mathcal{G}(u,x)| = |\mathcal{G}(u,y)|$, $x \neq y$, $x,y \in D(u)$т.с.с, мультиқабырға өрнегін пайдалану үшін u төбесінің шығысы түстер санымен бірдей болуы керек.

c) $|\mathcal{G}_1(u,x)| = |\mathcal{G}_m(u,x)|$, $l \neq m, l,m \in \mathcal{N}(u,x)$, $x \in D(u)$т.с. (u,x) мультиқабырғаның қабырға өрнегі үшін, түстер саны бірдей болуы керек.

Қабырға өрнегінің бірнеше әдістері бар, олардың ең танымалы, кездейсоқ әдіс болып табылады. Бұл әдісте, қабырға өрнегі кездейсоқ түрде орындалады (қайтарусыз таңдау) және циклдық, яғни сол уақытқа дейін жиын түстері таусылмайынша орындала береді. Ағылшын тіліндегі деректемелерде бұл әдістің аты Randomized Round-Robin.

a) және c) шектеулерінің бұзылу мысалын қарастырайық, олар әр түрлі нұсқада көрсетілген. Мысалы, a) шектеуі – (v_2, v_4) мультиқабырға өрнегі бұзылған кезде$\{0,1,2,3,4,5$ түстерін пайдаланады. b) шектеуі (v_1, v_2) және (v_1, v_3) мультиқабырғалардың арасындағы бұзылу түстердің бөлінуін, ал (v_1, v_2) мультиқабырғасының өрнектері 6 түс, (v_1, v_3) мультиқабырғасы 2 түс ғана пайдаланады. (v_1, v_3) мультиқабырғалары түстерді бөлген кездегі қабырғалар арасындағы c) шартын орындамады. Сонда нәтижесінде бір қабырға 3 түске, ал екіншісі – бес түске боялған.

Қорыта келгенде, маршруттауға шек қоюды ұйымдастырудың үш тобыда жоғарыда сипатталып көрсетілді.

ӘДЕБИЕТ

[1] Самуйлов К.Е. Методы анализа и расчета сетей ОКС 7. – М.: РУДН, 2002. – 57 с.
[2] Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: МАИ, 1992. – 123 с.
[3] Салғараева Г.И. Графтар теориясы. – Алматы.: Дәуір, 2013. – 97 б.
[4] Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, ГРФМЛ, 1987. – 42 с.

REFERENCES

[1] Samuylov K.E. Methods of the analysis and account of networks OKS 7. M.: *RUDN*, **2002**. 57 p. (in Russ.).
[2] Nefedov V.N., Osipova V.A. Rate of discrete mathematics. M.: *MAI*, **1992**. 123 p. (in Russ.).
[3] Salgaraeva G.I. The theory the column. A.: Dau'r, **2013**. 97 p. (in Kaz.).
[4] Samarckiy A.A. Introduction in numerical methods. M.: *Nauka*, GRFML, **1987**. 42 p. (in Russ.).

ОРГАНИЗАЦИЯ ОГРАНИЧЕНИЙ НА РАСЧЕТ МАРШРУТОВ ГРАФА

Г. И. Салгараева, А. С. Ахметова

Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: маршрут, множество, ориентированный граф, пружина, цикл, вершина,фронт волны.

Аннотация. В статье рассматривается формализация ограничений маршрутизации. Эти ограничения разделены на три группы и сформулированы в терминах теории графов. В первой группе ограничений говорится о структуре и длине маршрута. Вторая группа ограничений на расчет маршрутов графа связана с взвешиванием графа маршрутов и вычислением весов ребер графа, а третья группа ограничений – расчет маршрутизации, сформулированная в терминах реберной раскраски графа маршрутов.

Поступила 27.01.2015 г.