N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 5 – 13

ON ALGEBRAS OF DISTRIBUTIONS OF BINARY FORMULAS FOR QUITE O-MINIMAL THEORIES

B. Sh. Kulpeshov[1], S. V. Sudoplatov[2]

[1]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz
[2]Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Keywords: weak o-minimality, quite o-minimality, countable categoricity, algebra of distributions, binary formula, monoid.

Abstract. Algebras of distributions of binary isolating formulas for countably categorical quite o-minimal theories are studied and their generalized commutability is proved.

УДК 510.67

ОБ АЛГЕБРАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ВПОЛНЕ О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ

Б. Ш. Кулпешов [1], С. В. Судоплатов [2]

[1]Международный университет информационных технологий, Алматы, Казахстан,
[2]Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

Ключевые слова: слабая о-минимальность, вполне о-минимальность, счетная категоричность, алгебра распределений, бинарная формула, моноид.

Аннотация. В настоящей работе исследованы алгебры распределений бинарных изолирующих формул для счетно категоричных вполне о-минимальных теорий и доказана их обобщенная коммутативность.

Настоящая работа касается понятия слабой о-минимальности, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a < c < b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots \rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M.

В работах [2-10] исследуются распределения бинарных изолирующих и полуизолирующих формул, связывающих реализации типов. В частности, в монографии [7] рассматривается общий подход к описанию бинарных связей между реализациями 1-типов на языке меток попарно неэквивалентных полуизолирующих формул. Все необходимые определения можно также найти в [7].

Пусть T – полная теория, $M \models T$, и $p(x), q(y) \in S_1(\varnothing)$ реализуются в M. Формула $\varphi(x,y)$ называется (p,q)*-устойчивой* (или (p,q)*-полуизолирующей*), если существует элемент $a \in M$ такой, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,M) \subseteq q(M)$. Будем говорить, что a *полуизолирует* b посредством (p,q)*-устойчивой* формулы $\varphi(x,y)$, если выполняется $\models p(a)$, $\models q(b)$ и $\models \varphi(a,b)$. Если дополнительно формула $\varphi(a,y)$ является главной над $\{a\}$, то говорят, что a *изолирует* b, а формула $\varphi(x,y)$ называется (p,q)*-изолирующей*.

Определим для каждой (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} := \{(a,b) \mid M \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)*-дугой*. Если $\varphi(a,y)$ – главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$*-формулой*, т.е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] := \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)*-ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)*-ребром*. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*.

Для типов $p(x), q(y) \in S_1(\varnothing)$ обозначим через $PF(p,q)$ множество $\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y)$ – главная формула, $\varphi(a,M) \subseteq q(M)$, где $\models p(a)\}$. Пусть $PE(p,q)$ – множество пар $(\varphi(x,y), \psi(x,y))$ формул из $PF(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

Очевидно, что $PE(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $PF(p,q)$. Заметим, что каждому $PE(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $PF(p,q)/PE(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $PFS(p,q)$ и $PFN(p,q)$, где $PFS(p,q)$ состоит из $PE(p,q)$-классов, соответствующих главным ребрам, а $PFN(p,q)$ состоит из $PE(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Зафиксируем полную теорию T. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ – некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ – через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками*.

Рассмотрим инъективные меточные функции $\nu(p,q): PF(p,q)/PE(p,q) \to U$, где $p(x), q(y) \in S_1(\varnothing)$, при которых классам из $PFN(p,q)/PE(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $PFS(p,q)/PE(p,q)$ – элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задается по формуле $x = y$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где $\nu(p) := \nu(p,p)$, а через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \varnothing$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $PF(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ – формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)\wedge\theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1,p_2,...,p_{k+1}\in S_1(\varnothing)$ и множеств меток $X_1,X_2,...,X_k\subseteq U$ обозначим через $P(p_1,X_1,p_2,X_2,...,p_k,X_k,p_{k+1})$ множество, состоящее из всех меток $u\in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x,y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1\in X_1\cap\rho_{\nu(p_1,p_2)}$,..., $u_k\in X_k\cap\rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a,M)\subseteq\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,...,p_k,u_k,p_{k+1}}(a,M)$, где

$$\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,...,p_k,u_k,p_{k+1}}(x,y):=\exists x_2,x_3,...,x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x,x_2)\wedge\theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2,x_3)\wedge...$$
$$...\wedge\theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1},x_k)\wedge\theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k,y))$$

