

DESCRIPTION OF ULTRACOLD ATOMS IN A HARMONIC TRAP

S. A. Zhaugasheva¹, I. S. Ishmukhamedov², D. S. Valiolda¹, N. K. Zhussupova¹

¹Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan,

²Joint institute for nuclear research, Dubna, Russia.

E-mail: sazh_74@mail.ru, www.nazym.kaznu@mail.ru

Key words: energy spectrum, quantum oscillator, anharmonic oscillator, optical traps, ultracold atoms.

Abstract. We compute the ground state energy of two atoms in a one-dimensional geometry of a harmonic optical trap. We obtain a dependence of the energy on a one-dimensional scattering length, which corresponds to various strengths of the interaction potential $V_{\text{int}}(x) = V_0 \exp\{-2cx^2\}$ of a Gaussian type. The calculation is performed by numerical and analytical methods. For the analytical method we choose the oscillator representation method (OR), which has been successfully applied to computations of bound states of various few-body systems.

The main results of this paper are:

- 1) numerical investigation of the validity range of the previously used pseudopotential method;
- 2) investigation of the validity range of the OR for potential

$$V(x) = V_{\text{conf}}(x) + V_{\text{int}}(x) = \frac{x^2}{2} + V_0 \exp\{-2cx^2\}.$$

УДК 539.1.074.3

УЛЬТРАСУЫҚ АТОМДАРДЫҢ ГАРМОНИКАЛЫҚ ТҰЗАҚТА БЕЙНЕЛЕНУІ

С. А. Жауғашева¹, И. С. Ишмұхамедов², Д. С. Валиолда¹, Н. Жүсіпова¹

¹Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан,

²Ядролық зерттеулердің біріккен институты, Дубна, Ресей

Тірек сөздер: энергиялық спектр, кванттық осциллятор, ангармоникалық осциллятор, оптикалық тұзақ, ультрасуық атомдар.

Аннотация. Жұмыста гармоникалық оптикалық тұзақтың бір өлшемді геометриясындағы екі атомның негізгі күйлерінің энергиялары есептелді. Энергияның атомаралық әсерлесу потенциалының әртүрлі $V_{\text{int}}(x) = V_0 \exp\{-2cx^2\}$ интенсивтіліктеріне жауап беретін біртекті шашырау ұзындығынан тәуелділігі алынды. Есептеулер сандық және аналитикалық әдістермен жүргізілді. Аналитикалық әдіс ретінде осцилляторда өрнектеу (ОӨ) әдісі таңдалып алынды, ол әртүрлі азбөлшекті жүйелердің байланысқан күйлерін есептеу үшін қолданылады.

Бұл жұмыстың негізгі нәтижелері:

1) бұл есептеулер үшін бұрын қолданылған нөлдік радиус потенциалын жуықтаудың қолданылу аймағын сандық зерттеу;

2) $V(x) = V_{\text{conf}}(x) + V_{\text{int}}(x) = \frac{x^2}{2} + V_0 \exp\{-2cx^2\}$ потенциалы үшін ОӨ әдісінің қолданылу шекарасын зерттеу болып табылады.

Ультрасуық атомдар бойынша зерттеулер жүргізу асқын өткізгіштік, асқын аққыштық [1], кванттық компьютер элементтері үшін қолданылатын молекулалар пайда болатын химиялық реакциялар [1, 2], сондай-ақ Үлкен Жарылыс кезінде алғаш пайда болған кварк-глюонды плазма [1, 3] сияқты физикалық құбылыстарды басқару және модельдеу мүмкіндігін тудырады.

Бұл тәжірибелерде атомдар атомдардың сыртқы оптикалық потенциалмен әсерлесуінің нәтижесінде пайда болған шектеулі геометрияда болады [4, 5]. Мысал ретінде квазибірөлшемді және квазиекіөлшемді оптикалық тұзақ геометриялары алынады [6]. Бірінші жағдайда (тұзақтың сигара типтес түріне сәйкес келетін) атомдар өстердің біреуінің бағытымен бойлай еркін қозғалады, ал олардың көлденең қозғалысы шектелген және квантталған. Екінші жағдайда ("құймақ" түріндегі тұзақ жағдайында) айнымалылардың біреуі бойынша қозғалысы квантталған болып табылады.

