

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 3, Number 301 (2015), 15 – 20

**ABOUT AN ANALYTIC SOLUTION  
TO THE EQUATION DESCRIBING  
THE PROCESS OF SECOND HARMONIC GENERATION  
IN TRANSITION METAMATERIALS**

**Zh. A. Kudyshev<sup>1</sup>, A. E. Davletov<sup>1</sup>, I. R. Gabitov<sup>2</sup>, A. Kisan<sup>1</sup>, Ye. S. Mukhametkarimov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>Arizona University, Tucson, USA.

E-mail: askar@physics.kz, ildar.gabitov@gmail.com, z.kudyshev@gmail.com

**Key words:** metamaterial with zero refractive index, second harmonic generation, FDTD method.

**Abstract.** On the basis of the classical Maxwell's equations the corresponding wave equations are derived for description of multiwave interactions in transition metamaterials whose refractive index varies along the sample from positive to negative values. The phenomenon of second harmonic generation is predicted in the transition layer near the point at which the refractive index turns zero, even at low intensities of the fundamental pumping wave. An analytical solution of the corresponding equations are found and specific recommendations are developed for the construction of a compact second harmonic generator based on transition metamaterials. Second harmonic generation process was investigated in metamaterials, refractive index, which varies from negative to positive values. Shows that zero-point refractive index increases dramatically the amount field of the fundamental wave pumping, resulting in non-linear effects even for the weak intensity falling on the pattern of the waves.

When the wavelength of characteristic size of structures in the metamaterials a record of non-local effects. In this regard, it should be noted that there is some optimal thickness of transition layer in which the efficient conversion of energy into a second harmonics will construct an efficient generator.

УДК 535:530.182

**ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ,  
ОПИСЫВАЮЩЕГО ПРОЦЕСС ГЕНЕРАЦИИ  
ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ В ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАМАТЕРИАЛАХ**

**Ж. А. Кудышев<sup>1</sup>, А. Е. Давлетов<sup>1</sup>, И. Р. Габитов<sup>2</sup>, А. Кисан<sup>1</sup>, Е. С. Мухаметкаримов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

<sup>2</sup>Университет Аризоны, г. Тусон, штат Аризона, США

**Ключевые слова:** метаматериал с нулевым показателем преломления, генерация второй гармоники, метод FDTD.

**Аннотация.** На основе классических уравнений Максвелла выведены уравнения, описывающие много волновое взаимодействие в переходных метаматериалах, показатель преломления которых меняется вдоль образца от положительных до отрицательных значений. Предсказано явление генерации второй гармоники в переходном слое, вблизи которого коэффициент преломления обращается в нуль, даже при слабых интенсивностях фундаментальной волны накачки. Получены аналитические решения соответствующих уравнений и разработаны конкретные рекомендации для создания компактного генератора второй гармоники на переходном метаматериале.

**Введение.** В 2001 Роджер Валсер из Университета Остин в Техасе ввел в употребление термин метаматериалы [1]. Этим термином обозначались структурированные композиты, свойства и предельные характеристики которых существенно отличались от характеристик обычных материалов, встречающихся в природе. Позже этот термин был подхвачен и введен в широкое употребление Американским Оборонным Агентством Перспективных Исследований (DARPA) в контексте программы «DARPA Metamaterials», стартовавшей в 2001 году.

С 2001 года интерес научной общественности к метаматериалам демонстрирует только устойчивый рост, о чем свидетельствует экспоненциальное увеличение числа публикаций. Этот интерес подогревается большими перспективами приложений метаматериалов в фотонике [2-5], информационных технологиях [6], наноэлектронике [7], биомедицине [8-9] и т.д. В настоящее время продемонстрированы уникальные возможности для манипулирования световыми потоками, что привело к значительному прогрессу в области трансформационной оптики [10]. В частности, большую известность получили эксперименты с невидимостью [11-13], оптическими иллюзиями, световыми переключателями, а также эксперименты по созданию материалов с заданным пространственным распределением оптических характеристик. Большие успехи достигнуты в технологии сенсоров сверхвысокой чувствительности, обеспечивающих регистрацию всего лишь нескольких молекул [14]. Другим примером является использование метаматериалов для создания оптических приборов с разрешающей способностью выше дифракционного предела [15, 16]. Впечатляющие возможности метаматериалов были продемонстрированы на примере создания нанолазера [17] (известного в литературе как спазер [18]), размер которого много меньше длины излучаемой волны.