Тем самым, на булеане $P(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями $P(p_1,\cdot,p_2,\cdot,...,\cdot,p_k,\cdot,p_{k+1})$, где $p_1,...,p_{k+1}\in S_1(\varnothing)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R\subseteq S_1(\varnothing)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами множества $\bigcup\limits_{p,q}PF(p,q)/PE(p,q)$. Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $P(U)$.

Пример 1 (Example 2.6.1, [1]) Пусть $M=\langle M,<,P_1^1,P_2^1,f^1\rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретацию P_2 с Q, упорядоченной как обычно, а P_1 с $Q\times Q$, упорядоченной лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f)=P_1(M)$ и $Range(f)=P_2(M)$ и определяется посредством $f((n,m))=n$ для всех $(n,m)\in Q\times Q$.

Известно, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p:=\{P_1(x)\},q:=\{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p,q\in S_1(\varnothing)$. Если обратимся к меточным функциям, то имеем: $\rho_{\nu(q)}=\{0,1,2\}$, $\rho_{\nu(p)}=\{0,3,4,5,6\}$, $\rho_{\nu(p,q)}=\{7,8,9\}$, $\rho_{\nu(q,p)}=\{10,11,12\}$, где

$$\theta_0(x,y):=x=y,\ \theta_{q,1,q}(x,y):=x<y\wedge P_2(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{q,2,q}(x,y):=x>y\wedge P_2(x)\wedge P_2(y),$$
$$\theta_{p,3,p}(x,y):=x<y\wedge E(x,y)\wedge P_1(y),\ \theta_{p,4,p}(x,y):=x>y\wedge E(x,y)\wedge P_1(y),$$
$$\theta_{p,5,p}(x,y):=x<y\wedge\neg E(x,y)\wedge P_1(y),\ \theta_{p,6,p}(x,y):=x>y\wedge\neg E(x,y)\wedge P_1(y),$$
$$\theta_{p,7,q}(x,y):=f(x)=y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{p,8,q}(x,y):=f(x)<y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),$$
$$\theta_{p,9,q}(x,y):=f(x)>y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{q,10,p}(x,y):=x=f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y),$$
$$\theta_{q,11,p}(x,y):=x>f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y),\ \theta_{q,12,p}(x,y):=x<f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y).$$

Алгебра $P_{\nu(q)}$ задается следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	0	1	2
0	{0}	{1}	{2}
1	{1}	{1}	{0, 1, 2}
2	{2}	{0, 1, 2}	{2}

Для алгебры $P_{\nu(p)}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	3	4	5	6
0	$\{0\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0, 3, 4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
4	$\{4\}$	$\{0, 3, 4\}$	$\{4\}$	$\{5\}$	$\{6\}$
5	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{5\}$	$\{0, 3, 4, 5, 6\}$
6	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{6\}$	$\{0, 3, 4, 5, 6\}$	$\{6\}$

Согласно таблицам Кэли, алгебры $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$ являются коммутативными моноидами, причем моноид $P_{\nu(q)}$ изоморфен ограничению моноида $P_{\nu(p)}$ на множество $\{0, 3, 4\}$.

Определение 2. [11] Пусть T – слабо о-минимальная теория, M – достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x,\overline{a}), \overline{a} \in M$, – произвольная формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x,\overline{a})$ ($RC(\phi(x,\overline{a}))$) определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq 0$, если $M \models \exists x \phi(x,\overline{a})$.

2) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq 1$, если $\phi(M,\overline{a})$ бесконечно.

3) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \alpha+1$, если существует параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ такое, что существуют $b_i, i \in \omega$, которые удовлетворяют следующему:

– Для любых $i, j \in \omega$, всякий раз когда $i \neq j$ мы имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$;

– Для каждого $i \in \omega$ $RC(E(x,b_i)) \geq \alpha$ и $E(M,b_i)$ – выпуклое подмножество множества $\phi(M,\overline{a})$.

