N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 29 – 35

INTEGRAL BOUNDARY CONDITIONS OF ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARAIBLE COEFFICIENTS

T. Sh. Kalmenov, D. Suragan

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan, e-mail: suragan@list.ru

Keywords: boundary integral condition, elliptic equation, boundary value problem, fundamental solution.

Abstract. In this note we construct integral boundary conditions of second order elliptic differential equations with variable coefficients generalizing results in [2]. We also obtain similar results for polyharmonic operators, that is, integral boundary conditions of iterated Laplacian are constructed.

УДК 517.956

ГРАНИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: граничное интегральное условие, эллиптическое уравнение, краевая задача, фундаментальное решение.

Аннотация. Построены интегральные граничные условия для эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, которые обобщают результаты в [2]. Мы также получили аналогичные результаты для полигармонических операторов.

1. Введение. Пусть $\Omega \subset R^d$ открытая ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение второго порядка

$$D(u) = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x),\ x \in \Omega. \quad (1)$$

Функций a_{ij}, b_j и c вещественные функций, которые для удобства предполагаются C^∞-функциями.

Определение 1. Вещественный скалярный линейный дифференциальный оператор второго порядка D называется строго эллиптическим в Ω, если существует гладкая функция $\gamma(x) > 0$ такой, что

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\xi_i\,\xi_j \geq \gamma(x)|\xi|^2 \quad (2)$$

для всех $\xi \in R^d$. Если $\gamma > 0$ константа независимая от x и условие (2) выполняется для всех $x \in \Omega$, то D называется равномерно строго эллиптическим.

Определение 2. Пусть $x \in R^d$ любая фиксированная точка. Тогда распределение $E(x, y)$ называется фундаментальным решением дифференциального оператора D (в R^d), если она удовлетворяет уравнение

$$D_y\big(E(x,y)\big) = \delta(x-y) \tag{3}$$

где δ является распределением Дирака (в обобщенном смысле). Как обычно в уравнении (3) обозначение D_y означает дифференцированию по y.

Для строго эллиптических операторов D_y может быть показано, по формуле Грин, что из уравнении (3) следует

$$D_x\big(E(x,y)\big) = \delta(x-y) \tag{4}$$

для любого фиксированного $y \in R^d$.

Для общего дифференциального оператора, существование фундаментального решения является не тривиальным.

Имеет место

Лемма (Хермандер). [1] Пусть D равномерный строго эллиптический оператор четного порядка с вещественными коэффициентами $a_{ij} \in C^\infty$. Тогда для каждого компактной области $\overline{\Omega} \subset R^d$ с $\partial\Omega \in C^\infty$ существует локальное фундаментальное решение $E(x,y)$, которое C^∞ функция для всех переменных $x \neq y$ и $x, y \in \overline{\Omega}$.

В разделе 2 этой работы, используя свойства фундаментальных решений, и мы построили корректную краевую задачу для дифференциального уравнения (1). В разделе 3 мы обобщили этот результат для полигармонических уравнений. На протяжении всей работы мы используем обозначения из [4]-[6].

2. Эллиптические уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Пусть $\Omega_1 \subset \cdots \subset \Omega_n \subset R^d$ открытые ограниченные области с границами $\partial\Omega_i \in C^\infty$, $i = 1, \dots, n$, соответственно. По лемме Хермандера существует локальное фундаментальное решение $E_i(x,y)$ оператора D для каждого Ω_i. Рассмотрим следующую функцию

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy \tag{5}$$

в $\Omega \subset \Omega_1$, где

$$G(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E_i(x,y)\ x, y \in \Omega. \tag{6}$$

Тривиальное наблюдение показывает, что и $u(x)$ является решением (1) в Ω. Цель этого раздела это – найти граничное условие такое, что с этим граничным условием уравнение (1) имело единственное решение в $H^2(\Omega)$, которое являлось $u(x)$.

Теорема 1. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ (5) является единственным решением уравнения (1) (в $H^2(\Omega)$) с граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\big\{\partial_{\upsilon y}u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j\, u\big\}dy = 0\,, x \in \partial\Omega, \tag{7}$$

где $\partial_{\upsilon y} = \sum_{k,j=1}^d n_j\, a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$ является конормальной производной и $n_1, n_2, \dots\dots, n_d$ -компоненты вектора нормали на границе.

Доказательства теоремы 1. Из (6) легко видеть, что G фундаментальное решение оператора D в Ω. Поэтому

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy$$

решение уравнении (1) и принадлежит к $H^2(\Omega)$ для любого $f \in L_2(\Omega)$. Кроме того, следующее представление формулы может быть получено из обобщенной второй формулы Грина в пространстве Соболева [4]

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y)f(y)dy + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\big\{\partial_{\upsilon y}u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j\, u\big\}dy \tag{8}$$

для каждого $x \in \Omega$. Из (5) и (8) означает, что

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y)u(y)dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\left\{\partial_{\upsilon y}u(y) - \sum_{j=1}^d n_j b_j\, u\right\}dy = 0$$

для каждого $x \in \Omega$.