**Генерация второй гармоники в переходном слое метаматериала.** Физика явления резонансного усиления поля в переходных метаматериалах может быть описана следующим образом. Для падающих поперечных магнитных волн (так называемые ТМ-волны) тонкий слой, вблизи которого показатель преломления близок к нулю, может быть рассмотрен как очень тонкий конденсатор, способный накапливать значительную энергию электрического поля, которая ограничена на практике диссипативными явлениями и дисперсией волн. При этом особо следует подчеркнуть, что накопление энергии возможно только при касательном падении света на слой с нулевым показателем преломления, так как в этом случае электрическое поле волны имеет компоненту, совпадающую с направлением преимущественного распространения волны. В силу того, что вектор электрического смещения должен оставаться непрерывным электрическое поле должно неограниченно возрастать, так как диэлектрическая проницаемость стремится к нулю. Это и приводит к возможности сильного увеличения напряженности электрического поля и проявлению нелинейных эффектов даже при слабых интенсивностях падающих волн.

Изучим резонансное усиление поля в переходных метаматериалах с квадратичной нелинейностью, которое способно привести к созданию очень компактных генераторов второй гармоники при слабых интенсивностях падающих волн. На рисунке 1(а) схематически показано касательное падение электромагнитной волны на переходный слой метаматериала. На частоте фундаментальной волны  $\omega_1$  реальная часть линейного коэффициента преломления  $n(\omega_1, x) = \epsilon_1(\omega_1, x)\mu_1(\omega_1, x)$  постепенно меняется от положительного до отрицательного значения, как показано на рисунке 1(б), в то время как мнимая часть возрастает с координатой, как показано на рисунке 1(с). Для волны второй гармоники  $\omega_2 = 2\omega_1$  считается, что знак реальной части коэффициента преломления остается положительным вдоль всего образца. Вдоль оси  $y$  переходный слой считается однородным. Отметим, что отрицательность показателя преломления обычно достигается использованием плазмонного резонанса в металлическихnanoструктурах, а значит распространение волн должно сопровождаться значительными потерями энергии. Поэтому мы считаем, что потери энергии на фундаментальной частоте существенно выше, чем на частоте волны второй гармоники, как показано на рисунке 1(с). Нелинейная компонента коэффициента преломления предполагается пространственно однородной и определяется нелинейной восприимчивостью второго порядка  $\chi^{(2)}$ .

В дальнейшем считается, что волна накачки и генерируемая ей волна второй гармоники представляют собой ТМ-поляризованные волны со следующими компонентами:  $\vec{H}^{(j)} = \{0, 0, H_x^{(j)}\}$  и  $\vec{E}^{(j)} = \{E_x^{(j)}, E_y^{(j)}, 0\}$ , где индексы  $j = 1, 2$  соответствуют фундаментальной волне и второй гармонике