4) $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \delta$, если $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \alpha$ для всех $\alpha \leq \delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x,\overline{a})) = \alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x,\overline{a}))$ *определяется.* В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x,\overline{a})) \geq \alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x,\overline{a})) = \infty$.

Определение 3. [12] *Рангом выпуклости 1-типа* p ($RC(p)$) называется инфимум множества $\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$, т.е. $RC(p) := \inf\{RC(\phi(x)) \mid \phi(x) \in p\}$.

В Примере 1 тип p не слабо ортогонален типу q, $dcl(\{a\}) \cap q(M) \neq \varnothing$ и $dcl(\{b\}) \cap p(M) = \varnothing$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$, $RC(p) = 2, RC(q) = 1$.

Ранг выпуклости произвольной одноместной формулы $\phi(x)$ назовем *бинарным* и будем обозначать через $RC_{bin}(\phi(x))$, если в Определении 2 параметрически определимые отношения эквивалентности заменим на $\varnothing$-определимые (т.е. бинарные) отношения эквивалентности. Тогда очевидно, что в произвольной счетно категоричной слабо о-минимальной теории бинарный ранг выпуклости одноместной формулы конечен. Следовательно, для любого неалгебраического 1-типа $p \in S_1(\varnothing)$ выполняется $RC_{bin}(p) < \omega$.

Определение 4. (Байжанов Б.С., [13]) Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A, B \subseteq M$, M – $|A|^+$-насыщенна, $p, q \in S_1(A)$ – неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *слабо ортогональным* типу q, если существуют A-определимая формула $H(x,y), \alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Вернемся к Примеру 1. Алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ получается расширением алгебр $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$ следующими действиями:

а) $n \cdot 0 = 0 \cdot n = \{n\}$, $n \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\}$,

б) $7 \cdot 1 = \{8\}$, $7 \cdot 2 = \{9\}$, $7 \cdot 10 = \{0, 3, 4\}$, $7 \cdot 11 = \{6\}$, $7 \cdot 12 = \{5\}$, в) $8\cdot 1=\{8\}$, $8\cdot 2=\{7, 8, 9\}$, $8\cdot 10=\{5\}$, $8\cdot 11=\{0, 3, 4, 5, 6\}$, $8\cdot 12=\{5\}$,

г) $9\cdot 1=\{7, 8, 9\}$, $9\cdot 2=\{9\}$, $9\cdot 10=\{6\}$, $9\cdot 11=\{6\}$, $9\cdot 12=\{0, 3, 4, 5, 6\}$,

д) $10\cdot 3=\{10\}$, $10\cdot 4=\{10\}$, $10\cdot 5=\{12\}$, $10\cdot 6=\{11\}$, $10\cdot 7=\{0\}$, $10\cdot 8=\{1\}$, $10\cdot 9=\{2\}$,

е) $11\cdot 3=\{11\}$, $11\cdot 4=\{11\}$, $11\cdot 5=\{10, 11, 12\}$, $11\cdot 6=\{11\}$, $11\cdot 7=\{2\}$, $11\cdot 8=\{0, 1, 2\}$, $11\cdot 9=\{2\}$,

ж) $12\cdot 3=\{12\}$, $12\cdot 4=\{12\}$, $12\cdot 5=\{12\}$, $12\cdot 6=\{10, 11, 12\}$, $12\cdot 7=\{1\}$, $12\cdot 8=\{1\}$, $12\cdot 9=\{0, 1, 2\}$.

Нетрудно понять, что алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ является некоммутативным моноидом с частичной операцией умножения.

Пример 5. Пусть $M=\langle M,<,P_1^1,P_2^1,f^1\rangle$ – линейно упорядоченная структура, так что M есть непересекающееся объединение интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, при этом $P_1(M)<P_2(M)$. Мы отождествляем интерпретации P_1 и P_2 с Q, упорядоченной как обычно. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $Dom(f)=P_1(M)$ и $Range(f)=P_2(M)$ и определяется посредством $f(a)=a$ для всех $a\in Q$.

