N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 83 – 88

SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION SECOND ORDER

E. A. Bakirova, N. B. Iskakova, T. Armya

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan,
Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan,
Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: bakirova1974@mail.ru, narkesh@mail.ru, turar@mail.ru

Keywords: differential equations, boundary value problem, solvability.

Abstract. Criterion of solvability of linear boundary value problem for ordinary differential equation is received by parametrization method. An algorithm for finding solution of considering problem is offered.

УДК 517.927

ЕКІНШІ РЕТТІ ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕБІНІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІ

Э. А. Бакирова, Н. Б. Искакова, Т. Армия

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан,
Абай атындағы қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан,
Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: дифференциалдық теңдеу, шеттік есеп, шешілімділік.

Аннотация. Параметрлеу әдісі негізінде екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Қарастырылып отырған есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылған.

$[0,T]$ кесіндісінде екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есеп қарастырылады

$$\frac{d^2z}{dt^2} = q_1(t)\frac{dz}{dt} + q_2(t)z + f(t), \quad t \in (0,T), \ x \in R, \tag{1}$$

$$z(0) = z_0, \ z(T) = z_1, \tag{2}$$

мұндағы $q_1(t), q_2(t), f(t)$ функциялары $[0,T]$ кесіндісінде үзіліссіз, z_0, z_1- берілген сандар, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|, \quad \|q_1(t)\| \le \delta_1, \ \|q_2(t)\| \le \delta_2, \ \delta_1, \delta_2 - const.$

Нормасы $\|z\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|z(t)\|$ болатын үзіліссіз функциялар $z:[0,T] \to R$ кеңістігін $C([0,T],R)$ деп белгілейміз.

(1), (2) есебінің шешімі деп (1) екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеуін қанағаттандыратын және $t = 0$, $t = T$ нүктелеріндегі мәндері үшін (2) теңдіктері орындалатын $[0,T]$ кесіндісінде екі рет дифференциалданатын үзіліссіз $z(t)$ функциясын айтамыз.

Шеттік есептер теориясы дифференциалдық теңдеулердің көкейкесті және белсенді дамып келе жатқан бөлімдердің бірі болып табылады, себебі шеттік есептер тербелістер теориясында, математикалық физикада, вариациялық есептеулерде, тиімді басқаруда және басқа қолданбалы есептерде мейлінше көп түрде қолданысы бар [1-3]. Ол екінші ретті теңдеулер үшін жан-жақты дамытылған және Штурмның осцилляциялық теориясынан кері есептердің заманауи теориясына дейінгі нәтижелерді қамтиды.

Екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есептер әртүрлі әдістермен көптеген авторлардың жұмыстарында қарастырылған [4-10].

[11] жұмысында жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есепті зерттеуге және шешуге арналған параметрлеу әдісі ұсынылған болатын.

Ұсынылып отырған мақаланың мақсаты - параметрлеу әдісі негізінде (1), (2) есебінің бірмәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттарын тағайындау және шешімін табудың алгоритмдерін құру болып табылады.

Параметрлеу әдісінің схемасын пайдаланып, $[0,T]$ кесіндісін келесі бөліктерге бөлейік: $[0,T)=\bigcup_{r=1}^{N}[(r-1)h,rh)$. Ізделінді функцияның бөлінген аралықтарға сығылуын $z_r(t)$ деп белгілейік.

$\lambda_r = z_r((r-1)h)$, $\mu_r = \dot{z}_r((r-1)h)$ қосымша параметрлерін енгізіп және де әрбір $[(r-1)h,rh)$ аралықтарында $y_r(t)=z_r(t)-\lambda_r-\mu_r(t-(r-1)h)$, $r=\overline{1,N}$ алмастыруларын жасасақ, онда (1), (2) есебі келесі параметрі бар шеттік есебіне келтіріледі

$$\frac{d^2y_r}{dt^2}=q_1(t)\frac{dy}{dt}+q_2(t)y_r+q_1(t)\mu_r+q_2(t)\lambda_r+q_2(t)\mu_r\cdot(t-(r-1)h)+f(t),$$

