

ISSN 1991-346X

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ  
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

# Х А Б А Р Л А Р Ы

---

---

## ИЗВЕСТИЯ

НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES  
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА  
СЕРИЯСЫ



СЕРИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ



PHYSICO-MATHEMATICAL  
SERIES

**2 (306)**

НАУРЫЗ – СӘУІР 2016 ж.  
МАРТ – АПРЕЛЬ 2016 г.  
MARCH – APRIL 2016

1963 ЖЫЛДЫҢ ҚАҢТАР АЙЫНАН ШЫҒА БАСТАҒАН  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА  
PUBLISHED SINCE JANUARY 1963

ЖЫЛЫНА 6 РЕТ ШЫҒАДЫ  
ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
PUBLISHED 6 TIMES A YEAR

АЛМАТЫ, ҚР ҰҒА  
АЛМАТЫ, НАН РК  
ALMATY, NAS RK

Б а с р е д а к т о р

ҚР ҰҒА академигі,

**Мұтанов Г. М.**

Р е д а к ц и я а л қ а с ы:

физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Әшімов А.А.**; техн. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Байғұнचेков Ж.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Жұмаділдаев А.С.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Қалменов Т.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Мұқашев Б.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Өтелбаев М.О.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Тәкібаев Н.Ж.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА академигі **Харин С.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Әбішев М.Е.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Жантаев Ж.Ш.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Қалимолдаев М.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Косов В.Н.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Мұсабаев Т.А.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Ойнаров Р.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Рамазанов Т.С.** (бас редактордың орынбасары); физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Темірбеков Н.М.**; физ.-мат. ғ. докторы, проф., ҚР ҰҒА корр. мүшесі **Өмірбаев У.У.**

Р е д а к ц и я к ең е с і:

Украинаның ҰҒА академигі **И.Н. Вишневский** (Украина); Украинаның ҰҒА академигі **А.М. Ковалев** (Украина); Беларусь Республикасының ҰҒА академигі **А.А. Михалевич** (Беларусь); Әзірбайжан ҰҒА академигі **А. Пашаев** (Әзірбайжан); Молдова Республикасының ҰҒА академигі **И. Тигиняну** (Молдова); мед. ғ. докторы, проф. **Иозеф Банас** (Польша)

Главный редактор

академик НАН РК

**Г. М. Мутанов**

Редакционная коллегия:

доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.А. Ашимов**; доктор техн. наук, проф., академик НАН РК **Ж.Ж. Байгунчечков**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **А.С. Джумадильдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Т.Ш. Кальменов**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Б.Н. Мукашев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **М.О. Отелбаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **Н.Ж. Такибаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., академик НАН РК **С.Н. Харин**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Е. Абишев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Ж.Ш. Жантаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **М.Н. Калимолдаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **В.Н. Косов**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.А. Мусабаев**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Р. Ойнаров**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Т.С. Рамазанов** (заместитель главного редактора); доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **Н.М. Темирбеков**; доктор физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. НАН РК **У.У. Умирбаев**

Редакционный совет:

академик НАН Украины **И.Н. Вишневский** (Украина); академик НАН Украины **А.М. Ковалев** (Украина); академик НАН Республики Беларусь **А.А. Михалевич** (Беларусь); академик НАН Азербайджанской Республики **А. Пашаев** (Азербайджан); академик НАН Республики Молдова **И. Тигиняну** (Молдова); д. мед. н., проф. **Иозеф Банас** (Польша)

«Известия НАН РК. Серия физико-математическая». ISSN 1991-346X

Собственник: РОО «Национальная академия наук Республики Казахстан» (г. Алматы)

Свидетельство о постановке на учет периодического печатного издания в Комитете информации и архивов Министерства культуры и информации Республики Казахстан №5543-Ж, выданное 01.06.2006 г.

Периодичность: 6 раз в год.

Тираж: 300 экземпляров.

Адрес редакции: 050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28, ком. 219, 220, тел.: 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© Национальная академия наук Республики Казахстан, 2016

Адрес типографии: ИП «Аруна», г. Алматы, ул. Муратбаева, 75.

Editor in chief

**G. M. Mutanov**,  
academician of NAS RK

Editorial board:

**A.A. Ashimov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **Zh.Zh. Baigunchekov**, dr. eng. sc., prof., academician of NAS RK; **A.S. Dzhumadildayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **T.S. Kalmenov**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **B.N. Mukhashev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.O. Otelbayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **N.Zh. Takibayev**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **S.N. Kharin**, dr. phys-math. sc., prof., academician of NAS RK; **M.Ye. Abishev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **Zh.Sh. Zhantayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **M.N. Kalimoldayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **V.N. Kosov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.A. Mussabayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **R. Oinarov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **T.S. Ramazanov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK (deputy editor); **N.M. Temirbekov**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK; **U.U. Umirbayev**, dr. phys-math. sc., prof., corr. member of NAS RK

Editorial staff:

**I.N. Vishnievski**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.M. Kovalev**, NAS Ukraine academician (Ukraine); **A.A. Mikhalevich**, NAS Belarus academician (Belarus); **A. Pashayev**, NAS Azerbaijan academician (Azerbaijan); **I. Tighineanu**, NAS Moldova academician (Moldova); **Joseph Banas**, prof. (Poland).

**News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series.**  
**ISSN 1991-346X**

Owner: RPA "National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan" (Almaty)

The certificate of registration of a periodic printed publication in the Committee of information and archives of the Ministry of culture and information of the Republic of Kazakhstan N 5543-Ж, issued 01.06.2006

Periodicity: 6 times a year

Circulation: 300 copies

Editorial address: 28, Shevchenko str., of. 219, 220, Almaty, 050010, tel. 272-13-19, 272-13-18,  
[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz) / [physics-mathematics.kz](http://physics-mathematics.kz)

---

© National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2016

Address of printing house: ST "Aruna", 75, Muratbayev str, Almaty

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 5 – 9

UDC 539.171

## INVESTIGATION OF THE ELASTIC SCATTERING OF $^3\text{He}$ IONS ON $^{14}\text{N}$ AT ENERGIES 50 AND 60 MeV

N. Burtabayev<sup>1</sup>, A. Duisebayev<sup>1</sup>, Zh.K. Kerimkulov<sup>1</sup>, D.K. Alimov<sup>1,2</sup>, A.V. Yushkov<sup>2</sup>,  
T.K. Zholdybayev<sup>1</sup>, B. Sadikov<sup>1</sup>, Y.S. Mukhamejanov<sup>2</sup>, D.M. Janseitov<sup>3</sup>, S.B. Sakuta<sup>4</sup>

<sup>1</sup>INP, Almaty, Kazakhstan, <sup>2</sup>KazNU, Almaty, Kazakhstan, <sup>3</sup>ENU, Astana, Kazakhstan,

<sup>4</sup>NRC “Kurchatov Institute”, Moscow, Russia

e-mail: [diliyo@mail.ru](mailto:diliyo@mail.ru)

**Keywords:** elastic scattering, light charged particles, diffuseness, optical potential, folding potential, nuclear rainbow.

**Abstract.** In this paper we studied the elastic scattering of  $^3\text{He}$  ions on nuclei  $^{14}\text{N}$  at energies 50 and 60 MeV. An analysis of the angular distributions is carried out using an optical model of the nucleus and folding models. A good description of the experimental data in the full range of angles with potentials having the volume integrals of the real part close to 400-500 MeV fm<sup>3</sup>. In the measured angular distributions of the elastic scattering there are clearly visible effects of the nuclear rainbow caused by the refractive properties of a real nuclear potential.

УДК 539.171

## ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ИОНОВ<sup>3</sup> НЕ НА ЯДРАХ $^{14}\text{N}$ ПРИ ЭНЕРГИЯХ 50 И 60 МЭВ

Н. Буртебаев<sup>1</sup>, А. Дуйсебаев<sup>1</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1</sup>, Д.К. Алимов<sup>1,2</sup>, А.В. Юшков<sup>2</sup>, Т.К.  
Жолдыбаев<sup>1</sup>, Б. Садыков<sup>1</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>3</sup>, С.Б. Сакута<sup>4</sup>

<sup>1</sup>ИЯФ, Алматы, Казахстан, <sup>2</sup>КазНУ, Алматы, Казахстан, <sup>3</sup>ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан,

<sup>4</sup>НИЦ “Курчатовский институт”, Москва, Россия

**Ключевые слова:** упругое рассеяние, легкие заряженные частицы, диффузность, оптический потенциал, фолдинг потенциал, ядерная радуга.

**Аннотация.** В данной работе исследовано упругое рассеяние ионов  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{14}\text{N}$  при энергиях 50 и 60 МэВ. Анализ угловых распределений проведен с использованием оптической модели ядра и фолдинг модели. Получено хорошее описание экспериментальных данных в полном диапазоне углов с потенциалами, имеющими объемные интегралы реальной части вблизи 400-500 МэВ фм<sup>3</sup>. В измеренных угловых распределениях упругого рассеяния отчетливо видны эффекты ядерной радуги, вызванные рефракционными свойствами реального ядерного потенциала.

**Введение.** Анализ данных рассеяния по оптической модели является основным источником информации о потенциалах ядро-ядерных взаимодействий. Известно, однако, что для сложных снарядов с  $A \geq 2$ , такой анализ является неоднозначным. Особенно сложная ситуация возникает

при низких энергиях ( $E < 10 \text{ МэВ/нуклон}$ ). Многочисленные исследования показали, что неоднозначность извлеченных параметров действительной части ядерного потенциала может быть как непрерывной и дискретной.

Если глубина действительной части ядерного потенциала велика по сравнению с энергией налетающей частицы (при энергиях  $E/\text{нуклон} < 10 \text{ МэВ}$ ), то при достаточно малых прицельных параметрах воздействия, в связи с влиянием ядерного притяжения, угол отклонения рассеянной частицы может превышать  $180^\circ$  градусов. В этом случае дифракционная картина наблюдается во всем диапазоне углов углового распределения. Тем не менее, при более высоких энергиях падающая частица может быть отражена на угол, не превышающий определенный предел. Согласно классической механике, сечение в этой точке должно стать бесконечным. В квантовой механике, однако, сечение конечно, но при не очень сильном поглощении, должен наблюдаться максимум, а затем экспоненциальный спад сечений на больших углах. Этот эффект возникает из-за преломляющих свойств вещественной части ядерного потенциала и является аналогом явления радуги в оптике. Величина и угловая зависимость сечений наблюдаемой ядерной радуги очень чувствительны к действительной части ядерного потенциала, как было впервые показано в работах [1, 2]. Анализ таких данных с использованием оптической модели позволяет устранить дискретную неоднозначность глубины реальной части ядерного потенциала.

Литературных данных по упругому рассеянию ионов  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{14}\text{N}$  при энергиях выше  $20 \text{ МэВ}$  немного. Угловые распределения были ранее измерены при энергиях  $26,3 \text{ МэВ}$  [3] и  $72 \text{ МэВ}$  [4] в передней полусфере рассеяния. Эффект ядерной радуги наблюдался только при энергии  $72 \text{ МэВ}$ . Ранее нами были опубликованы результаты измерений упругого рассеяния на  $50$  и  $60 \text{ МэВ}$  энергий [5] с предварительным анализом в рамках оптической модели.

Целью данной работы является изучение упругого рассеяния  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{14}\text{N}$  при энергиях  $50 - 60 \text{ МэВ}$ . Здесь эффекты ядерной радуги начинают проявляться отчетливо. Такие энергии являются достаточно высокими, чтобы избежать наихудших осложнений, связанных с составными ядерными эффектами.

**1. Экспериментальная методика и результаты измерений.** Измерения проводились на выведенных пучках ионов  $^3\text{He}$  изохронного циклотрона У-150М Института ядерной физики (Алматы, Казахстан). Энергия ионов  $^3\text{He}$  составляла  $50$  и  $60 \text{ МэВ}$ . В качестве мишени использовался естественный газ азота ( $99,61\%$  от  $^{14}\text{N}$ ) давление которого было около  $1$  атмосферы. Эффективная толщина мишени была в диапазоне от  $1$  до  $7 \text{ мг/см}^2$ , в зависимости от угла измерения. Неопределенность в оценке толщины не более  $3\%$ . Более подробно конструкция мишени описана в работе [6].

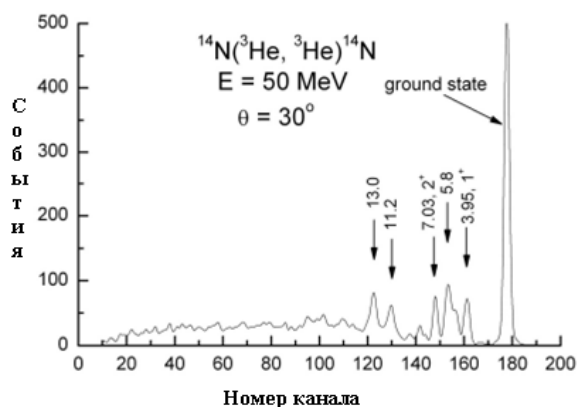


Рисунок 1 – Энергетический спектр  $^3\text{He}$ , рассеянных при энергии  $50 \text{ МэВ}$  на ядрах  $^{14}\text{N}$  оцениваются под углом  $30^\circ$

В экспериментах использовалась  $\Delta E$ - $E$  методика регистрации и идентификации заряженных частиц. Рассеянные частицы регистрировались телескопом, состоящим из двух кремниевых детекторов с толщиной  $100$  микрон ( $\Delta E$ ) и  $2 \text{ мм}$  ( $E$ ). Общее энергетическое разрешение варьировалось от  $400$  до  $500 \text{ кэВ}$ , в зависимости от угла рассеяния, и определялось в основном разбросом энергии в пучке и толщиной мишени.

Дифференциальные сечения упругого рассеяния были измерены в диапазоне углов от  $10^\circ$  до  $170^\circ$  в лабораторной системе координат. Угловые распределения, как видно из рисунка 1, имеют дифракционную структуру вплоть до углов  $60^\circ - 70^\circ$ . С увеличением угла наблюдается широкий максимум, а затем спад без выраженных осцилляций. Статистические погрешности измеренных дифференциальных сечений не превышали 10%.

**2. Анализ и обсуждение результатов.** Измеренные угловые распределения упругого рассеяния были проанализированы в рамках оптической модели ядра. Расчеты проводились с центральным потенциалом без спин-орбитального взаимодействия:

$$U(r) = -Vf(r) - i4a_w W_D \frac{df_w(r)}{dr} + V_C(r)$$

Первые два члена отвечают за ядерное взаимодействие с поверхностным поглощением. Радиальная зависимость  $f_i(r)$  описывается Вудс-Саксоновским формфактором с радиусом  $r_i$  и диффузностью  $a_i$  ( $i = V, W$ ):

$$f_i = \left[ 1 + \exp((r - r_i A^{1/3}) / a_i) \right]^{-1}$$

$V_C$  – кулоновский потенциал равномерно заряженной сферы с радиусом  $R_C$ . При  $r > R_C$ , кулоновское взаимодействие между двумя ядрами равно

$$V_C = Z_p Z_t e^2 / r,$$

где  $Z_p, Z_t$  – заряды налетающей частицы (p) и мишени (t). Во всех наших расчетах использовалось:  $R_C = r_C A_t^{1/3}$  с  $r_C = 1.3 \text{ фм}$ .

Теоретические расчеты выполнялись по программе SPI-GENOA [7]. Параметры ОП подбирались таким образом, чтобы достичь наилучшего согласия между теоретическими и экспериментальными угловыми распределениями. Автоматический поиск оптимальных параметров ОП производился путем минимизации величины  $\chi^2 / N$  методом наименьших квадратов. В качестве исходных были взяты параметры потенциала, предложенные в работе [8]. Для уменьшения неоднозначности мы старались не уходить далеко от рекомендованных значений геометрических параметров ( $r_V, a_V$ ) реального потенциала. Для лучшего согласия с экспериментальными данными глубина мнимой части ( $W_D$ ) лишь незначительно уменьшалась. Окончательные параметры потенциалов приведены в таблице 1.

Для ограничения неоднозначности оптического потенциала дополнительно был проведен анализ в рамках фолдинг модели. Потенциал двойной свертки (фолдинг потенциал) рассчитывается с учетом распределения ядерной материи как налетающего ядра, так и ядра мишени с использованием эффективного потенциала нуклон-нуклонного взаимодействия ( $v_{NN}$ ). Таким образом, фолдинг потенциал представляется в виде:

$$V_{DF}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \rho_p(\mathbf{r}_1) \rho_t(\mathbf{r}_2) v_{NN}(\mathbf{r}_{12})$$

где  $\rho_p(\mathbf{r}_1)$  и  $\rho_t(\mathbf{r}_2)$  – плотности ядерной материи налетающего ядра и ядра мишени, соответственно. Гауссово распределение плотности для обоих ядер определяется как

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-\beta r^2),$$

где  $\beta$  корректируется таким образом, чтобы воспроизвести экспериментальное значение для среднеквадратичного радиуса ядер  $^{14}\text{N} = 2.58 \text{ фм}$  и  $^3\text{He} = 1.91 \text{ фм}$  [9]. Значения  $\rho_0$  могут быть получены из нижеследующего условия нормировки

$$\int \rho(r) r^2 dr = \frac{A}{4\pi},$$

где  $A$  массовое число. В расчетах эффективное нуклон-нуклонное ( $v_{NN}$ ) взаимодействие бралось в форме МЗУ-взаимодействия, заданным как

$$v_{NN}(r) = 7999 \frac{\exp(-4r)}{4r} - 2134 \frac{\exp(-2.5r)}{2.5r} + J_{00}(E) \delta(r) \text{ МэВ},$$

где

$$J_{00}(E) = 276[1 - 0.005E_{Lab} / A_p] \text{ МэВ Фм}^3$$

Оптимальное согласие теории с экспериментом достигалось варьированием нормировочного коэффициента  $N$  вещественной части и параметров мнимой части, найденных из анализа в рамках оптической модели (таблица 1). Отличие  $N$  от единицы может свидетельствовать о вкладе членов второго порядка по эффективным силам в реальную часть оптического потенциала. Анализ проводился с использованием программы FRESKO [10]. Найденные параметры фолдинг потенциала и значения  $N$  представлены в таблице-1.

Таблица 1 – Параметры оптического (ОП) и фолдинг потенциала (ФП) с коэффициентом нормализации  $N_r = 1$

| $a + A$                          | $E$ ,<br>МэВ | $V$ ,<br>МэВ | $r_v$ ,<br>фм | $a_v$ ,<br>фм | $W_D$ ,<br>МэВ | $r_w$ ,<br>фм | $a_w$ ,<br>фм | $J_v$ ,<br>МэВ фм <sup>3</sup> | $J_w$ ,<br>МэВ фм <sup>3</sup> |
|----------------------------------|--------------|--------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|
| <sup>3</sup> He+ <sup>14</sup> N | ОП 50        | 100          | 1.225         | 0.725         | 11             | 1.56          | 0.69          | 409.8                          | 142.6                          |
|                                  | ФП 50        |              |               |               | 11             | 1.56          | 0.69          |                                |                                |
|                                  | ОП 60        | 102          | 1.225         | 0.725         | 13             | 1.56          | 0.69          | 418                            | 168.5                          |
|                                  | ФП 60        |              |               |               | 13             | 1.56          | 0.69          |                                |                                |

Из предсказаний микроскопической теории (фолдинг модель) и результатами глобального анализа упругого рассеяния <sup>3</sup>He в диапазоне энергий 10-200 МэВ[11, 12] следует, что для взаимодействия ионов <sup>3</sup>He с ядрами 1p-оболочки наиболее разумными значениями объемного интеграла являются  $J_v \sim 400$  МэВ фм<sup>3</sup>. Как видно из таблицы 1, объемные интегралы реальной части ( $J_v$ ) найденные нами, находятся в пределах 400 - 500 МэВ фм<sup>3</sup>. На рисунке 2 представлено сравнение экспериментальных данных (квадраты) с сечениями рассчитанными в рамках оптической модели ядра (сплошная линия) и фолдинг модели (штрих-пунктирная линия). Видно, что оба потенциала коррелируют между собой и дают схожее описание эксперимента.

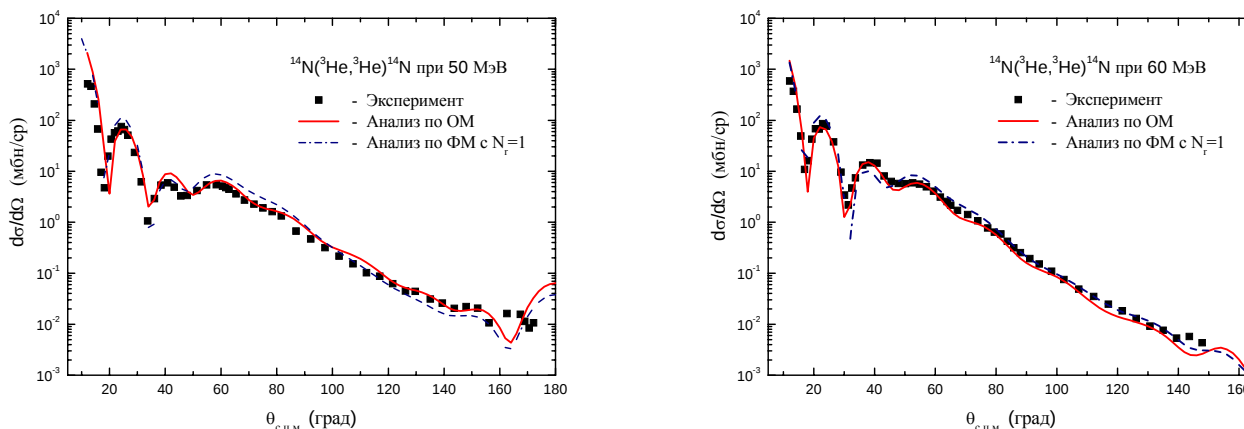


Рисунок 2 – Угловые распределения упругого рассеяния <sup>3</sup>He при энергиях 50 и 60 МэВ на ядрах <sup>14</sup>N

Таким образом, в упругом рассеянии <sup>3</sup>He на ядрах <sup>14</sup>N при энергиях около 50 МэВ, отчетливо наблюдаются эффекты ядерной радуги, вызванные преломляющими свойствами ядерного потенциала.

**Заключение.** Исследовалось упругое рассеяние <sup>3</sup>He на ядрах <sup>14</sup>N при энергиях 50 и 60 МэВ. Измеренные угловые распределения были проанализированы в рамках оптической модели ядра и фолдинг модели.

Объемные интегралы, найденные для реальной части потенциалов находятся в пределах интервала 400-500 МэВ фм<sup>3</sup>, что согласуется с предсказаниями микроскопической теории и с результатами глобального анализа упругого рассеяния <sup>3</sup>He в диапазоне энергий 10-200 МэВ. Эффекты ядерной радуги отчетливо наблюдаются в измеренных угловых распределениях упругого рассеяния. Об этом свидетельствуют следующее:

1. Наличие фраунгоферовской дифракции в передней полусфере. Дифракция особенно сильна при углах, где амплитуды рассеяния ближней и дальней компоненты сопоставимы.

2. Наличие в угловых распределениях широкого максимума и последующего монотонного спада сечений при больших углах. Это связано с существованием предельного угла в функции отклонения рассеянной частицы в поле ядра.

Эта работа была частично поддержана грантом МОН РК, проекта "Экспериментальное и теоретическое исследование упругих и квазиупругих процессов взаимодействия  $^3\text{He}$  и  $d$  ионов с  $p$ - и  $sd$ -оболочки ядер".

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] D.A. Goldberg, S.M. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 500 (1972).
- [2] D.A. Goldberg, S.M. Smith, G.E. Burdick, *Phys. Rev.* **C10**, 1362 (1974).
- [3] A.M. Mukhamedzhanov, P. Bem, B.A. Braun, V. Burjan, C.A. Gagliardi, V. Kroha, J. Novak, F.M. Nunes, S. Piskoř, F. Pirlpesov, E. Simeckova, R.E. Tribble, J. Vincour, *Phys. Rev.* **C67**, 65804 (2003).
- [4] A.S. Demyanova, A.A. Ogloblin, S.N. Ershov, F.A. Gareev, P.S. Kurmanov, E.F. Svinareva, S.A. Goncharov, V.V. Adodin, N. Burtebaev, J.M. Bang, J.S. Vaagen, *Phys. Scr.* **T32**, 89 (1990).
- [5] V.V. Adodin, N.T. Burtebayev, A.D. Duiysebaev, *Yad. Fiz.* **55**, 577 (1992).
- [6] A.D. Duiybayev, G.N. Ivanov, N.T. Burtebayev et al. *Izv. AN Kaz. SSR, ser. fiz.-mat.* **4**, 73, 1984.
- [7] F. Perey, SPI-GENOA. *An optical model search code (unpublished)*.
- [8] G.R. Satchler, W.G. Love, *Phys. Rep.* **55**, 183 (1979).
- [9] De Vries H., De Jager C.W., De Vries C. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // Atomic Data and Nuclear Data Tables
- [10] I.J. Thompson, *Comput. Phys. Rep.* **7**, 167 (1988), available at: <http://www.fresco.org.uk/>
- [11] R. Gurgen, F. Hinterberger, R. Jahn, et al., *Nucl. Phys.* **A320**, 296 (1979).
- [12] H.-J. Trost, P. Lezoch, and U. Strohhusch, *Nucl. Phys.* **A462**, 333 (1987).

#### REFERENCES

- [1] D.A. Goldberg, S.M. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 500 (1972).
- [2] D.A. Goldberg, S.M. Smith, G.E. Burdick, *Phys. Rev.* **C10**, 1362 (1974).
- [3] A.M. Mukhamedzhanov, P. Bem, B.A. Braun, V. Burjan, C.A. Gagliardi, V. Kroha, J. Novak, F.M. Nunes, S. Piskoř, F. Pirlpesov, E. Simeckova, R.E. Tribble, J. Vincour, *Phys. Rev.* **C67**, 65804 (2003).
- [4] A.S. Demyanova, A.A. Ogloblin, S.N. Ershov, F.A. Gareev, P.S. Kurmanov, E.F. Svinareva, S.A. Goncharov, V.V. Adodin, N. Burtebaev, J.M. Bang, J.S. Vaagen, *Phys. Scr.* **T32**, 89 (1990).
- [5] V.V. Adodin, N.T. Burtebayev, A.D. Duiysebaev, *Yad. Fiz.* **55**, 577 (1992).
- [6] A.D. Duiybayev, G.N. Ivanov, N.T. Burtebayev et al. *Izv. AN Kaz. SSR, ser. fiz.-mat.* **4**, 73, 1984.
- [7] F. Perey, SPI-GENOA. *An optical model search code (unpublished)*.
- [8] G.R. Satchler, W.G. Love, *Phys. Rep.* **55**, 183 (1979).
- [9] De Vries H., De Jager C.W., De Vries C. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // Atomic Data and Nuclear Data Tables
- [10] I.J. Thompson, *Comput. Phys. Rep.* **7**, 167 (1988), available at: <http://www.fresco.org.uk/>
- [11] R. Gurgen, F. Hinterberger, R. Jahn, et al., *Nucl. Phys.* **A320**, 296 (1979).
- [12] H.-J. Trost, P. Lezoch, and U. Strohhusch, *Nucl. Phys.* **A462**, 333 (1987).

#### 50 ЖӘНЕ 60 МЭВ ЭНЕРГИЯЛЫ $^3\text{He}$ ИОНДАРЫНЫҢ $^{14}\text{N}$ ЯДРОЛАРЫНАН СЕРПІМДІ ШАШЫРАУЫН ЗЕРТТЕУ

Н. Буртебаев<sup>1</sup>, А. Дуйсебаев<sup>1</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1</sup>, Д.К. Алимов<sup>1,2</sup>, А.В. Юшков<sup>2</sup>,  
Т.К. Жолдыбаев<sup>1</sup>, Б. Садыков<sup>1</sup>, Е.С. Мухамеджанов<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>3</sup>, С.Б. Сакута<sup>4</sup>

<sup>1</sup>ЯФИ, Алматы, Қазақстан, <sup>2</sup>эл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан,

<sup>3</sup>Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан,

<sup>4</sup>ҰЗО "Курчатов институты", Мәскеу, Ресей

**Түйін сөздер:** серпімді шашырау, зарядталған жеңіл бөлшектер, диффуздық, оптикалық потенциал, фолдинг потенциал, ядролық қосақ.