Может быть доказано, что M – счетно категоричная слабо о-минимальная структура. Пусть $p:=\{P_1(x)\}, q:=\{P_2(x)\}$. Очевидно, что $p,q\in S_1(\varnothing)$ и f – $\varnothing$-определимая биекция $p(M)$ на $q(M)$. Обращаясь к меточным функциям, имеем: $\rho_{\nu(q)}=\{0, 1, 2\}$, $\rho_{\nu(p)}=\{0, 3, 4\}$, $\rho_{\nu(p,q)}=\{5, 6, 7\}$, $\rho_{\nu(q,p)}=\{8, 9, 10\}$, где

$$\theta_0(x,y):=x=y,\ \theta_{p,1,p}(x,y):=x<y\wedge P_1(x)\wedge P_1(y),\ \theta_{p,2,p}(x,y):=x>y\wedge P_1(x)\wedge P_1(y),$$

$$\theta_{q,3,q}(x,y):=x<y\wedge P_2(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{q,4,q}(x,y):=x>y\wedge P_2(x)\wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,5,q}(x,y):=f(x)=y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{p,6,q}(x,y):=f(x)<y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),$$

$$\theta_{p,7,q}(x,y):=f(x)>y\wedge P_1(x)\wedge P_2(y),\ \theta_{q,8,p}(x,y):=x=f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y),$$

$$\theta_{q,9,p}(x,y):=x>f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y),\ \theta_{q,10,p}(x,y):=x<f(y)\wedge P_2(x)\wedge P_1(y).$$

Алгебра $P_{\nu(q)}$ задается той же самой таблицей Кэли как и алгебра $P_{\nu(q)}$ из Примера 1. Алгебра $P_{\nu(p)}$ имеет ту же самую таблицу Кэли с точностью до взаимно однозначного отображения π множества $\rho_{\nu(p)}$ на множество $\rho_{\nu(q)}$: $\pi(0)=0, \pi(1)=3, \pi(2)=4$. Рассмотрим алгебру $P_{\nu(\{p,q\})}$. Поскольку $\theta_{p,i,q}\cdot\theta_{q,j,p}=\theta_{p,k,p}$ для некоторого $k\in\{0, 1, 2\}$, а $\theta_{q,j,p}\cdot\theta_{p,i,q}=\theta_{q,l,q}$ для некоторого $l\in\{0, 3, 4\}$, то данная алгебра уже не будет коммутативной. А так как $\theta_{p,i,p}\cdot\theta_{q,j,q}=\varnothing$, то операция $\cdot$ будет частичной.

Будем говорить, что алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ является *обобщенно коммутативной*, если существует взаимно однозначное отображение $\pi:\rho_{\nu(p)}\to\rho_{\nu(q)}$, свидетельствующее о том, что алгебры $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$ изоморфны (т.е. когда их таблицы Кэли совпадают с точностью до π), и для любых $l\in\rho_{\nu(p,q)}$, $m\in\rho_{\nu(q,p)}$ имеет место $\pi(l\cdot m)=m\cdot l$.

Можно доказать, что в Примере 5 алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативной. В то время как алгебра $P_{\nu(\{p,q\})}$ из Примера 1 не является обобщенно коммутативной, поскольку не существует изоморфизма между $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$, а также например, $10\cdot 7=\{0\}$, $7\cdot 10=\{0, 3, 4\}$, т.е. $10\cdot 7\subset 7\cdot 10$.

Определение 6. [14] Пусть M – слабо о-минимальная структура, $A,B\subseteq M$, M – $|A|^+$-насыщенна, $p,q\in S_1(A)$ – неалгебраические типы. Будем говорить что тип p не является *вполне ортогональным* типу q, если существует A-определимая биекция $f:p(M)\to q(M)$. Будем говорить, что слабо о-минимальная теория является *вполне о-минимальной*, если понятия слабой и вполне ортогональности 1-типов совпадают.