Оптикалық тұзақ тіке қойылатын оптикалық толқын болып табылады, оны нөлдік жуықтауда гармоникалық потенциалмен бейнелеуге болады. Ультрасуық атомдармен жүргізілген әртүрлі тәжірибелерде тұзақ потенциалы үшін гармоникалық жуықтауға негізделген теорияға қарсы келетін резонанстар анықталды [7]. Келесі жұмыс [7] авторларының айтуы бойынша мұндай теорияның тәжірибеден ауытқуы ангармоникалық түзетулермен шартталған. Алайда, бұл жұмыста орындалған, бірінші ретті ауытқу теориясындағы ангармоникалық түзетулерді есептеуді қанағаттанарлық деп есептеуге болмайды [8].

Бұл жұмыс ауытқу теориясы аясынан тыс ангармонизмді бейнелеу жолындағы бірінші қадам болып табылады, мұнда біз біртекті жағдайдағы атомдардың негізгі күйлерінің энергияларын есептейміз, яғни атомаралық әсерлесу потенциалы мен тұзақ потенциалы біртекті болған жағдайда, соңғысы параболалық функциямен жуықталады. Дельта-функция түріндегі атомаралық әсерлесу жағдайы үшін мұндай есептеулер (нөлдік радиус псевдопотенциалы) [9] жұмыста келтірілген. Біздің жағдай Гаусстың реалистік потенциалын қолданумен ерекшеленеді. Осы жұмыстан айтарлықтай ауытқу байқалды (1, 2-сурет). Сондай-ақ атомаралық әсерлесудің шынайы үшөлшемді потенциалы үшін және тұзақтың екіөлшемді осцилляторлық потенциалы үшін спектрлер есептелді [10], мұнда псевдопотенциалды әдісте алынған нәтижеден ауытқу байқалды.

Қойылған есепті шешу үшін сандық әдісті де және аналитикалық әдісті де қолданамыз. Сандық есептеуде кері шашырау ұзындығының әсерлесу потенциалы параметрлерінен тәуелділігі есептелді. Энергияны есептеу екінші ретті ақырғы-айырмалы жуықтауды және кері итерация әдісін қолдану арқылы жүргізіледі. Энергияны есептеудің аналитикалық әдісі - осцилляторда өрнектеу (ОӨ) әдісі арқылы жүзеге асырылады. ОӨ әдісі өрістің скалярлық кванттық теориясы әдістері және идеяларына негізделген және оның эффективтілігі әртүрлі азбөлшекті жүйелердің байланысқан күйлерін есептеу кезінде көрінеді [8].

Негізгі күй энергиясы. Жұмыстың мақсаты біртекті гармоникалық тұзақты екі бозонды атомдардың сәйкес Ψ толқындық функциялары (ТФ) және E негізгі деңгей энергияларының атомаралық әсерлесу интенсивтілігінен тәуелділіктерін зерттеу болып табылады. Бұл есеп

$V_{\text{conf}}(x) = \frac{x^2}{2}$ гармоникалық потенциалдағы атомдардың салыстырмалы қозғалысының ТФ үшін

нөлдік шекаралық шарттары $\Psi(|x| \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ болатын Шредингердің біртекті теңдеуін (ШТ) шешуге келтіріледі:

$$\left\{ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} V_0 \exp\{-2cx^2\} \right\} \Psi(x) = E\Psi(x) \quad (1)$$