**Аннотация.** Осы жұмыста 50 және 60 МэВ энергиялы  $^3\text{He}$  иондарының  $^{14}\text{N}$  ядроларынан серпімді шашырауы зерттелді. Ядроның фолдинг және оптикалық үлгілері қолданылып, бұрыштық таралу талдауы жүргізілді. 400-500 МэВ  $\text{fm}^3$  төңірегінде потенциалдың нақты бөлігінің көлемдік интегралы үшін тәжірибелік мәліметтерден толық бұрыштық диапазонда жақсы сипаттамалар алынды. Өлшенген серпімді шашыраудың бұрыштық таралуларында ядролық қосақтың әсері байқалады.

Поступила 15.03.2016 г

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 10–20

**ON THE METHOD OF SOLVING ONE-DIMENSIONAL QUASILINEAR  
PROBLEM OF CONSOLIDATION OF NON HOMOGENEOUS SOIL  
WITH THE INITIAL GRADIENT OF PRESSURE  
AND DETERMINATION OF ITS SEDIMENT**

**Sh. Altynbekov**

South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent,  
e-mail: [sh.altynbekov@mail.ru](mailto:sh.altynbekov@mail.ru)

**Keywords:** soil mechanics, the theory of filtration consolidation, elastic-instantaneous deformation, the initial pressure gradient, the sediment of subgrade, one-dimensional quasi-linear problem, methods of mathematical physics.

**Abstract.** The one-dimensional quasilinear problem of the theory of filtration consolidation non-homogeneous soil, heterogeneity is due to the change in the consolidation of its elastic-instantaneous deformation, depending on the spatial coordinates and time is solved. At the same time, to solve the problem method of O.Videburg, the Fourier method, the method of introduction of new variables, the method of conversion of non-homogeneous boundary conditions in homogeneous and the method of Eigen function expansion were applied and to calculate sediment of subgrade there was applied a method of V.A.Florin.

The problem is solved for period of time, when  $r \leq h$ , and when  $r = h$ , where  $h$  – thickness of soil layer. There is  $r = r(t)$ ,  $t_h$  and  $H(t_h, z)$  – defined in the process of solving the problem.

Sediment of soil base is defined for each time period separately and then picked its total final sediment. The graphical analysis is given. The accuracy of the obtained results by the mechanic-mathematical interpretation of analytical solutions and numerical results, including in particular, the results of other authors have been investigated. For comparison, the diagrams obtained without taking the initial pressure gradient, without heterogeneity and variability of soil filtration coefficient are given.

УДК 624.131+539.215

**О МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ  
ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА  
С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА НАПОРА  
И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО ОСАДКА**

**Ш. Алтынбеков**

Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент,

**Ключевые слова:** механика грунтов, теория фильтрационной консолидации, упруго-мгновенная деформация, начальный градиент напора, осадка грунтового основания, одномерная квазилинейная задача, методы математической физики.

**Аннотация.** Решена одномерная квазилинейная задача теории фильтрационной консолидации неоднородного грунта, неоднородность которого обусловлена изменением в процессе консолидации их упругомгновенной деформации в зависимости от пространственных координат и времени. При этом для

решения задачи применены метод О.Видебурга, метод Фурье, метод введения новых переменных, метод преобразования неоднородных граничных условий в однородные и метод разложения по собственным функциям, а для расчета осадка грунтового основания применен метод В.А.Флорина.

Задача решена для периодов времени, когда  $r \leq h$ , и когда  $r = h$ , где  $h$  – толщина слоя грунта. При этом  $r = r(t)$ ,  $t_h$  и  $H(t_h, z)$  определены в ходе решения задачи. Осадку грунтового основания определена для каждого периода времени отдельно, после чего определена его суммарная конечная осадка. Дан графический анализ. Исследована достоверность полученных результатов путем механико-математического толкования аналитического решения и численных результатов, из которых, в частности, вытекают результаты других авторов. Для сравнения приведены эпюры, полученные без учета начального градиента напора, без учета неоднородности грунта и переменности коэффициента фильтрации.

### Введение

Как было показано в работах [1-3], фильтрационные явления в некоторых грунтах, например, в плотных глинах, возникают лишь тогда, когда градиент напора превысит некоторое критическое значение, называемое начальным градиентом напора. В тех случаях, когда начальные градиенты напора составляют не более 10-20% от фактических градиентов напора, влиянием их можно пренебречь. Если же они достигают значительных величин, то учет влияния начального градиента напора оказывает большое влияние на получаемые результаты.

К вопросу об учете начального градиента напора применительно к задачам теории уплотнения грунтов посвящены ряд работ [1-5]. В отличие от этих работ в данной работе решена одномерная квазилинейная задача фильтрационной теории консолидации неоднородных грунтов, неоднородность которых обусловлена переменностью их упруго-мгновенной деформации в зависимости от пространственных координат и от времени. Определены их конечные осадки с учетом начального градиента напора.

**Постановка задачи.** Задачу В.А. Флорина [3] исследуем для случая неоднородных грунтов. При увеличении в некоторый момент времени  $t = 0$  напора на верхней стороне слоя начальная эпюра дополнительных напоров имеет вид прямоугольника, как показано на рис. 1.

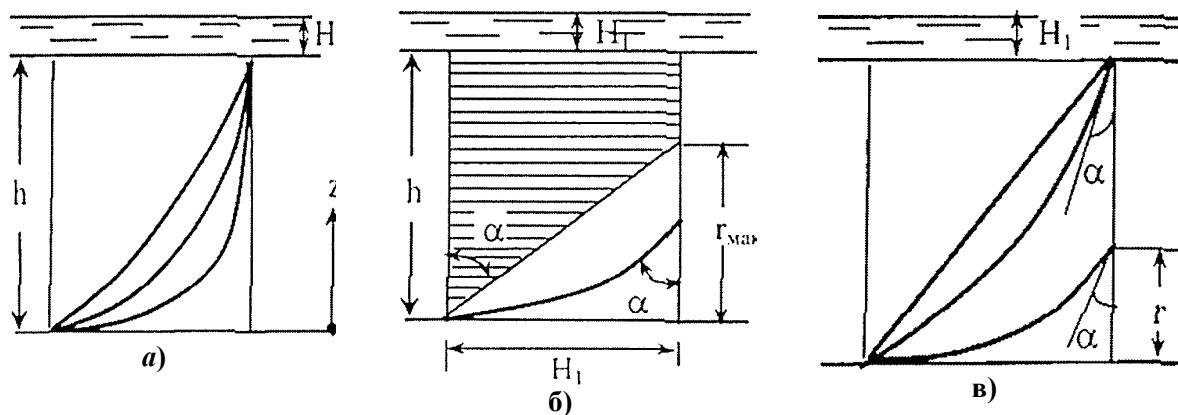


Рисунок 1 – Расчетные схемы фильтрации с учетом начального градиента напора

Если не учитывать влияния начального градиента напора, то явления фильтрации, хотя и с различными скоростями, все же начинаются сразу во всех точках слоя непосредственно после повышения граничного значения напора. В этом случае при любом  $t > 0$  имеется то или иное поступление воды в слой – сначала медленное, вследствие малых значений градиентов напора в верхней части слоя (рисунок 1, а), но постепенно возрастающее по мере увеличения градиентов напора до конечного значения, равного  $\frac{H_t}{h}$ .

При учете влияния начального градиента напора движение жидкости начинается только тогда, когда градиент напора превосходит некоторое определенное значение  $i_0$ . Поэтому в первое время после увеличения на верхней границе слоя давления в воде, пока плоскость раздела не достигнет этой поверхности, происходит уплотнение и выжимание воды только в нижней части слоя под

воздействием нагрузки, равной  $\gamma H_1$ . Этому состоянию соответствует кривая на рисунок 1,б, а также одна из кривых на рисунок 1,в. Если толщина слоя  $h > r_{\max} = \frac{H_1}{i_0}$ , то процесс уплотнения не может достигнуть верхней поверхности слоя, конечная эпюра напоров в верхней части остается прямоугольной и поступление воды в верхнюю часть слоя не происходит. Иначе говоря, при толщине  $h > \frac{H_1}{i_0}$  слой может рассматриваться как совершенно водоупорный и загрузка его верхней поверхности водой вызывает только уплотнение нижней части слоя при отсутствии явлений транзитной фильтрации.

При толщинах слоя меньших  $r_{\max}$  транзитная фильтрация начинается, когда поверхность раздела  $z = r$  (рисунок 1,в) достигает верхней поверхности слоя  $z = h$ . Тогда по мере увеличения величины  $\lg \alpha$  на верхней граничной поверхности слоя от значения  $i_0$  до  $\frac{H_1}{h}$  транзитный расход увеличивается от нуля до своего наибольшего значения

$$u = -k \left( \frac{\partial H}{\partial z} - i_0 \right) = -k \left( \frac{H_1}{h} - i_0 \right).$$

Следует отметить, что при экспериментальном определении коэффициента фильтрации последний вычисляется обычно по формуле  $u = -k \frac{\partial H}{\partial z} = -k \frac{H_1}{h}$ ; в этом случае влияние начального градиента входит в неявном виде в величину коэффициента фильтрации. Вследствие этого при достаточно больших значениях начального градиента обычный коэффициент фильтрации получается различным при различных градиентах напора [7]. Кроме того, необходимо указать, что во многих случаях при экспериментальном определении коэффициента фильтрации численные значения  $\frac{H_1}{h}$  бывают существенно больше тех значений, которые соответствуют условиям в основаниях сооружений и земляных сооружений. Это приводит к преуменьшению влияния начального градиента напора, усугубляемому иногда некоторым нарушением структуры грунта при выполнении фильтрационных исследований.

**А.** Применительно к случаю быстрого поднятия напора на верхней поверхности слоя укажем, что для этого случая решение задачи сводится к отысканию решения уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v(t) e^{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \left( K(1 + \beta H) \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad C_v(t) = \frac{K(1 + \varepsilon_{cp})}{\gamma a_0} (1 - \beta_E e^{-\alpha_E t}) \quad (1)$$

при следующих краевых условиях.

Для периода времени, когда  $r \leq h$ :

при  $t = 0$   $H = H_0 = H_1$  и  $r = 0$ , (2)

при  $t > 0$  и  $z = 0$   $H = 0$ , (3)

при  $t > 0$  и  $z = r$   $H = H_0$  и  $\frac{\partial H}{\partial z} = i_0$ , (4)

при  $t > 0$  и  $z > r$   $H = H_0$ . (5)

**Б.** В результате решения этой задачи будут определяться  $H = H(t, z)$  и  $r = r(t)$ , и устанавливается момент времени  $t_h$ , когда  $r = h$ , для которого может быть найдено распределение напоров

$$H = H(t_h, z).$$

Для периода времени, когда  $r = h$ :

при  $t = t_h$   $H = H(t_h, z)$ , (6)

при  $t > t_h$  и  $z = 0$   $H = 0$ , (7)

при  $t > t_h$  и  $z = h$   $H = H_1$ . (8)

В случае, если  $r_{\max} < h$  и транзитной фильтрации не возникает, то напоры определяются как для случая приложения нагрузки  $\gamma H_1$ .

С целью иллюстрации влияния собственного веса воды предположим, что со времени образования глинистого слоя он постоянно находился в затопленном и в насыщенном водой состоянии. Допустим далее, что в некоторый момент  $t = 0$  подстилающее его песчаное основание было быстро осушено. В таком случае, если давление в воде на верхней поверхности слоя равно нулю, т.е.  $H_1 = 0$ , а начальный градиент напора  $i_0 > 1$ , то вода, заполняющая поры грунта, не может перемещаться под влиянием только своего собственного веса и при соответствующих условиях может оказаться висящей над подстилающим грунтом с более крупными незаполненными порами.

**Метод и решение задачи.** Задачи типов (1)-(5) и (1), (6)-(8) могут быть решены различными методами уравнений математической физики и численного анализа. Здесь предпочтение отдается методу О.Видебурга, методу Фурье, методу введения новых переменных, методу преобразования граничных условий в нулевые и методу разложения по собственным функциям. Согласно методу О. Видебурга, уравнение (1) запишем в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v(t)e^{\alpha z} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \Phi_1(z, t, H), \quad (9)$$

$$\Phi_1(z, t, H) = \beta C_v(t)e^{\alpha z} \left[ K \left( \frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 + KH \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right]. \quad (10)$$

**Первый шаг.** Предполагая в (10)  $\beta = 0$  и пользуясь выбранными методами, решение задачи (9), (2)-(5) можно представить в виде:

$$H(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{\alpha_E t} \right)}, \quad (11)$$

где:  $C_{v0} = \frac{K(1+\varepsilon_{cp})}{\gamma a_0}$ ,  $D_i = \frac{\alpha H_0}{\lambda_i} \cdot \frac{\{\dots\}_1}{\{\dots\}_2} e^{C_{v0}\beta_E \frac{\lambda_i^2}{\alpha_E}}$ ,  $\{\dots\}_1 = V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right)$ ,

$$\{\dots\}_2 = \lambda_i^2 V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - [\dots]_1 \cdot e^{-\alpha h},$$

$$[\dots]_1 = \lambda_i^2 \cdot e^{-\alpha h} V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right).$$

Здесь, как было изложено выше, последовательным введением новых переменных [6]

$$y = \frac{\alpha}{2h} + \frac{1}{2} \ln \frac{4h^2 \lambda^2}{\alpha^2} \quad \text{и} \quad x = e^y$$

дифференциальное уравнение

$$Z'' + \lambda^2 e^{-\alpha z} Z(z) = 0$$

приведено к уравнению Бесселя [7], общее решение которого известно

$$V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) = J_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) - \frac{J_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \right)}{Y_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \right)} Y_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) -$$

функция из комбинации Бесселя первого и второго рода,  $\lambda_i$  – положительные корни уравнения вида

$$\begin{aligned}
 & H_0 \left[ V_1 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} V_1 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{2}{\alpha} V_2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} \right) - \frac{1}{\lambda} V_1 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} \right) \right]^2 + \left( 1 - \frac{\alpha^2}{4\lambda^2} \right) \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} \right) \right\} - \\
 & - \frac{e^{-\alpha r_{\max}}}{\alpha} \left\{ \left[ \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} V_2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) - \frac{1}{\lambda} V_1 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \left( 1 - \frac{\alpha^2 e^{\alpha r_{\max}}}{4\lambda^2} \right) \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right\} - \frac{i_0}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda^2}{\alpha} V_1^2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} \right) - \frac{e^{-\alpha r_{\max}}}{\alpha} \times \right. \\
 & \times \left[ \lambda^2 e^{-\alpha r_{\max}} \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \left. \right\} \cdot V_0 \left( \frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

а  $r = r(t)$  определено в неявном виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \cdot V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) - \frac{D_i}{\alpha} e^{-\alpha r} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha r} \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) \right] \times \\
 & \times e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} = \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \cdot V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) - \frac{D_i}{\alpha} e^{-\alpha r_{\max}} \times \\
 & \times \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \cdot e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)},
 \end{aligned}$$

где можно определить  $t_h$  и  $H(t_h, z)$ :

$$\begin{aligned}
 & e^{C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} = \frac{D_i}{\alpha} \left\{ e^{-\alpha h} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha h} \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) \right] - \right. \\
 & - e^{-\alpha r_{\max}} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} \cdot V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \left. \right\} / \\
 & / \frac{H_0}{\lambda_i} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{2} h} \cdot V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \cdot V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

$$H(t_h, z) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left( t_h + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t_h} \right)}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь решение задачи (9), (6-8). Решение этой задачи ничем не отличается от обычного решения соответствующих задач теплопроводности.

Для того чтобы преобразовать граничные условия (7), (8) в нулевые, мы остановились на следующей форме решения:

$$H(z, t) = \frac{H_1}{h} z + U(z, t). \quad (13)$$

Если подставить эти выражения для  $H(z, t)$  в исходную задачу (9), (6)-(8), мы получим новую задачу для неизвестной функции  $U(z, t)$ :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = KC_v(t) e^{\alpha z} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \Phi_2(z, t, U), \quad (14)$$

$$\Phi_2(z, t, U) = \beta KC_v(t) e^{\alpha z} \left[ \left( \frac{H_1}{h} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{H_1}{h} z + U(z, t) \right) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right],$$

$$U(t_h, z) = H(t_h, z) - \frac{H_1}{h} z \quad \text{при} \quad t = t_h, \quad (15)$$

$$U = 0 \quad \text{при} \quad t > t_h \quad \text{и} \quad z = 0, \quad (16)$$

$$U = 0$$

$$\text{при} \quad t > t_h \quad \text{и} \quad z = h. \quad (17)$$

Теперь, пользуясь методом Фурье, решение задачи (14)-(17) можно представить в виде ( $\beta = 0$ ):

$$U(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j V_0 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)}, \quad (18)$$

где:

$$B_j = \frac{\{\dots\}_3}{\{\dots\}_4} \cdot \alpha e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left( t_h + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t_h} \right)},$$

$$\{\dots\}_3 = \sum_{j=1}^{\infty} F(\mu_j, \alpha, h) + \frac{H_1}{h\mu_j} \left\{ h e^{-\frac{\alpha}{2}h} \cdot V_1 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} [\dots]_k \right\},$$

$$[\dots]_k = V_{2+2k} \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) - V_{2+2k} \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} \right), \quad \{\dots\}_4 = \mu_j^2 V_1^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\alpha h} [\dots]_2,$$

$$[\dots]_2 = \mu_j^2 e^{-\alpha h} \cdot V_1^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) - V_0^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right).$$

Здесь  $F(\mu_j, \alpha, h) = 0$  при  $\lambda_i \neq \mu_j$ ,

$$F(\mu_j, \alpha, h) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \mu_j^2 V_1^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\alpha h} \cdot \left[ \mu_j^2 e^{-\alpha h} V_1^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \right\}$$

при  $\lambda_i = \mu_j$ ,  $\mu_j$  – положительные корни уравнения

$$Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \cdot J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) - J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \cdot Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) = 0.$$

Имея в виду (13) и (18), решение задачи (14), (6)-(8) получить нетрудно. Здесь в (13) функция  $U(z, t)$  определена рядом (18).

**Определение осадок основания.** Для определения величины осадки слоя во времени следует полученные решения подставить в уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} e^{-\alpha z} \sigma(t), \quad (19)$$

и проинтегрировать его от 0 до  $h$ , т.е.

$$s(t) = \frac{a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \int_0^h e^{-\alpha z} \sigma(z, t) dz,$$

где:

$$\sigma(t) = \gamma(H_0 - H) - \text{для случая А,}$$

$$\sigma(t) = \gamma \left[ H(t_h, z) - 2 \frac{H_1}{h} z - U \right] - \text{для случая Б.}$$

Интегрирование этого уравнения дает следующие результаты: для случая А –

$$s_A(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[ V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t_h + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t_h} \right)} \right\}; \quad (20)$$

для случая Б –

$$s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[ V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \cdot e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t_h + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t_h} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{H_1}{\alpha h} \left[ e^{-h} \left( h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[ V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} \right\}, \quad (21)$$

Откуда

$$s(t) = s_A(t) + s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \frac{H_1}{\alpha h} \left[ e^{-\alpha h} \left( h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[ V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \cdot e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} \right\}. \quad (22)$$

Из (21) заметим, что при  $t \rightarrow \infty$  имеем:

$$s_{\infty} = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \frac{H_1}{\alpha h} \left[ e^{-\alpha h} \left( h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] \right\}. \quad (23)$$

**Второй шаг.** Теперь рассмотрим случай:  $\beta \neq 0$ .

**А.** Пользуясь методом разложения по собственным функциям, решение задачи (9), (2)-(5) нетрудно представить в виде:

$$H(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_{li}(t) V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right), \quad (24)$$

где:

$$T_{li}(t) = \left[ D_i + \int e^{C_{v0} \lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{li}(t) dt \right] \cdot e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)},$$

$$\Phi_{li}(t) = \frac{\int_0^h \Phi_1(z, t, H) V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right) dz}{\int_0^h e^{-\alpha z} V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} z} \right) dz}.$$

Здесь также как и в первом шаге, соответственно будут определены  $r = r(t)$ ,  $t_h$  и  $H(t_h, z)$ :

$$\begin{aligned} & \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2} r} V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) - \frac{T_{li}(t)}{\alpha} e^{-\alpha r} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha r} V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) \right] = \\ & = \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) - \frac{T_{li}(t)}{\alpha} e^{-\alpha r_{\max}} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right]; \\ & e^{C_{v0} \lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} = \\ & = \frac{D_i + \int e^{C_{v0} \lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{li}(t) dt}{\alpha} \cdot \left\{ e^{-\alpha h} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha h} V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - e^{-\alpha r_{\max}} \left[ \lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} V_1^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \right\} / \\ & \quad / \frac{H_0}{\lambda_i} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{2} h} V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$H(t_h, z) = \sum_{i=1}^{\infty} V_0 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot \left( D_i + \int e^{C_{v0}\lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_i(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)}.$$

(25)

Б. Теперь рассмотрим решение задачи (1), (6)-(8). Пользуясь методом разложения по собственным функциям, решение этой задачи нетрудно представить в виде (13). Здесь  $U(z, t)$  в (13):

$$U(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}(t) V_0 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right), \quad (26)$$

где

$$T_{2j}(t) = \left( B_j + \int e^{C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{2j}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)},$$

$$\Phi_{2j}(t) = \frac{\int_0^h \Phi_2(z, t, H) V_0 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) dz}{\int_0^h e^{-\alpha z} V_0^2 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) dz}.$$

**Определение осадок основания.** Для определения величины осадки слоя во времени следует полученные решения (24) и (13) (вначале (26) подставить в (13), затем в (12)) подставить в (19) и проинтегрировать его от 0 до  $h$ .

Интегрирование приводит нас к следующим результатам:  
для случая А –

$$s_A(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[ V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left( D_i + \int e^{C_{v0}\lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{1i}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \right\} \Bigg|_{t=t_h}; \quad (27)$$

для случая Б –

$$s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[ V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left( \frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \left( D_i + \int e^{C_{v0}\lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{1i}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left( t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \right\} \Bigg|_{t=t_h} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{H_1}{\alpha h} \left[ e^{-\alpha h} \left( h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[ V_1 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \times \\
& \times \left( B_j + \int e^{C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Phi_{2j}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Bigg\}, \quad (28)
\end{aligned}$$

откуда 
$$s(t) = s_A(t) + s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \frac{H_1}{\alpha h} \left[ e^{-\alpha h} \left( h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[ V_1 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left( \frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \times \right. \\
& \left. \times \left( B_j + \int e^{C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Phi_{2j}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left( t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \right\}. \quad (29)
\end{aligned}$$

Из (29) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  получим (23). Пользуясь формулами (11), (12), (13), (18), (19)-(29) для ПЭВМ составлена программа для определения осадки грунтовых оснований. На рисунке 2а жирными линиями показаны эпюры напоров для случая уплотнения слоя грунта равномерной нагрузкой  $q = 1 \text{ кГ/см}^2$  в соответствии со схемой на рисунке 1, полагая  $\varepsilon_{cp} = 0,5$ ;  $a_0 = 0,004 \text{ см}^2/\text{кг}$ ;  $K = 10^{-7} \text{ см/сек}$ ;  $h = 10 \text{ м}$ ;  $i = 5$ ;  $\alpha = 0,002 \text{ см}^{-1}$ ;  $\beta_E = 0,001$ ;  $\alpha_E = 0,02 \text{ сек}^{-1}$ ;  $H_1 = 50 \text{ см}$ ;  $\gamma = 0,001 \text{ кг/см}^3$ ;  $\beta = 0,03$ .

Для сравнения приведены эпюры, полученные без учета начального градиента напора (тонкие линии). На рис. 2,б даются кривые осадок на основе выполненного расчета уплотнения грунта во времени. Как видно из приводимых на рисунке 2 кривых, влияние начального градиента при принятых численных данных и, в частности, при достаточно больших значениях начального градиента, весьма сильно отражается на получаемых результатах. Однако для правильной оценки этого влияния следует уточнить методы лабораторного определения устойчивых значений начального градиента напора, так как только тогда можно будет с достаточной уверенностью проводить практические расчеты уплотнения с учетом влияния этой характеристики грунта.

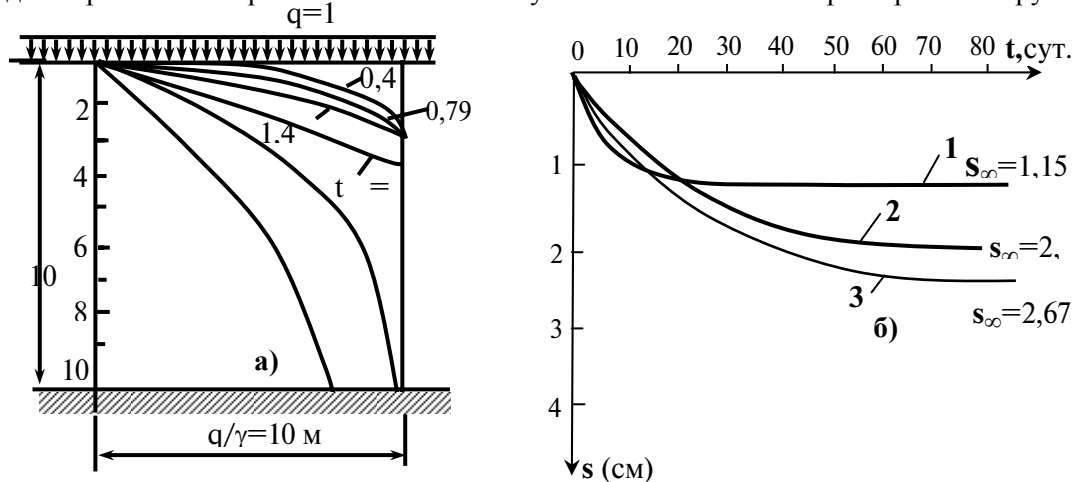


Рисунок 2 – Изменение осадка  $s_t$  по  $t$  равномерно распределенной нагрузки  $q = 1 \text{ кГ/см}^2$ : 1 – для неоднородной среды; 2 и 3 – для однородной среды

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роза С.А. Расчет осадки сооружений гидроэлектростанций.- М.: Госэнергоиздат, 1959.- 330 с.
- [2] Флорин В.А. Основы механики грунтов.- М.: Госстройиздат, 1959.- Т.1.- 357 с.
- [3] Флорин В.А. Основы механики грунтов.- М.: Госстройиздат, 1961.- Т.2.- 540 с.
- [4] Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов.- М.: Наука, 1967.- 270 с.
- [5] Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Малышев М.В., Абелов М.Ю., Тер - Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадок оснований сооружений /Ред. Н.А.Цытович.- М.: Лит. по строительству, 1967.-235 с.
- [6] Коренов Б.Г. Некоторые задачи упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматфиз. 1960. -458с
- [7] Кузнецов Д.С. Специальные функции. –М.: Высшая школа. 1965. – 423 с

#### REFERNCES

- [1] Rose S.A. Calculation rainfall of hydroelectric power stations constructions. M.: Gosenergoizdat. 1959.330 p.
- [2] Florin V.A. Basics of soil mechanics //State Building Publisher (Gosstroizdat).1959. V.1-357 p.
- [3] Florin V.A. Basics of soil mechanics //State Building Publisher (Gosstroizdat).1961. V.2-543 p.
- [4] Zaretsky Y.K. Soil consolidation theory. M.: Nauka, 1967.269 p.
- [5] Tsytoovich N.A., Zaretsky Y.K., Malyshev M.V., Ter-Martirosyan Z.G. Forecast speed pellet based structures. M.: Stroiiizdat, 1967. 238 p.
- [6] Korenev B. G. Some problems of elasticity and thermal conduction solved in Bessel functions. M.: Fizmatfiz. 1960. 458s
- [7] Kuznetsov D.S. Special functions. M.: Higher School. 1965. 423

### ӘРТЕКТІ ТОПЫРАҚ КОНСОЛИДАЦИЯСЫНЫҢ БІРӨЛШЕМДІ КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ЕСЕБІН НАПОРДЫҢ БАСТАПҚЫ ГРАДИЕНТІ ӘСЕРІНДЕ ШЕШУ ӘДІСІ ТУРАЛЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ШӨГҮІН АНЫҚТАУ

#### Ш. Алтынбеков

Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты,  
Шымкент, Қазақстан

**Түйін сөздер:** топырақтар механикасы, фильтрациялық консолидация теориясы, лездік-серпімді деформация, напордың бастапқы градиенті, іргетастың шөгуі, бірөлшемді квазисызықты есеп, математикалық физика әдістері.

**Аннотация.** Лездік-серпімді деформация модулі консолидация процесінде координаталарға және уақытқа тәуелді өзгеруші әртекті топырақтың фильтрациялық консолидация теориясының бірөлшемді квазисызықты есебі шешілген. Есепті шешу үшін О.Видебург, Фурье жаңа айнымалыларды енгізу, әртекті шекаралық шарттарды біртекті шарттарға түрлендіру, меншікті функциялар бойынша жіктеу әдістері қолданылған. Іргетастың шөгуі В.А. Флорин әдісінде есептелінген.