Очевидно, что в Примере 5 теория $\mathrm{Th}(M)$ является вполне о-минимальной, а в Примере 1 теория $\mathrm{Th}(M)$ не является вполне о-минимальной. В работе [15] были полностью описаны счетно категоричные вполне о-минимальные теории. Следующая теорема представляет описание алгебры распределений бинарных изолирующих формул для пары не слабо ортогональных типов в произвольной счетно категоричной вполне о-минимальной теории.

Теорема 7. Пусть T – счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $p,q \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические типы, p не слабо ортогонален q. Тогда алгебра $\mathrm{P}_{\nu(\{p,q\})}$ является обобщенно коммутативным моноидом.

Доказательство Теоремы 7. Пусть M – модель теории T. Так как p не слабо ортогонален q, то в силу вполне о-минимальности T существует $\varnothing$-определимая функция $f: p(M) \to q(M)$, являющаяся локально монотонной биекцией $p(M)$ на $q(M)$. В силу бинарности счетно категоричной вполне о-минимальной теории существует $n < \omega$ такой, что $RC(p) = RC(q) = n$, т.е. существуют $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности $E_1^p(x,y),\ldots,E_{n-1}^p(x,y)$ и $E_1^q(x,y),\ldots,E_{n-1}^q(x,y)$, разбивающие $p(M)$ и $q(M)$ соответственно на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, при этом $E_1^p(a,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}^p(a,M)$ и $E_1^q(b,M) \subset \ldots \subset E_{n-1}^q(b,M)$ для некоторых (любых) $a \in p(M), b \in q(M)$.

Не умаляя общности, предположим что f – локально возрастающая функция на $p(M)$, т.е. f является строго возрастающей на каждом E_1^p-классе. Рассмотрим следующие меточные формулы:

$$\theta_0(x,y) := x = y,$$
$$\theta_{p,1,p}(x,y) := x < y \wedge E_1^p(x,y),\ \theta_{q,1',q}(x,y) := x < y \wedge E_1^q(x,y),$$
$$\theta_{p,2,p}(x,y) := x > y \wedge E_1^p(x,y),\ \theta_{q,2',q}(x,y) := x > y \wedge E_1^q(x,y),$$
$$\theta_{p,3,p}(x,y) := x < y \wedge \neg E_1^p(x,y) \wedge E_2^p(x,y),\ \theta_{q,3',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_1^q(x,y) \wedge E_2^q(x,y),$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\theta_{p,2n-1,p}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y),\ \theta_{q,(2n-1)',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y),$$
$$\theta_{p,2n,p}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y),\ \theta_{q,(2n)',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y),$$
$$\theta_{p,2n+1,q}(x,y) := f(x) = y,\ \theta_{q,4n+2,p}(x,y) := x = f(y),$$
$$\theta_{p,2n+2,q}(x,y) := f(x) < y \wedge E_1^q(f(x),y),\ \theta_{q,4n+3,p}(x,y) := x > f(y) \wedge E_1^q(x,f(y)),$$
$$\theta_{p,2n+3,q}(x,y) := f(x) > y \wedge E_1^q(f(x),y),\ \theta_{q,4n+4,p}(x,y) := x < f(y) \wedge E_1^q(x,f(y)),$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\theta_{p,4n+1,q}(x,y) := f(x) > y \wedge \neg E_{n-1}^q(f(x),y),\ \theta_{q,6n+2,p}(x,y) := x < f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x,f(y)).$$

Осталось понять, что для любых меток l,m таких, что $l \in \{2n+1,\ldots,4n+1\}$ и $m \in \{4n+2,\ldots,6n+2\}$, имеет место равенство $l \cdot m = m \cdot l$ с точностью до изоморфизма между алгебрами $P_{\nu(p)}$ и $P_{\nu(q)}$.

Случай 1. $\theta_{p,l,q}(x,y) \equiv f(x) = y \wedge P_1(x) \wedge P_2(y)$.

Если $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$, то очевидно что $l \cdot m = \{0\} = m \cdot l$.