$$t\in\left[(r-1)h,rh\right),\quad r=\overline{1,N}, \tag{3}$$

$$y_r((r-1)h)=0,\qquad \dot{y}((r-1)h)=0, \tag{4}$$

$$\lambda_1=z_0,\qquad \lambda_N+\mu_N h+\lim_{t\to T-0}y_N(t)=z_T, \tag{5}$$

$$\lambda_s+\mu_s h+\lim_{t\to sh-0}y_s(t)-\lambda_{s+1}=0,\qquad s=\overline{1,N-1}, \tag{6}$$

$$\mu_s+\lim_{t\to sh-0}\dot{y}_s(t)-\mu_{s+1}=0,\qquad s=\overline{1,N-1}. \tag{7}$$

(1), (2) және (3)−(7) есептері пара-пар болады. Егер $z(t)$ функциясы (1), (2) есебінің шешімі болса, онда келесі $(\lambda,\mu,y[t])$ үштігі, мұндағы

$$\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_N),\ \lambda_r=z[(r-1)h],\ \mu=(\mu_1,\ldots,\mu_N),\ \mu_r=\dot{z}[(r-1)h],$$

$$y[t]=(y_1(t),\ldots,y_N(t)),\ y_r(t)=z(t)-z((r-1)h)-\mu(t-(r-1)h),\quad r=\overline{1,N},$$

(3)−(7) есебінің шешімі болады. Керісінше, егер $(\tilde{\lambda},\tilde{\mu},\tilde{y}[t])$ үштігі, мұндағы $\tilde{\lambda}=(\tilde{\lambda}_1,\ldots,\tilde{\lambda}_N)$, $\tilde{\mu}=(\tilde{\mu}_1,\ldots,\tilde{\mu}_N)$, $\tilde{y}[t]=(\tilde{y}_1(t),\ldots,\tilde{y}_N(t))$, (3)−(7) есебінің шешімі болса, онда $\tilde{z}(t)=\tilde{y}_r(t)+\tilde{\lambda}_r+\tilde{\mu}_r(t-(r-1)h)$, $t\in[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $\tilde{z}(T)=\lim_{t\to T-0}\tilde{y}_N(t)+\tilde{\lambda}_N+\tilde{\mu}_N h$, теңдіктерімен анықталатын $\tilde{z}(t)$ функциясы (1),(2) есебінің шешімі болады.

(3), (4) Коши есептері келесі екінші текті Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне пара пар болады

$$\dot{y}_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} q_1(\tau)\dot{y}_r(\tau)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t} q_1(\tau)y_r(\tau)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t} q_1(\tau)d\tau\cdot\mu_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t} q_2(\tau)d\tau\cdot\lambda_r+$$

$$+\int\limits_{(r-1)h}^{t} q_2(\tau)(\tau-(r-1)h)d\tau\cdot\mu_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t} f(\tau)d\tau,\quad t\in[(r-1)h,rh),\ r=\overline{1,N}, \tag{8}$$

$$y_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t}\dot{y}_r(\tau)d\tau,\ r=\overline{1,N}. \tag{9}$$

$p(t)$ функциясы $[(r-1)h,\ rh)$ аралықтарында үзіліссіз және солжақты ақырлы $\lim\limits_{t\to rh-0} p(t),\ r=\overline{1,N}$ шегі бар делік. ν натурал санын алып $E_{\nu r}(q(\cdot),p(\cdot),t)$ деп келесі қосындыны белгілейміз

$$\int\limits_{(r-1)h}^{t} p(\tau_1)d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t} q(\tau_1)\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} p(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1+\int\limits_{(r-1)h}^{t} q(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} q(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} p(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1.$$