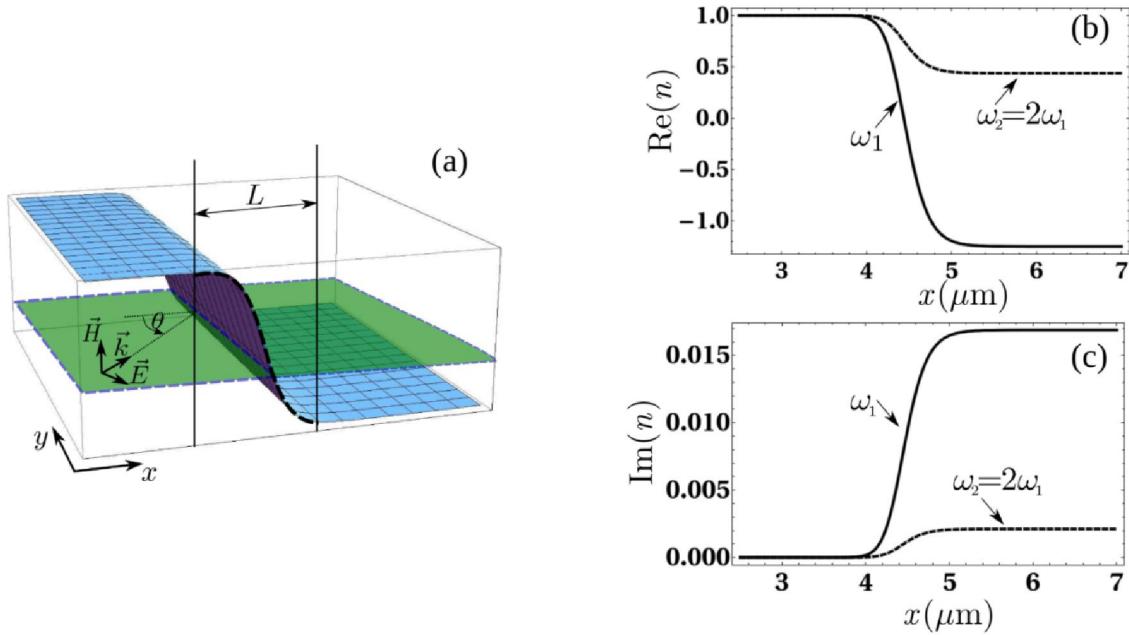


Рисунок 1 – (а) Схема падения ТМ-поляризованной волны внутри переходного слоя толщиной  $L$ ;  
 (б) Пространственное распределение реальной части коэффициента преломления  $n_j(x) = \sqrt{\varepsilon_j(x)\mu_j(x)}$  на фундаментальной частоте (сплошная линия) и частоте волны второй гармоники (штриховая линия);  
 (в) Пространственное распределение мнимой части коэффициента преломления на фундаментальной частоте (сплошная линия) и частоте волны второй гармоники (штриховая линия)

соответственно. В этом случае система волновых уравнений, описывающих данный процесс, принимает вид:

$$\varepsilon_1(x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{\varepsilon_1(x)} \frac{d\tilde{H}_z^{(1)}}{dx} \right] + \frac{d^2\tilde{H}_z^{(1)}}{dy^2} + \frac{\omega_1^2}{c^2} \varepsilon_1(x) \mu_1(x) \tilde{H}_z^{(1)} = 4\pi \frac{i\omega_1}{c} \left[ \varepsilon_1(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\tilde{P}_y^{(1)}}{\varepsilon_1(x)} \right) - \frac{d\tilde{P}_x^{(1)}}{dy} \right], \quad (1)$$

$$\frac{d^2\tilde{H}_z^{(2)}}{dx^2} + \frac{d^2\tilde{H}_z^{(2)}}{dy^2} + \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 \tilde{H}_z^{(2)} = 4\pi \frac{i\omega_1}{c} \left[ \frac{d\tilde{P}_y^{(2)}}{dx} - \frac{d\tilde{P}_x^{(2)}}{dy} \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\tilde{P}^{(j)}$  – нелинейная поляризация фундаментального поля  $\tilde{P}^{(1)} = \chi^{(2)}(\tilde{E}^{(1)})^* \tilde{E}^{(2)}$  и поля волны второй гармоники  $\tilde{P}^{(2)} = \chi^{(2)}(\tilde{E}^{(1)})^2$ ,  $c$  – скорость света в вакууме.