Есеп екі уақыт периодында ( $r \leq h$  және  $r = h$ ,  $h$  – топырақ қабатының қалыңдығы) шешілген.  $r = r(t)$ ,  $t_h$  және  $H(t_h, z)$ -тер есепті шешу барысында табылған. Іргетастың шөгуі әрбір уақыт периодында жеке-жеке анықталып, соңында осы шөгулердің қосындысы түрінде ұсынылған. Графикалық талдау берілген. Алынған нәтижелердің шындыққа жанасуы дербес жағдайларда өзге авторлардың нәтижелерін алумен дәлелденген. Салыстыру эпюры келтірілген.

Поступила 15.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 21–29

UDC 536.46.:532.517.4

**STUDY OF COAL MOISTURE  
ON THE COMBUSTION PROCESS BY 3D MODELING****A. Askarova, S. Bolegenova, S. Bolegenova, V. Maximov,  
A. Yergaliyeva, Z. Gabitova, A. Boranbaeva**Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan  
[bolegenova.symbat@kaznu.kz](mailto:bolegenova.symbat@kaznu.kz)**Keywords:** moisture of coal, coal-dust flame, burning, thermal power, heat and mass transfer.

**Abstract.** Studies of various chemical processes in the gas environment are relevant today, as discussed in many areas of science and technology, and are of great practical interest for researchers and engineers. This article presents the results of numerical simulations to study the effect of humidity Ekibastuz coal burned in the combustion chamber of Kazakhstan Aksu TPP processes of heat and mass transfer. This paper presents graphs of the distribution of characteristics such as temperature, concentration of carbon monoxide and nitric oxide in height of the combustion chamber. The methodology of work is - the method of mathematical modeling, which was conducted with the help of the application package FLOREAN. This software package was used for the base of numerical studies and was complemented by our new computer program GEOM. It is shown that an increase in humidity leads to a decrease in fuel temperature and average concentration of carbon dioxide in the combustion chamber, as well as to reduce the concentration of carbon monoxide CO and nitrogen oxide NO in active combustion. The results obtained in this study allow to make recommendations for optimizing the combustion process of high-pulverized coal to reduce emissions and the establishment of power plants to "clean" and effective use of coal.

УДК 536.46.:532.517.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЛАЖНОСТИ УГЛЯ  
НА ПРОЦЕСС ГОРЕНИЯ МЕТОДАМИ 3-D МОДЕЛИРОВАНИЯ****А.С. Аскарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова,  
В.Ю. Максимов, А.Б. Ергалиева, З.Х. Габитова, А.Е. Боранбаева**

Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** влажность угля, пылеугольный факел, горение, тепловая электростанция, тепломассоперенос.

**Аннотация.** Исследования различных химических процессов в газовой среде являются актуальными на сегодняшний день, поскольку рассматриваются во многих областях науки и техники, и представляют огромный практический интерес у исследователей и инженеров. В данной статье представлены результаты численного моделирования по исследованию влияния влажности сжигаемого Экибастузского угля в топочной камере Аксуской ГРЭС Казахстана на процессы тепломассопереноса. Представлены графики распределения таких характеристик, как температура, концентрации оксидов углерода и оксида азота по высоте топочной камеры. Методологию работы составил – метод математического моделирования, который проводился с помощью пакета прикладных программ FLOREAN. Этот пакет программ был использован для основы численных исследований и был дополнен нами новой компьютерной программой GEOM. Показано, что увеличение влажности топлива ведет к уменьшению средних значений температуры и концентрации двуокси углерода в топочной камере, а также к уменьшению концентрации окиси углерода CO и оксидов

азота NO в области активного горения. Результаты, полученные в данной работе, позволят дать рекомендации по оптимизации процесса горения высокосольного пылеугольного топлива с целью уменьшения выбросов вредных веществ и создания электростанций на "чистом" и эффективном использовании угля.

Как известно, влажность топлива является балластом, который существенно снижает эффективность его сжигания. Однако проведенные группами ученых исследования [1-3] по сжиганию углей различной влажности показали необходимость более полного исследования.

Численное моделирование на сегодняшний день является достаточно эффективным методом прогнозирования поведения сложных для аналитического исследования систем, одной из которых является сжигание низкосортных углей в камерах сгорания котлов ТЭС. Компьютерное моделирование позволяет получать исследуемые качественные и количественные характеристики процесса, а также отклик системы на изменения ее параметров и начальных условий [4-7]. Основными этапами процесса моделирования являются: 1) этап предметного моделирования, состоящий из формулировки основных законов, правил и приближений; 2) этап математического моделирования – описание основных уравнений; 3) этап компьютерного моделирования, включающий в себя математические вычисления и графическую интерпретацию полученных данных.

Численное моделирование проводилось с помощью пакета прикладных программ FLOREAN [8-9] на основе трехмерных уравнений конвективного тепло- и массопереноса для предсказания влияния влажности угля на общую работу топочной камеры и формирование продуктов сгорания. Этот пакет программ был использован для основы численных исследований и был дополнен нами новой компьютерной программой GEOM, которая пишется всегда при выборе нового объекта исследования (топочная камера), с учетом геометрии, размеров горелочных устройств, их формы и расположением в пространстве камеры сгорания [10-15]. В этой компьютерной программе учитываются все характеристики сложного реального физико-химического процесса в выбранном нами объекте исследования и задаются граничные условия для решения выбранной задачи исследования, адекватно отражающие этот процесс [16-17].

Математическая модель, описывающая процессы турбулентного теплообмена, выглядит следующим образом [8-11]:

а) Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho u_j)}{\partial x_j}, \quad (1)$$

б) Уравнение движения:

с)

$$\frac{\partial (\rho u_j)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{i,j}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad (2)$$

здесь:  $f_i$  – объемные силы;  $\tau_{i,j}$  – тензор вязких напряжений.

д) Уравнение энергии:

е)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho h) = & - \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i h) - \frac{\partial q_i^{res}}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\partial p}{\partial t} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} + \tau_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + S_q, \end{aligned} \quad (3)$$

здесь:  $h$  – энтальпия;  $q_i^{res}$  – плотность потока энергии за счет молекулярного переноса тепла,  $S_q$  – источник энергии.

ф) Закон сохранения для компоненты вещества:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho c_n) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i c_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \frac{\mu_{eff}}{\sigma_{c_n, eff}} \frac{\partial c_n}{\partial x_i} \right] + S_{c_n}, \quad (4)$$

где  $S_{c_n}$  - источниковый член, учитывающий вклад химических реакций в изменение концентрации компонентов.

g) Стандартная k-ε модель турбулентности:

h)

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\rho k})}{\partial t} = & -\frac{\partial(\overline{\rho u_j k})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \\ & + P - \rho \varepsilon, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $P$  – производство кинетической энергии турбулентности, которое определяется следующим соотношением:

$$P = \left[ \mu_{turb} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \right] \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \left[ \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \right] \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \quad (6)$$

и уравнение для диссипации турбулентной кинетической энергии  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{\rho \varepsilon})}{\partial t} = & -\frac{\partial(\overline{\rho u_j \varepsilon})}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \\ & + C_{\varepsilon,1} \frac{\varepsilon}{k} P - C_{\varepsilon,2} \frac{\varepsilon^2}{k} \overline{\rho}, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь,  $\overline{\rho \varepsilon}$  – преобразование кинетической энергии пульсационного движения во внутреннюю энергию (диссипация):

$$\overline{\rho \varepsilon} = \mu_{turb} \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \cdot \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right). \quad (8)$$

В этих уравнениях используются соответствующие турбулентные числа Прандтля  $\sigma_k$ ,  $\sigma_\varepsilon$ , которые являются эмпирическими константами для моделирования турбулентных процессов обмена энергии.

В качестве объекта исследований был выбран реальный промышленный паровой котел ПК-39, установленный на Аксуской ГРЭС (Казахстан) с размерами 7,762м\*10,76м\*29,985м. Камера сгорания котла оснащена 12 вихревыми пылеугольными горелками, расположенными на 2 ярусах. Схема камеры сгорания котла и разбивка ее на контрольные объемы представлена на рисунке 1.

На рисунках 2-5 представлены результаты вычислительных экспериментов по исследованию тепломассопереноса с учетом различного значения содержания влаги в топливе. Как можно заметить, качественно приведенные характеристики не меняются в зависимости от влажности, однако, можно заметить, что кривые на этих рисунках отличаются в количественном отношении.

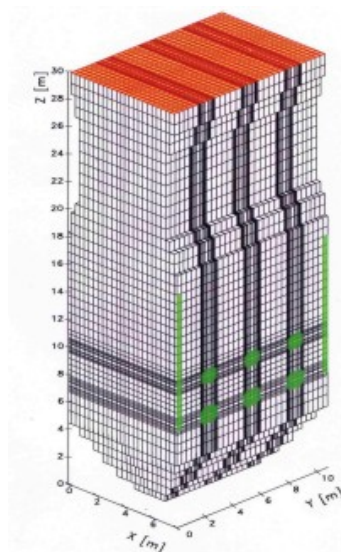


Рисунок 1 – Камера сгорания котла ПК-39

Наряду с результатами вычислительного эксперимента, на рисунке 2 представлены результаты натурного эксперимента на ТЭС [18] для угля с влажностью, равной 7%. Мы видим, что характер изменения экспериментальной и расчетных (вычислительный эксперимент) кривых совпадает. Можно видеть наличие минимумов кривых в областях расположения пояса горелок, что связано с низкой температурой аэросмеси ( $150^{\circ}\text{C}$ ), подаваемой через эти горелки. Максимальных значений температура достигает в центральной части топочной камеры, там, где находится ядро факела. По мере продвижения к выходу из топочной камеры, поле температуры выравнивается, а значения уменьшаются.

Наибольшие различия между расчетными и экспериментальными данными (рисунок 2) наблюдаются при воспламенении угольного факела. Это можно объяснить неустойчивым характером процесса горения в этой области и соответственно различием между реальными физическими условиями воспламенения пылеугольной смеси и математической моделью, описывающей процесс горения твердого топлива в этой области.

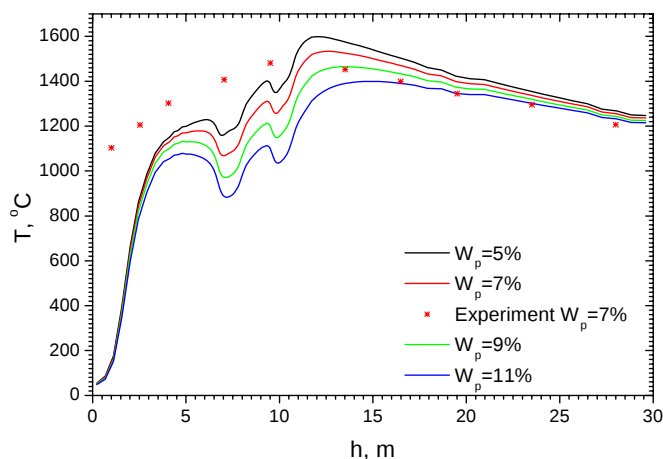


Рисунок 2 – Распределение температуры по высоте топочной камеры при сжигании угля различной влажности в топочной камере котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС

Анализируя кривые рисунка 2, следует отметить, что увеличение влажности топлива ведет к уменьшению средней температуры в топочной камере. Это можно объяснить тем, влажность топлива уменьшает его тепловую ценность, так как для превращения 1 кг воды в пар необходимо затратить 2,5 МДж теплоты.

Наибольшие различия между температурными кривыми для угля разной влажности можно заметить внутри топочной камеры в области пояса горелок. На выходе из топочной камеры различия в значениях температуры для углей, влажность которых меняется от 5% до 11%, уменьшаются и составляют не более 35°C.

В результате проведения вычислительных экспериментов по сжиганию Экибастузского угля были рассчитаны концентрационные поля вредных пылегазовых продуктов сгорания. На рисунках 3-5 представлены графики распределения концентраций оксидов углерода CO и CO<sub>2</sub> и оксида азота NO.

Анализ рисунка 3 показывает, что формирование окиси углерода происходит главным образом в основной части факела, там, где средняя его температура достигает своих максимальных значений. Причем с уменьшением содержания влаги в угле максимум концентрации CO возрастает и смещается к области расположения горелок. По мере продвижения к выходу из топки, концентрация окиси углерода уменьшается.

Таким образом, увеличение влажности топлива приводит к уменьшению концентрации окиси углерода CO в области активного горения, что совпадает с экспериментальными данными, приведенными в работах [1,18]. Это можно объяснить тем, что при невысоких температурах преобладает реакция реагирования углерода топлива с кислородом воздуха с образованием диоксида углерода, однако при повышении температуры начинает протекать реакция между углем и образовавшимся диоксидом углерода.

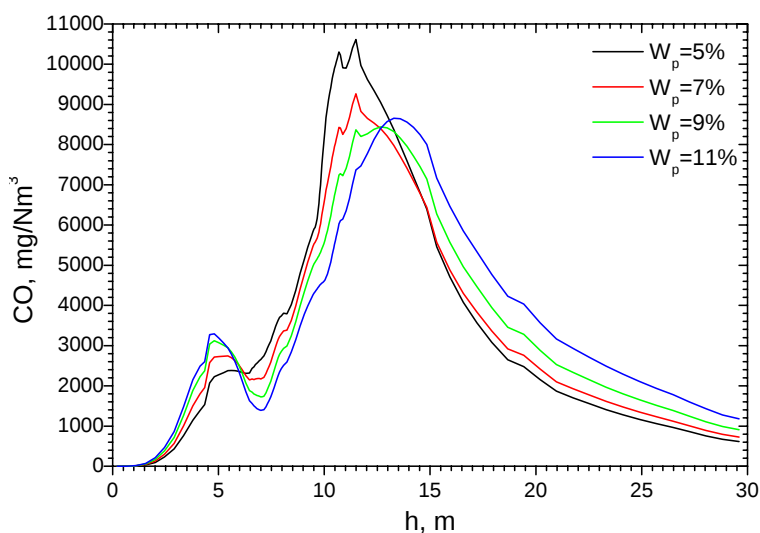


Рисунок 3 – Распределение концентрации CO по высоте топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС при сжигании угля различной влажности

На рисунке 4 представлено распределение средних значений концентрации CO<sub>2</sub> в каждом сечении по высоте топочного пространства. Можно видеть, что увеличение влажности приводит к уменьшению концентрации двуокиси углерода, что связано с температурными условиями процесса. А это в свою очередь создает худшие условия для реакции, связанной с догоранием CO до CO<sub>2</sub>. Вследствие этого значение концентрации диоксида углерода CO<sub>2</sub> на выходе из топки с увеличением влажности топлива уменьшается.

Здесь же, на рисунке 4, нанесены результаты эксперимента, проведенного непосредственно на ТЭС [18]. Мы видим, что наибольшие различия в результатах вычислительного и натурного экспериментов наблюдаются в области воспламенения горючей смеси, что связано с неустойчивостью горения и различием между моделируемыми и экспериментальными условиями для воспламенения аэросмеси.

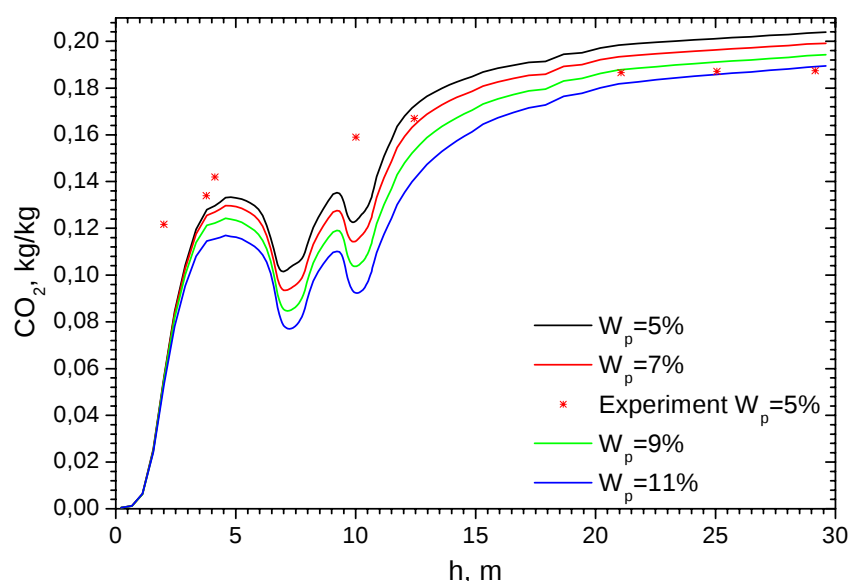


Рисунок 4 – Распределение концентрации  $\text{CO}_2$  по высоте топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС при сжигании угля различной влажности

На рисунке 5 показано поле концентрации оксида азота  $\text{NO}$  по высоте топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС для различного значения содержания влаги в топливе. Из рисунка можно видеть, что наибольшие различия в средних концентрациях приходятся на центральную часть топки, где расположены горелочные устройства. Формирование оксида азота осуществляется в результате окисления азота, содержащегося в топливе, а также азота атмосферного воздуха. Здесь увеличение влажности угля приводит к уменьшению концентрации  $\text{NO}$ , что подтверждается исследованиями, описанными в работах [1,3,18]. Однако можно заметить, что к выходу из топки поля концентрации окиси азота выравниваются и различия в концентрациях согласно таблице 1 составляют порядка 3-18  $\text{мг/Нм}^3$ .

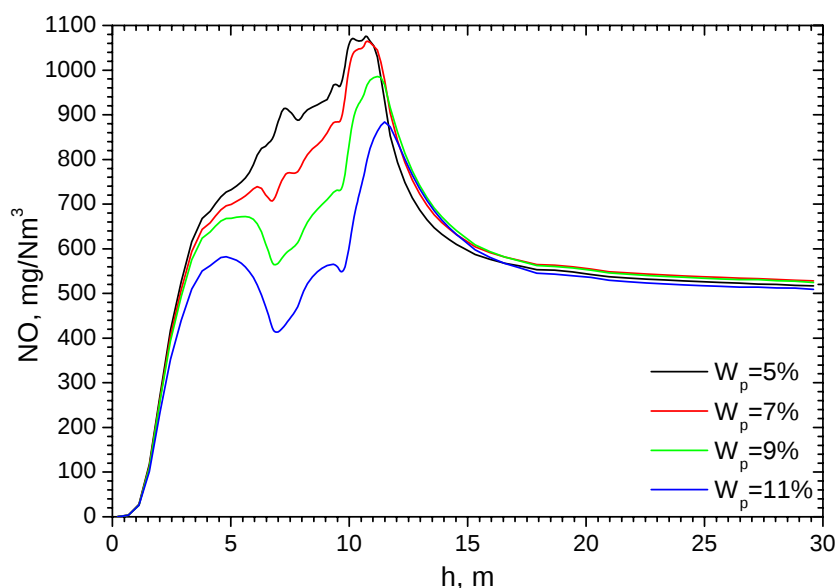


Рисунок 5 – Распределение концентрации  $\text{NO}$  по высоте топочной камеры котла ПК-39 Аксуйской ГРЭС при сжигании угля различной влажности

Таблица 1 – Распределение средних значений температуры, концентраций CO, CO<sub>2</sub> и NO в сечении нижнего яруса горелок для различных значений влажности топлива

| Хар-ки                  | Влажность, W <sub>p</sub> |         |         |         |
|-------------------------|---------------------------|---------|---------|---------|
|                         | 5%                        | 7%      | 9%      | 11%     |
| T, °C                   | 1178,86                   | 1079,82 | 976,46  | 885,72  |
| CO, мг/Нм <sup>3</sup>  | 2938,94                   | 2391,9  | 1912,79 | 1550,57 |
| CO <sub>2</sub> , кг/кг | 0,104                     | 0,094   | 0,085   | 0,077   |
| NO, мг/Нм <sup>3</sup>  | 914,58                    | 766,67  | 589,49  | 431,33  |

Таблица 2 – Распределение средних значений температуры, концентраций CO, CO<sub>2</sub> и NO на выходе из топочной камеры для различных значений влажности топлива

| Хар-ки                  | Влажность, W <sub>p</sub> |        |        |        |
|-------------------------|---------------------------|--------|--------|--------|
|                         | 5%                        | 7%     | 9%     | 11%    |
| T, °C                   | 1247,9                    | 1236,1 | 1225,0 | 1214,6 |
| CO, мг/Нм <sup>3</sup>  | 614,4                     | 724,5  | 907,4  | 1183,1 |
| CO <sub>2</sub> , кг/кг | 0,204                     | 0,199  | 0,194  | 0,189  |
| NO, мг/Нм <sup>3</sup>  | 516,97                    | 527,79 | 524,78 | 509,25 |

В результате проведенных исследований было показано, что увеличение влажности топлива ведет к уменьшению средней температуры и концентрации двуокиси углерода CO<sub>2</sub> в топочной камере, а также к уменьшению концентрации окиси углерода CO в области активного горения. С уменьшением содержания влаги в угле максимум концентрации CO возрастает и смещается к области расположения горелок. К выходу из топочного пространства концентрация окиси углерода уменьшается. Также показано, что увеличение влажности угля приводит к уменьшению концентрации NO в центральной части топочной камеры. Наибольшие различия в результатах вычислительного и натурного экспериментов наблюдаются в области воспламенения горючей смеси. Значения концентраций CO, CO<sub>2</sub> и NO, которые являются основными веществами загрязняющими атмосферу, на выходе из топочного пространства не превышают норм ПДК, принятых в Республике Казахстан.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Исаков Р.Т., Энгельшт В.С. Термодинамический анализ влияния влажности на горение углерода, Вестник ИГУ, 2002, № 8, С. 75-83.
- [2] Ryoichi Kurose, Hiroaki Watanabe, Hisao Makino. Numerical Simulations of Pulverized Coal Combustion, KONA Powder Particle J., 27 (2009), pp. 144–156.
- [3] Пинчук В. А., Потапов Б. Б., Шарабура Т. А. Использование термодинамических показателей для оценки энергетической и технологической ценности различных марок углей, Металлургическая теплотехника. Сборник научных трудов Национальной металлургической академии Украины, Днепрпетровск: ПП Грек ОС, 2008, С. 228-235.
- [4] Askarova A. S., Messerle V. E., Ustimenko A. B. et. al. Numerical simulation of the coal combustion process initiated by a plasma source // Thermophysics and Aeromechanics. – Vol. 21, Issue 6, 2014. – P. 747-754.
- [5] Messerle V. E., Ustimenko A. B. et al. . Pulverized coal torch combustion in a furnace with plasma-coal system // Thermophysics and Aeromechanics. – Vol. 17, Issue 6, 2010. – P.435-444.
- [6] Karpenko E I; Lavrishcheva, Y. I., Messerle V.E. et al. Plasma-supported coal combustion in boiler furnace // IEEE Transactions on Plasma Science. – Vol. 35, Issue 6, 2007. – P. 1607-1616.
- [7] Karpenko E.I, Messerle V. E. Ustimenko A.B. et al. Plasma enhancement of combustion of solid fuels // HIGH ENERGY CHEMISTRY. – Vol. 40, Issue 2, 2006. – P. 111-118.
- [8] Müller, H. Numerische simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung, TU. – Braunschweig: IWB, 1997. – 8–12 s
- [9] Leithner, R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. – Braunschweig, 2006. – 52 p.
- [10] Askarova, A. S., Bolegenova, S. A., Maximov, V. Yu. et al. Computational method for investigation of solid fuel combustion in combustion chambers of a heat power plant // High Temperature. – Vol. 53, Issue 5, 2015. – P. 751-757.
- [11] Safarik P., Bolegenova, S., Maximov V. et al. Numerical Modeling of Pulverized Coal Combustion at Thermal Power Plant Boilers // Journal of Thermal Science. – Vol. 24, Issue 3, 2015. – P. 275-282.
- [12] Messerle V. E., Ustimenko A. B., Bolegenova S.A. et al. Numerical simulation of pulverized coal combustion in a power boiler furnace // High Temperature. – Vol. 53, Issue 3, 2015. – P. 445-452.
- [13] Karpenko, E. I., Karpenko, Yu. E., Messerle, V. E. et al. Mathematical modelling of the processes of solid fuel ignition and combustion at combustors of the power boilers // Theory and Practice of Energetic Materials. – Vol. VII, 2007. – P. 672-683.
- [14] Bolegenova S.A., Bekmuhamet A., Maximov V.Yu. et al.. Numerical research of aerodynamic characteristics of combustion chamber BKZ-75 mining thermal power station // Procedia Engineering. - ISSN 1877-7058. – Vol.42, 2012. – P. 1250-12-59.
- [15] Bolegenova S., Bekmukhamet A., Maximov Yu.V. et al. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber // WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer. - Volume 9, 2014. - P. 39-50.

[16] Askarova A., Bolegenova S., Bekmukhamet A. et al. Using 3D modeling technology for investigation of conventional combustion mode of BKZ-420-140-7c combustion chamber // Journal of Engineering and Applied Sciences. – Vol. 9, Issue 1, 2014. – P. 24-28.

[17] Bolegenova S.A., Maximov Yu.V. Bekmukhamet A. et al. Numerical modeling of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ-420-140-7c combustion chamber // International Journal of Mechanics. - ISSN: 1998-4448. - Volume 8, 2014. - P. 112-122.

[18] Алияров Б.К., Алиярова М.Б. Сжигание казахстанских углей на ТЭС и на крупных котельных: опыт и проблемы, Алматы, 2012, 306 с.

## REFERENCES

[1] Iskakov R.T., Engelsht V.S. Thermodynamic analysis of the effect of moisture on the carbon burning, Herald ISU 2002, number. 8, pp 75-83 (in rus)

[2] Ryoichi Kurose, Hiroaki Watanabe, Hisao Makino. Numerical Simulations of Pulverized Coal Combustion, *KONA Powder Particle J.*, **2009**, 27, 144–156 (in eng)

[3] Pinchuk V.A., Potapov B.B., Sharabura T.A. Using thermodynamic parameters for the evaluation of energy technology and the value of different grades of coal, metallurgical heat engineering. Collection of scientific works of the National Metallurgical Academy of Ukraine, Dnepropetrovsk: PP Greek OS 2008, pp 228-235 (in rus)

[4] Askarova A. S., Messerle V. E., Ustimenko A. B. et al. Numerical simulation of the coal combustion process initiated by a plasma source. *Thermophysics and Aeromechanics*, **2014**, 21(6), 747-754 (in eng)

[5] Messerle V. E., Ustimenko A. B. et al. Pulverized coal torch combustion in a furnace with plasma-coal system. *Thermophysics and Aeromechanics*, **2010**, 6, 435-444 (in eng)

[6] Karpenko E. I., Lavrishcheva, Y. I., Messerle V.E. et al. Plasma-supported coal combustion in boiler furnace. *IEEE Transactions on Plasma Science*, **2007**, 6, 1607-1616 (in eng)

[7] Karpenko E.I., Messerle V. E. Ustimenko A.B. et al. Plasma enhancement of combustion of solid fuels. *HIGH ENERGY CHEMISTRY*, **2006**, 2, 111-118 (in eng)

[8] Müller, H. Numerische simulation von Feuerungen. *CFD-Vorlesung, TU. – Braunschweig: IWBT*, **1997**, 8–12 (in ger)

[9] Leithner, R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: *Course of Lecture. – Braunschweig*, **2006**, 52 (in eng)

[10] Askarova, A. S., Bolegenova, S. A., Maximov, V. Yu. et al. Computational method for investigation of solid fuel combustion in combustion chambers of a heat power plant. *High Temperature*, **2015**, 5, 751-757 (in eng)

[11] Safarik P., Bolegenova, S., Maximov V. et al. Numerical Modeling of Pulverized Coal Combustion at Thermal Power Plant Boilers. *Journal of Thermal Science*, **2015**, 3, 275-282 (in eng)

[12] Messerle V. E., Ustimenko A. B., Bolegenova S.A. et al. Numerical simulation of pulverized coal combustion in a power boiler furnace. *High Temperature*, **2015**, 3, 445-452 (in eng)

[13] Karpenko, E. I., Karpenko, Yu. E., Messerle, V. E. et al. Mathematical modelling of the processes of solid fuel ignition and combustion at combustors of the power boilers. *Theory and Practice of Energetic Materials*, **2007**, VII, 672-683 (in eng)

[14] Bolegenova S.A., Bekmukhamet A., Maximov V.Yu. et al. Numerical research of aerodynamic characteristics of combustion chamber BKZ-75 mining thermal power station. *Procedia Engineering*, **2012**, 42, 1250-12-59 (in eng)

[15] Bolegenova S., Bekmukhamet A., Maximov Yu.V. et al. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, **2014**, 9, 39-50 (in eng)

[16] Askarova A., Bolegenova S., Bekmukhamet A. et al. Using 3D modeling technology for investigation of conventional combustion mode of BKZ-420-140-7c combustion chamber. *Journal of Engineering and Applied Sciences*, **2014**, 9(1), 24-28 (in eng)

[17] Bolegenova S.A., Maximov Yu.V. Bekmukhamet A. et al. Numerical modeling of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ-420-140-7c combustion chamber. *International Journal of Mechanics*, **2014**, 8, 112-122 (in eng)

[18] Aliyarov B.K., Aliyarova M.B. Burning Kazakh coal to the power station and large boilers: experience and problems, Almaty, 2012, 306 p. (in rus)

## 3-D МОДЕЛЬДЕУ ӘДІСТЕРІМЕН ЖАНУ ПРОЦЕСІНЕ КӨМІРДІҢ ЫЛҒАЛДЫЛЫҒЫНЫҢ ЗИЯНЫН ЗЕРТТЕУ

А.С. Аскарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова,  
В.Ю. Максимов, А.Б. Ергалиева, З.Х. Габитова, А.Е. Боранбаева

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

**Түйін сөздер:** көмір ылғалдылығы, шантозанды алау, жану, жылу электростанциясы, жылуассалмасу.

**Аннотация.** Газдық ортадағы түрлі химиялық процестерді зерттеу қазіргі уақытта өзекті болып отыр, себебі ғылым мен техниканың көп салаларында қарастырылады және зерттеушілер мен инженерлердің тәжірибелік қызығушылығына ие. Бұл мақалада Қазақстанның Ақсу МАЭС-ның жану камерасында жағылатын Екібастұз көмірі ылғалдылығының жылуассалмасу процестеріне әсерін зерттеу бойынша сандық модельдеудің нәтижелері келтірілген. Жану камерасының биіктігі бойынша температура, көміртегі тотықтарының және азот тотықтарының шоғырлануы сияқты сипаттамалардың таралу графиктері көрсетілген. Жұмыс әдіснамасын - FLOREAN қолданбалы бағдарламалар пакеті көмегімен жүргізілген математикалық модельдеу әдісі құрды. Осы бағдарламалар пакеті сандық зерттеу негізі үшін

қолданылды және оны жаңа GEOM компьютерлік бағдарламасымен толықтырдық. Отын ылғалдылығының артуы температураның орташа мәндерінің және жану камерасындағы көміртегі қосқышқылының шоғырлануының төмендеуіне, сонымен қатар белсенді жану облысындағы көміртегі тотығы СО және азот оксидтері NO шоғырлануының төмендеуіне әкелетіні көрсетілген. Жұмыстың нәтижелері зиянды заттардың шығарылуын төмендету, көмірді "таза" және тиімді қолданатын электростанцияларын құру мақсатында жоғары күлді шаңтозаңды отынды жағу процесін оңтайландыру бойынша ұсыныстар беруге мүмкіндік тудырады.