Используя свойств двойного и простого слоя потенциалов [4] при $x \to \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y) u(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\{\partial_{\upsilon y} u(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j u\} dy = 0 \; x \in \partial\Omega.$$

Мы показали, что (5) является решением краевой задачи (1) с граничным условием (7) в $H^2(\Omega)$. Теперь докажем ее единственность. Если краевая задача имеет два решения, то функция $\vartheta = u - u_1 \in H^2(\Omega)$ удовлетворяет однородное уравнение

$$D(\vartheta) = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_j}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_i} + c(x)\vartheta = 0, \;\; x \in \Omega, \tag{9}$$

и граничное условие (7), т.е.

$$-\frac{\vartheta(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y) \vartheta(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\{\partial_{\upsilon y} \vartheta(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j \vartheta\} dy = 0, x \in \partial\Omega. \tag{10}$$

Так как в этом случае $f \equiv 0$, вместо (8) имеем следующую формулу представлении

$$\vartheta(x) = \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y) \vartheta(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\{\partial_{\upsilon y} \vartheta(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j \vartheta\} dy \tag{11}$$

для каждого $x \in \Omega$. Как и выше, с помощью свойства двойного и простого слоя потенциалов при $x \to \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{\vartheta(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\upsilon y} G(x,y) \vartheta(y) dy - \int_{\partial\Omega} G(x,y)\{\partial_{\upsilon y} \vartheta(y) - \sum_{j=1}^{d} n_j b_j \vartheta\} dy = 0, x \in \partial\Omega. \tag{12}$$

Сравнивая это с (10), приходим к

$$\vartheta(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{13}$$

Однородное строгое эллиптическое уравнение второго порядка (9) с граничным условием Дирихле (13) имеет только одно тривиальное решение $\vartheta \equiv 0$. Это показывает, что граничная задача (1) с граничным условием (7) имеет единственное решение в $H^2(\Omega)$.

Теорема 1 доказана.

Пример. [2] Пусть D оператор Δ –Лапласа, $n = 1$ и $\Omega_1 = R^d$, $d \geq 2$ тогда

$$\varepsilon(x-y) := E_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)s_d} \dfrac{1}{|x-y|^{d-2}}, & d \geq 3, \\ -\dfrac{1}{2\pi} log|x-y|, & d = 2 \end{cases}$$

является фундаментальным решением оператора Лапласа в Ω_1, $s_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{г\left(\frac{d}{2}\right)}$ является площадью поверхности единичной сферы в R^d и $|x-y|$ стандартным евклидовым расстоянием между x и y. Поэтому вместо (5) имеем

$$u(x) = \int_{\Omega} \varepsilon_d(x-y) f(y) dy, \qquad x \in \Omega, \tag{14}$$

который является единственным решением

$$-\Delta u(x) = f(x), \qquad x \in \Omega \tag{15}$$

с граничным условием

$$-\frac{u(x)}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_d(x-y)}{\partial n_y} u(y) dy - \int_{\partial\Omega} \varepsilon_d(x-y) \frac{\partial u(y)}{\partial n_y} dy = 0, x \in \partial\Omega, \tag{16}$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y}$ обозначает внешнюю нормальную производную в точке y на $\partial\Omega$.

3. Полигармонические уравнения. Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2 \ldots\ldots \subset \Omega_n \subset R^d$ открытые ограниченные области с границами $\partial\Omega_i \in C^\infty$, $i = 1, \ldots, n$, соответственно. По лемме Хермандера существует локальное фундаментальное решение $E_i(x,y)$ полигармонического уравнения

$$(-\Delta_x)^m u(x) = f(x) \qquad m = 1,2, \ldots \tag{17}$$

для каждого Ω_i.

Рассмотрим следующую функцию

$$u(x) = \int_{\Omega} G(x,y) f(y) dy \tag{18}$$

в $\Omega \subset \Omega_1$, где

$$G(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E_i(x,y), x, y \in \Omega. \tag{19}$$

Тривиальное наблюдение показывает, что и (18) является решением (17) в Ω. Цель этого раздела это – найти граничное условие такое, что с этим граничным условием уравнение (1) имело единственное решение в $H^{2m}(\Omega)$, которое совпадает с (18).