Так как среда является однородной вдоль оси  $y$ , то магнитные компоненты полей волн могут быть записаны в виде  $\tilde{H}_z^{(j)} = \Phi_j(x) \exp(i k_y^{(j)} y)$ . Тогда уравнения (1) и (2) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Phi_1}{dx^2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon_1}{dx} \frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{\omega_1^2}{c^2} (\varepsilon_1 \mu_1 - \sin^2(\theta_0)) \Phi_1 = \\ = 4\pi \frac{i\omega_1}{c} \left[ \varepsilon_1 \frac{d}{dx} \left( \frac{\tilde{P}_y^{(1)}}{\varepsilon_1} \right) - \frac{d\tilde{P}_x^{(1)}}{dy} \right] e^{-ik_y^{(1)} y}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{d^2\Phi_2}{dx^2} + \left( \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon_2 \mu_2 - (k_y^{(2)})^2 \right) \Phi_2 = 4\pi \frac{i\omega_2}{c} \left[ \frac{d\tilde{P}_y^{(2)}}{dx} - \frac{d\tilde{P}_x^{(2)}}{dy} \right] e^{-ik_y^{(2)} y}. \quad (4)$$

Если волна накачки падает продолжительное время, а нелинейные эффекты малы, то правую часть уравнения (3) можно положить равной нулю и оно становится независимым от уравнения (4). Следует отметить, что в этом случае дифференциальное уравнение (3) описывает распространение электромагнитной волны через переходным слой, которое было рассмотрено в [19].

Уравнение (4) для волны второй гармоники может быть приведено к следующему виду:

$$\frac{d^2\Phi_2}{d\zeta^2} + \kappa^2\Phi_2 = F(\zeta), \quad (5)$$

где  $\kappa^2 = \frac{\omega_2^2}{c^2}\varepsilon_2\mu_2 - (k_y^{(2)})^2$ ,  $\zeta = x/L$  – безразмерная координата, а  $L$  – эффективная толщина переходного слоя.

Это известное дифференциальное уравнение, описывающее вынужденные колебания осциллятора под действием внешней силы  $F(\zeta)$ , которая в данном случае определяется фундаментальной волной накачки. Правую часть уравнения (5) можно переписать как:

$$F(\zeta) = 8\pi\chi^{(2)}\frac{i\omega_2}{c}\left[\tilde{E}_y^{(1)}\frac{d\tilde{E}_y^{(1)}}{d\zeta} - i\beta_0\sin(\theta_0)(\tilde{E}_y^{(1)})^2\right]\exp(-i\Delta k_y y), \quad (6)$$

где  $\Delta k_y = k_y^{(2)} - 2k_y^1 = k_y^{(2)} - 2k_0\sin(\theta_0)$  – фазовая расстройка между  $y$ -компонентами волновых векторов фундаментальной волны и волны второй гармоники, а  $\beta_0 = k_0L$  – обезразмеренный волновой вектор  $k_0$ . Здесь мы предположили, что  $\Delta k_y = 0$ , а соответствующее пространственное распределение  $F(\zeta)$  показано на рисунке 2(а).

Общее решение уравнения (5) может быть получено в следующей форме:

$$\Phi_2(\zeta) = \Phi_2^+ + \Phi_2^- = C_+(\zeta)\exp(i\kappa\zeta) + C_-(\zeta)\exp(-i\kappa\zeta), \quad (7)$$

где  $C_+(\zeta) = \frac{1}{2ik}\int_{E_{min}}^{\zeta} F(\eta)\exp(-i\kappa\eta)d\eta$ ,  $C_-(\zeta) = -\frac{1}{2ik}\int_{E_{min}}^{\zeta} F(\eta)\exp(i\kappa\eta)d\eta$ .

Это решение показывает, что порождаемая волна второй гармоники представляет собой суперпозицию волн, сгенерированных в прямом и обратном направлениях с амплитудами  $C_+(\zeta)$  и  $C_-(\zeta)$  соответственно. Пространственные распределения реальных частей поля волн второй гармоники  $\tilde{H}_z^{(2)}$ , порожденных в прямом и обратном направлениях, показаны на рисунке 2 (б).