*Поступила 15.03.2016 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 29–34

UDC 001.891.5:536.46:662.6

### NUMERICAL MODELING OF FORMATION AND DESTRUCTION OF NO<sub>x</sub> BY TWO KINETIC MECHANISMS DURING COMBUSTION OF FOSSIL FUEL IN THE FURNACE OF CHP

A.S. Askarova, S.A. Bolegenova, S.A. Bolegenova, Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [Beketayeva.m@gmail.com](mailto:Beketayeva.m@gmail.com)

**Key words:** NO<sub>x</sub> concentration, environmental impact, numerical modelling, kinetic mechanism, combustion chamber

**Abstract.** Thermal power plants, causing the emission of harmful substances such as sulfur and nitrogen oxides in the operation are a major source of adverse impact on the environment. In this paper, using modern methods of 3D computer modeling using two global schemes of formation and destruction of harmful nitrogen compounds NO<sub>x</sub> mass transfer processes have been studied in a real industrial furnace boiler BKZ-75. On the basis of these results and their verification it was offered the most appropriate mechanism for NO<sub>x</sub> formation during numerical calculation of Kazakh coal combustion.

УДК 001.891.5:536.46:662.6

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ NO<sub>x</sub> ПО ДВУМ КИНЕТИЧЕСКИМ МЕХАНИЗМАМ ПРИ ГОРЕНИИ УГОЛЬНОГО ТОПЛИВА В ТОПОЧНОЙ КАМЕРЕ ТЭЦ

А.С. Аскарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова, В.Ю. Максимов, М.Т. Бекетаева

Казахский национальный университет имени аль-Фараби

**Ключевые слова:** концентрация NO<sub>x</sub>, влияние на окружающую среду, численное моделирование, кинетический механизм, топочная камера.

**Аннотация.** Тепловые электрические станции, обуславливая выбросы вредных веществ как окислы серы и азота при эксплуатации, являются одним из основных источников вредного воздействия на

окружающую среду. В настоящей работе с помощью современных методов 3D компьютерного моделирования с применением двух глобальных схем формирования и деструкции вредных азотосодержащих веществ  $\text{NO}_x$  были исследованы процессы массопереноса в реальной топочной камере промышленного котла БКЗ-75. На основе полученных результатов и их верификаций был предложен наиболее приемлемый механизм образования  $\text{NO}_x$  для проведения численных расчетов при сжигании казахстанского угля.

По результатам мирового энергетического обзора предполагается, что глобальные потребности в энергии будут только расти в течение ближайших десятилетий, при этом твердые ископаемые виды топлива будут продолжать доминировать в качестве сырья для энергетической промышленности. Использование в теплоэнергетической отрасли низкосортных топлив приводит к отрицательным последствиям, в связи с чем остаются актуальными вопросы интенсивного развития и разработки различных методов и технологий для повышения эффективности сжигания топлива [1-5].

Обеспечение экологической безопасности окружающей среды, в основе которого лежит попытка минимизировать антропогенное воздействие ТЭС на атмосферу, требует всестороннего изучения технологических процессов при эксплуатации энергетических установок. В настоящее время глубокое изучение таких сложных нелинейных процессов как горение топлива, имеющих место в топочных камерах ТЭС почти невозможно без применения вычислительных методов, так как проведение натурных экспериментов непосредственно на ТЭЦ нуждается в финансовых и временных затратах.

Применение компьютерных технологий эффективно, когда одновременно прорабатываются несколько конструкторских решений и определяется стратегия модернизации котла или топочной камеры. Точность и адекватность ожидаемых результатов обеспечиваются правильной постановкой физико-математической и химической моделей сгорания топлива [6-9]. Для постановки правильной химической модели задачи о горении топлива и формировании окислов азота в данной работе были рассмотрены два кинетических механизма, которые наиболее широко применяются в ряде стран: модель De Soete [10] и модель Mitchell-Tarbell [11].

Выбор адекватно описывающей модели процесса производства и подавления азотосодержащих компонентов может быть полезной при проведении численных исследований с целью получения наиболее реальных данных, которые могут использоваться при оценке характера процессов горения в новых конструкторских разработках и при оптимизации сжигания пылеугольного топлива.

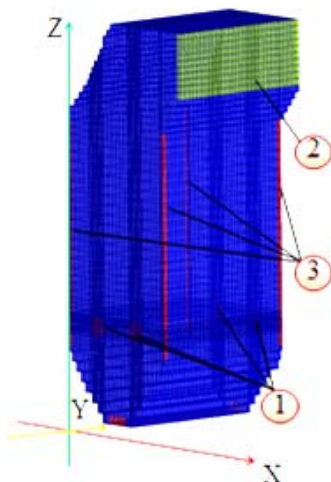


Рисунок 1 – Общий вид котла БКЗ-75 Шахтинской ТЭЦ и его дискретизация на контрольные объемы:

1-горелки, 2-область выходного сечения камеры, 3-присосы  
X-ширина топки, Y-глубина топки, Z-высота топочной камеры

В предложенной работе для исследования формирования и деструкции азотистых соединений  $\text{NO}_x$  использовалась топочная камера котла БКЗ-75 (Шахтинская ТЭЦ), в котором в качестве угольного топлива сжигается карагандинский уголь, имеющий состав: C – 33.87%,  $\text{H}_2$  – 6.63%, S –

1.92%,  $N_2$  – 2.23%,  $O_2$  – 9.65%,  $W$  – 10.60%,  $A$  – 35.1%,  $Q$  – 34162 кДж/кг,  $R_{90}$  – 20%. На рисунке 1 представлена дискретизация топочной камеры котла БКЗ-75 для проведения вычислительных экспериментов. Топочная камера имеет конечно-разностную сетку, которая состоит из 126 496 контрольных объемов.

Численное исследование процессов массопереноса концентрации  $NO_x$  основано на решении трехмерных уравнений конвективного теплопереноса с учетом конвективного и радиационного теплообмена, химической кинетики и двухфазности среды. Эти нелинейные уравнения состоят из закона сохранения массы и импульса (уравнение Навье-Стокса), закона сохранения энергии и вещества [12-15].

Для формирования окислов азота  $NO_x$  в качестве ключевой реакции кинетическая схема по модели De Soete использует механизм, где 90% оксидов азота  $NO$  формируются через синильную кислоту  $HCN$ , также модель учитывает влияние атомарного азота  $N$ .

Первая схема формирования оксидов азота  $NO$  по модели De Soete базируется на синильную кислоту  $HCN$ :

$$\begin{aligned}\frac{dY_{NO}}{dt} &= 1 \cdot 10^{10} Y_{HCN} Y_{O_2}^b \exp(-33700/T) \\ \frac{dY_{N_2}}{dt} &= 3 \cdot 10^{12} Y_{HCN} Y_{NO}^b \exp(-30100/T)\end{aligned}\quad (1)$$

Вторая схема формирования оксидов азота  $NO$  учитывает аммиак  $NH_3$ :

$$\begin{aligned}\frac{dY_{NO}}{dt} &= 4 \cdot 10^6 Y_{NH_3} Y_{O_2}^b \exp(-16100/T) \\ \frac{dY_{N_2}}{dt} &= 1.8 \cdot 10^8 Y_{NH_3} Y_{NO}^b \exp(-13600/T)\end{aligned}\quad (2)$$

В модели Mitchell-Tarbell образование оксидов азота  $NO$  происходит при окислении азота связанного с топливом. Кинетическая схема учитывает реакции первичного пиролиза, гомогенного горения углеводородистых соединений, гетерогенного горения кокса и образование термических и топливных азотистых соединений. Конечными азотными центрами в модели считаются подсистемы  $CN$  ( $HCN$ ,  $CN$  и др.).

Модель Mitchell-Tarbell предлагает первую стадию реакции в преобразовании синильной кислоты  $HCN$  в аммиак  $NH_3$ :

$$\frac{dY_{HCN}}{dt} = -1.94 \cdot 10^{15} Y_{HCN} Y_{O_2} \exp(-39500/T) \quad (3)$$

А образовавшийся аммиак  $NH_3$  формирует и разрушает оксид азота  $NO$  в двух параллельных реакциях:

$$\begin{aligned}\frac{dY_{NO}}{dt} &= \frac{3.48 \cdot 10^{20} Y_{NH_3} Y_{O_2} \exp(-50325/T)}{1 + 6.90 \cdot 10^{-6} \exp(21140/T)} \\ \frac{dY_{NH_3}}{dt} &= -6.22 \cdot 10^{14} Y_{NH_3} Y_{NO} \exp(-27680/T)\end{aligned}\quad (4)$$

Также в модели Mitchell-Tarbell учитывается рециркуляция оксидов азота  $NO$  назад в синильную кислоту  $HCN$  при взаимодействии с углеводородами:

$$\frac{dY_{NO}}{dt} = -1.0 \cdot 10^4 Y_{NO} Y_{C_xH_y} \quad (5)$$

Ниже представлены результаты вычислительных экспериментов по формированию и деструкции оксидов азота  $NO_x$  по двум моделям формирования  $NO_x$  модель Mitchell-Tarbell (MT) и модель De Soete (DS).

На рисунках 2-3 представлены трехмерные поля концентраций оксидов азота  $NO_x$ , из анализа которых можно сказать, что распределения концентраций  $NO_x$  для двух указанных моделей отличаются. Это обусловлено тем, что в модели De Soete расчет формирования  $NO_x$  производится в основном по идеализированной кинетической схеме химических реакций при горении высококачественных углей, в то время как в модели Mitchell-Tarbell кинетическая схема основывается на химических реакциях в нескольких этапах включающие в себя первичный

пиролиз, горение летучих компонентов и углеводородов  $\text{CH}_4$  и горение коксового остатка, которые учитываются при горении низкокачественных углей.

На рисунке 3 показаны трехмерные распределения концентрации оксидов азота  $\text{NO}_x$  на выходе из топочной камеры по двум моделям формирования и деструкции  $\text{NO}_x$ . Понижение здесь концентрации оксидов азота обусловлено слабыми химическими взаимодействиями. Разность в средних значениях концентраций оксидов азота  $\text{NO}_x$  по указанным моделям составляет ~25%.

На рисунке 4 представлена верификация средних значений концентраций оксидов азота  $\text{NO}_x$  по моделям Mitchell-Tarbell и De Soete со значениями концентраций оксидов азота  $\text{NO}_x$ , полученными непосредственно на ТЭЦ [16], а также со значением ПДК [17] для углесжигающих ТЭС. Анализируя данные, можно заметить, что экспериментальные точки и значение ПДК ( $640 \text{ мг/м}^3$ ) ближе к значениям, которые были получены при использовании модели Mitchell-Tarbell, в то время как для второго случая (модель De Soete) значения явно занижены.

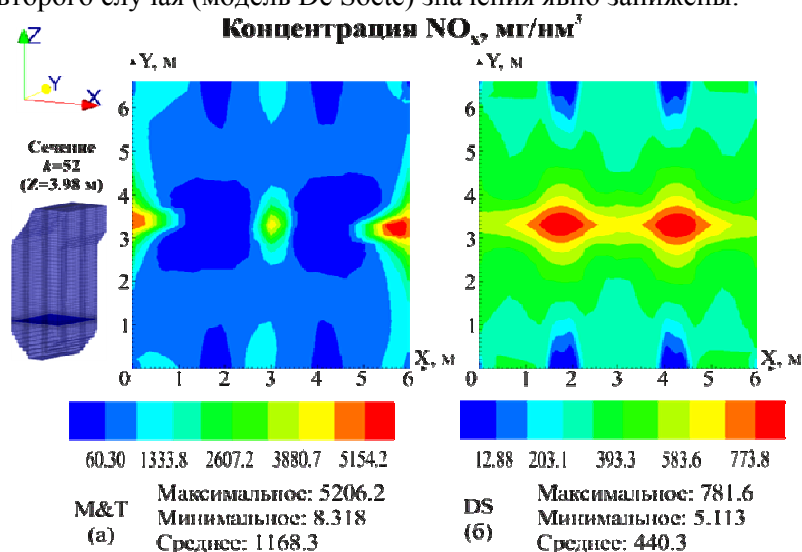


Рисунок 2 – Распределение концентрации оксидов азота  $\text{NO}_x$  в области расположения горелочных устройств топочной камеры котла БКЗ-75

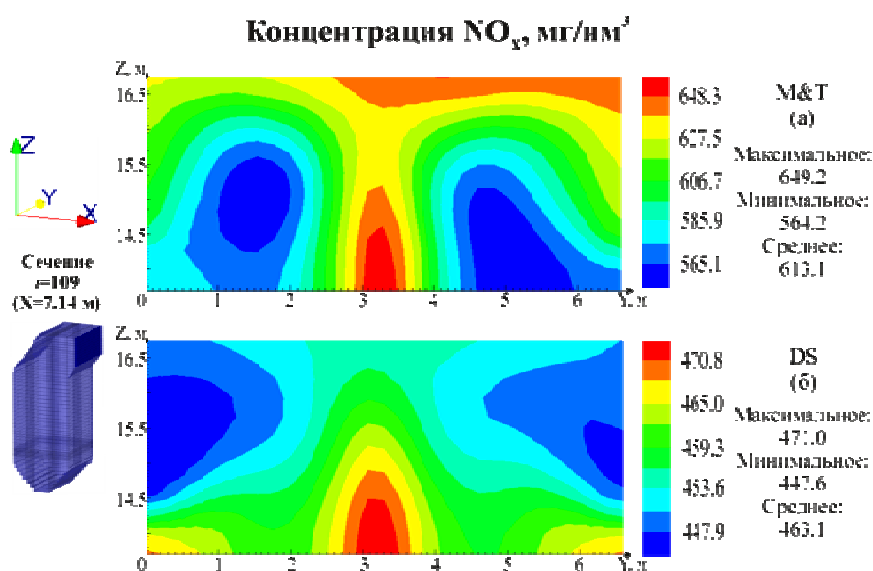


Рисунок 3 – Распределение концентрации оксидов азота  $\text{NO}_x$  на выходе из топочной камеры котла БКЗ-75

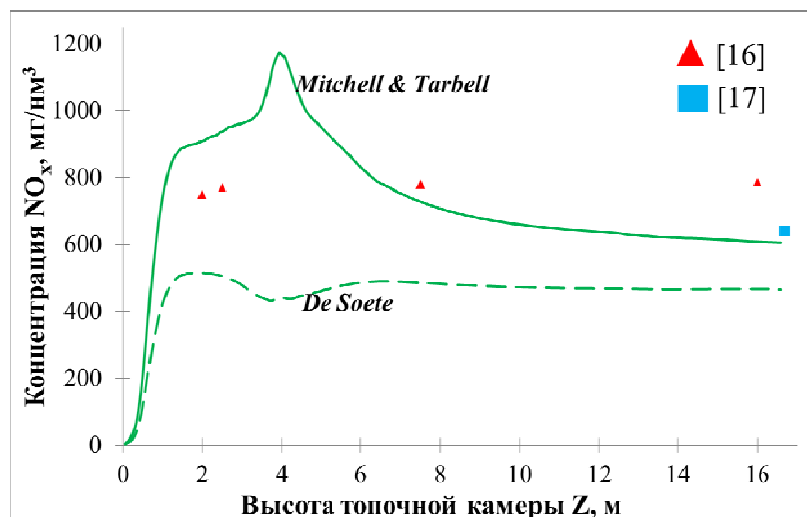


Рисунок 4 – Распределения средних значений концентрации оксидов азота NO<sub>x</sub> по высоте топки котла БКЗ-75 для двух моделей и ее верификация

Таким образом, при проведении вычислительных экспериментов по сжиганию казахстанских углей высокой зольности (30-50%) можно говорить об адекватности результатов при использовании модели Mitchell-Tarbell. Однако можно отметить, что для получения в кратчайший срок данных о процессах массообмена азотистых веществ пригодна модель De Soete, ее применение может значительно ускорить численный расчет, уменьшить вычислительные и временные ресурсы.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Askarova A.S., Messerle V.E., Ustimenko A.B. etc. Numerical Simulation of Pulverized Coal Combustion in a Power Boiler Furnace // High Temperature. 2015. V. 53. № 3. P. 445.
- [2] Messerle V.E., Ustimenko A.B., Maximov Yu.V. etc. Numerical Simulation of the Coal Combustion Process Initiated by a Plasma Source // Journal of Thermophysics and Aeromechanics. 2014. V. 21. Iss. 6. P. 747.
- [3] Belosevic S., Tomanovic I., Beljanski V. Numerical prediction of processes for clean and efficient combustion of pulverized coal in power plants // Applied thermal engineering. 2015. T. 74. P. 102.
- [4] Safarik P., Maximov V., Beketayeva M.T. et al. Numerical Modeling of Pulverized Coal Combustion at Thermal Power Plant Boilers // Journal of Thermal Science. 2015. V. 24. Iss. 3. P. 275.
- [5] Кавтарадзе Р.З., Сергеев С.С. Новый альтернативный (частично-гомогенный) процесс сгорания как способ снижения концентраций оксидов азота и сажи в продуктах сгорания дизеля // Теплофизика высоких температур. 2014. Т. 52. № 2. С. 294.
- [6] Askarova A.S., Karpenko E.I., Messerle V.E. et al. Plasma enhancement of combustion of solid fuels // Journal of High Energy Chemistry, 2006. V. 40. Iss. 2. P.111.
- [7] Lavrishcheva Ye.I., Karpenko E.I., Ustimenko A.B. etc. Plasma-supported coal combustion in boiler furnace // IEEE Transactions on Plasma Science, 2007. V. 35. Iss. 6. P.1607.
- [8] Ustimenko A.B., Askarova A.S., Messerle V.E., Nagibin A. Pulverized coal torch combustion in a furnace with plasma-coal system // Journal of Thermophysics and Aeromechanics, 2010. V. 7. Iss. 3. P. 435.
- [9] Bolegenova S.A., Beketayeva M.T., Gabitova Z. etc. Computational Method for Investigation of Solid Fuel Combustion in Combustion Chambers of a Heat Power Plant // High Temperature. 2015. V. 53. № 5. P. 751.
- [10] De Soete G.G. Overall reaction rates of NO and N<sub>2</sub> formation from fuel nitrogen // 15th international symposium on combustion. – Pittsburgh, 1975. P. 1093.
- [11] Mitchell J.W., Tarbell J.M. A kinetic model of nitric oxide formation during pulverized coal combustion // AIChE Journal. 1982. V. 28. P. 302.
- [12] Müller H. Numerische simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung. TU. – Braunschweig: IWBT, 1997. 812 s.
- [13] Pauker W. Creating data sets for Florean using the tool PREPROZ. TU. – Braunschweig: IWBT, 1997. 324 s.
- [14] Roache P.J. Computational fluid dynamics. – Albuquerque: Hermosa Press, 1985. 283 p.
- [15] Leithner R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. – Braunschweig, 2006. 52 p.
- [16] Алияров Б.К., Алиярова М.Б. Сжигание казахстанских углей на ТЭС и на крупных котельных: опыт и перспективы. – Алматы, 2011. 306 с.
- [17] РНД 34.02.303-91 Отраслевая инструкция по нормированию вредных выбросов в атмосферу для тепловых электростанций и котельных. – Астана, 2005. 36 с.

## REFERENCES

- [1] Askarova A.S., Messerle V.E., Ustimenko A.B. etc. Numerical Simulation of Pulverized Coal Combustion in a Power Boiler Furnace. *High Temperature*, **2015**, 53(3), 445-452 (in Eng.).
- [2] Messerle V.E., Ustimenko A.B., Maximov Yu.V. etc. Numerical Simulation of the Coal Combustion Process Initiated by a Plasma Source. *Journal of Thermophysics and Aeromechanics*, **2014**, 21(6), 747-754 (in Eng.).
- [3] Belosevic S., Tomanovic I., Beljanski V. Numerical prediction of processes for clean and efficient combustion of pulverized coal in power plants. *Applied thermal engineering*, **2015**, 74, 102-110 (in Eng.).
- [4] Safarik P., Maximov V., Beketayeva M.T. et al. Numerical Modeling of Pulverized Coal Combustion at Thermal Power Plant Boilers. *Journal of Thermal Science*, **2015**, 24(3), 275-282 (in Eng.).
- [5] Кавтарадзе Р.З., Сергеев С.С. Новый альтернативный (частично-гомогенный) процесс сгорания как способ снижения концентраций оксидов азота и сажи в продуктах сгорания дизеля. *Теплофизика высоких температур*, **2014**, 52(2), 282-296 (in Russ.).
- [6] Askarova A.S., Karpenko E.I., Messerle V.E. et al. Plasma enhancement of combustion of solid fuels. *Journal of High Energy Chemistry*, **2006**, 40(2), 111-118 (in Eng.).
- [7] Lavrishcheva Ye.I., Karpenko E.I., Ustimenko A.B. etc. Plasma-supported coal combustion in boiler furnace. *IEEE Transactions on Plasma Science*, **2007**, 35(6), 1607-1616 (in Eng.).
- [8] Ustimenko A.B., Askarova A.S., Messerle V.E., Nagibin A. Pulverized coal torch combustion in a furnace with plasma-coal system. *Journal of Thermophysics and Aeromechanics*, **2010**, 7(3), 435-444 (in Eng.).
- [9] Bolegenova S.A., Beketayeva M.T., Gabitova Z. etc. Computational Method for Investigation of Solid Fuel Combustion in Combustion Chambers of a Heat Power Plant. *High Temperature*, **2015**, 53(5), 751-757 (in Eng.).
- [10] De Soete G.G. Overall reaction rates of NO and N<sub>2</sub> formation from fuel nitrogen. 15th international symposium on combustion. Pittsburgh, **1975**, 1093-1102 (in Eng.).
- [11] Mitchell J.W., Tarbell J.M. A kinetic model of nitric oxide formation during pulverized coal combustion. *AIChE Journal*, **1982**, (28), 302-320 (in Eng.).
- [12] Müller H. Numerische simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung. TU. Braunschweig: IWB, **1997**. 812 s. (in Ger.).
- [13] Pauker W. Creating data sets for Florean using the tool PREPROZ. TU. Braunschweig: IWB, **1997**. 324 s. (in Ger.).
- [14] Roache P.J. Computational fluid dynamics. Albuquerque: Hermosa Press, **1985**. 283 p. (in Eng.).
- [15] Leithner R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. Braunschweig, **2006**. 52 p. (in Eng.).
- [16] Aliarov B.K., Aliarova M.B. Szhiganie kazhastanskikh uglei na TEC i na krupnih kotel'nykh: opit i perspektivi. Алматы, **2011**. 306 c. (in Kaz.).
- [17] RND 34.02.303-91 Otrazlevaya instruktsiya po normirovaniyu vrednykh vybrosov v atmosferu dlya teplovykh elektrostantsiy i kotel'nykh. Астана, **2005**. 36 c. (in Kaz.).

## ЖЭС ЖАНУ КАМЕРАСЫНДА КӨМІРДІҢ ЖАНУЫ КЕЗІНДЕ NO<sub>x</sub> ТҮЗІЛУІ МЕН ЖОЙЫЛУЫН ЕКІ КИНЕТИКАЛЫҚ МЕХАНИЗМ БОЙЫНША САНДЫҚ МОДЕЛДЕУ

Ә.С. Асқарова, С.Ә. Бөлегенова, С.Ә. Бөлегенова, В.Ю. Максимов, М.Т. Бекетаева

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

**Түйін сөздер:** NO<sub>x</sub> концентрациясы, қоршаған ортаға әсері, сандық моделдеу, кинетикалық механизм, жану камерасы.

**Аннотация.** Жылу электр станциялары қолданыс кезінде күкірт пен азот тотықтарының шығырларын бөле отырып қоршаған ортаға зиянды әсер етуші көздердің негізгілерінің бірі болып саналады. Ұсынылған жұмыста замануи 3D компьютерлік моделдеудің көмегімен зиянды азот тотықтарының NO<sub>x</sub> түзілуі мен жойылуының екі глобалды мехннзмін пайдалана отырып, реалды өндірістік БҚЗ-75 қазандығының жану камерасында орын алатын массаалмасу процестері зерттелді. Алынған нәтижелер мен олардың верификациялануына сүйене отырып, қазақстандық көмірдің жануы бойынша сандық есептеулер жүргізу кезіндегі NO<sub>x</sub> концентрацияларының түзілуінің ең дұрыс механизмі ұсынылды.

Поступила 15.03.2016 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 35–39

УДК 001.891.5:536.46:662.6

**STUDY OF THE BOUNDARY CONDITIONS INFLUENCE FOR  
THE TEMPERATURE ON THE WALLS OF THE COMBUSTION  
CHAMBER IN THE TEMPERATURE CHARACTERISTICS  
OF THE BURNING PROCESS****A.S. Askarova, S.A. Bolegenova, S.A. Bolegenova, V.Yu. Maximov, M.T. Beketayeva**

Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [Beketayeva.m@gmail.com](mailto:Beketayeva.m@gmail.com)**Key words:** numerical modelling, combustion, boundary conditions for the temperature on the walls

**Abstract.** To select a more appropriate model with the optimal boundary condition for the temperature of the walls of the combustion chamber, correctly describes the processes of heat transfer in the combustion chamber of the boiler BKZ-75 Shakhtinskaya CHP during combustion in it the coal of high ash content, it was carried out computational experiments on the distribution of temperature fields at the two boundary conditions. Two-dimensional and three-dimensional interpretations of temperature characteristics in the chamber were obtained. It is proved that getting better adequate temperature data close to full-scale, possibly using the conditions of impermanence walls of the combustion chamber.