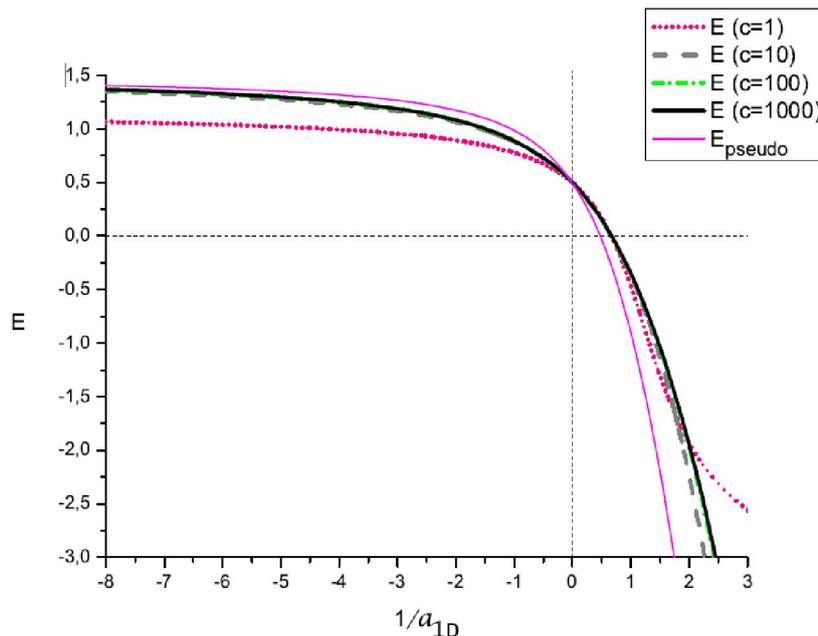
Осциляторлық бірліктер жүйесін қолданамыз, онда энергиялар $\hbar\omega$ бірлігінде, ал ұзындықтар $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ бірлігінде өлшенеді. Атомаралық әсерлесу $V_{\text{int}}(x) = V_0 \exp\{-2cx^2\}$ екіпараметрлік гаусстық потенциалмен модельденеді, мұндағы V_0 параметрі тереңдікті, ал c - потенциал енін анықтайды. Біз E және $\Psi(x)$ шамаларының V_{conf} тұзақтың ұстап тұру потенциалы болмаған кездегі $V_0 \exp\{-2cx^2\}$ біртекті гаусстық потенциалдағы $a_{1D}^{-1}(V_0)$ кері шашырау ұзындығынан тәуелділігін зерттедік. Алғашында $a_{1D}^{-1}(V_0)$ тәуелділігі $V_{\text{conf}} = 0$ жағдайында (1) ШТ сандық шешу кезінде $E > 0$ үздіксіз спектр үшін мынадай толқындық функцияға арналған шекаралық шарттармен есептелді:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \Psi(x) \approx \cos(k|x| + \delta(k)) \quad (2)$$

мұндағы $k = \sqrt{2E}$, ал $\delta(k)$ - шашырау фазасы. Сонымен қатар біртекті шашырау ұзындығы былай анықталады:

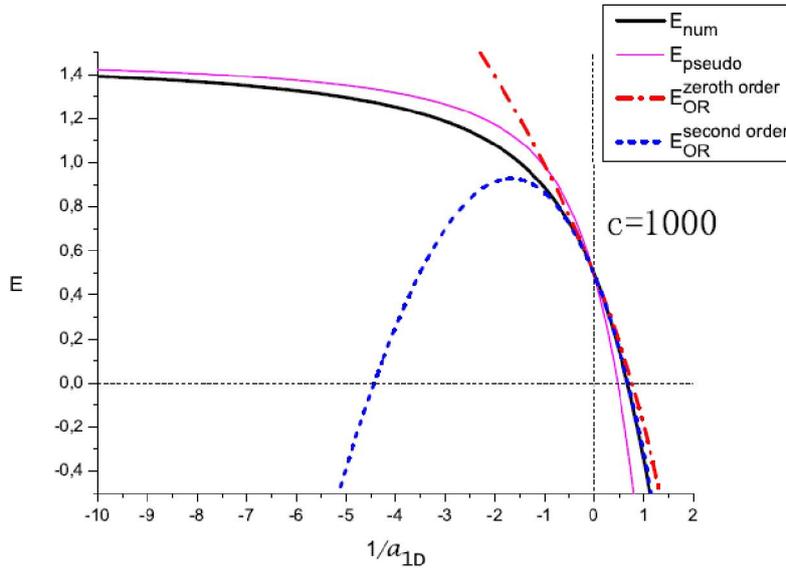
$$a_{1D} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\text{ctg}(\delta(k))}{k} \quad (3)$$

Есептің сандық шешімі үшін (1) меншікті мәндеріне кері итерация әдісі қолданылды. ШТ (1) кіретін туындыларды жуықтау үшін дәлдіктің екінші ретті ақырғы-айырмалы жуықтаулары қолданылды, олар h^2 ретті қателікті қамтамасыз етеді, мұндағы h - айырмалы тордың қадамы. Есептеу нәтижелері 1, 2-суретте көрсетілген.