Енді (8) интегралдық теңдеуінің оң жағындағы бірінші қосылғышта интегралдың астындағы $\dot{y}_r(\tau)$ функциясының орнына сәйкесінше оң жақтарын қойып, бұл үдерісті $\nu\ (\nu=1,2,\ldots)$ рет қайталасақ, онда $\dot{y}(t)$ және $y(t)$ функцияларының кейіптемелерін аламыз

$$\begin{gathered}\dot{y}_r(t)=G_{\nu r}(\dot{y}_r(\cdot),t)+E_{\nu r}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_r(\cdot),t)+E_{\nu r}(q_1(\cdot),q_1(\cdot),t)\mu_r+\\+E_{\nu r}(q_1(\cdot),q_2(\cdot),t)\lambda_r+E_{\nu r}(q_1(\cdot),\widetilde{q}_2(\cdot),t)\mu_r+E_{\nu r}(q_1(\cdot),f(\cdot),t),\ r=\overline{1,N},\end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered}y_r(t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} G_{\nu r}(\dot{y}_r(\cdot),\tau)d\tau+\int\limits_{(r-1)h}^{t} E_{\nu r}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_r(\cdot),\tau)d\tau+\\+\int\limits_{(r-1)h}^{t} E_{\nu r}(q_1(\cdot),q_1(\cdot),\tau)d\tau\cdot\mu_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t} E_{\nu r}(q_1(\cdot),q_2(\cdot),\tau)d\tau\cdot\lambda_r+\\+\int\limits_{(r-1)h}^{t} E_{\nu r}(q_1(\cdot),\widetilde{q}_2(\cdot),\tau)d\tau\cdot\mu_r+\int\limits_{(r-1)h}^{t} E_{\nu r}(q_1(\cdot),f(\cdot),\tau)d\tau,\quad r=\overline{1,N},\end{gathered} \tag{11}$$

мұндағы

$$\widetilde{q}_2(t)=q_2(t)\cdot(t-(r-1)h),$$

$$G_{\nu r}(\dot{y}_r(\cdot),t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} q_1(\tau_1)\ldots\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-2}} q_1(\tau_{\nu-1})\int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}}\dot{y}_r(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1,\quad r=\overline{1,N}.$$

(10), (11) теңдеулерінен $\lim\limits_{t\to rh-0}\dot{y}_r(t),\ \lim\limits_{t\to rh-0} y_r(t),\ r=\overline{1,N}$ мәндерін тауып, оларды (5), (6), (7) шарттарына қойсақ, λ_r, μ_r, $r=\overline{1,N}$ параметрлері үшін келесі теңдеулер жүйесін аламыз

$$\lambda_1=z_0, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\lambda_N+\mu_N h+\int\limits_{(N-1)h}^{T} E_{\nu N}(q_1(\cdot),q_2(\cdot),\tau)d\tau\cdot\lambda_N+\int\limits_{(N-1)h}^{T} E_{\nu N}(q_1(\cdot),q_1(\cdot),\tau)d\tau\cdot\mu_N+\\+\int\limits_{(N-1)h}^{T} E_{\nu N}(q_1(\cdot),\widetilde{q}_2(\cdot),\tau)d\tau\cdot\mu_N=z_T-\int\limits_{(N-1)h}^{T} E_{\nu N}(q_1(\cdot),f(\cdot),\tau)d\tau-\\-\int\limits_{(N-1)h}^{T} G_{\nu N}(\dot{y}_N(\cdot),\tau)d\tau-\int\limits_{(N-1)h}^{T} E_{\nu N}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_N(\cdot),\tau)d\tau,\end{gathered} \tag{13}$$

$$\lambda_s + \mu_s h + \int_{(s-1)h}^{sh} E_{\nu s}(q_1(\cdot),q_2(\cdot),\tau)d\tau \cdot \lambda_s + \int_{(s-1)h}^{sh} E_{\nu s}(q_1(\cdot),q_1(\cdot),\tau)d\tau \cdot \mu_s +$$

$$+ \int_{(s-1)h}^{sh} E_{\nu s}(q_1(\cdot),\tilde{q}_2(\cdot),\tau)d\tau \cdot \mu_s - \lambda_{s+1} = - \int_{(s-1)h}^{sh} E_{\nu s}(q_1(\cdot),f(\cdot),\tau)d\tau - \tag{14}$$

$$- \int_{(s-1)h}^{sh} E_{\nu s}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_s(\cdot),\tau)d\tau - \int_{(s-1)h}^{sh} G_{\nu s}(\dot{y}_s(\cdot),\tau)d\tau, \quad s=\overline{1,N-1},$$