УДК 001.891.5:536.46:662.6

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ ДЛЯ  
ТЕМПЕРАТУРЫ НА СТЕНКАХ ТОПОЧНОЙ КАМЕРЫ НА  
ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ****А.С. Аскарова, С.А. Болегенова, С.А. Болегенова, В.Ю. Максимов, М.Т. Бекетаева**

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы

**Ключевые слова:** численное моделирование, горение, граничное условие для температуры стенок

**Аннотация.** Для выбора более адекватной модели с оптимальным граничным условием для температуры стенок топочной камеры, правильно описывающей процессы теплопереноса в топочной камере котла БКЗ-75 Шахтинской ТЭЦ при сжигании в нем угля высокой зольности, были проведены вычислительные эксперименты по исследованию распределения температурных полей при двух граничных условиях. Получены двумерные и трехмерные интерпретации температурных характеристик в объеме камеры. Доказано, что получение более адекватных температурных данных, близких к натурным, возможно при использовании условия непостоянства стенок топочной камеры.

Вычислительные эксперименты базируются на математических моделях физического процесса, которые состоят из системы дифференциальных уравнений, алгебраических замыкающих соотношений и краевых (начальных и граничных) условий [1-3]. Определение соответствующих граничных условий, имеющие адекватную физическую постановку задачи, весьма нелегко. Неправильное граничное условие для температуры стенок камеры в топочном объеме котла при вычислительных расчетах может дать ошибочные результаты. Недостаточная изученность определения поведения теплового потока и процессов массопереноса при сжигании

пылеугольного топлива для различных граничных условий температуры на стенках камеры делает акцент на выбор реалистичной модели почти произвольным.

Для проведения вычислительных экспериментов с применением 3D моделирования была выбрана топочная камера котла БКЗ-75, эксплуатирующая в Шахтинской ТЭЦ. В качестве основы для численных расчетов использовался компьютерный пакет прикладных программ FLOREAN [4-5], который широко используется при исследованиях в области процессов высокореакционных течений в камерах сгорания [6-10].

Для проведения вычислительных экспериментов была построена геометрия исследуемого объекта согласно реальной схеме, а также была составлена его конечно-разностная сетка, которая имеет шаги по осям X, Y, Z: 59×32×67, что составляет 126 496 контрольных объемов.

Конвективный теплообмен между горячим топливо-воздушным потоком и стенкой при заданной температуре определяется течением в пристенной области [11-13]. Для адиабатических стенок (температура стенок топочной камеры постоянна) поток тепла  $q_w$  равен нулю ( $q_w = 0$ ) и в этом случае используются краевые условия как в плоскости симметрии.

В случае теплообмена между стенкой и реагирующим потоком можно задавать температуру стенки или тепловой поток (при задаче, когда температура стенки топочной камеры переменная). При переменной температуре стенки топочной камеры тепловой поток  $\dot{q}$  можно рассчитать по формуле:

$$\dot{q} = \underbrace{\alpha(T_{FG} - T_{Surf})}_{\text{конвекция}} + \underbrace{C_{12}(T_{FG}^4 - T_{Surf}^4)}_{\text{радиация}}, \quad (6)$$

где  $C_{12} = \varepsilon_{12}\sigma$ ,  $T_{FG}$  – температура дымовых газов,  $T_{Surf}$  – температура поверхности стенок камеры,  $\alpha$  – коэффициент переноса тепла конвекцией, Вт/м<sup>2</sup>·К,  $\varepsilon_{12}$  – излучательная способность стенки,  $\sigma$  – постоянная Больцмана, Вт/м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>.

В численных расчетах температуру поверхности стенки камеры  $T_{surf}$  можно вычислить следующим образом:

$$\dot{q} = k(T_{surf} - T_{steam}), \quad (7)$$

$$T_{surf} = \frac{\dot{q}}{k} + T_{steam}, \quad (8)$$

здесь  $k$  – теплопроводность между стенками и трубопроводами, Вт/м<sup>2</sup>·К.

Температура поверхностей стенки  $T_{surf}$  топочной камеры влияет на поток тепла  $\dot{q}$ , поэтому для ее расчета выполняется процедура итерации:

- а) расчет потока тепла;
- б) расчет температуры поверхности  $T_{surf}$ ;
- в) перерасчет потока тепла с новым значением температуры поверхности;
- г) перерасчет новой температуры поверхности  $T_{surf}$ .

Далее представлены результаты численного моделирования по исследованию влияния граничного условия для температуры стенки.

На рисунке 1 представлены графики распределения максимальных, минимальных и средних значений температуры по высоте топочного объема котла БКЗ-75 для двух случаев изменения граничного условия для температуры стенок топки. Минимальные значения температур в области горелок для двух случаев граничных условий обусловлены низкой температурой вдуваемой аэросмеси (140°С). Как видно из графиков изменение граничных условий для температуры стенок значительно влияет на характер распределения температуры в топочной камере.

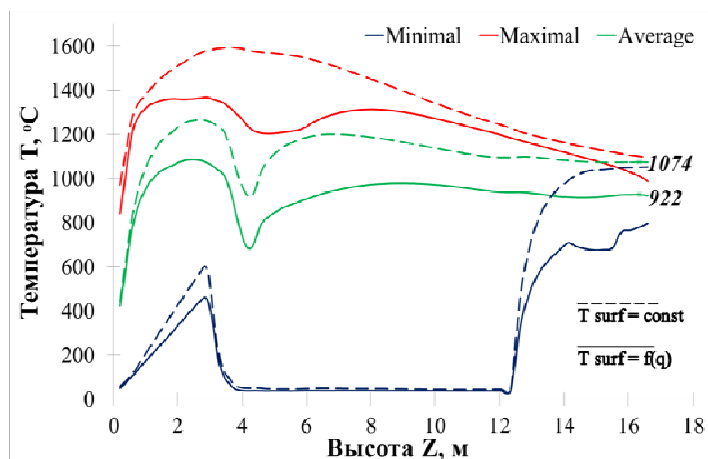


Рисунок 1 – Распределение температуры по высоте топочной камеры котла БКЗ-75 при двух граничных условиях для температуры стенок

Из анализа рисунка 1 по средним значениям температуры  $T$  по высоте топки, видно, что разница для двух случаев равна примерно  $\sim 152^\circ\text{C}$ , что составляет порядка 14%. Значительные отличия в распределениях температуры возникают в областях расположения горелочных устройств и далее по длине факела в направлении к выходу из топочного пространства. Это объясняется тем, что при вдувании аэросмеси из горелок, воспламенении топлива, его горении часть возникающего тепла отдается стенкам топочной камеры, тем самым температура все время меняется. За счет отсутствия теплообмена со средой в экранных трубах при условии поддержания температуры стенок постоянной, уровень турбулентных пульсаций растет по всему объему топочного устройства, тем самым повышая температуру.

По мере продвижения к выходу из топочного пространства, физические процессы с химическими преобразованиями между горячими газами продуктов сгорания и окислителем ослабевают, что приводит к понижению температуры на выходе из топки. Тем самым на выходе из топочного пространства температура в случае с переменной температурой стенок камеры имеет среднее значение, равное  $922^\circ\text{C}$ , а в случае с постоянной температурой стенок, среднее значение температуры равно  $1074^\circ\text{C}$ .

Анализируя трехмерные распределения температуры на рисунке 2, можно сделать аналогичный вывод: температура во всех выбранных сечениях топочной камеры по значению, которое можно определить по шкале температур, всюду выше для граничных условий, когда температура стенок камеры поддерживается постоянной.

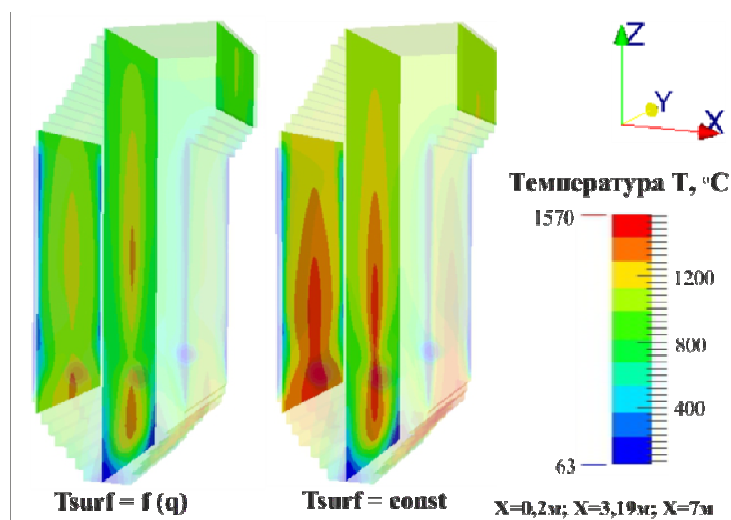


Рисунок 2 – Трехмерные распределения температуры в продольных сечениях топочной камеры котла БКЗ-75

Для выбора граничного условия для температуры стенок топочной камеры, хорошо описывающего реальный технологический процесс в условиях, приближенных к ТЭЦ, на рисунке 3 приведена верификация результатов численного моделирования с теоретически рассчитанным значением [14] температуры на выходе из топочной камеры котла БКЗ-75. Значение температуры на выходе из камеры сгорания при вычислительном эксперименте равно  $T=922^{\circ}\text{C}$ , а теоретически рассчитанное значение для котла БКЗ-75 равно  $T=968^{\circ}\text{C}$ , что подтверждает правильность использования в вычислительных экспериментах граничного условия о непостоянстве температуры стенок камеры.

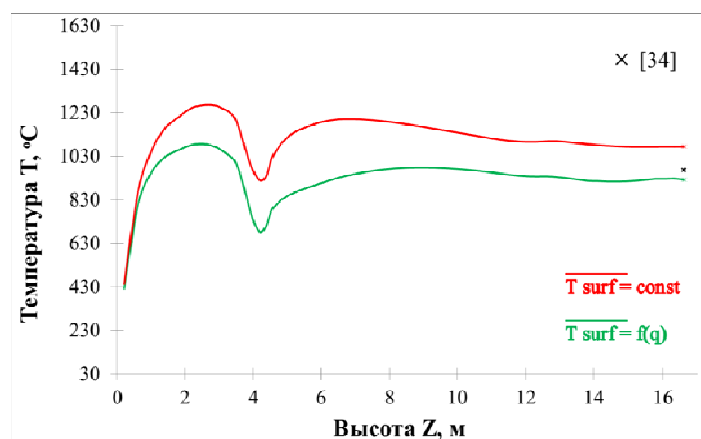


Рисунок 3 – Сравнение результатов вычислительного эксперимента в топочной камере котла БКЗ-75 с теоретически рассчитанным значением

Разность теоретически рассчитанного значения на выходе из топки с результатом вычислительного эксперимента составляет всего  $\sim 4,6\%$  для граничного условия, когда температура стенок камеры переменная. Однако, при фиксированной температуре поверхности стен топочной камеры для проведения вычислительного эксперимента требуется меньше машинного времени. Это означает, что понижаются и требования к мощности вычислительной техники (частота процессоров и оперативная память компьютера).

#### ЛИТЕРАТУРА

- [18] Pauker W. Creating data sets for Florean using the tool PREPROZ. – Braunschweig: IWBТ, 1997.
- [19] Leithner R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. – Braunschweig: IWBТ, 2006.
- [20] Askarova A.S., Messerle V.E., Ustimenko A. B. etc. Numerical Simulation of Pulverized Coal Combustion in a Power Boiler Furnace // High Temperature. 2015. V. 53. № 3. P. 445.
- [21] Müller H. Numerische simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung. – Braunschweig: IWBТ, 1997.
- [22] Müller H. Numerische Simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung. – Braunschweig: IWBТ, 1997.
- [23] Maximov Yu.V., Beketayeva M., Ospanova Sh. et al. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber // WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer. 2014. V. 9. P. 39.
- [24] Bolegenova S.A., Beketayeva M.T., Gabitova Z. etc. Computational Method for Investigation of Solid Fuel Combustion in Combustion Chambers of a Heat Power Plant // High Temperature. 2015. V. 53. № 5. P. 751.
- [25] Safarik P., Maximov V., Beketayeva M.T. et al. Numerical Modeling of Pulverized Coal Combustion at Thermal Power Plant Boilers // Journal of Thermal Science. 2015. V. 24. Iss. 3. P. 275.
- [26] Lavrishcheva Ye.I., Karpenko E.I., Ustimenko A.B. etc. Plasma-supported coal combustion in boiler furnace // IEEE Transactions on Plasma Science, 2007. V. 35. Iss. 6. P.1607.
- [27] Askarowa A., Buchmann M.A. Structure of the flame of fluidized-bed burners and combustion processes of high-ash coal // 18th Dutch/German Conference on Flames - Combustion and Incineration. – Delft, 1997. V. 1313. P. 241.
- [28] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: ИЛ, 1969.
- [29] Vockrodt S., Leithner R. etc. Firing technique measures for increased efficiency and minimization of toxic emissions in Kasakh coal firing // Combustion and incineration. 1999. V. 1492. P. 93.
- [30] Leithner R., Müller H. CFD studies for boilers // Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics – Cambridge, 2003. P.172.
- [31] Тепловой расчет котлов: Нормативный метод. – СПб.: Изд. АООТ "НПО ЦКТИ", 1998. – 270 с.

## REFERENCES

- [32] Pauker W. Creating data sets for Florean using the tool PREPROZ. Braunschweig: IWBT, **1997** (in Eng.).
- [33] Leithner R. Numerical Simulation. Computational Fluid Dynamics CFD: Course of Lecture. Braunschweig. IWBT, **2006** (in Eng.).
- [34] Askarova A.S., Messerle V.E., Ustimenko A. B. etc. Numerical Simulation of Pulverized Coal Combustion in a Power Boiler Furnace. *High Temperature*, **2015**, 53(3), 445-452 (in Eng.).
- [35] Müller H. Numerische simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung. Braunschweig: IWBT, **1997** (in Eng.).
- [36] Müller H. Numerische Simulation von Feuerungen. CFD-Vorlesung. Braunschweig: IWBT, **1997** (in Eng.).
- [37] Maximov Yu.V., Beketayeva M., Ospanova Sh. et al. Investigation of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ 420 combustion chamber. *WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer*, **2014**, 9, 39-50 (in Eng.).
- [38] Bolegenova S.A., Beketayeva M.T., Gabitova Z. etc. Computational Method for Investigation of Solid Fuel Combustion in Combustion Chambers of a Heat Power Plant. *High Temperature*, **2015**, 53 (5), 751-757 (in Eng.).
- [39] Safarik P., Maximov V., Beketayeva M.T. et al. Numerical Modeling of Pulverized Coal Combustion at Thermal Power Plant Boilers. *Journal of Thermal Science*, **2015**, 24(3), 275-282 (in Eng.).
- [40] Lavrishcheva Ye.I., Karpenko E.I., Ustimenko A.B. etc. Plasma-supported coal combustion in boiler furnace. *IEEE Transactions on Plasma Science*, **2007**, 35(6), 1607-1616 (in Eng.).
- [41] Askarowa A., Buchmann M.A. Structure of the flame of fluidized-bed burners and combustion processes of high-ash coal. 18th Dutch/German Conference on Flames - Combustion and Incineration. Delft, **1997**, 1313, 241-244 (in Eng.).
- [42] Shlihting G. Teoriya pogramichnogo sloya. M.: IL, **1969**. (in Russ.).
- [43] Vockrodt S., Leithner R. etc. Firing technique measures for increased efficiency and minimization of toxic emissions in Kasakh coal firing. *Combustion and incineration*, **1999**, 1492, 93 (in Eng.).
- [44] Leithner R., Müller H. CFD studies for boilers. Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics. Cambridge, **2003**, 172 p. (in Eng.).
- [45] [14] Thermal design of boiler: Standard method. SPb.: Izd. AOOT "NPO CKTI", **1998**, 270 p. (in Russ.).

**ЖАНУ КАМЕРАСЫНЫҢ ҚАБЫРҒА ТЕМПЕРАТУРАСЫ ҮШІН БЕРІЛГЕН  
ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТЫНЫҢ ЖАНУ ПРОЦЕСІНІҢ  
ТЕМПЕРАТУРАЛЫҚ СИПАТТАМАЛАРЫНА ӘСЕРІН ЗЕРТТЕУ**

**Ә.С. Асқарова, С.Ә. Бөлегенова, С.Ә. Бөлегенова, В.Ю. Максимов, М.Т. Бекетаева**

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

**Түйін сөздер:** сандық моделдеу, жану, қабырға температурасы үшін шекаралық шарт.

**Аннотация.** Шахтинск ЖЭО-ның БҚЗ-75 қазандығы жану камерасының ішінде күлділігі жоғары отынды жағу кезінде болатын жылу тасымалдану процестерін дұрыс сипаттайтын камера қабырғасы температурасы үшін оптималды шекаралық шарт болып табылатын моделді таңдау үшін екі түрлі шарттарда температуралық өрістердің таралуын зерттеу үшін сандық тәжірибелер жүргізілді. Камера көлемі ішінде температуралық сипаттамалардың екіөлшемді және үшөлшемді интерпретациялары алынды. Жану камерасының қабырғасы үшін температураның тұрақсыздық шартын қолдану арқылы алынған температуралық мәліметтер реалдылыққа жақынырақ екені дәлелденді.

*Поступила 15.03.2016 г.*

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 40–47

UDC 342.7(574)

**INVESTIGATION OF ATOMIZATION, IGNITION  
AND COMBUSTION PROCESSES OF DIFFERENT TYPES  
OF LIQUID FUEL**

**A. Askarova<sup>1</sup>, S. Bolegenova<sup>1</sup>, M. Gorokhovski<sup>2</sup>,  
Sh. Ospanova<sup>1</sup>, A. Nugymanova<sup>1</sup>, S. Utelov<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Kazakhstan

<sup>2</sup>Ecole Centrale de Lyon, Lyon, France

shinar\_ospanova87@mail.ru

**Key words:** numerical modeling, combustion chamber, gasoline, heptane, tetradecane.

**Abstract.** This article presents the results of numerical modeling of atomization and combustion processes of various types of liquid fuel depending on the fuel injection speed in the combustion chamber. On the basis of the solution of differential equations of turbulent reacting flows have been studied combustion processes depending on different initial injection speed of liquid fuels drops. Optimal parameters of gasoline's, heptane's and tetradecane's combustion have been found. There have been obtained distributions of the flame by height, the drops radii, the temperature field and the fuel vapor during the optimal initial injection rate.

УДК 532.517.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАСПЫЛА,  
ВОСПЛАМЕНЕНИЯ И ГОРЕНИЯ РАЗЛИЧНОГО ВИДА  
ЖИДКОГО ТОПЛИВА**

**А. Аскарова<sup>1</sup>, С. Болегенова<sup>1</sup>, М. Гороховский<sup>2</sup>,  
Ш. Оспанова<sup>1</sup>, А. Нұғыманова<sup>1</sup>, С. Утелов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>Центральный Лионский университет, г. Лион, Франция

**Ключевые слова:** численное моделирование, камера сгорания, бензин, гептан, тетрадекан.

**Аннотация.** В данной статье представлены результаты численного моделирования процессов распыла и горения различного вида жидкого топлива в зависимости от скорости впрыска в камере сгорания. На основе решения дифференциальных уравнений турбулентного реагирующего течения проведено исследование процессов горения в зависимости от различных начальных скоростей капель впрысков жидких топлив. Определены оптимальные параметры горения бензина, гептана и тетрадекана. Были получены распределения высоты температурного факела, капель по радиусам, поля температуры и паров топлива при оптимальной начальной скорости впрыска.

Горение жидких топлив отличается рядом специфических особенностей, обусловленных протеканием химических реакций в условиях динамического и теплового взаимодействия реагентов, интенсивного массопереноса при фазовых превращениях, а также зависимостью параметров процесса, как от термодинамического состояния системы, так и от ее структурных характеристик. Многообразие и сложность указанных факторов создают известные трудности при

разработке полноценной теории. Существенные результаты в этом направлении могут быть получены на основе последовательного приложения методов механики гетерогенных систем к описанию процессов горения двухфазных сред [1-2].

Явления конвективного теплообмена в турбулентных течениях с химическими реакциями широко распространены и играют большую роль в природных процессах, а также в различных отраслях промышленности. Знание закономерностей таких течений является важным при построении теории физики горения, при создании новых физико-химических технологий, а также при решении проблем теплоэнергетики и экологии. При этом в исследованиях сложный процесс горения необходимо анализировать в зависимости от влияния многочисленных физических и химических параметров реакции горения. Особый интерес при изучении явлений в многофазных системах представляет собой развитие теории образования жидких капель в развитой турбулентности. Дисперсия в нейтральных атмосферных течениях была хорошо изучена за последние десятилетия с помощью численных, лабораторных и натурных исследований [3].

Методы математического моделирования нашли широкое применение в различных областях науки и техники. Эти методы включают в себя разработку физических и математических моделей, численных методов и программного обеспечения, проведение численного эксперимента с привлечением средств вычислительной техники (его результаты анализируются и используются в практических целях). В науке и технике преимущества метода компьютерного моделирования очевидны: оптимизация проектирования, сокращение затрат на отработку, повышение качества продукции, уменьшение эксплуатационных расходов и т.д. Численное моделирование существенно преобразует также сам характер научных исследований, устанавливая новые формы взаимосвязи между экспериментальными и математическими методами.

Внедрение новых технологий требует значительных затрат, в связи с чем к методам проектирования и отработки оборудования предъявляются все возрастающие требования. Таким образом, в настоящее время, особое внимание приобретает не только создание эффективных физических и математических моделей, но и разработка новых более совершенных методов численной реализации систем разностных уравнений, описывающих конвективный теплоперенос в камерах сгорания. Математическое моделирование горения жидких топлив является сложной задачей, так как требует учета большого количества сложных взаимосвязанных процессов и явлений: многоступенчатые цепные химические реакции, перенос импульса, тепла и массы путем конвекции, молекулярный перенос, излучение, турбулентность, испарение жидких капель.

Математическая модель задачи о горении в камере сгорания жидкого топлива основывается на уравнениях движения для жидкой фазы, сопровождаемой капельным испарением, а также на уравнениях энергии и переноса массы с соответствующими начальными и граничными условиями [4-7]:

Уравнение неразрывности для компоненты реакции  $m$  имеет вид:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho_m \vec{u}) = \vec{\nabla} \left[ \rho D \vec{\nabla} \left( \frac{\rho_m}{\rho} \right) \right] + \dot{\rho}_m^c + \dot{\rho}_m^s \delta_{m1}, \quad (1)$$

где  $D$  – коэффициент диффузии,  $\rho_m$  – массовая плотность жидкой фазы,  $\rho$  – полная массовая плотность,  $\dot{\rho}_m^c$  – химический источниковый член;  $\dot{\rho}_m^s$  – источниковый член вследствие впрыска;  $\vec{u}$  – скорость жидкости.

Уравнение неразрывности для жидкости имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u}) = \dot{\rho}^s \quad (2)$$

Уравнение движения для смеси жидкостей:

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\frac{1}{a^2} \vec{\nabla} p - A_0 \vec{\nabla} \left( \frac{2}{3} \rho k \right) + \vec{\nabla} \vec{\sigma} + \vec{F}^s + \rho \vec{g}, \quad (3)$$

где  $p$  – давление жидкости,  $\alpha$  – безразмерная величина,  $A_0$  равно 0 при ламинарном течении и 1 – при турбулентности. Тензор вязких напряжений имеет вид:

$$\sigma = \mu [\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T] + \lambda \vec{\nabla} \vec{u} \vec{I}. \quad (4)$$

Здесь  $\mu$  – динамическая вязкость жидкости,  $\lambda$  – коэффициент вязкости,  $g$  – ускорение свободного падения и  $I$  – удельная внутренняя энергия.

Уравнение внутренней энергии представлено ниже:

$$\frac{\partial(\rho \vec{I})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \vec{I}) = -\rho \vec{\nabla} \vec{u} + (1 - A_0) \sigma \vec{\nabla} \vec{u} - \vec{\nabla} \vec{J} + A_0 \rho \varepsilon + \dot{Q}^c + \dot{Q}^s, \quad (5)$$

где  $\dot{Q}^c$  – источниковый член, обусловленный тепловыделением в результате химической реакции и  $\dot{Q}^s$  – тепло, которое приносит впрыскиваемое топливо. Вектор теплового потока  $J$  складывается из электропроводности и переноса энтальпии.

При использовании модели турбулентности ( $A_0=1$ ) решаются уравнения для кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} k) = -\frac{2}{3} \rho k \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \sigma \cdot \nabla \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \left( \frac{\mu}{Pr_k} \right) \vec{\nabla} k \right) \right] - \rho \varepsilon + \dot{W}^s, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u} \varepsilon) = & -\left( \frac{2}{3} c_{\varepsilon 1} - c_{\varepsilon 2} \right) \rho \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + \vec{\nabla} \cdot \left[ \left( \left( \frac{\mu}{Pr_\varepsilon} \right) \vec{\nabla} \varepsilon \right) \right] + \\ & + \frac{\varepsilon}{k} [c_{\varepsilon 1} \sigma \vec{\nabla} \vec{u} - c_{\varepsilon 2} \rho \varepsilon + c_s \dot{W}^s]. \end{aligned} \quad (7)$$

Величина  $\dot{W}^s$  возникает вследствие взаимодействия с распылителем. Константы  $c_{\varepsilon 1}, c_{\varepsilon 2}, c_s, Pr_k, Pr_\varepsilon$  определяются из эксперимента [8-9].

Существует несколько моделей распыла топлива. Наиболее широко известна глобальная модель механизма распада топлива, включающая в себя классическую модель вторичного распада. В данной статье представлены результаты численного моделирования процессов распыления и горения жидкого топлива в зависимости от давления в камере использованием математической стохастической модели вторичного распыла [10]. В данной статье были использованы три вида жидкого топлива: бензин, гептан и тетрадекан.

Жидкое топливо массой 0,06 г при температуре 298 К распылялось через сопло, расположенное в центре основания камеры. Топливо, впрыскиваемое в камеру сгорания, которая была заполнена воздухом при температуре 800К, сначала испарилось, после чего сгорело в газовой фазе. Процесс горения жидкого топлива в среднем занимал 4 мс. Время распыления жидкого топлива равно  $1,4 \cdot 10^{-3}$  с.

Камера сгорания представляет собой цилиндр, высотой 15 см, диаметром 4 см. Общий вид камеры сгорания представлен на рисунке 1. Расчетная область состоит из 600 ячеек. Время горения топлива 4 мс. Жидкое топливо впрыскивается в камеру сгорания через круглое сопло, расположенное в центре нижней части камеры. Время инжекции капель топлива 1,4 мс. Площадь инжектора составляет  $2 \cdot 10^{-4}$  см<sup>2</sup>.

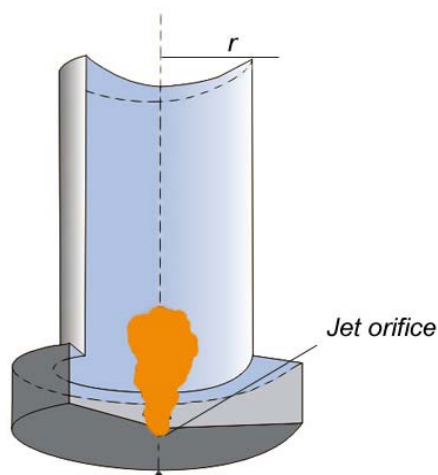


Рисунок 1 – Общий вид камеры сгорания

Целью данной статьи является изучение влияния скорости впрыска жидкого топлива на его горение с помощью численного моделирования на основе решения дифференциальных двумерных уравнений турбулентного реагирующего течения. Скорость впрыска жидкого топлива менялась от 150 до 350 м/с. На рисунке 2 показано изменение высоты температурного факела при изменении скорости впрыска жидких топлив. Было установлено, что при низких скоростях впрыска жидкого топлива (меньше 150 м/с) горение не происходит, поскольку в этом случае скорость впрыска не является достаточной для того, чтобы началось воспламенение и стабилизировалась реакция горения [11].