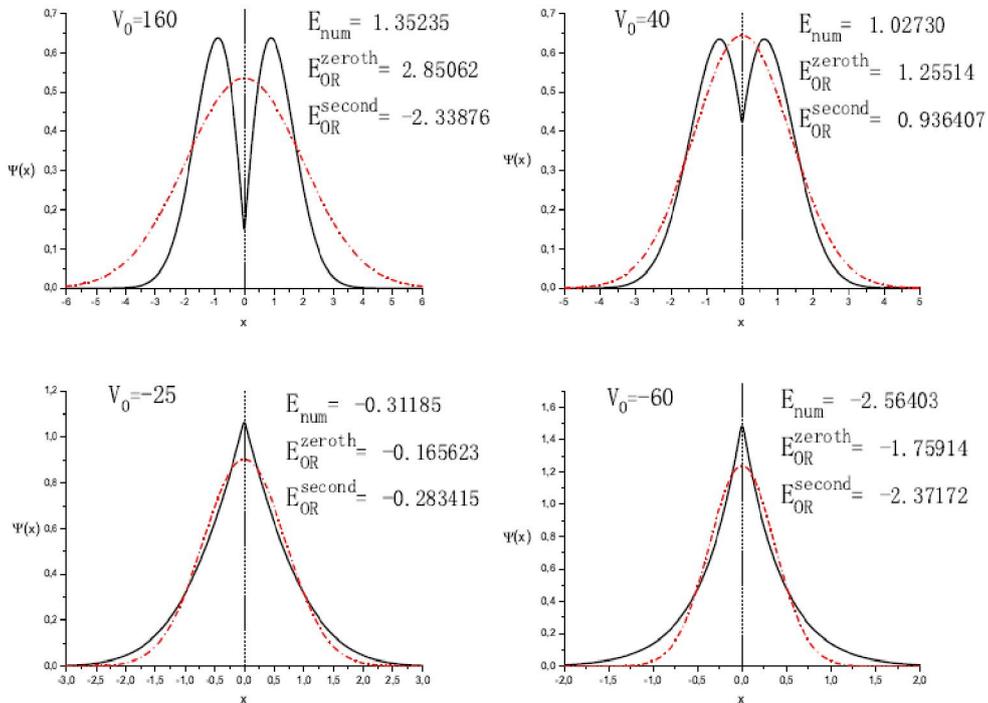


1-сурет – Өртүрлі c кезіндегі негізгі күй энергиялары,
 E_{pseudo} – [8]-де есептелген дельта-функция түріндегі жанасқан әсерлесу жағдайындағы энергия

Графиктен (1-сурет) көрініп тұрғандай, екі атомның әсерлесу потенциалының ($c, V_0 \rightarrow \infty$) бір уақытта тарылуы мен тереңдеуі кезінде, яғни графикте көрсетілген $1/a_{1D}$ диапозонда қысқа әрекетті әсерлесуге ауысу кезінде, біз ұқсас нәтиже аламыз. Осы нәтижені [8] жұмыстағы нәтижемен салыстырған кезде $1/a_{1D}$ оң мәндерінің аймағында өсетін қисықтардың сәйкес келмейтінін анықтаймыз. $c \rightarrow \infty$ шегінде Гаусс потенциалы сапалы түрде [8] жұмыста қолданылған нөлдік радиустағы потенциалға (псевдопотенциалға) ұмтылады. Алайда, жалпы түсініктен, атомдардың құрылымы болатыны белгілі, сондықтан потенциалдың ақырғы әсер радиусы болуы керек.



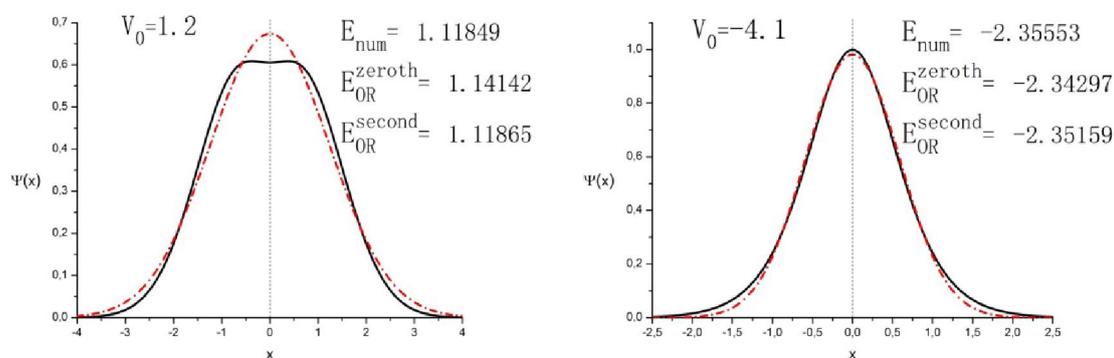
2-сурет – Әртүрлі әдістер есептеулерін салыстыру; E_{num} – энергияның сандық есептелуі, E_{pseudo} – [8]-де есептелген дельта-функция түрінде жанасқан әсерлесу жағдайындағы энергия, $E_{OR}^{zeroth\ order}$ – ОӨ нөлдік жуықтаудағы энергия, $E_{OR}^{second\ order}$ – ОӨ екінші жуықтаудағы энергия