$$\mu_s + E_{\nu s}(q_1(\cdot),q_2(\cdot),sh)\lambda_s + E_{\nu s}(q_1(\cdot),q_1(\cdot),sh)\mu_s + E_{\nu s}(q_1(\cdot),\tilde{q}_2(\cdot),sh)\mu_s - \mu_{s+1} =$$

$$= -E_{\nu s}(q_1(\cdot)f(\cdot),sh) - E_{\nu s}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_s(\cdot),sh) - G_{\nu s}(\dot{y}_r(\cdot),sh), \quad s=\overline{1,N-1}. \tag{15}$$

Сызықты теңдеулер жүйесінің сол жағына сәйкес келетін $(2N \times 2N)$- өлшемді матрицаны $Q_\nu(h)$ деп белгілейміз. Онда (12)-(15) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін векторлық түрде жазуға болады

$$Q_\nu(h)\Lambda = -F_\nu(h) - G_\nu(y,\dot{y},h), \quad \Lambda \in R^{2N} \tag{16}$$

мұндағы

$$\Lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N),$$

$$F_\nu(h) = \Bigg(-h^2 z_0, h^2(-z_T + \int_{(N-1)h}^{T} E_{\nu N}(q_1(\cdot),f(\cdot),t)dt),$$

$$\int_0^h E_{\nu,1}(q_1(\cdot),f(\cdot),t)dt, \int_h^{2h} E_{\nu,2}(q_1(\cdot),f(\cdot),t)dt, \ldots, \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} E_{\nu,N-1}(q_1(\cdot),f(\cdot),t)dt,$$

$$E_{\nu,1}(q_1(\cdot),f(\cdot),h), E_{\nu,2}(q_1(\cdot),f(\cdot),2h),\ldots,E_{\nu,N-1}(q_1(\cdot),f(\cdot),(N-1)h) \Bigg),$$

$$G_\nu(y,\dot{y},h) = \Bigg(0,\ h^2 \cdot \int_{(N-1)h}^{T} (G_{\nu,N}(\dot{y}_N(\cdot),t) + E_{\nu,N}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_N(\cdot),t))dt,$$

$$\int_0^h (G_{\nu,1}(\dot{y}_1(\cdot),t) + E_{\nu,1}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_1(\cdot),t))dt,\ldots$$

$$\ldots, \int_{(N-2)h}^{(N-1)h} (G_{\nu,N-1}(\dot{y}_{N-1}(\cdot),t) + E_{\nu,N-1}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_{N-1}(\cdot),t))dt,$$

$$G_{\nu,1}(\dot{y}_1(\cdot),h) + E_{\nu,1}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_1(\cdot),h),\ldots$$

$$\ldots, G_{\nu,N-1}(\dot{y}_{N-1}(\cdot),(N-1)h) + E_{\nu,N-1}(q_1(\cdot),q_2(\cdot)y_{N-1}(\cdot),(N-1)h \Bigg).$$

Сонымен, белгісіз $\Lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N,\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_N)$ параметрлерін табу үшін (16) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін алдық, ал белгісіз $\dot{y}(t) = (\dot{y}_1(t),\dot{y}_2(t),\ldots,\dot{y}_N(t))$ функциясын (3), (4) Коши есебінен табамыз. Енді (3)-(7) есебінің шешімі төмендегі алгоритм арқылы анықталатын $(\lambda^{(k)},\mu^{(k)},y^{(k)}[t])$, $k = 0,1,2,\ldots$, ұштік тізбегінің шегі ретінде ізделінеді.

0-ші қадам: а) $Q_\nu(h)$ матрицасының кері матрицасы бар деп жорамалдап, Λ параметрінің $\Lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)},\mu_1^{(0)},\mu_2^{(0)},\ldots,\mu_N^{(0)})$ бастапқы жуықтауын $Q_\nu(h)\Lambda = -F_\nu(h)$ теңдеуінен табамыз;

б) $\Lambda^{(0)} \in R$ векторының компоненттерін қолданып және $[(r-1)h, rh)$ аралықтарында $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$, $\mu_r = \mu_r^{(0)}$, $r = \overline{1,N}$ болғанда (3), (4) Коши есебін шешіп, $\dot{y}_r^{(0)}(t)$, $r = \overline{1,N}$, функциясын тауып, оны (9) теңдеуінің оң жағына қойып $y_r^{(0)}(t), r = \overline{1,N}$, функциясың табамыз.