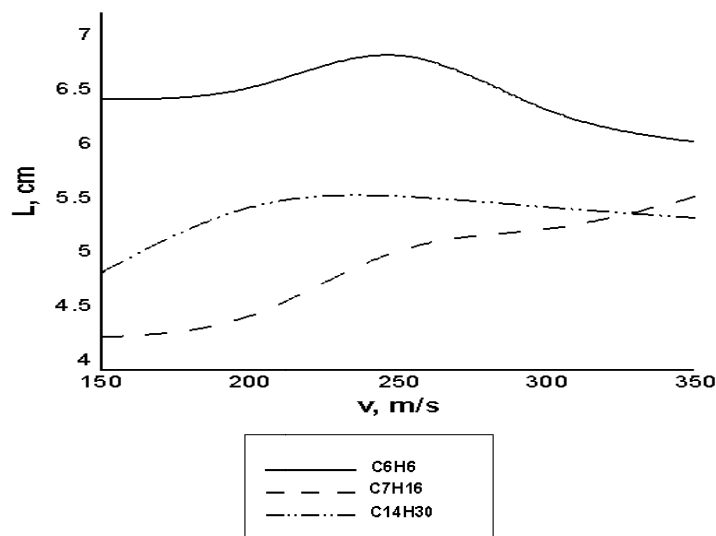


Рисунок 2 – Изменение высоты температурного факела при изменении скорости впрыска жидких топлив

Ниже приведены результаты численного моделирования по горению впрысков жидких топлив для оптимальных масс и скоростей впрыска и температуры газа в камере сгорания. Рисунок 3 показывает дисперсию и распределение температур капель для трех топлив в камере сгорания при оптимальных массах и скоростей впрыска и температурах газа.

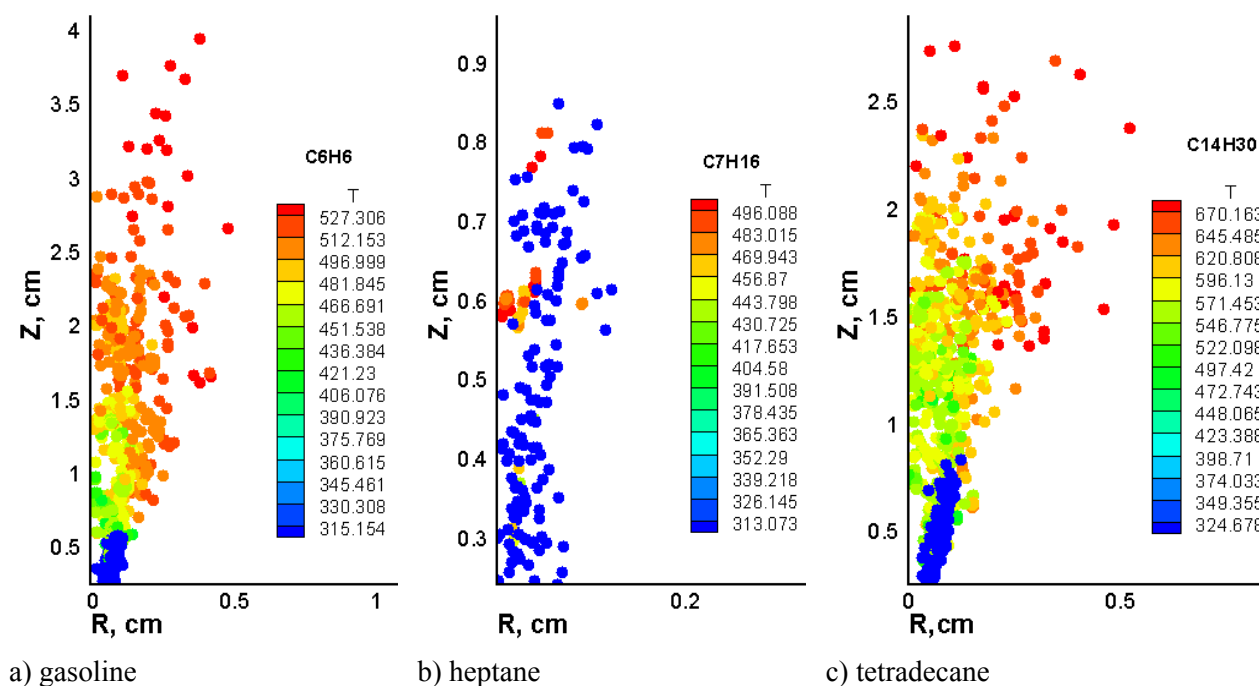


Рисунок 3 – Капли жидких топлив при оптимальных параметрах

На рисунках 4,5 приведены графики изменения температуры и концентрации паров топлива в камере сгорания при сжигании бензина, гептана и тетрадекана в момент времени 4 мс. Данные получены для оптимальной скорости впрыска этих видов топлива.

Анализ рисунка 4 показывает изменение температуры в камере сгорания для трех видов топлива. Можно заметить, что для бензина область максимальных температур (ядро факела) достигает 6,5 см по высоте камеры сгорания, вся остальная часть камеры разогревается до 1300K (рисунок 4 а). Результаты для гептана и тетрадекана аналогичны результатам для бензина в качественном отношении, различаясь количественно. Анализ рисунка 6 б показывает, что максимальная температура в камере сгорания при горении гептана равна 1300K в момент времени 4 мс. Остальная часть камеры сохраняет первоначальное значение температуры 900 K. Анализ рисунка 4 с в показывает, что наибольшее значение, до которого прогревается камера сгорания при сжигании тетрадекана, равно 2022 K, при этом температурный факел расположен выше, чем для гептана (рисунок 4 б). В камере температура в конечный момент времени 4 мс равна 1200 K.

Аналогичные исследования в области моделирования двухфазных реагирующих течений в присутствии горения проводятся в лаборатории моделирования проблем тепломассопереноса при Казахском национальном университете им. аль-Фараби. Учеными данной лаборатории были изучены основные характеристики горения твердого топлива при изменении размеров частиц в моно- и полидисперсной среде, а также при обработке термохимической обработке топлива с активированной плазмой. В данных работах были сравнены характеристики течения для различных режимов горения с экспериментальными данными, которые хорошо согласуются между собой [12-15].

На следующем рисунке 5 можно наблюдать, как меняется концентрация паров бензина, гептана и тетрадекана в конечный момент времени  $t=4$  ms. На рисунке 7 б представлено распределение паров гептана в различные моменты времени. В конечный момент времени для оптимальных параметров концентрация топлива в камере сгорания практически равна нулю. Из рисунка 7 с видно, что в момент времени 4 мс концентрация паров тетрадекана равна нулю, поскольку к этому моменту времени топливо полностью прореагировало с окислителем и в результате этой реакции образовались углекислый газ  $CO_2$  и вода  $H_2O$ .

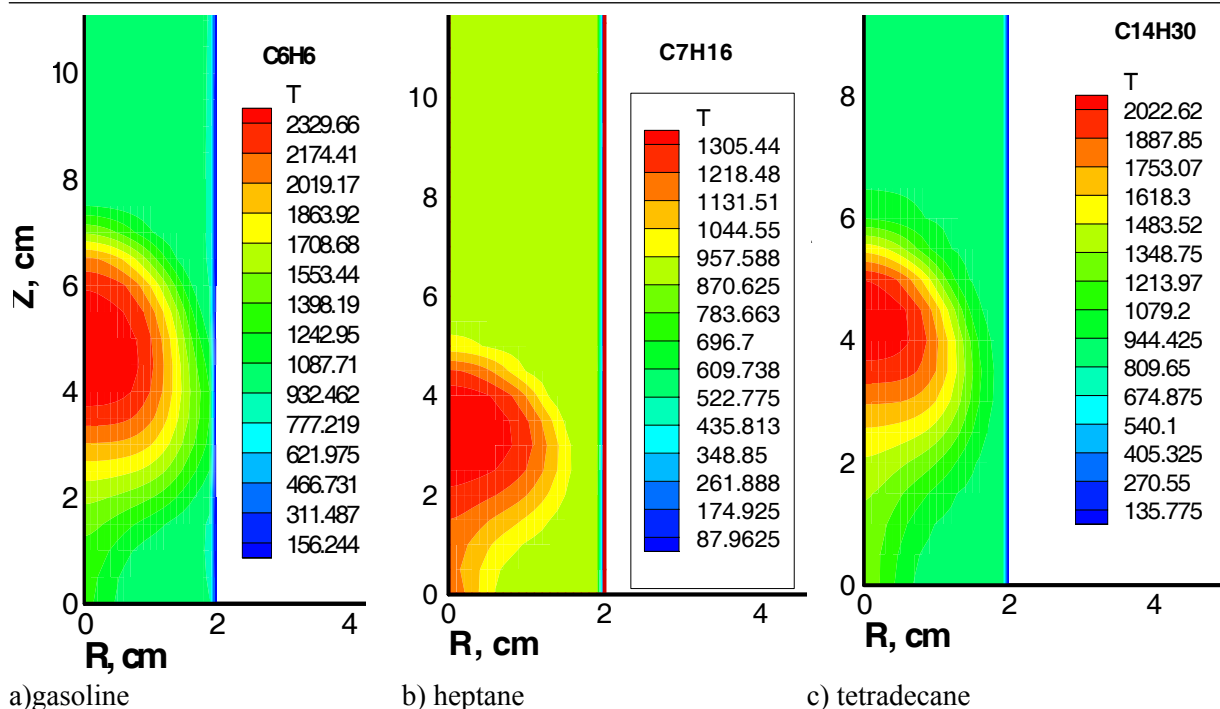


Рисунок 4 – Распределение температуры в камере сгорания при горении различных видов жидкого топлива в момент времени 4 мс

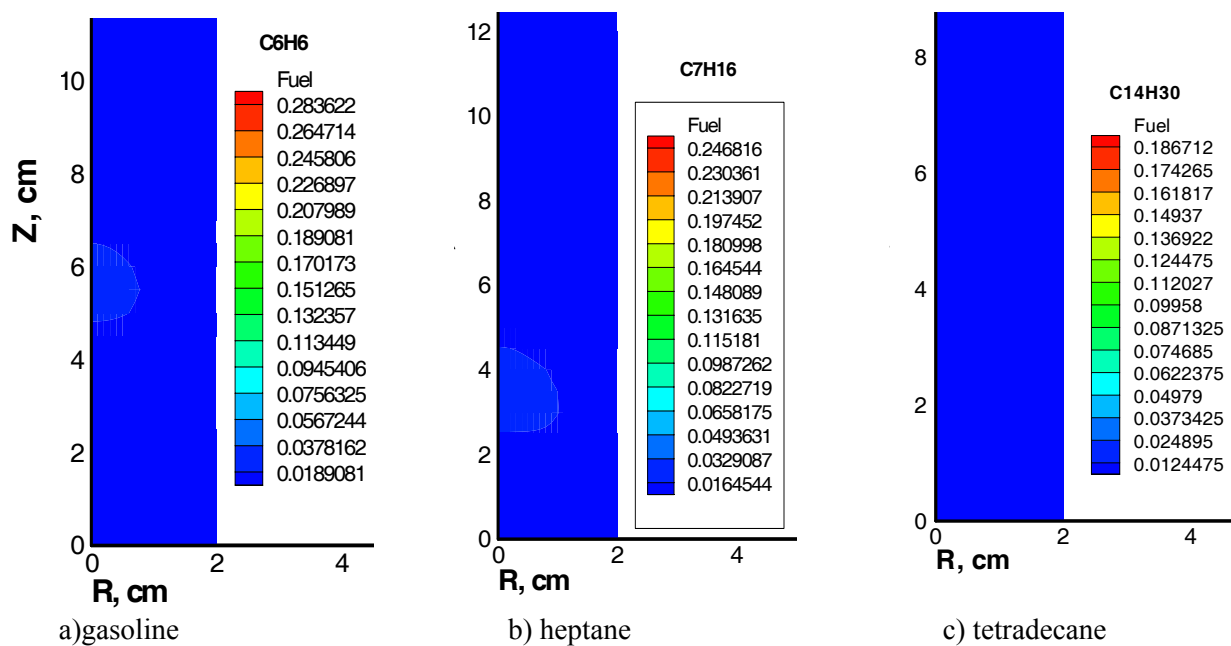


Рисунок 5 – Распределение паров топлива в камере сгорания при горении трех видов жидкого топлива в момент времени 4 мс

В данной статье приведены результаты компьютерных экспериментов по горению жидких впрысков топлив при высокой турбулентности. Проведено исследование процессов горения в зависимости от различных начальных скоростей капель впрысков жидких топлив. Определены оптимальные параметры горения для бензина, гептана, тетрадекана.

В результате проведенных вычислительных экспериментов было установлено, что наиболее эффективно процесс горения бензина протекает при скорости впрыскивания топлива 200 м/с; при

этом температура в камере принимает значение 2330 К. Для гептана и тетрадекана значение эффективной скорости равно 250 м/с. Температуры в камере сгорания соответственно равны 1305К и 2020К. Для гептана наблюдается линейная зависимость максимальной температуры газа в камере сгорания и концентрации образующегося в результате горения топлива углекислого газа от скорости впрыскиваемых капель.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Askarova A., Heierle Y., Leithner R., Müller H. CFD Code FLOREAN for Industrial Boilers Simulations // WSEAS Transactions on heat and mass transfer, 2009. – Vol. 4, Issue 4. – P. 98-107.
- [2] Leithner R., Müller H., Askarova A., Lavrichsheva Ye., Magda A. Combustion of low-rank coals in furnaces of Kazakhstan coal-firing power plants // VDI Berichte, 2007. – Issue 1988. – P. 497-502.
- [3] Amsden A.A., O'Rourke P.J., Butler T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. – Los Alamos, 1989. – 160 p.
- [4] Gorokhovski M., Borghi R. Model of soot formation and oxidation in diesel engines // Journal of diesel, Transactions of SAE. – 1993. – Vol. 930075. – P. 3-15.
- [5] Gorokhovski M.A. The stochastic Lagrangian model of drop breakup in the computation of liquid spray // J. Atomization and Sprays. – 2001. – Vol.11. – P. 505-519.
- [6] Saveliev V. L. Analyses of Kolmogorov's model of breakup and its application into Lagrangian computation of liquid sprays under air-blast atomization // J. Physics of fluids. – 2003. – Vol.15, № 1. – P. 184-192.
- [7] Askarova A., Bolegenova S., BolegenovaSymbat, Berezovskaya I., Ospanova Sh. et al. Numerical Simulation of the Oxidant's Temperature and Influence on the Liquid Fuel Combustion Processes at High Pressures // Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2015. – Vol. 10, №4. – P. 90-95.
- [8] Askarova A.S., Gorokhovski M.A., Chtab-Desportes A., Voloshina I. Stochastic simulation of the spray formation assisted by a high pressure // 6-th International Symposium on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion. Book Series: AIP Conference Proceedings, 2010. – Vol. 1207. – P.66-73.
- [9] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Berezovskaya I.E., Ospanova Sh., etc. Numerical simulation of the influence of the atomization velocity on the liquid hydrocarbon fuel's combustion // Proceedings of the 2013 International conference on Applied Mathematics and Computational Methods in engineering. – Rhodes Islands, Greece, 2013. – P. 155-158.
- [10] Messerle V.E., Ustimenko A.B., Askarova A.S., Karpenko E.I. Plasma enhancement of combustion of solid fuels // High Energy Chemistry, 2006. – Vol.40, Issue 2. – P.111-118.
- [11] Askarova A.S., Messerle V.E., Karpenko E.I., Ustimenko A.B. Plasma enhancement of coal dust combustion // 35-th EPS Conference on Plasma Physics. – Hersonissos, 2008. – ECA. – Vol.32. – P.148-152.
- [12] Bekmukhamet A., Bolegenova S.A., Askarova A.S., Beketayeva M.T., Maximov V., OspanovaSh.S., Gabitova Z.K. Numerical modeling of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ-420-140-7c combustion chamber // International Journal of Mechanics, 2014. – Vol.8. – P.112-122.
- [13] Askarova A., Bekmukhamet A., Maximov V., Beketayeva M. Numerical experimenting of combustion in the real boiler of CHP // International Journal of Mechanics, 2013. – Vol. 7, Issue 3. – P. 343-352.
- [14] Bolegenova S.A., Askarova A.S., Messerle V.E., MaksimovV.Yu., Gabitova Z. Numerical simulation of pulverized coal combustion in a power boiler furnace // Journal of High Temperature, 2015. – Vol.53, Issue 3. – P.445-452.
- [15] Ustimenko A.B., Askarova A.S., Messerle V.E., Nagibin A. Pulverized coal torch combustion in a furnace with plasma-coal system // Journal ofThermophysics and Aeromechanics. – Vol.7, Issue3, 2010. – P.435-444.

## REFERENCES

- [1] Askarova A., Heierle Y., Leithner R., Müller H. CFD Code FLOREAN for Industrial Boilers Simulations // WSEAS Transactions on heat and mass transfer, **2009**. Vol. 4, Issue 4. P. 98-107.
- [2] Leithner R., Müller H., Askarova A., Lavrichsheva Ye., Magda A. Combustion of low-rank coals in furnaces of Kazakhstan coal-firing power plants // VDI Berichte, 2007. Issue **1988**. P. 497-502.
- [3] Amsden A.A., O'Rourke P.J., Butler T.D. KIVA-II: A computer program for chemically reactive flows with sprays. Los Alamos, **1989**. 160 p.
- [4] Gorokhovski M., Borghi R. Model of soot formation and oxidation in diesel engines // Journal of diesel, Transactions of SAE. **1993**. Vol. 930075. P. 3-15.
- [5] Gorokhovski M.A. The stochastic Lagrangian model of drop breakup in the computation of liquid spray // J. Atomization and Sprays. **2001**. Vol.11. P. 505-519.
- [6] Saveliev V. L. Analyses of Kolmogorov's model of breakup and its application into Lagrangian computation of liquid sprays under air-blast atomization // J. Physics of fluids. **2003**. Vol.15, № 1. P. 184-192.
- [7] Askarova A., Bolegenova S., BolegenovaSymbat, Berezovskaya I., Ospanova Sh. et al. Numerical Simulation of the Oxidant's Temperature and Influence on the Liquid Fuel Combustion Processes at High Pressures // Journal of Engineering and Applied Sciences. **2015**. Vol. 10, №4. P. 90-95.
- [8] Askarova A.S., Gorokhovski M.A., Chtab-Desportes A., Voloshina I. Stochastic simulation of the spray formation assisted by a high pressure // 6-th International Symposium on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion. Book Series: AIP Conference Proceedings, **2010**. Vol. 1207. P.66-73.

- [9] Askarova A.S., Bolegenova S.A., Berezovskaya I.E., Ospanova Sh., etc. Numerical simulation of the influence of the atomization velocity on the liquid hydrocarbon fuel's combustion // Proceedings of the 2013 International conference on Applied Mathematics and Computational Methods in engineering. Rhodes Islands, Greece, **2013**. P. 155-158.
- [10] Messerle V.E., Ustimenko A.B., Askarova A.S., Karpenko E.I. Plasma enhancement of combustion of solid fuels // High Energy Chemistry, **2006**. Vol.40, Issue 2. P.111-118.
- [11] Askarova A.S., Messerle V.E., Karpenko E.I., Ustimenko A.B. Plasma enhancement of coal dust combustion // 35-th EPS Conference on Plasma Physics. Hersonissos, **2008**. ECA. Vol.32. P.148-152.
- [12] Bekmukhamet A., Bolegenova S.A., Askarova A.S., Beketayeva M.T., Maximov V., OspanovaSh.S., Gabitova Z.K. Numerical modeling of turbulence characteristics of burning process of the solid fuel in BKZ-420-140-7c combustion chamber // International Journal of Mechanics, **2014**. Vol.8. P.112-122.
- [13] Askarova A., Bekmukhamet A., Maximov V., Beketayeva M. Numerical experimenting of combustion in the real boiler of CHP // International Journal of Mechanics, **2013**. Vol. 7, Issue 3. P. 343-352.
- [14] Bolegenova S.A., Askarova A.S., Messerle V.E., Maksimov V.Yu., Gabitova Z. Numerical simulation of pulverized coal combustion in a power boiler furnace // Journal of High Temperature, **2015**. Vol.53, Issue 3. P.445-452.
- [15] Ustimenko A.B., Askarova A.S., Messerle V.E., Nagibin A. Pulverized coal torch combustion in a furnace with plasma-coal system // Journal of Thermophysics and Aeromechanics. Vol.7, Issue3, **2010**. P.435-444.

**ӘР ТҮРЛІ СҮЙЫҚ ОТЫНДАРДЫҢ БҮРКУ,  
ТҮТАНУ ЖӘНЕ ЖАНУ ПРОЦЕСТЕРІН ЗЕРТТЕУ**

**Ә. Асқарова<sup>1</sup>, С. Бөлегенова<sup>1</sup>, М. Гороховский<sup>2</sup>,  
Ш. Оспанова<sup>1</sup>, А. Нұғыманова<sup>1</sup>, С. Утелов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қаласы, Қазақстан

<sup>2</sup>Орталық Лион университеті, Лион қаласы, Франция

**Түйін сөздер:** сандық модельдеу, жану камерасы, бензин, гептан, тетрадекан.

**Аннотация.** Берілген мақалада жану камерасындағы бүрку жылдамдығына қатысты әр түрлі сұйық отындардың бүрку және жану процестерін сандық модельдеу нәтижелері келтірілген. Турбулентті әсерлесетін ағыстарды сипаттайтын дифференциалдық теңдеулерді шешу негізінде сұйық отындардың бастапқы бүрку жылдамдықтарына қатысты жану процестеріне зерттеу жүргізілген. Бензин, гептан мен тетрадеканның тиімді параметрлері анықталған. Бастапқы тиімді бүрку жылдамдығына қатысты температуралық алаудың биіктігінің таралуы, тамшылардың радиус бойынша таралуы, температура өрістері мен отын буының таралуы алынды.

*Поступила 15.03.2016 г.*

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 48–55

UDC 517.956.32

## ABOUT REGULAR RESOLVABILITY OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE WAVE EQUATION

M.B. Saprygina, U.S. Bayseytova, A.Sh. Shaldanbayev, I.O. Orazov

South Kazakhstan state university, Shymkent

**Keywords:** wave equation, nonlocal boundary value problem, regular resolvability.

**Abstract.** The wave equations are met in various branches of science and technicians, for example, in hydrology, seismicity, and during the studying of dynamics of distribution of waves in liquids and gas, nevertheless nonlocal boundary value problem of this equation are a little studied. The works devoted to nonlocal problems it isn't enough. In this work an attempt of studying of nonlocal problem is made by a functional method.

УДК 517.956.32

## ТОЛҚЫН ТЕНДЕУІНІҢ ШАРТАРАПТЫ ЕСЕБІНІҢ ТҰРЛАУЛЫ ШЕШІЛУІ ТУРАЛЫ

М.Б. Сапрыгина, У.С. Байсейтова, А.Ш. Шалданбаев, И.О. Оразов

М. Әуезов атындағы Оңтүстік-қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қаласы

**Түйін сөздер:** толқын теңдеуі, шартарапты шекаралық шарттар, тұрлаулы шешім.

**Аннотация.** Толқын теңдеуі ғылым мен техниканың әртүрлі саласында кездеседі, мысалы, гидрологияда, сейсмикада газдар мен сұйықтардың таралуының динамикасын зерттеуде, десек-те, бұл теңдеудің шекаралық есептері аз зерттелген. Шартарапты шекаралық есептерге арналған зерттеулерді жоқтың қасы, десек-те, болады. Бұл еңбекте осы есепті функционалдық әдістермен зерттеуге әрекет жасалған.

**1 Кіріспе.** Гиперболалық теңдеулердің шекаралық есептері аз зерттелген. Мұның бір себебі, оның характеристикалық формасының бір таңбалы болмауында болса керек, дәл осы себепті, вариациялық әдістер-де жарамайды. Тағы да, бір себебі [1], ертеректе француз ғалымы Ж-Адамар өз еңбектерінде гиперболалық теңдеулерге бастапқы есептер қолайлы, екеніне, назар аударған.

Өткен ғасырдың 60- жылдарынан бастап, математикалық физика саласына сызықтық операторлар теориясы қолданыла бастады, оған мұрындық болған К. Фридрихс [2], Дж.Ф. Нейман [3] және С.Л.Соболевтің [4] еңбектері болса керек. Нейманның еңбектерінен бастау алған, М.И.Вишик [5] өзінің әйгілі операторларды ширату теориясын жасады, бұл еңбек Қазақстанда М.Өтелбаев [6] пен Калменовтың [7] еңбектерінде жалғасын тапты. Өкінішке орай, бұл теорияларда гиперболалық теңдеулерде сәтсіздікке ұшырады, оның себебі мынада. Сызықтық операторлар теориясын шекаралық есептерге қолданған сәтте кішік (минимальный) оператор мен ұлық (максимальный) операторларды тұрғызу қажет болады, сонда  $L_0$  кішік оператор болса оның сыңары (сопряженный)  $L_0^*$  ұлық оператор, болады, яғни көп жағдайда (әркез емес)  $L_0 \subset L_0^*$  шарты орындалады. Сонда біздің шекаралық есебіміз осы екі оператордың арасында жатуы керек, яғни

$$L_0 \subset L \subset L_0^*$$

Әлгі, операторларды шыйрату ( кеңіту) теориясында  $L_0$  операторының қайтымды болуы талап етіледі [7,576], яғни шектеулі  $L_0^{-1}$  - кері операторы бар болуы қажет, бұл шарт әркез орындала бермейді , мысалы,

$$L_0 u = u_{xx} - u_{yy}, D(L_0) = C_0^\infty(\Omega),$$

$\Omega = [0,1] \times [0,1]$ , болса, онда

$$u_{xx}(x, y) = \sin m\pi x \cdot \sin n\pi y, n, m = 1, 2, \dots$$

функциялары үшін

$$L_0 u_{mn} = \pi^2(m^2 - n^2)u_{mn}, m, n = 1, 2, \dots$$

теңдіктері орындалары, айдан анық , мұнан, біз  $\lambda = 0$  шамасының  $L_0$ , операторының шексіз еселі меншікті мәні екенін көреміз, яғни  $L_0^{-1}$  операторы жоқ .

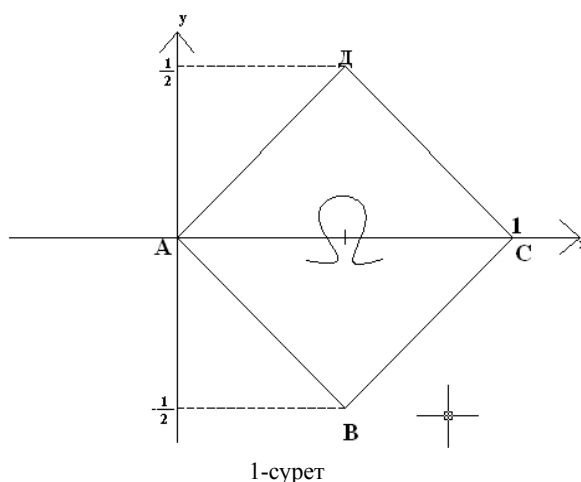
Десек-те, интегралдық кейіп пен Риман – Адамар, және алғы бағалау әдістері бойынша, гиперболалық теңдеулердің біраз шекаралық есептері Т.Ш. Калменовтың еңбектерінде зерттеледі , және оның монографиясында [7] көрініс тапты.Сондай-ақ, [8-15] еңбектер-де осы мәселенің төңірегінде,біздің зерттеуіміз барысында [16-19] еңбектер басшылыққа алынды,зерттеу нысанының кейбір мәселелері [20] еңбекте қарастырылды.

Толқын теңдеуінің бір ерекше қасиеті, оның нақты характеристикаларының болуында, алғы шартты, параллел жатқан екі характеристиканың тек біреуінде ғана беруге болады, екіншісі бос болуы керек, міне осы жай толқын теңдеуіне шартарапты (нелокальный) есепті қоюға негіз болды .

Бұл еңбекте біз толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы (регулярный) шешілетінін көрсетеміз, яғни шешімнің бар екенін, және оның бастапқы шарттарға үздіксіз тәуелді екенін дәлелдейміз.

#### Есептің қойылуы.

$\Omega$  – дегеніміз қабырғалары :AB:  $x + y = 0$  , BC:  $x - y = 1$ , CD:  $x + y = 1$ , DA:  $x - y = 0$  болатын, толқын теңдеуінің характеристикалық төртбұрышы болсын



1-сурет

Міне, осы төртбұрыш ішінде, келесі,

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} = f(x, y), (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$u|_{AB} = \alpha u_{CD}, u|_{AD} = \beta \cdot u|_{BC} \quad (2)$$

шартарапты есепті қарастырамыз , мұндағы,  $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ , яғни,  $\bar{\Omega}$  ішінде үздіксіз функция , ал  $\alpha, \beta$  –нөлден өзгеше комплекс сандар.

Мақаланың мақсаты, жоғарыдағы (1)-(2), шартарапты есептің тұрлаулы шешілетін көрсету.

#### 2.Зерттеу әдістері.

**Анықтама.** Жоғарыдағы (1) теңдеу мен (2 ) шекаралық шарттарды қанағаттандыратын  $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  класына тиісті  $u(x, y)$  функциясын (1)+(2 ) шекаралық есептің тұрлаулы (регулярный) шешімі дейміз.