Используя материальные уравнения для волны второй гармоники, электрические компоненты могут быть найдены в виде:

$$E_x^{(2)} = \frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{ic}{\omega_2 L}\frac{\partial\tilde{H}_z^{(2)}}{\partial\xi} - 4\pi\chi^{(2)}(\tilde{E}_x^{(1)})^2\right], \quad (8)$$

$$E_y^{(2)} = -\frac{1}{\varepsilon_2}\left[\frac{ic}{\omega_2 L}\frac{\partial\tilde{H}_z^{(2)}}{\partial\xi} + 4\pi\chi^{(2)}(\tilde{E}_y^{(1)})^2\right], \quad (9)$$

где  $\xi = y/L$  – безразмерная координата.

Как видно из полученных выше выражений, в случае наклонного падения волн в области «нулевой» точки  $\zeta_0$  второй член, пропорциональный  $(\tilde{E}_x^{(1)})^2$ , дает главный вклад в  $x$ -компоненту поля волны второй гармоники. Пространственное распределение абсолютной величины  $E_x^{(2)}$  показано на рисунке 2(с). Поэтому можно сделать вывод, что при непрерывной накачке взаимодействие фундаментальных волн приводит к сильному усилению волны второй гармоники вблизи «нулевой» точки.

**Заключения и выводы.** В данной работе исследовался процесс генерации второй гармоники в метаматериалах, коэффициент преломления которых меняется от отрицательных до положительных значений. Показано, что вблизи точки с нулевым показателем преломления резко возрастает величина поля фундаментальной волны накачки, что приводит к появлению нелинейных эффектов даже для слабых интенсивностей падающих на образец волн.