Если $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge E_1^q(x,f(y))$, то в силу того, что f – строго возрастающая функция на каждом E_1^p-классе, мы имеем: $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^p(x,y)$, и $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x > y \wedge E_1^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_i^q(x,f(y)) \wedge E_{i+1}^q(x,f(y))$ для некоторого $1 \le i \le n-2$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$ (где $a \in p(M)$), то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x,f(y))$. Если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Случай 2. $\theta_{p,l,q}(x,y) \equiv f(x) < y \wedge \neg E_i^q(f(x),y) \wedge E_{i+1}^q(f(x),y)$

Предположим вначале, что формула $\theta_{q,m,p}(x,y)$ эквивалентна одной из следующих формул: $x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$ или $x > f(y) \wedge E_1^q(x,f(y))$. Тогда если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x > f(y) \wedge \neg E_s^q(x,f(y)) \wedge E_{s+1}^q(x,f(y))$. Предположим вначале, что $i = s$. Тогда можно понять, что $l \cdot m = \{0, 1, 2, \ldots, 2i+2\}$ и $m \cdot l = \{0, 1', 2', \ldots, (2i+2)'\}$.

Предположим теперь, что $i+1 \le s$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{s+1}^p(a,M)/E_s^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^p(x,y) \wedge E_{s+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{s+1}^p(a,M)/E_s^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_s^p(x,y) \wedge E_{s+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где \$ $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_s^q(x,y) \wedge E_{s+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $s+1 \le i$. Если f – строго возрастающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на каждом $E_{i+1}^p(a,M)/E_i^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_i^p(x,y) \wedge E_{i+1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_i^q(x,y) \wedge E_{i+1}^q(x,y)$.

Пусть теперь $\theta_{q,m,p}(x,y) \equiv x < f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x,f(y))$. Если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x > y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Случай 3. $\theta_{p,l,q}(x,y) := f(x) < y \wedge \neg E_{n-1}^q(f(x),y)$.

Предположим, что формула $\theta_{q,m,p}(x,y)$ эквивалентна одной из трех следующих формул: $x = f(y) \wedge P_2(x) \wedge P_1(y)$, $x > f(y) \wedge E_1^q(x, f(y))$ или $x > f(y) \wedge \neg E_1^q(x, f(y)) \wedge E_{i+1}^q(x, f(y))$. Тогда если f – строго возрастающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x < y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. Если же f – строго убывающая функция на $p(M)/E_{n-1}^p$, то $l \cdot m = k$, где $\theta_{p,k,p}(x,y) \equiv x > y \wedge \neg E_{n-1}^p(x,y)$. В обоих этих случаях $m \cdot l = k'$, где $\theta_{q,k',q}(x,y) := x < y \wedge \neg E_{n-1}^q(x,y)$.

Предположим теперь, что $\theta_{q,m,p}(x,y) := x > f(y) \wedge \neg E_{n-1}^q(x, f(y))$. Тогда можно понять, что $l \cdot m = \{0, 1, 2, ..., 2n\}$ и $m \cdot l = \{0, 1', 2', ..., (2n)'\}$. □

Следствие 8. Пусть T – счетно категоричная вполне о-минимальная теория, $p_1, p_2, ..., p_k \in S_1(\varnothing)$ – неалгебраические попарно не слабо ортогональные 1-типы. Тогда

1) Для любых $s, i_1, i_2, ..., i_s, j_1, j_2, ..., j_s$ таких, что $1 \le s \le k$, $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_s \le k$, $1 \le j_1 < j_2 < ... < j_s \le k$, выполняется $P_{\nu(\{p_{i_1}, ..., p_{i_s}\})} \cong P_{\nu(\{p_{j_1}, ..., p_{j_s}\})}$;

2) Для любых $s, i_1, i_2, ..., i_s$ таких, что $1 \le s \le k-1$, $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_s \le k$, алгебра $P_{\nu(\{p_{i_1}, ..., p_{i_s}\})}$ является подмоноидом моноида $P_{\nu(\{p_{i_1}, ..., p_{i_s}, p'\})}$, где $p' \in \{p_1, ..., p_k\}$ и $p' \ne p_{i_l}$ для всех $1 \le l \le s$;

3) $P_{\nu(\{p_1, ..., p_k\})}$ – обобщенно коммутативный моноид.