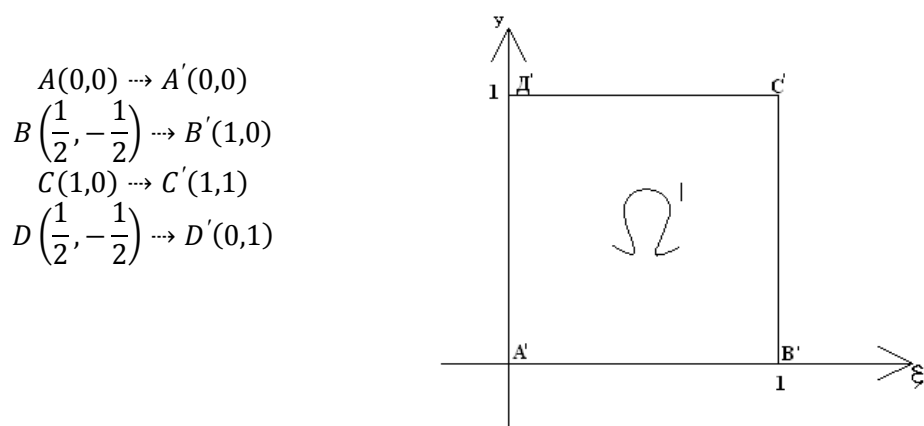
Былай,  $\xi = x - y, \eta = x + y$  алмастыру жасап, (1)+(2) есепті түрлендірсек , мынадай ,

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= u\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) = \hat{u}(\xi, \eta) \\
 u_x &= \hat{u}_\xi \xi_x + \hat{u}_\eta \eta_x = \hat{u}_\xi + \hat{u}_\eta, \quad u_y = \hat{u}_\xi \xi_y + \hat{u}_\eta \eta_y = -\hat{u}_\xi + \hat{u}_\eta, \\
 u_{xx} &= \hat{u}_{\xi\xi} \xi_x^2 + \hat{u}_{\xi\eta} \eta_x^2 + \hat{u}_{\eta\xi} \xi_x \eta_x + \hat{u}_{\eta\eta} \eta_x^2 = \hat{u}_{\xi\xi} + 2\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{u}_{\eta\eta}, \quad u_{yy} \\
 &= -(\hat{u}_{\xi\xi} \xi_y^2 + \hat{u}_{\xi\eta} \eta_y^2) + \hat{u}_{\eta\xi} \xi_y \eta_y + \hat{u}_{\eta\eta} \eta_y^2 = \hat{u}_{\xi\xi} - 2\hat{u}_{\xi\eta} + \hat{u}_{\eta\eta}, \\
 Lu &= u_{xx} - u_{yy} = 4\hat{u}_{\xi\eta} = f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right), \\
 L\hat{u} &= \hat{u}_{\xi\eta} = \frac{1}{4}f\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right) = \hat{f}(\xi, \eta),
 \end{aligned}$$

нәтижеге келеміз.

Енді  $\Omega$  - аймағы мен шекаралық шарттардың қалай өзгертетінін байқайық:

$AB: x + y = 0$ , түзуі  $A'B': \eta = 0$  түзуіне өтеді,  $BC: x - y = 1$  түзуі  $B'C': \xi = 1$  түзуіне,  $CD: x + y = 1$  түзуі  $C'D': \eta = 1$  түзуіне,  $DA: x - y$  түзуі  $D'A': \xi = 0$  түзуіне өтеді,  $\Omega$  аймағы  $\Omega'$  аймағына өтеді.

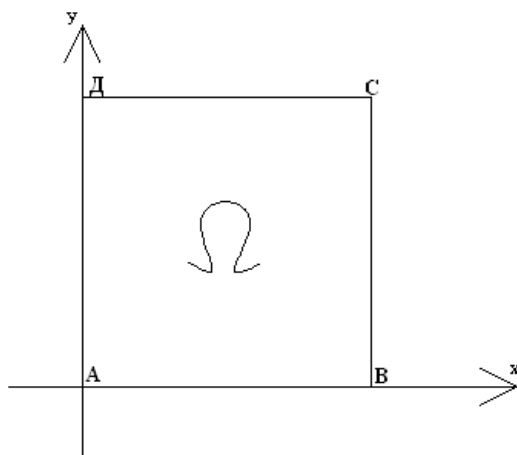


Демек, (1)+(2) есеп, келесі,

$$\begin{aligned}
 L\hat{u} &= \hat{u}_{\xi\eta} = \hat{f}(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega' \quad (1') \\
 \hat{u}|_{A'B'} &= \alpha \hat{u}|_{C'D'}, \quad \hat{u}|_{A'D'} = \beta \cdot \hat{u}|_{B'C'} \quad (2')
 \end{aligned}$$

түрге енеді.

Қолайлы болу үшін, штрихтар мен қалпақтардан арылып, бастапқы белгілеулерге оралайық.



3-сурет

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x, y), (x, y) \in \Omega & (3) \\ u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, u|_{AD} = \beta u|_{BC} & (4) \end{cases}$$

Алдымен, есебімізге сәйкес біртекті есепті зерттейік

$$u_{xy} = 0, u|_{AB} = \alpha u|_{CD}, u|_{AD} = \beta u|_{BC}$$

Мына,  $u_{xy} = 0$  теңдеуін алдымен  $y$ - бойынша ,  
сонан соң,  $x$  бойынша интегралдасақ , мынадай,

$$u_x(x, y) = \varphi(x), u(x, y) = \int \varphi(x) dx + \varphi(y)$$

нәтиже аламыз. Демек,  $u(x, y) = f(x) + g(y)$  , мұндағы ,  $f(x)$  мен  $g(y)$   
кезкелген үздіксіз дифференциалданатын функциялар.

Шекаралық шарттардан

$$f(x) - g(y) = \alpha [f(x) + g(1)], (1 - \alpha)f(x) = \alpha y(1) - g(0).$$

Егер  $\alpha = 1$  болса, онда  $g(1 - g(0)) = 0$  екінші шекаралық шарттан

$$f(x) + g(y) = \beta [f(1) + g(y)], (1 - \beta)g(y) = \beta f(1) - f(0).$$

Онда  $1 - \beta = 0$  ,немесе,  $g(y) = \text{const}$ . Бұл сәттерде біртекті есептің шексіз көп шешімдері бар, сондықтан,  $\alpha \neq 1$ , дәл сол сыйақты себептен  $\beta \neq 1$ . Бұл сәтте, яғни  $(1 - \alpha)(1 - \beta) \neq 0$  сәтінде,  $f = \text{const}$ ,  $g = \text{const}$ .

Онда мына,

$$f(x) + g(0) = \alpha [f(x) + g(1)]$$

теңдіктен

$$[f(x) + g(0)](1 - \alpha) = 0, f(x) + g(0) = f(0) + g(0) = 0$$

боларын көреміз . Сондықтан ,  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$  , сәтінде

$$u(x, y) = f(x) + g(y) = 0.$$

Сонымен ,  $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$  сәтінде жоғарыдағы (3)+(4 ) шекаралық есептің тек бір ғана шешімі болуы мүмкін .

Енді осы (3)+(4 ) шекаралық есептің шешімінің интегралдық кейіпін табайық .

Жоғарыдағы, (3) теңдеуді, алдымен  $y$ , сонан соң,  $x$  бойынша интегралдап, келесі, (6), (7 )

$$u(x, y) = f(x) + g(y) + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (5)$$

формулань аламыз. Бұл өрнекті шекаралық шарттарға апарып қойсақ , келесі ,

$$f(x) + g(0) = \alpha [f(x) + g(1) + \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta],$$

$$f(0) + g(y) = \beta [f(1) + g(y) + \int_0^1 \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta],$$

$$(1 - \alpha)f(x) = \alpha g(1) - g(0) = \alpha \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6)$$

$$(1 - \beta)g(y) = \beta f(1) - f(0) + \beta \int_0^1 \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (7)$$

формулаларға келеміз . Енді (6) формулада  $x = 0$  болсын десек , мына ,

$$(1 - \alpha)f(0) = \alpha g(1) - g(0) \quad (8)$$

теңдікті аламыз.

Демек,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)f(x) &= (1 - \alpha)f(0) + \alpha \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \\ f(x) &= f(0) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (9)$$

Дәл осы жолмен , (7) формуладан ,  $y = 0$  сәтінде  
мына,

$$(1 - \beta)g(0) = \beta f(1) - f(0)$$

формулань аламыз

Демек ,

$$(1 - \beta)g(y) = (1 - \beta)g(0) + \beta \int_0^1 \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta ,$$

$$g(y) = g(0) + \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^1 \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (10)$$

$$g(1) = g(0) + \frac{\beta}{1-\beta} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (11)$$

Енді (11)-ді (8)-ге апарып қойып, мына, (12)

$$(1 - \alpha)f(0) + g(0) = \alpha g(0) + \frac{\alpha\beta}{1 - \beta} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$(1 - \alpha)f(0) + (1 - \alpha)g(0) = \frac{\alpha\beta}{1 - \beta} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

$$f(0) + g(0) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (12)$$

формулаға келеміз . Енді (5) формулаға, кейінгі, табылған (9) ,(10) формулаларды қойып, (12) формуланы ескерсек , онда, мынадай ,

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f(0) + g(0) + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\beta}{1 - \beta} \int_0^1 \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{\beta}{1 - \beta} \int_0^1 \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned}$$

интегралдық кейіпке келеміз .

Тікелей есептеу арқылы , алынған формуланы тексереміз :

$$u_x = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^1 f(\xi, \eta) d\eta + \int_0^y f(x, \eta) d\eta ,$$

$$u_y = \frac{\beta}{1 - \beta} \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi + \int_0^x f(x, \eta) d\xi ,$$

$$u_{xy} = f(x, y);$$

$$\begin{aligned} u|_{AB} &= \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta , \\ u|_{CD} &= \frac{\alpha\beta}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\beta}{1 - \beta} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &\quad + \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{\beta}{1 - \beta} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha} + 1 \right] + \left( 1 + \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta \\ &= \frac{\beta}{(1 - \alpha)(1 - \beta)} \int_0^1 \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta + \frac{1}{1 - \alpha} \int_0^x \int_0^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta . \end{aligned}$$

Демек,  $u|_{AB} = \alpha u|_{CD}$  . Екінші шекаралық шарт дәл осылай тексеріледі .

Енді табылған шешімінің  $W_\alpha'$  нормасын бағалайық .

$$\begin{aligned}
|u(x, y)| &\leq \left| \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \right| \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} + \left| \frac{\alpha}{1-\alpha} \right| \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \left| \frac{\beta}{1-\beta} \right| \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{|\alpha\beta| + |\alpha(1-\beta)| + |\beta(1-\alpha)|}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}}; \\
|u_x| &\leq \left| \frac{\alpha}{1-\alpha} \right| \left( \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^1 |f(x, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{|\alpha| + |1-\alpha|}{|1-\alpha|} \left( \int_0^1 |f(x, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}}, \\
|u_y| &\leq \frac{|\beta| + |1-\beta|}{|1-\beta|} \left( \int_0^1 |f(x, \eta)|^2 d\eta \right)^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}$$

Демек ,

$$\begin{aligned}
\|u\|_1^2 &= \|u\|_{w_2'}^2 = \|u\|_{L_2}^2 + \|u_x\|_{L_2}^2 + \|u_y\|_{L_2}^2 \\
&\leq \left\{ \left\| \frac{|\alpha\beta| + |\alpha(1-\beta)| + |\beta(1-\alpha)|}{|(1-\alpha)(1-\beta)|} \right\|^2 + \left\| \frac{|\alpha| + |1-\alpha|}{|1-\alpha|} \right\|^2 + \left\| \frac{|\beta| + |1-\beta|}{|1-\beta|} \right\|^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Сонымен,

$$\|u\|_1 \leq K(\alpha, \beta) \|f\|_0,$$

мұндағы ,

$$|u|_1 = \sqrt{\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u_y\|_0^2}.$$

$$\|f\|_0 = \|f\|_{L_2} = \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(\xi, \eta)|^2 d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}},$$

$K(\alpha, \beta)$  -дегеніміз  $\alpha$  мен  $\beta$  -ға тәуелді, әйтеуір бір, тұрақты шама. Біз, келесі, теореманы дәлелдедік.

### 3. Алынған нәтижелер.

**Теорема.** Егер

$$(1-\alpha)(1-\beta) \neq 0 \quad (13)$$

болса, онда кезкелген  $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$  үшін, мына,

$$\begin{aligned}
u_{xy} &= f(x, y), (x, y) \in \Omega \\
u|_{AB} &= \alpha u|_{CD}, u|_{AD} = \beta u|_{BC}
\end{aligned}$$

шекаралық есептің бірегей шешімі бар , ол  $C_{1,1}^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  класына тиісті және, мына,

$$\|u\|_1 \leq K \|f\|_0 \quad (14)$$

теңсіздікті қанағаттандырады , мұндағы,  $\|\cdot\|_1$  - Соболевтің нормасы ,  $\|\cdot\|_0$  -кәдімгі  $L_2$  норма, ал  $K$  - дегеніміз тек  $\alpha$  мен  $\beta$  -ға тәуелді тұрақты шама , ол  $u$  мен  $f$ -қа тәуелсіз.

### 4.Талқысы.

Жоғарыдағы (13) шарт есепті шешуге жеткілікті екен,сонымен бірге соңғы (14) теңсіздіктен бұл есептің әлді шешілетіні байқалады,шешімнің бірегейлігі-де ,айдан анық көрініп тұр.Демек, кері оператор бар және ол шектеулі.Егерде Реллихтың [8], немесе, Соболевтің теоремасын ескерсек,онда бұл кері оператордың әсіре үзіксіз екенін көреміз,демек, оның нөлден өзгеше спектрі тек меншікті мәндерден құралады,бірақ ,олардың болмауы да мүмкін,сондықтан, арнайы зерттеуді керек етеді.Біз бұл мәселелерге кейінірек оралмақпыз.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений частными производным. –М.: Наука, 1978. –352с.
- [2] Friedrichs K. O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations, Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954). 345-392.
- [3] I. Von Neumahn . Allgemaine Eigenwertltheorie Hermit - esher funktional Operatoren, Math, 102, 1929, p.49-131.
- [4] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
- [5] Вишик М.И. Об общих краевых задачах для эллиптических уравнений, дифференциальных уравнений. Труды ММО, 1989, 1952, т.1, 152 с.
- [6] Отелбаев М., Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе, Дифф. уравнения, 1981. Т.А., №5, с. 873-886 .
- [7] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993, 327с.
- [8] Кальменов Т.Ш. О спектре одной сопряженной задачи для волнового уравнения. Весник А.Н Каз .1982, №2, с.63-66.
- [9] Кальменов Т.Ш. Спектр краевых задачи со смещением для волнового уравнения , Диффенц. уравнения. 1983, т19, №1, с.75-78.
- [10] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольнерровой задаче для гиперболического уравнения. Известия АН Каз ССР, сер. физ-математ, 1988, №5, с.13-16.
- [11] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1981, т. 17, №6, с. 1105-1121.
- [12] Садыбеков М.И. О задаче Дирихле для для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. Функцион. анализ и по приложения Алма-Ата. КазГУ, 1988, т 17, №6, с.61-70.
- [13] Садыбеков М.И., Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, 1990, т.26, №1, с.60-65.
- [14] Мелдебекова С., Шалданбаев А.Ш. О регулярной разрешимости одной нелокальной краевой задачи волнового уравнения. Наука и образования ЮК , 2005 №6(46), с.105-109.
- [15] Нахушев А.М. Об одном классе линейных уравнений задач для гиперболического и смешного типов уравнении второго порядка. Нальчик, Эльбурс .1992, 155с.
- [16] Мизохата С.Теория уравнений с частным производными. М. Мир, 1977, с. 504.
- [17] Brislow C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, 1988, v.104 , №4, P.1181-1190.
- [18] Лидский В.Б. Несамосопряженные операторы имеющие след, Доклады А.Н ССР, 1959, т. 105, №3. P.485-488.
- [19] Нерсисян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера, Доклады А.Н ССР, 1964, т. 155, №5, P.1049-1051.
- [20] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных- некорректныхначально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Acdemic Pyblishing. http; dob. d-nb. Dl. Emailinf@lappublishing com, 2011, 193с.

REFERENCES

- [1] Hadamard Ge. Cauchy problem for the linear equations private to derivatives. M, Science, **1978**. 352p.
- [2] Friedrichs K. O Symmetric. hyperbolic of Liner differential equations, Comm. Pure Apple 7 Mash., 7(1954). 345-392.
- [3] I. Von Neumahn. Allgemaine Eigenwertltheorie Hermit - esher funktional Operatoren, Math, 102, **1929**. p.49-131.
- [4] Sobolev S. L. Some applications of the functional analysis in mathematical physics. M, Science, **1988**.
- [5] Vishik M. I. About the general regional tasks for the elliptic equations, the differential equations, Works MMO, **1989**, 1952, V.1, 152p.
- [6] Otelbayev M. Kalmenov T. Sh. About regular regional tasks for Lavrentyev's equation - Bitsadze, Diff. equations, **1981**, T.A., No. 5, p. 873-886.
- [7] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type, Shymkent:gylym, **1993**, 327p.
- [8] Kalmenov T.Sh. About a range of one interfaced task for the wave equation, Vesnik A.N Kaz. **1982**, No. 2, page 63-66.
- [9] Kalmenov T.Sh. The spectrum of the boundary value problem with shift for the wave equation, Diffents. **1983** equation, V.19, №1, p.75-78.
- [10] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About not local vulnerable task for the hyperbolic equation, AN News Kaz SSR, ser. physical-mathemat, **1988**, No. 5, page 13-16.
- [11] Kalmenov T.Sh. About regular regional tasks for the wave equation, Diffents. equations. **1981**, V 17, No. 6, page 1105-1121.
- [12] Sadybekov M. About Dirichlet's task for the wave equation, Diffents. equations. Function. analysis and on appendices Alma-Ata Kaz. GU, **1988**, V 17, No. 6, page 61-70.
- [13] Sadybekov M., Kalmenov T.Sh. About Dirichlet's task and nonlocal regional tasks for the wave equation, Diffents. equations, **1990**, V.26, No. 1, page 60-65.
- [14] Meldebekova S., Shaldanbayev A.Sh. About regular resolvability of one not local regional problem of the wave equation, Science and formations of SK, **2005** No. 6(46), page 105-109.
- [15] Nakhushev A.M. About one class of the linear balanced tasks for hyperbolic and ridiculous types the equation of the second order. Nalchikh, Elbrus.**1992**, 155p.
- [16] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives, M. Mir, **1977**, page 504.
- [17] Brislow C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, **1988**, v.104, No. 4, P.1181-1190.

- [18] Lidsky V.B. Nonselfadjoint operators have trail Reports of the USSR, **1959**, Vol. 105, №3, P.485-488.  
[19] Nersesyan A.B. To the theory of the integrated equations like Voltaire, Reports of A.N Soviet Socialist Republic, **1964**, t. 155, No. 5, P.1049-1051.  
[20] Shaldanbaev A.Sh. Spectral Decomposition of correct-incorrect initial boundary value problems for some classes of differential equations, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Academic Publishing. [http; dob. d-nb. Dl. Emailinfa @ lappyblishing com](http://dob.d-nb.Dl.Emailinfa@lappyblishing.com), **2011**. 193p.

УДК 517.956.32

## О РЕГУЛЯРНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М.Б. Сапрыгина, У.С. Байсейтова, А.Ш. Шалданбаев, И.О. Оразов

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

**Ключевые слова:** волновое уравнение, нелокальные краевые условия, регулярная разрешимость.

**Аннотация.** Волновые уравнения встречаются в различных отраслях науки и техники, например, гидрологии, сейсмологии и при изучении динамики распространения волн в жидкости и газе. Тем не менее, краевые задачи этого уравнения мало изучены. Работ, посвященных нелокальным задачам, очень мало. В данной работе предпринята попытка изучения нелокальной задачи функциональным методом.

Поступила 15.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 55–60

## INVESTIGATION OF ELASTIC SCATTERING OF $^3\text{He}$ IONS FROM $^{13}\text{C}$ NUCLEI AT 50 AND 60 MeV IN OPTICAL AND FOLDING MODELS

N. Burtebayev<sup>1</sup>, Zh.K. Kerimkulov<sup>1</sup>, A.S. Demyanova<sup>2</sup>,  
A.N. Danilov<sup>2</sup>, D.M. Janseitov<sup>3</sup>, T.K. Zholdybayev<sup>1</sup>, D.K. Alimov<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan,

<sup>2</sup>NRC Kurchatov Institute, Moscow, Russia,

<sup>3</sup>ENU, Astana, Kazakhstan,

<sup>4</sup>KazNU, Almaty, Kazakhstan,

e-mail: [janseit.daniar@gmail.com](mailto:janseit.daniar@gmail.com)

**Key words:** elastic scattering, optic model, folding potential, normalization coefficients, FRESCO.

**Abstract.** Processes of elastic scattering of  $^3\text{He}$  ions from  $^{13}\text{C}$  nuclei at energies 50 and 60 MeV were studied in this paper. The differential cross sections were measured at laboratory system in the range  $10^0$ - $170^0$ . Analysis of elastic scattering was made within optical model. Both microscopic double folding potentials and phenomenological potentials were used for real part of complex nuclear potential. Imaginary part had the shape of phenomenological surface Woods-Saxon potential. The calculated theoretical cross sections are in good agreement with experimental data.

УДК 539.171

## ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ УПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ИОНОВ $^3\text{He}$ НА ЯДРАХ $^{13}\text{C}$ ПРИ ЭНЕРГИЯХ 50 И 60 МэВ В РАМКАХ ОПТИЧЕСКОГО И ФОЛДИНГ МОДЕЛЕЙ

Н. Буртебаев<sup>1</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1</sup>, А.С. Демьянова<sup>2</sup>,  
А.Н. Данилов<sup>2</sup>, Д.М. Джансейтов<sup>3</sup>, Т.К. Жолдыбаев<sup>1</sup>, Д.К. Алимов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Институт ядерной физики, Алматы, Казахстан

<sup>2</sup>НИЦ Курчатовский Институт, Москва, Россия

<sup>3</sup>ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

<sup>4</sup>КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** упругое рассеяние, оптическая модель, фолдинг потенциал, нормировочные коэффициенты, FRESKO.

**Аннотация.** В данной работе исследованы процессы упругого рассеяния ионов  $^3\text{He}$  при энергиях 50 и 60 МэВ. Дифференциальные сечения измерены в диапазоне углов  $10^0$ - $170^0$  в лабораторной системе координат. Анализ упругого рассеяния был проведен в рамках оптической модели. В расчетах для действительной части комплексного ядерного потенциала были использованы как микроскопические потенциалы двойной свертки, так и феноменологические потенциалы. Мнимая часть имела форму феноменологического поверхностного Вудс-Саксонского потенциала. Теоретически рассчитанные сечения хорошо согласуются с экспериментальными данными.

**Введение.** Рассеяние нуклонов и сложных ядерных частиц (дейтроны,  $\alpha$ -частицы, тяжелые ионы) на ядрах является важным источником информации о ядерной структуре [1]. Но параметры оптического потенциала (ОП) взаимодействия частиц с легкими ядрами при низких и средних энергиях, извлекаемые из анализа дифференциальных сечений упругого рассеяния в рамках оптической модели (ОМ), подвержены неоднозначностям и требуют надежных оценок.

С целью получения достоверной информации о потенциале ядерного взаимодействия, полученные на циклотроне ИЯФ РК экспериментальные данные [2] по рассеянию ионов  $^3\text{He}$  с энергией 50,5 и 60 МэВ на ядрах  $^{13}\text{C}$  анализируются как в рамках стандартной оптической модели с заданием потенциала в параметризованной форме и нахождением его параметров из сравнения теоретических сечений с экспериментальными, так и в рамках микроскопической модели, в которой потенциалы строятся на основе эффективных нуклон-нуклонных сил [3].

В данной работе проводится сопоставительный анализ упругого рассеяния ионов  $^3\text{He}$  с ядрами  $^{13}\text{C}$  в рамках оптической и фолдинг модели.

**Методика и результаты эксперимента.** Экспериментальные угловые распределения упругого рассеяния ионов  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{13}\text{C}$  измерены на выведенных пучках изохронного циклотрона У-150М Института ядерной физики (г. Алматы, Казахстан) при энергиях  $E_h = 50$  и 60 МэВ [2].

В эксперименте использовалась самонесущая мишень углеродной пленки толщиной  $1,2 \text{ мг/см}^2$  обогащенного изотопом  $^{13}\text{C}$  до 86%. Регистрация и идентификация рассеянных продуктов реакции регистрировались  $\Delta E$ -Е телескопом кремниевых полупроводниковых детекторов, чьи толщины для  $\Delta E$  телескопа 100 мкм, для Е телескопа 2 мм соответственно. Дифференциальные сечения упругого рассеяния были измерены в лабораторной системе координат в диапазоне  $10^0$ - $170^0$  для  $E_h = 50$  МэВ и  $10^0$ - $150^0$  для  $E_h = 60$  МэВ.

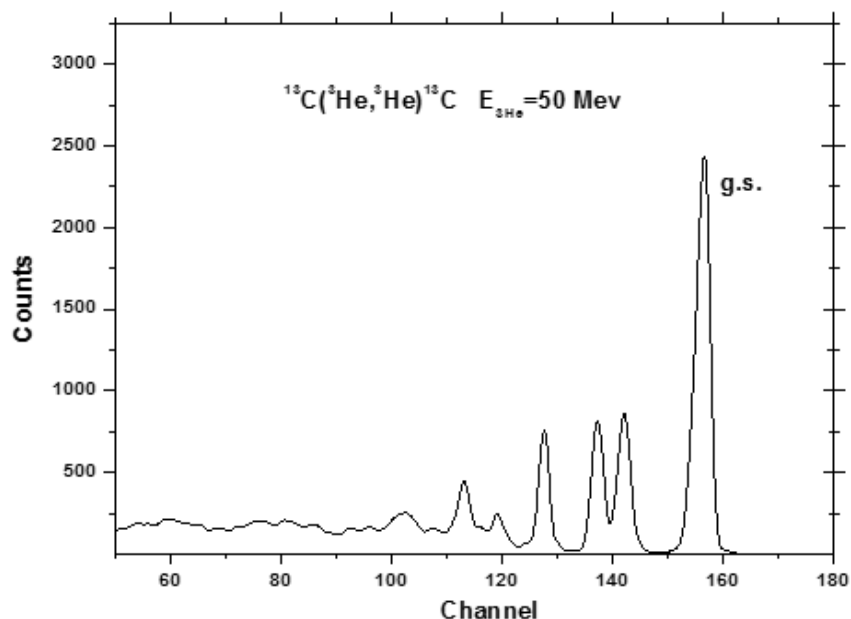


Рисунок 1 – Типичный спектр рассеянных ионов гелия на ядрах углерода при  $E = 50,5$  МэВ ( $42^\circ$ )

**Анализ экспериментальных данных по оптической модели ядра.** Анализ экспериментальных данных проводился в несколько этапов. На первом этапе данные по упругому рассеянию анализировались в рамках стандартной оптической модели ядра, в которой влияние неупругих каналов учитывается феноменологическим введением мнимой поглощающей части в потенциал взаимодействия между сталкивающимися ядрами. Расчеты проводились с центральным потенциалом без спин-орбитального взаимодействия:

$$U(r) = -Vf(r) - i4a_w W_d \frac{df_w(r)}{dr} + V_{so} \left( \frac{\hbar}{m_\pi c} \right)^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} f_{so}(r) (L\sigma) + V_C(r) \quad (1)$$

Первые два члена отвечают за ядерное взаимодействие с поверхностным поглощением. Радиальная зависимость  $f_i(r)$  описывается Вудс-Саксоновским [4] формфактором с радиусом  $r_i$  и диффузностью  $a_i$  ( $i = V, W$ ):

$$f_i = \left[ 1 + \exp((r - r_i A^{1/3}) / a_i) \right]^{-1} \quad (2)$$

$V_C$  – кулоновский потенциал равномерно заряженной сферы с радиусом  $R_C$ . При  $r > R_C$ , кулоновское взаимодействие между двумя ядрами равно

$$V_C = Z_p Z_t e^2 / r \quad (3)$$

где  $Z_p, Z_t$  – заряды налетающей частицы (p) и мишени (t). Во всех наших расчетах использовалось:  $R_C = r_C A_t^{1/3}$  с  $r_C = 1.3 \text{ фм}$ .

Учитывая компактные размеры налетающей частицы, мы ограничились поверхностным типом потенциала поглощения для мнимой части. Параметры оптических потенциалов (ОП) подбирались таким образом, чтобы достичь наилучшего согласия между теоретическими и экспериментальными угловыми распределениями.