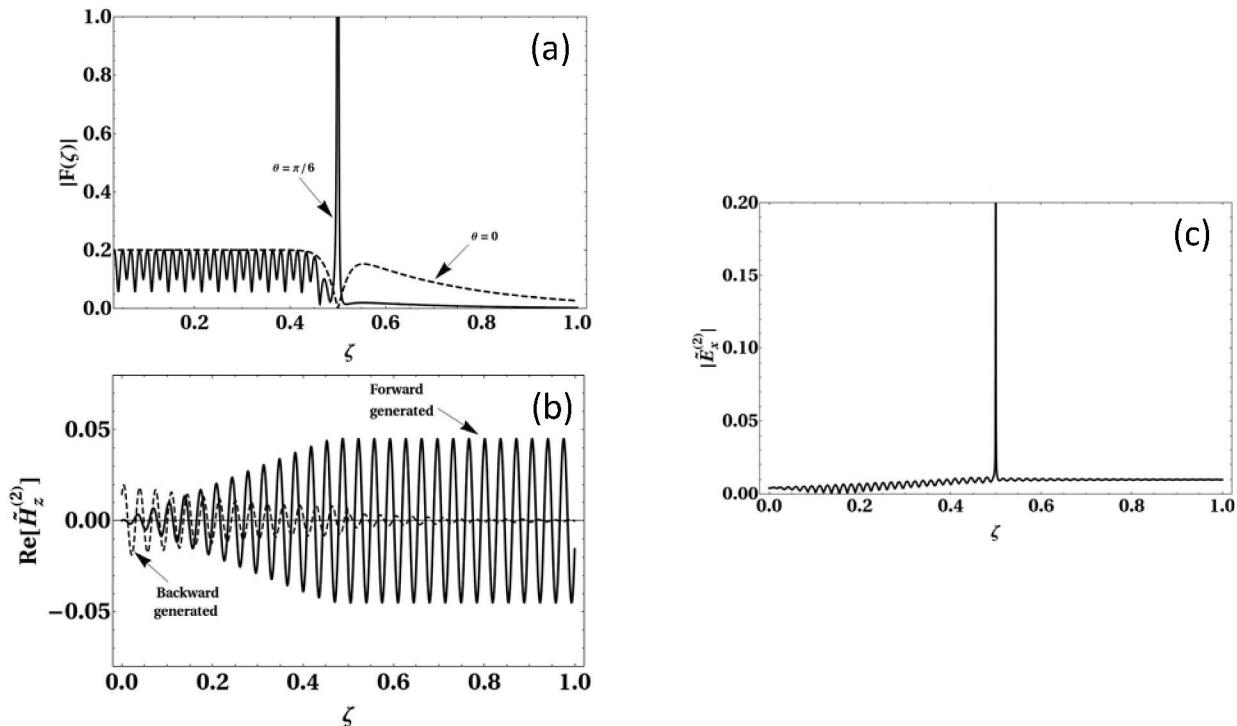


Рисунок 2 – (а) Зависимость абсолютной величины внешнего  $|F(\zeta)|$  от  $\zeta$  при фиксированной величине  $\chi^{(2)} = 0.001$  и различных значениях углов падения: сплошная линия –  $\theta = 30^\circ$ , штриховая линия –  $\theta = 0$ ;

(б) Пространственное распределение реальной части  $\tilde{H}_z^{(2)}$  волны второй гармоники, сгенерированной в прямом (сплошная линия) и обратном (штриховая линия) направлениях при фиксированном угле падения  $\theta = 30^\circ$ ;

(с) Пространственное распределение абсолютной величины электрического поля  $E_x^{(2)}$  волны второй гармоники от  $\zeta$  при фиксированном угле падения  $\theta = 30^\circ$

С практической точки зрения эффективная генерация второй гармоники достигается при неколлинеарном взаимодействии волн, а с увеличением толщины переходного слоя соответствующие интенсивности должны уменьшаться вследствие потерь энергии. Поэтому чем тоньше слой, тем лучше будет построенный генератор. Однако, создание очень тонких метаматериальных слоев с высоким градиентом оптических свойств является нетривиальной технической задачей. Кроме этого, при достижении длиной волны характерных размеров структур в метаматериале необходим учет нелокальных эффектов. В связи с этим следует отметить, что существует некоторая оптимальная толщина переходного слоя, при которой эффективное преобразование энергии во вторую гармонику позволит сконструировать соответствующий эффективный генератор.

#### REFERENCES

- [1] Walser R.M. Electromagnetic metamaterials, in Proc. SPIE 4467 Complex Mediums II: Beyond Linear Isotropic Dielectrics, **2001**, Vol. 1, 1–15 (in Eng.).
- [2] Streekanth K.V. et. al. Excitation of surface electromagnetic waves in a graphene-based Bragg grating, *Nature Scientific Reports*, **2012**, Vol. 2, id. 737 (in Eng.).
- [3] Linden S., Enkrich C., Dolling G., Matthias W. Klein, Zhou Ji., Koschny T., Soukoulis Costas M., Burger S., Schmidt F., and Martin Wegener. Photonic Metamaterials: Magnetism at Optical Frequencies, *IEEE journal of selected topics in quantum electronics*, **2006**, Vol. 12(6) (in Eng.).
- [4] Photonic Metamaterials, Encyclopedia of Laser Physics and Technology, I and II Wiley, **2008**, 18, P. 1 (in Eng.).
- [5] Capolino F. Applications of Metamaterials, Taylor & Francis, **2009**, pp. 29-1, 25-1. ISBN 978-1-4200-5423-1 (in Eng.).
- [6] Shigeki T. Left-Handed Metamaterial Technologies Significant for Information and Communication Devices, *Science & Technology trends* 3, P. 36-50 (in Eng.).
- [7] Nader E., Alessandro S., Andrea Alu. Circuit Elements at Optical Frequencies: Nanoinductors, Nanocapacitors, and Nanoresistor, *Physical Review Letters*, **2009**, Vol. 95, Issue 9. 095504., pp.4 (in Eng.).
- [8] La Spada L., Bilotti F., Vegni L. Metamaterial biosensor for cancer detection, *IEEE Sensors*, **2001**, P. 627–630 (in Eng.).
- [9] Melik R., Unal E., Puttlitz C., Demir H. V. Wireless metamaterial RF-MEMS strain sensors, *Appl. Phys. Lett.*, **2009**, Vol. 95 (in Eng.).
- [10] Shalaev V.M. PHYSICS: Transforming light, *Science*, **2008**, Vol. 322(5900), P. 384-386(in Eng.).