Теорема 2. Для каждого $f \in L_2(\Omega)$ (18) является единственным решением уравнения (17) в $H^{2m}(\Omega)$ с граничными условиями

$$-\frac{1}{2}(-\Delta_x)^i u(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y - \sum_{j=0}^{m-i-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{j+i} u(y) dS_y = 0, i = \overline{0, m-1}, x \in \partial\Omega \qquad (20)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + n_n \frac{\partial}{\partial y_n}$-нормальная производная на границе и $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_d$ -компоненты единичной нормали.

Доказательства Теоремы 2. Применяя формулу Грина (для каждого $x \in \Omega$) получаем

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^m u(y) dy$$

$$= \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y) G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-1} u(y) dy + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1} u(y) dS_y$$

$$- \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial (-\Delta_y)^{m-1} u(y)}{\partial n_y} dS_y$$

$$= \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^2 G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-2} u(y) dy$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(-\Delta) G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-2} u(y) dS_y$$

$$- \int_{\partial\Omega} (-\Delta) G_{m,d}(x,y) \frac{\partial (-\Delta_y)^{m-2} u(y)}{\partial n_y} dS_y$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial G_{m,d}(x,y)}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1} u(y) dS_y - \int_{\partial\Omega} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial (-\Delta_y)^{m-1} u(y)}{\partial n_y} dS_y = \cdots =$$

$$u(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^j u(y) dS_y - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j u(y) dS_y, x \in \Omega, \qquad (21)$$

где $\frac{\partial}{\partial n_y} = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + n_n \frac{\partial}{\partial y_n}$-нормальная производная на границе и $n_1, n_2, \ldots\ldots, n_d$ -компоненты единичной нормали. Это означает, тождество

$$\sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^j u(y) dS_y - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j u(y) dS_y = 0, x \in \Omega. \qquad (22)$$

Когда $x \to \partial\Omega$, используя свойства двойного и простого слоя потенциалов, из (22) получим

$$-\frac{1}{2} u(x) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^j u(y) dS_y - \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y) \frac{\partial}{\partial n_y} (-\Delta_y)^j u(y) dS_y = 0, \quad x \in \partial\Omega. \qquad (23)$$

Таким образом, это соотношение является одним из граничных условий (18). Выведем остальные граничные условия. Для этого мы устанавливаем

$$(-\Delta_x)^{m-i}(-\Delta_x)^i u(x) = f(x) \quad i = \overline{0, m-1}, \ m = 1,2, \ldots \qquad (24)$$

и проводим подобные вычисления, как и выше,

$$(-\Delta_x)^i u(x) = \int_\Omega (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i}(-\Delta_y)^i u(y)dy =$$
$$\int_\Omega (-\Delta_y)(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i-1}(-\Delta_y)^i u(y)dy +$$
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i-1}(-\Delta_y)^i u(y)dS_y -$$
$$\int_{\partial\Omega} (-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-i-1}(-\Delta_y)^i u(y)dS_y =$$
$$\int_\Omega (-\Delta_y)^2(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i-2}(-\Delta_y)^i u(y)dy +$$
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i-2}(-\Delta_y)^i u(y)dS_y -$$
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-i-2}(-\Delta_y)^i u(y)dS_y +$$
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i-1}(-\Delta_y)^i u(y)dS_y -$$
$$\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-i-1}(-\Delta_y)^i u(y)dS_y = \ldots =$$
$$\int_\Omega (-\Delta_y)^{m-i}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^i u(y)dy +$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-i-1-j}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^j(-\Delta_y)^i u(y)dS_y -$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-i-1-j}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^j(-\Delta_y)^i u(y)dS_y =$$
$$(-\Delta_x)^i u(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1}\frac{\partial}{\partial n_y}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-i-1-j}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^j(-\Delta_y)^i u(y)dS_y -$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-i-1-j}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^j(-\Delta_y)^i u(y)dS_y, x \in \Omega,$$

где $(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)$ являются фундаментальными решениями полигармонического уравнения (24); т.е.

$$(-\Delta_x)^{m-i}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y) = \delta(x-y) \qquad i = \overline{0, m-1}.$$

От предыдущих соотношений мы получим тождества

$$I_i u(x) := \sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{j+i}u(y)dS_y -$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-1-j} G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{j+i}u(y)dS_y = 0$$

$x \in \partial\Omega$, $i = \overline{0, m-1}$. Используя свойства двойного и простого слоя потенциалов как $x \to \partial\Omega$, мы находим

$$-\frac{1}{2}(-\Delta_x)^j u(x) +$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{j+i}u(y)dS_y -$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{j+i}u(y)dS_y = 0,\ x\in\partial\Omega. \qquad (25)$$