1-ші қадам: а) Табылған $\dot{y}^{(0)}[t] = (\dot{y}_1^{(0)}(t), \dot{y}_2^{(0)}(t), \ldots, \dot{y}_N^{(0)}(t))$, $y^{(0)}[t] = (y_1^{(0)}(t), y_2^{(0)}(t), \ldots, y_N^{(0)}(t))$ функцияларын (11) сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінің оң жағына қойып,

$$Q_\nu(h)\Lambda = -F_\nu(h) - G_\nu(y^{(0)}, \dot{y}^{(0)}, h)$$

теңдеуінен $\Lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)}, \mu_1^{(1)}, \mu_2^{(1)}, \ldots, \mu_N^{(1)})$ параметрін табамыз.

б) $[(r-1)h, rh)$ аралықтарында $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, $\mu_r = \mu_r^{(1)}$, $r = \overline{1,N}$ болғанда (3), (4) Коши есебін шешіп, $\dot{y}_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1,N}$, функциясын тауып, оны (9) теңдеуінің оң жағына қойып $y_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1,N}$ функциясың табамыз. Т.с.с.

Осы үдерісті қайталап, алгоритмнің $k-$шы қадамында ($k = 0,1,2,\ldots$) $(\lambda^{(k)}, \mu^{(k)}, y^{(k)}[t])$ ұштік тізбегін аламыз.

Ұсынылып отырған алгоритмнің жүзеге асуы мен жалғыз шешімге жинақталуының жеткілікті шарттары және (1), (2) шеттік есебінің жалғыз шешімі болатыны келесі теоремада келтірілген

Теорема 1. Егер $h > 0 : Nh = T$, $\nu \in \mathrm{N}$ үшін $Q_\nu(h) : R^{2N} \to R^{2N}$ матрицасының кері матрицасы бар болса және

а) $\left\| [Q_\nu(h)]^{-1} \right\| \le \gamma_\nu(h)$,

б) $$\xi_\nu(h) = \gamma_\nu(h)\max(1, h^3)\left(\frac{(\delta_1 h)^\nu}{\nu!} + \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\delta_1 h)^j}{j!}\delta_2 h^2\right)\times$$
$$\times\left(\delta_1 h + \delta_2 h + \delta_2\frac{h^2}{2!}\right)\exp\left(\delta_1 h + \frac{\delta_2 h^2}{2!}\right) < 1$$

теңсіздіктері орындалса, онда (1),(2) есебі бірмәнді шешілімді болады.

Теорема 2. (1),(2) есебі бірмәнді шешілімді сонда тек қана сонда, егер кезкелген $h > 0 : Nh = T$ үшін $\nu \in \mathrm{N}$ саны табылып, $Q_\nu(h) : R^{2N} \to R^{2N}$ матрицасының кері матрицасы бар болса және а), б) теңсіздіктері орындалса.

Келтірілген тұжырымдардың дәлелдеуі [11] жұмыстағы сәйкес тұжырымдардың дәлелдеуіне ұқсас жүргізіледі.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука. 1981. - 918 с.

[2] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука. 1969. -528 с.

[3] Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы исследования решения краевых задач. Киев: Наук. думка. 1985. - 224 с.

[4] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве. // Дифференц. уравнения. 1966. 2(3), С. 382 - 390.

[5] Крейн С.Г., Лаптев Г.И. Корректность граничных задач для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. // Дифференц. уравнения. 1966. 2(7), С. 910- 926.

[6] Ермаков В.А. Дифференциальные уравнения второго порядка. Условия интегрируемости в конечном виде. Киев // Университетские известия. 1980. С.1-25.

[7] Ельиин М.И. Качественные проблемы линейного дифференциального уравнения второго порядка. // ДАН СССР. 1948. Т.68 (2). С.221-224.