- [11] Schurig D., Mock J. J., Justice B. J., Cummer S. A., Pendry J. B., Starr A. F., and Smith D. R. Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies, *Science*, **2006**, Vol. 314, P.977 (in Eng.).
- [12] Cai W., Chettiar U. K., Kildishev A. V., and Shalaev V. M. Optical cloaking with metamaterials, *Nature Photonics*, **2007**, Vol.1, P.224(in Eng.).
- [13] Valentine J., Li J., Zentgraf T., Bartal G., and Zhang X. An optical cloak made of dielectrics, *Nature Materials*, **2009**, Vol.8, P.568 (in Eng.).
- [14] Kabashin A.V., Evans P., Pastkovsky S., Hendren W., Wurtz G.A., Atkinson R., Pollard R., Podolskiy V.A., Zayats A.V. Plasmonic nanorod metamaterials for biosensing, *Nat Mater*, **2009**, Vol. 8(11)867-71 (in Eng.).
- [15] Pendry J. B., Schurig D., and Smith D. R. Controlling Electromagnetic Fields, *Science*, **2006**, Vol. 23, P. 1780-1782 (in Eng.).
- [16] Grbic A. and Eleftheriades G. V. Overcoming the diffraction limit with a planar left-handed transmission-line lens, *Phys. Rev. Lett.*, **2004**, Vol.92,117403 (in Eng.).
- [17] Noginov M.A., Zhu G., Belgrave A.M., Bakker R., Shalaev V.M., Narimanov E.E., Stout S., Herz E., Suteewong T., Wiesner U. Demonstration of a spaser-based nanolaser, *Nature*, **2009**, Vol. 460, P. 1110-1112 (in Eng.).
- [18] David J. Bergman and Mark I. Stockman. Surface Plasmon Amplification by Stimulated Emission of Radiation: Quantum Generation of Coherent Surface Plasmons in Nanosystems, *Phys. Rev. Lett.*, **2003**, Vol. 90. (027402) (in Eng.).
- [19] Litchinitser N. M., Maimistov A. I., Gabitov I. R., Sagdeev R. Z., and Shalaev V. M. Metamaterials: electromagnetic enhancement at zero-index transition, *Opt. Lett.*, **2008**, Vol. 33, P. 2350-2352(in Eng.).

## **АУЫСПАЛЫ МЕТАМАТЕРИАЛДАРДАҒЫ ЕКІНШІ РЕТТІ ГАРМОНИКАНЫң ГЕНЕРАЦИЯСЫ ПРОЦЕССІН СИПАТТАЙТАЫН ТЕНДЕУЛЕРДІҢ АНАЛИТИКАЛЫҚ ШЕШІМДЕРІ**

**Ж. А. Кудышев<sup>1</sup>, А. Е. Давлетов<sup>1</sup>, И. Р. Габитов<sup>2</sup>, А. Кисан<sup>1</sup>, Е. С. Мухаметкаримов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Өл-Фараби атындағы Қазак ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>Аризона Университеті, Тусон, Аризона, США

**Тірек сөздер:** сыну көрсеткіші нөлге тен метаматериал, екінші ретті гармониканың генерациясы, FDTD әдісі.

**Аннотация.** Классикалық Максвелл теңдеулерінің негізінде, сыну көрсеткіші оң мәннен теріс мәнге дейін өзгеретін ауыспалы метаматериалдардағы көптолқындардың әсерлесуін сипаттайтын теңдеулер қорытылып шығарылды. Түсken толқынның аз интенсивтілігінде де байқалатын, сыну көрсеткіші нөлге ұмтылатын шекаралық қабаттағы екінші ретті гармониканың генерациясы құбылысын байқау мүмкіндіктері карастырылды. Альянган теңдеулердің аналитикалық шешімдері анықталып, ауыспалы метаматериалдардың негізінде екінші ретті гармониканың шағын генераторының жасау нұсқаулары келтірілді.