И все являются граничными условиями (18). От этого классического подхода (переходя к пределу) можно легко показать, что формулы (25) остаются в силе для всех $u\in H^{2m}(\Omega)$ [4]. И наоборот, покажем, что если функция $\omega\in H^{2m}(\Omega)$ удовлетворяет уравнение $(-\Delta)^m\omega = f$ и граничные условия (20), то оно совпадает с решением (18). В самом деле, в противном случае функция

$$\vartheta = u-\omega\in H^{2m}(\Omega)$$

где u является (18), удовлетворяет однородное уравнение

$$(-\Delta)^m\vartheta = 0 \qquad (26)$$

и граничные условия (20), т.е.

$$I_i\vartheta(x) := -\frac{1}{2}(-\Delta_x)^j\vartheta(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{j+i}\vartheta(y)dS_y -$$
$$\sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-1-i}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{j+i}\vartheta(y)dS_y = 0 \qquad (27)$$
$$x\in\partial\Omega,\ \ i=\overline{0,m-1}.$$

Применяя формулу Грина к функции $\vartheta\in H^{2m}(\Omega)$ и следуя линии вышеуказанных рассуждений, мы получим

$$0 = \int_\Omega(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-i}(-\Delta_y)^i\vartheta(y)dy =$$
$$\int_\Omega(-\Delta_y)(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-1}\vartheta(y)dy +$$
$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{m-1}(-\Delta_y)^i\vartheta(y)dS_y -$$
$$\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^i G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-1}\vartheta(y)dS_y = \cdots =$$
$$(-\Delta_x)^i\vartheta(x) + \sum_{j=0}^{m-i-1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)(-\Delta_y)^{j+i}\vartheta(y)dS_y -$$
$$\sum_{j=0}^{m-j-1}\int_{\partial\Omega}(-\Delta_y)^{m-1-j}G_{m,d}(x,y)\frac{\partial}{\partial n_y}(-\Delta_y)^{j+i}\vartheta(y)dS_y \qquad x\in\Omega,\ \ i=\overline{0,m-1}.$$

Переходя к пределу при $x\to\partial\Omega$, следовательно, мы получим соотношения

$$(-\Delta_x)^i\vartheta(x)|_{x\in\partial\Omega} = I_i\vartheta(x)|_{x\in\partial\Omega} = 0,\ i=\overline{0,m-1} \qquad (28)$$

Единственность решения краевой задачи

$$(-\Delta)^m\vartheta = 0$$
$$(-\Delta)^i\vartheta|_{x\in\partial\Omega} = 0,\ i=\overline{0,m-1}$$

следует, что $\vartheta = u-\omega\equiv 0$, $\forall x\in\Omega$, т.е. ω совпадает с (18). Таким образом (18) является единсвенным решением краевой задачи (17), (20) в Ω.

Теорема 2 доказано.

Замечание. Это следует из теоремы 2, что ядро (19), которая является одним из фундаментальных решений полигармонического уравнения (17), является функцией Грина краевой задачи (17), (20) в Ω.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hormander L., The analysis of linear partial differential operators, I-IV, – 1985. – Springer-Verlag Berlin.

[2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. To spectral problems for the volume potential // Doklady Mathematics, – 2009. – No 80, – P. 646-649.
[3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation // Differential Equations, – 2012. – No 48, – P. 604-608.
[4] Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. – 2008. – Heidelberg.
[5] McLean W., Strongly elliptic systems and boundary integral equations, – 2000. Cambridge Univ. Press, Cambridge UK.

REFERENCES

[1] Hormander L., The analysis of linear partial differential operators, I-IV, Springer-Verlag Berlin, 1985.
[2] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *To spectral problems for the volume potential*, Doklady Mathematics, 2009. No 80, 646-649.
[3] Kalmenov T. Sh., Suragan D. *Boundary conditions for the volume potential for the polyharmonic equation*, Differential Equations, 2012. No 48, 604-608.
[4] Hsiao G.C., Wendland W.L. Boundary Integral Equations. Heidelberg, 2008. .
[5] McLean W., Strongly elliptic systems and boundary integral equations, Cambridge Univ. Press, Cambridge UK, 2000.

АЙНЫМАЛЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ ЭЛЛИПТИКАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ШЕГАРАЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ ШАРТТАР

Т. Ш. Кәлменов, Д. Сұраған

Тірек сөздер: шекаралық интегралдық шарт, эллиптикалық теңдеу, шектік есеп.

Аннотация. Жұмыста екінші ретті айнымалы коэффициентті эллиптикалық дифференциалдық теңдеулер үшін [2]-ші жұмыстағы нәтижелерді жалпылайтын шегаралық интегралдық шарттар ұсынылады. Және де полигармоникалық операторлар үшін де ұқсас нәтижелер алынған.

Поступила 17.03.2015 г.