В заключение отметим, что данные исследования поддержаны грантом КН МОН РК № 0830/ГФ4 по теме «Классификационные вопросы генерических и упорядоченных структур, а также их элементарных теорий» в рамках приоритета «Интеллектуальный потенциал страны».

ЛИТЕРАТУРА

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

[2] A. Pillay, Countable models of stable theories // Proceedings of the American Mathematical Society, 89 (1983), pp. 666-672.

[3] B.S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. – Novosibirsk: NSTU, 1999. – P. 5-28.

[4] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.

[5] S.V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 169 (2010), pp. 680-695.

[6] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 9 (2012), pp. 161-184.

[7] S.V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk: NSTU, 2014.

[8] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 380-407.

[9] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 408-433.

[10] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum, 9 (2014), pp. 1029-1033.

[11] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.

[12] B.Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, volume 45, issue 2, 2007, pp. 354-367.

[13] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.

[14] Б.Ш. Кулпешов, Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях // Известия НАН РК, серия физико-математическая, 227 (2003), С. 26-31.

[15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

REFERENCES

[1] H.D. Macpherson, D. Marker, and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields // Transactions of The American Mathematical Society, 352 (2000), pp. 5435-5483.

[2] A. Pillay, Countable models of stable theories // Proceedings of the American Mathematical Society, 89 (1983), pp. 666-672.

[3] B.S. Baizhanov, Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A.G. Pinus, K.N. Ponomaryov. – Novosibirsk: NSTU, 1999. – P. 5-28.

[4] B.S. Baizhanov, B.Sh. Kulpeshov, On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific: 2006. – P. 31-40.

[5] S.V. Sudoplatov, Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories // Journal of Mathematical Sciences. 169 (2010), pp. 680-695.

[6] B.S. Baizhanov, S.V. Sudoplatov, V.V. Verbovskiy, Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation // Siberian Electronic Mathematical Reports. 9 (2012), pp. 161-184.

[7] S.V. Sudoplatov, Classification of Countable Models of Complete Theories. – Novosibirsk: NSTU, 2014.

[8] I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 380-407.

[9] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), pp. 408-433.

[10] S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories // International Mathematical Forum, 9 (2014), pp. 1029-1033.

[11] B.Sh. Kulpeshov, Weakly o-minimal structures and some of their properties // The Journal of Symbolic Logic, 63 (1998), pp. 1511-1528.

[12] B.Sh. Kulpeshov, Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories // Annals of Pure and Applied Logic, volume 45, issue 2, 2007, pp. 354-367.

[13] B.S. Baizhanov, Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates // The Journal of Symbolic Logic, 66 (2001), pp. 1382-1414.

[14] Kulpeshov B.Sh. Rank of convexity and orthogonality in weakly o-minimal theories // News of NAS RK. Physico-mathematical series, 227 (2003), pp 26-31. (in Russ.).

[15] B.Sh. Kulpeshov, Countably categorical quite o-minimal theories // Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387-397.

О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАР ҮШІН БИНАРЛЫҚ ФОРМУЛАЛАРДЫҢ АЛГЕБРАЛАРДАҒЫ ТАРАЛЫМЫ ТУРАЛЫ

Б. Ш. Кулпешов[1], С. В. Судоплатов[2]

[1]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан
[2]РҒА СБ С. Л. Соболев атындағы математика институті, Новосібір мемлекеттік техникалық университеті, Новосібір мемлекеттік университеті, Новосібір, Ресей

Тірек сөздер: әлсіз о-минималдық, әбден о-минималдық, есептік категориялық, таралым алгебрасы, бинарлық формула, моноид.

Аңдатпа. Осы жұмыста есептік-категориялық әбден о-минималдық теориялар үшін бинарлық жекеленгіш формулалардың алгебралардағы таралымы зерттеленді және олардың қорытындылау коммутативтігі дәлелденді.

Поступила 17.03.2015 г.