3-сурет – Сандық есептеудегі ТФ мен ОӨ әдісіндегі ТФ $c = 1000$ үшін әртүрлі V_0 кезінде салыстыру. Тұтас сызық–сандық есептеудегі ТФ. Штрихталған сызықтар–нөлдік ретті ОӨ әдісіндегі ТФ. E_{num} – энергияның сандық есептелуі, E_{OR}^{zeroth} – ОӨ нөлдік жуықтаудағы энергия, E_{OR}^{second} – ОӨ екінші ретті жуықтаудағы энергия

ОӨ әдісінің ауытқу себебі осцилляторлық толқындық функцияның гаусстық көрінісінің шынайы ТФ көрінісінен ауытқуына байланысты, оны 3-суреттен көруге болады.

Осцилляторда өрнектеу әдісі (ОӨ). ОӨ әдісі көмегімен Шредингер теңдеуін (1) шешуге кірісейік. Бұл әдіс өрістің скалярлы кванттық теориясының идеялары мен әдістеріне негізделген. Әдістің толық сипаттамасы [9] жұмысында бейнеленген. Әдістің артықшылығы, оның аумағында потенциалдардың кең түрі үшін ауытқу теориясы қатары өте тез ұқсастырылатынында. Нөлдік жуықтауда байланысқан күйдің гамильтонианның негізгі күйі кейбір эффективті жиілігі Ω болатын осцилляторлық толқындық функциямен бейнеленеді деп болжанады. Ω жиілігі байланысқан күй болдыратын потенциалдан негізгі кванттық үлесті ескере алатындай етіп таңдалады. Ол үшін бастапқы гамильтонианда әзірге белгісіз Ω жиілігі бар осцилляторлық бөлігі бөлініп шығарылады, ал каноникалық айнымалыларды, координата мен импульсті a^+ туу және a жою операторлары арқылы өрнектейді, ал одан кейін оларды дұрыс формада реттейді. Ары қарай мұндай түрленген гамильтонианда каноникалық айнымалылар бойынша сызықты және квадраттық қосылғыштардың болмауы талап етіледі. Бұл шарт Ω –осциллятор жиілігін анықтайды және осцилляторлық көрініс шарты деп аталады. Осылайша, алынған ауытқу теориясының қатары эффективті қосылады.



4-сурет – Сандық есептеудегі ТФ мен ОӨ әдісіндегі ТФ $c = 1$ үшін әртүрлі V_0 кезінде салыстыру. Тұтас сызық – сандық есептеудегі ТФ. Штрихталған сызықтар – нөлдік ретті ОӨ әдісіндегі ТФ. E_{num} – энергияның сандық есептелуі, $E_{\text{OR}}^{\text{zeroth}}$ – ОӨ нөлдік жуықтаудағы энергия, $E_{\text{OR}}^{\text{second}}$ – ОӨ екінші ретті жуықтаудағы энергия

ӘДЕБИЕТ

- [1] Chin C., Grimm R., Julienne P.S., Tiesinga E. *Feshbach Resonances in Ultracold Gases*, Rev. Mod. Phys., **2010**, 82, 1225.
- [2] Ni K.-K., Ospelkaus S., Wang D., Quemener G., Neyenhuis B., de Miranda M.H.G., Bohn J.L., Ye J., Jin D.S. *Dipolar Collisions of Polar Molecules in the Quantum Regime*, Nature, **2010**, 464, 1324-1328.
- [3] Турлапов А.В., *Экспериментальное исследование ультрахолодного газа ферми-атомов*: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород, **2012**.
- [4] Пигаевский Л.П., *Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения*, УФН, т. 176, **2006**, 345-364, №4.
- [5] Zurn G., Serwane F., Lompe T., Wenz A.N., Ries M.G., Bohn J.E., Jochim S. *Fermionization of Two Distinguishable Fermions*, Phys. Rev. Lett. **2012**, 108, 075303.
- [6] Haller E., Mark M.J., Hart R., Danzl J.G., Reichsöllner L., Melezhik V., Schmelcherand P., Nagerl H.-C. *Confinement-Induced Resonances in Low-Dimensional Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **2010**, 104, 153203.
- [7] Peng S.-G., Hu H., Liu X.-J., Drummond P.D. *Confinement-Induced Resonances in Anharmonic Waveguides*, Phys. Rev A, **2011**, 84, 043619
- [8] Dineykhan M., Efimov G.V., Ganbold G., Nedelko S.N. *Oscillator Representation in Quantum Physics*. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, **1995**, V. 26.
- [9] Busch T., Englert B.-G., Rzazewski K., Wilkens M. *Two Cold Atoms in a Harmonic Trap*, Found. Phys. 28, **1998**, № 4, 549.
- [10] Bergeman T., Moore M.G., Olshani M. *Atom-Atom Scattering in the Presence of a Cylindrical Harmonic Potential: Numerical Results and an Extended Analytic Theory*, Phys. Rev. Lett., **2003**, 91, 163201.

REFERENCES

- [1] Chin C., Grimm R., Julienne P.S., Tiesinga E. *Feshbach Resonances in Ultracold Gases*, Rev. Mod. Phys., **2010**, 82, 1225.
- [2] Ni K.-K., Ospelkaus S., Wang D., Quemener G., Neyenhuis B., de Miranda M.H.G., Bohn J.L., Ye J., Jin D.S. *Dipolar Collisions of Polar Molecules in the Quantum Regime*, Nature, **2010**, 464, 1324-1328.
- [3] Турлапов А.В., *Экспериментальное исследование ультрахолодного газа ферми-атомов*: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород, **2012**.

- [4] Пятаевский Л.П., *Конденсаты Бозе-Эйнштейна в поле лазерного излучения*, УФН, т. 176, **2006**, 345-364, №4.
- [5] Zurn G., Serwane F., Lompe T., Wenz A.N., Ries M.G., Bohn J.E., Jochim S. *Fermionization of Two Distinguishable Fermions*, Phys. Rev. Lett. **2012**, 108, 075303.
- [6] Haller E., Mark M.J., Hart R., Danzl J.G., Reichsöllner L., Melezhik V., Schmelcherand P., Nagerl H.-C. *Confinement-Induced Resonances in Low-Dimensional Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett. **2010**, 104, 153203.
- [7] Peng S.-G., Hu H., Liu X.-J., Drummond P.D. *Confinement-Induced Resonances in Anharmonic Waveguides*, Phys. Rev A, **2011**, 84, 043619
- [8] Dineykhon M., Efimov G.V., Ganbold G., Nedelko S.N. *Oscillator Representation in Quantum Physics*. Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer-Verlag, **1995**, V. 26.
- [9] Busch T., Englert B.-G., Rzazewski K., Wilkens M. *Two Cold Atoms in a Harmonic Trap*, Found. Phys. 28, **1998**, № 4, 549.
- [10] Bergeman T., Moore M.G., Olshanii M. *Atom-Atom Scattering in the Presence of a Cylindrical Harmonic Potential: Numerical Results and an Extended Analytic Theory*, Phys. Rev. Lett., **2003**, 91, 163201.

ОПИСАНИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ АТОМОВ В ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛОВУШКЕ

С. А. Жаугашева¹, И. С. Ишмухамедов², Д. С. Валиолда¹, Н. К. Жусупова¹

¹ Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

Ключевые слова: энергетический спектр, квантовый осциллятор, ангармонический осциллятор, оптическая ловушка, ультрахолодные атомы.

Аннотация. В работе выполнен расчет энергии основного состояния двух атомов в одномерной геометрии гармонической оптической ловушки. Получена зависимость энергии от одномерной длины рассеяния, отвечающей различным интенсивностям потенциала межатомного взаимодействия $V_{\text{int}}(x) = V_0 \exp\{-2cx^2\}$. Расчет произведен численным и аналитическим методами. В качестве аналитического метода выбран метод осцилляторного представления (ОП), успешно применяемый для расчета связанных состояний различных малочастичных систем.

Основными результатами данной работы являются:

1) численное исследование области применимости в этой задаче ранее использованного приближения потенциала нулевого радиуса;

2) исследование границы применимости метода ОП для потенциала

$$V(x) = V_{\text{conf}}(x) + V_{\text{int}}(x) = \frac{x^2}{2} + V_0 \exp\{-2cx^2\}$$