Расчеты выполнены по программе FRESKO [5]. Значения оптического потенциала представлены в таблице 1. Также рассчитаны объёмные интегралы для действительной части ( $J_V$ ) и мнимой части ( $J_D$ ) оптического потенциала при заданных энергиях.

Таблица 1 - Параметры оптического потенциала

|                               | $E_b$<br>(МэВ) | $V_0$<br>(МэВ) | $r_0$<br>(фм) | $a_0$<br>(фм) | $W_d$<br>(МэВ) | $r_w$<br>(фм) | $a_0$<br>(фм) | $J_V$<br>(МэВфм <sup>3</sup> ) | $J_D$<br>(МэВфм <sup>3</sup> ) |
|-------------------------------|----------------|----------------|---------------|---------------|----------------|---------------|---------------|--------------------------------|--------------------------------|
| $^3\text{He} + ^{13}\text{C}$ | 50.5           | 111,04         | 1,150         | 0,737         | 13,30          | 1,378         | 0,80          | 423,1                          | 150,3                          |
|                               | 60.0           | 108,48         | 1,150         | 0,726         | 15,32          | 1,186         | 0,80          | 410,633                        | 108,4                          |

**Фолдинг модель.** Для ограничения дискретной неоднозначности оптического потенциала дополнительно был проведен анализ данных в рамках фолдинг модели. Потенциал двойной свертки (фолдинг потенциал) рассчитывается с учетом распределения ядерной материи как налетающего ядра, так и ядра мишени с использованием эффективного потенциала нуклон-нуклонного ( $v_{NN}$ ) взаимодействия. Таким образом, фолдинг потенциал представляется в виде:

$$V_{DF}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}_1 \int d\mathbf{r}_2 \rho_p(\mathbf{r}_1) \rho_t(\mathbf{r}_2) v_{NN}(\mathbf{r}_{12}) \quad (4)$$

где  $\rho_p(\mathbf{r}_1)$  и  $\rho_t(\mathbf{r}_2)$  – плотности ядерной материи налетающего ядра и ядра мишени, соответственно.

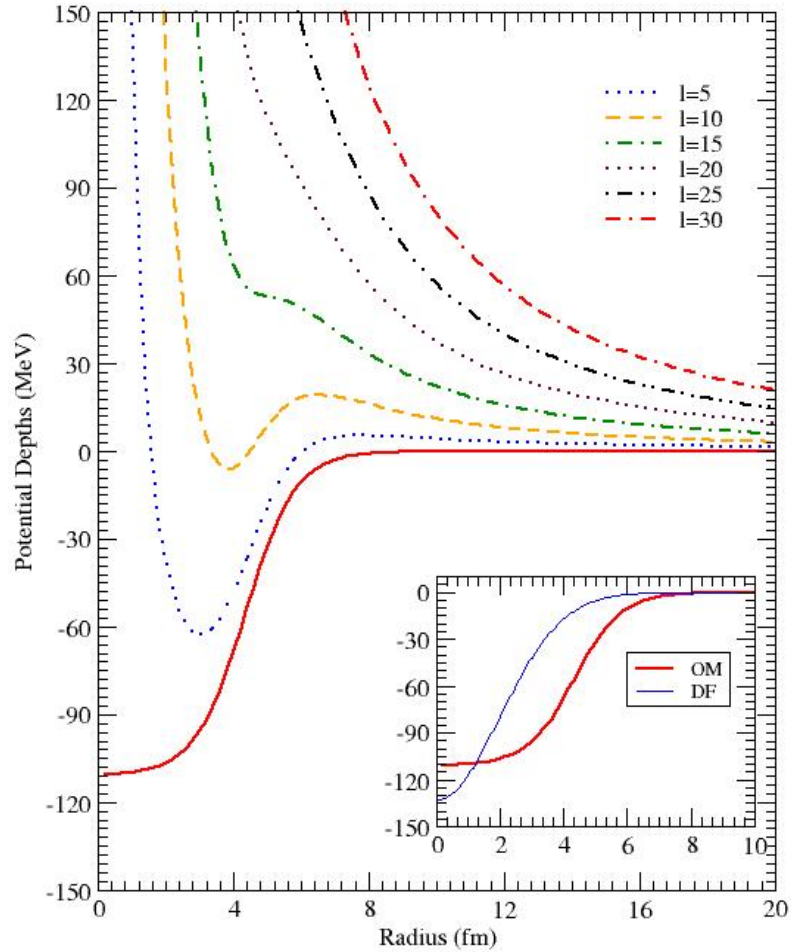


Рисунок 2 – Потенциал взаимодействия ионов  $^3\text{He}$  с ядрами  $^{13}\text{C}$  для различных значений орбитального момента квантового числа  $l$

Гауссово распределение плотности для обоих ядер определяется как

$$\rho(r) = \rho_0 \exp(-\beta r^2) \quad (5)$$

где  $\beta$  корректируется таким образом, чтобы воспроизвести экспериментальное значение для среднеквадратичного радиуса ядер  $^{13}\text{C}=2.44$  фм и  $^3\text{He}=1.91$  фм [6]. Значения  $\rho_0$  могут быть получены из условия нормировки:

$$\int \rho(r) r^2 dr = \frac{A}{4\pi} \quad (6)$$

где  $A$  массовое число. В расчетах эффективное нуклон-нуклонное ( $v_{NN}$ ) взаимодействие бралось в форме МЗУ-взаимодействия, заданным как

$$v_{NN}(r) = 7999 \frac{\exp(-4r)}{4r} - 2134 \frac{\exp(-2.5r)}{2.5r} + J_{00}(E) \delta(r) \text{ MeV} \quad (7)$$

где

$$J_{00}(E) = 276[1 - 0.005 E_{Lab}/A_p] \text{ MeV fm}^3$$

На втором этапе оптимальное согласие теории с экспериментом достигалось варьированием параметров мнимой части и нормировочного коэффициента "N" микроскопической вещественной части, найденной из анализа в рамках оптической модели (таблица 1). Отличие N от единицы может свидетельствовать о вкладе членов второго порядка по эффективным силам в реальную часть оптического потенциала. Анализ проводился с использованием программы FRESKO [5]. Найденные параметры фолдинг потенциала и значения N представлены в таблице 2. Также в таблице 2, представлены рассчитанные объёмные интегралы для действительной части ( $J_V$ ) с соответствующими нормировочными коэффициентами для фолдинг-потенциала. Сумма ядерной, кулоновской и центробежной составляющих фолдинг и феноменологического Вудс-Саксоновского потенциалов для различных орбитальных моментов представлена на рисунке 2. На рисунке 3 показано сравнение экспериментальных сечений с сечениями, вычисленными в рамках оптической модели ядра и фолдинг модели.

Таблица 2 - Параметры фолдинг-потенциала и нормировочные коэффициенты

|                             | $E_b$ (МэВ) | $W_d$ (МэВ) | $r_W$ (фм) | $a_W$ (фм) | $V_{so}$ (МэВ) | $r_{so}$ (фм) | $a_{so}$ (фм) | $J_V$ (МэВфм <sup>3</sup> ) | $N_r$ |
|-----------------------------|-------------|-------------|------------|------------|----------------|---------------|---------------|-----------------------------|-------|
| $^3\text{He}+^{13}\text{C}$ | 50.5        | 13,30       | 1,378      | 0,80       | 2              | 1,07          | 0,66          | 410,66                      | 1,03  |
|                             | 60.0        | 15,32       | 1,186      | 0,80       | 2              | 1,07          | 0,66          | 433,2                       | 1,1   |

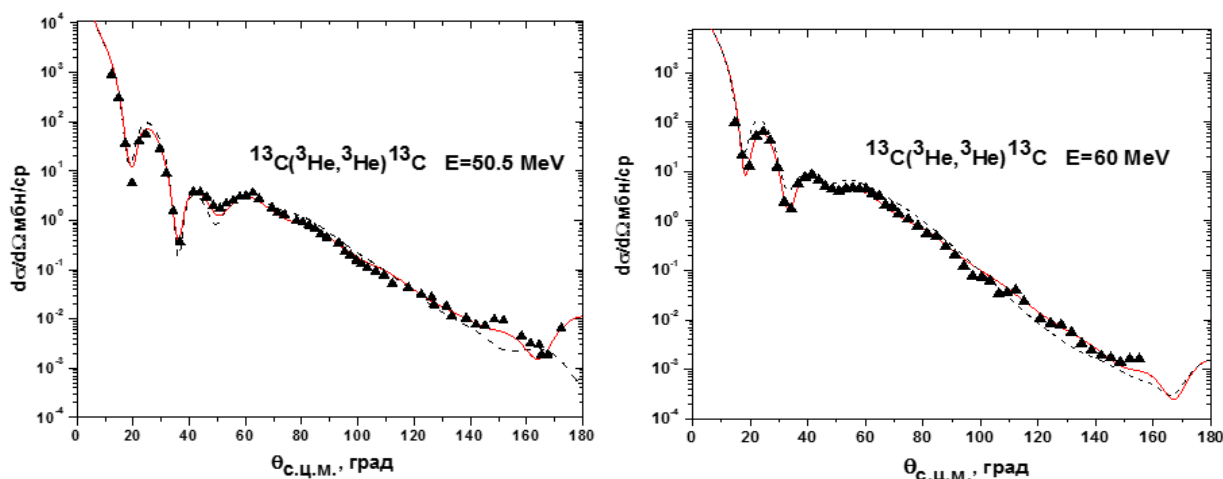


Рисунок 3 – Сравнение экспериментальных и теоретических дифференциальных сечений упругого рассеяния ионов  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{13}\text{C}$  при энергиях 50,5 и 60 МэВ. Треугольники – экспериментальные данные, сплошная линия – сечения, рассчитанные в рамках оптической модели ядра, пунктирная линия – сечения, рассчитанные в рамках фолдинг модели

**Вывод.** Проведен анализ полученных данных в рамках стандартной оптической модели ядра. В рамках модели двойной свертки на основе полного МЗУ-эффективного взаимодействия построены потенциалы для ионов  $^3\text{He}$ , взаимодействующих при энергиях 50,5 и 60 МэВ с ядрами  $^{13}\text{C}$ . Проведен анализ угловых распределений упругого рассеяния ионов  $^3\text{He}$  на ядрах  $^{13}\text{C}$  с использованием потенциалов двойной свертки. Получено удовлетворительное описание экспериментальных данных с нормировочными коэффициентами для вещественной части оптического потенциала. Показано, что оба потенциала коррелируют между собой и дают схожее описание экспериментальных данных. Полученные потенциалы будут полезны при исследовании дифференциальных сечений реакций с участием исследуемых ядер.

Работа была поддержана грантом МОН РК №1460 ГФ4.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Satchler G.R., Direct Nuclear Reactions. N.Y.- Oxford: Oxford Ulliv. Press, 1983.
- [2] Burtbaev N., Duisebaev A., Duisebaev B. A., and Sakuta S. B. Elastic Scattering of  $^3\text{He}$  Nuclei on  $^{13}\text{C}$  Nuclei at 50 and 60 MeV and  $V$ - $W$  Ambiguity in Choosing Optical Potentials // Physics of Atomic Nuclei **63**, 4 (2000).

- [3] Satchler G.R., Love W.G. Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering // Phys. Rep. **55** (1979).
- [4] Ходгсон П.Е. Оптическая модель упругого рассеяния // М.: Атомиздат, 1966. 232 с.
- [5] Thompson I.J. Coupled reaction channels calculations in nuclear physics // Comput. Phys. Rep. **7** (1988)
- [6] De Vries H., De Jager C.W. and De Vries C. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // Atomic Data and Nucl. Data Tables **36** 495 (1987).

#### REFERENCES

- [1] Satchler G.R. Direct Nuclear Reactions. N.Y.- Oxford: Oxford Univ. Press, **1983**.
- [2] Burtbaev N., Duisebaev A., Duisebaev B. A., and Sakuta S. B. Elastic Scattering of  $^3\text{He}$  Nuclei on  $^{13}\text{C}$  Nuclei at 50 and 60 MeV and  $V$ - $W$  Ambiguity in Choosing Optical Potentials // Physics of Atomic Nuclei **63**, 4 (2000).
- [3] Satchler G.R., Love W.G. Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering // Phys. Rep. **55** (1979).
- [4] Hodgson P.E. The Optical Model of Elastic Scattering / – Oxford: Clarendon Press, **1963** – VIII, p.211.
- [5] Thompson I.J. Coupled reaction channels calculations in nuclear physics // Comput. Phys. Rep. **7** (1988)
- [6] De Vries H., De Jager C.W. and De Vries C. Nuclear charge-density-distribution parameters from elastic electron scattering // Atomic Data and Nucl. Data Tables **36** 495 (1987).

### ОПТИКАЛЫҚ ЖӘНЕ ФОЛДИНГ МОДЕЛЬДЕР АЯСЫНДА 50 ЖӘНЕ 60 МЭВ ЭНЕРГИЯЛАРДА $^3\text{He}$ ИОНДАРЫНЫҢ $^{13}\text{C}$ ЯДРОЛАРЫНДА СЕРПІМДІ ШАШЫРАУ ПРОЦЕССТЕРІН ЗЕРТТЕУ

Н. Буртебаев<sup>1</sup>, Ж.К. Керимкулов<sup>1</sup>, А.С. Демьянова<sup>2</sup>, А.Н. Данилов<sup>2</sup>,  
Д.М. Джансейтов<sup>3</sup>, Т.К. Жолдыбаев<sup>1</sup>, Д.К. Алимов<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Ядролық Физика Институты, Алматы, Қазақстан,

<sup>2</sup>ҰЗО Курчатов Институты, Мәскеу, Ресей,

<sup>3</sup>Л.Н. Гумилев атындағы ЕҰУ, Астана, Қазақстан,

<sup>4</sup>әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Алматы, Қазақстан

**Түйін сөздер:** серпімді шашырау, оптикалық модель, фолдинг потенциал, нормалау коэффициенттері, FRESKO.

**Аннотация.** Осы жұмыста 50 және 60 МэВ энергияларда  $^3\text{He}$  иондарының серпімді шашырау процесстері зерттелген. Дифференциалдық қималар  $10^0$ - $170^0$  арасында зертханалардың координаттар жүйесінде өлшенді. Серпімді шашырау оптикалық модель аясында талданды.

Есептеулерде комплексті ядролық потенциалдың нақты бөлігі үшін микроскопиялық потенциалымен (фолдинг потенциал) қоса, феноменологиялық потенциалдар да қолданылды. Потенциалдың жорамал бөлігі үшін Вудс-Саксон потенциалының беттік феноменологиялық түрі қолданылды. Теориялық есептелген қималар, тәжірибелік мәліметтермен жақсы үйлеседі.

Поступила 15.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 61–71

**COEFFICIENT CONDITIONS FOR THE UNIQUE SOLVABILITY  
OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM  
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH IMPULSE EFFECTS****D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova**

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: [dzhumabaev@list.ru](mailto:dzhumabaev@list.ru), [bakirova1974@mail.ru](mailto:bakirova1974@mail.ru)**Key words:** boundary value problem, solvability, integro-differential equation, impulse effect.

**Abstract.** A linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel subject to impulse effects at the fixed points of interval is investigated. The interval is divided on parts with the points including the points of impulse effects. The values of solution at the left points of subintervals are introduced as additional parameters, and the origin boundary value problem is reduced to the equivalent multipoint boundary value problem with parameters. At the fixed values of parameters, we have the special Cauchy problem for system of integro-differential equations. Applying  $\nu$  times substitutions in an equivalent system of integral equations, it is obtained the representation for the solution of special Cauchy problem. Using the degenerate form of integral term's kernel in origin equation, it is composed the system of linear algebraic equations permitting us to solve the special Cauchy problem. If the matrix of composed system is invertible, then this partition is called  $\nu$  regular partition of interval. It is offered an algorithm for finding the solution of the multipoint boundary value problem with parameters. Every step of the algorithm consists of two points. In the first point of the algorithm a system of linear algebraic equations with respect to introduced parameters is solved. In the second point of algorithm the solution of special Cauchy problem for systems of integro-differential equations with the parameters is found. The conditions of realization and convergence of the proposed algorithm, providing the unique solvability of the boundary value problem are obtained. In terms of the initial data necessary and sufficient conditions for the unique solvability of linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel subject to impulse effects are established. The algorithm and theorem on unique solvability of the considered problem do not require the construction of the fundamental matrix of the differential part.

Работа выполнена в рамках проекта №3362/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан

УДК 517.624.3

**КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ПРИЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЙ  
РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ФРЕДГОЛЬМАС ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ****Д.С. Джумабаев, Э.А. Бакирова**

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** краевая задача, разрешимость, интегро-дифференциальное уравнение, импульсное воздействие.

**Аннотация.** Исследуется линейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром, подверженная импульсным воздействиям в

фиксированных точках отрезка. Отрезок, где рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения разбиваются на части точками, включающими точки импульсных воздействий, вводятся дополнительные параметры как значения решения в начальных точках подинтервалов и исходная задача сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами. При фиксированных значениях параметров возникает специальная задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений. Применяя  $V$  раз подстановки в эквивалентной системе интегральных уравнений получено представление решения специальной задачи Коши. Используя вырожденность ядра интегрального члена исходного уравнения построена система линейных алгебраических уравнений, позволяющая найти решения специальной задачи Коши. Если матрица построенной системы обратима, то разбиение называется  $V$  регулярным разбиением интервала. Предлагается алгоритм нахождения решения многоточечной краевой задачи с параметрами. Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов. В первом пункте алгоритма решается система линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Во втором пункте алгоритма решается специальная задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений при найденных значениях параметров. Получены условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритмов, обеспечивающие однозначную разрешимость рассматриваемой краевой задачи. В терминах исходных данных установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром, подверженному импульсным воздействиям. Алгоритм и теорема об однозначной разрешимости исследуемой задачи не требует построения фундаментальной матрицы дифференциальной части.

На отрезке  $[0, T]$  рассматривается линейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром, подверженному импульсным воздействиям

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^l \int_0^T \varphi_k(t) \psi_k(s) x(s) ds + f(t), \quad x \in R^n, \quad t \in (0, T) \setminus \{\theta_j, j = \overline{1, m}\}, \quad (1)$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_m < T = \theta_{m+1}),$$

$$B_0 x(0) + C_0 x(T) = d_0, \quad d_0 \in R^n, \quad (2)$$

$$B_j \lim_{t \rightarrow \theta_j - 0} x(t) + C_j \lim_{t \rightarrow \theta_j + 0} x(t) = d_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad d_j \in R^n, \quad (3)$$

где  $(n \times n)$ -матрицы  $A(t)$ ,  $\varphi_k(t)$ ,  $\psi_k(s)$ ,  $k = \overline{1, N}$  непрерывны на  $[0, T]$ ,  $n$ -вектор-функция  $f(t)$  кусочно непрерывна на  $[0, T]$  с возможными разрывами в точках  $t = \theta_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями находят широкое применение в задачах приложения. Вопросы разрешимости краевых задач для этих уравнений различными методами исследованы в работах [1-11]

Краевые задачи для уравнения (1), когда нет импульсных воздействий, исследовались в работах [12-18]. Условия импульсного воздействия (3) существенно влияют на качественные свойства краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

Необходимые и достаточные условия разрешимости и однозначной разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсными воздействиями установлены в [19]. Эти условия сформулированы в терминах фундаментальной матрицы дифференциальной части уравнения.

Как известно, для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами построить фундаментальную матрицу, как правило, не удастся. Поэтому в данной работе критерии однозначной разрешимости получен в терминах исходных данных задачи (1)-(3) без использования фундаментальной матрицы дифференциальной части.

Через  $PC([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$  обозначим пространство кусочно-непрерывных функций  $x : [0, T] \rightarrow R^n$ , непрерывных на  $[\theta_{p-1}, \theta_p)$ ,  $p = \overline{1, m+1}$ , с нормой  $\|x\|_1 = \sup_{t \in [0, T]} \|x(t)\|$ .

Решением задачи (1)–(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на  $(0, T)$  функция  $x(t) \in PC([0, T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$ , удовлетворяющая на  $(0, T) \setminus \{\theta_j\}$  интегро-дифференциальному уравнению (1), а также условиям (2), (3).

Приведем схему метода параметризации [20] применительно к задаче (1)–(3). Разбиение интервала  $[0, T]$  на  $N$  частей  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ , где множество точек разбиения  $t_p, p = \overline{1, N-1}$  содержит точки импульсных воздействий  $\theta_j, j = \overline{1, m}$ , обозначим через  $\Delta_N(\theta)$ .

Тогда для каждого разбиения  $\Delta_N(\theta)$  существуют взаимно однозначные функции

$$r^+ : (1, 2, \dots, m) \rightarrow (1, 2, \dots, N-1),$$

$$r^- : \{(1, 2, \dots, N-1) \setminus (r^+(1), r^+(2), \dots, r^+(m))\} \rightarrow (1, 2, \dots, N-1)$$

такие, что  $t_{r^+(j)} = \theta_j$  и  $t_{r^-(s)} \neq \theta_j$  при всех  $j = \overline{1, m}, s = \overline{1, N-m-1}$ .

Сужение функции  $x(t)$  на  $r$ -ый интервал  $[t_{r-1}, t_r)$  обозначим через  $x_r(t)$ , т.е.  $x_r(t) = x(t)$  при  $t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}$ .

Через  $C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$  обозначим пространство систем функций  $x[t] = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ , где функции  $x_r, r = \overline{1, N}$  непрерывны на  $[t_{r-1}, t_r)$  и имеют конечные левосторонние пределы  $\lim_{t \rightarrow t_r-0} x_r(t)$  при всех  $r = \overline{1, N}$ , с нормой  $\|x[\cdot]\|_2 = \max_{r=\overline{1, N}} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$ .

Введем дополнительные параметры  $\lambda_r = x(t_{r-1}), r = \overline{1, N}$  и на каждом  $r$ -ом интервале  $[t_{r-1}, t_r)$  произведем замену функции  $u_r(t) = x(t) - \lambda_r$ . Тогда задача (1)–(3) сведется к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^l \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(t) \psi_k(s) (u_j(s) + \lambda_j) ds + f(t), \quad t \in (t_{r-1}, t_r), \quad (4)$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1, N}, \quad (5)$$

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \lambda_N + C_0 \lim_{t \rightarrow T-0} u_N(t) = d_0, \quad d_0 \in R^n, \quad (6)$$

$$B_j \lambda_{r^+(j)} + B_j \lim_{t \rightarrow \theta_j-0} u_{r^+(j)}(t) + C_j \lambda_{r^+(j)+1} = d_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (7)$$

$$\lambda_{r^-(s)} + \lim_{t \rightarrow t_{r^-(p)}-0} u_{r^-(s)}(t) - \lambda_{r^-(s)+1} = 0, \quad s = \overline{1, \dots, N-m-1}. \quad (8)$$

Здесь соотношения (8) являются условиями непрерывности решения во внутренних точках разбиения, где нет импульсных воздействий.

Если  $\tilde{x}(t)$  – решение задачи (1)–(3), то пара  $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ , с элементами  $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_N) \in R^{nN}, \tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \dots, \tilde{u}_N(t)) \in C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$ , где  $\tilde{\lambda}_r = \tilde{x}(t_{r-1}), \tilde{u}_r(t) = \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_{r-1}), t \in [t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}$  является решением задачи (4)–(8). И наоборот, если пара  $(\lambda^*, u^*[t])$ , где  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}, u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)) \in C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$  – решение задачи (4)–(8), то функция  $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$ , определяемая равенствами  $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t), t \in (t_{r-1}, t_r), r = \overline{1, N}, x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t)$  будет решением исходной задачи (1)–(3).

При фиксированных значениях  $\lambda \in R^{nN}$  система функции  $u[t]$  определяется из (4),(5) - специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений. Интегрируя обе части (4) и используя (5) получим систему интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau)\lambda_r(\tau)d\tau + \int_{t_{r-1}}^t \sum_{k=1}^l \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)u_j(s)dsd\tau + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t \sum_{k=1}^l \varphi_k(\tau) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)\lambda_j dsd\tau + \int_{t_{r-1}}^t f(\tau)d\tau, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \quad r = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Возьмем натуральное число  $\nu$  и через  $E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t)$  обозначим следующую сумму

$$\begin{aligned} E_{\nu,r}(A(\cdot), P(\cdot), t) = & \int_{t_{r-1}}^t P(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} P(\tau_2)d\tau_2d\tau_1 + \dots + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} P(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1} \dots d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r], \end{aligned}$$

где  $P(t)$  непрерывная на  $[t_{r-1}, t_r]$  квадратная матрица или вектор размерности  $n$ .

Подставив в первое слагаемое правой части (9) вместо  $u_r(\tau)$ ,  $r = \overline{1, N}$  соответствующую правую часть (9) и повторив этот процесс  $\nu \in \mathbb{N}$  раз, получим представление  $u_r(t)$  вида

$$\begin{aligned} u_r(t) = & E_{\nu,r} \left( A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r + \sum_{k=1}^l \varphi_k(\cdot) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)ds\lambda_j + \sum_{k=1}^l \varphi_k(\cdot) \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)u_j ds + f(\cdot), t \right) + \\ & + \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_2d\tau_1, \quad t \in [t_{r-1}, t_r]. \end{aligned} \quad (10)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} \mu_k = & \sum_{j=1}^N \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)u_j(s)ds, \\ D_{r,r}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta), t) = & E_{\nu,r}(A(\cdot), A(\cdot) + \sum_{k=1}^l \varphi_k(\cdot) \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_k(s)ds, t), \quad r = \overline{1, N}, \\ D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta), t) = & E_{\nu,r}(A(\cdot), \sum_{k=1}^l \varphi_k(\cdot) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \psi_k(s)ds, t), \quad r \neq j, \quad j = \overline{1, N}, \\ F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta), t) = & E_{\nu,r}(A(\cdot), f(\cdot), t), \quad r = \overline{1, N}, \\ g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_r, t) = & \int_{t_{r-1}}^t A(\tau_1) \int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2) \dots \int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_2d\tau_1, \end{aligned}$$

систему (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_r(t) = & \sum_{j=1}^N D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta), t)\lambda_j + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t)\mu_k + F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta), t) + \\ & + g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_r, t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r]. \end{aligned} \quad (11)$$

В (11), полагая  $t = \tau$ , умножая обе части на  $\psi_p(\tau)$ , интегрируя по  $\tau$  на  $[t_{r-1}, t_r]$  и суммируя левые и правые части по  $r$ , имеем

$$\mu_p = \sum_{k=1}^l G_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta))\mu_k + \sum_{r=1}^N V_{p,r}(\nu, \Delta_N(\theta))\lambda_r +$$

$$F_p(\nu, \Delta_N(\theta)) + g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u), \quad p = \overline{1, l}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} G_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta)) &= \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) E_{\nu,r}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), \tau) d\tau, \\ V_{p,r}(\nu, \Delta_N(\theta)) &= \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) \sum_{j=1}^N D_{r,j}^\nu(\Delta_N(\theta), \tau) d\tau, \\ F_p(\nu, \Delta_N(\theta)) &= \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta), \tau) d\tau, \\ g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u) &= \sum_{r=1}^N \int_{t_{r-1}}^{t_r} \psi_p(\tau) g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_r, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

По  $(n \times n)$  матрицам  $G_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta))$ ,  $p, k = \overline{1, l}$ ,  $V_{p,r}(\nu, \Delta_N(\theta))$ ,  $r = \overline{1, N}$  составим  $(nl \times nl)$  матрицу  $G(\nu, \Delta_N(\theta)) = (G_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta)))$  и  $(nl \times n(N-1))$  матрицу  $V(\nu, \Delta_N(\theta)) = (V_{p,r}(\nu, \Delta_N(\theta)))$ . Систему (12) запишем в виде

$$[I - G(\nu, \Delta_N(\theta))] \mu = V(\nu, \Delta_N(\theta)) \lambda + F(\nu, \Delta_N(\theta)) + g(\nu, \Delta_N(\theta), u), \quad (13)$$

где  $I$  единичная матрица размерности  $nl$ , векторы

$$\begin{aligned} F(\nu, \Delta_N(\theta)) &= (F_1(\nu, \Delta_N(\theta)), F_2(\nu, \Delta_N(\theta)), \dots, F_{m+1}(\nu, \Delta_N(\theta))), \\ g(\nu, \Delta_N(\theta), u) &= (g_1(\nu, \Delta_N(\theta), u), g_2(\nu, \Delta_N(\theta), u), \dots, g_N(\nu, \Delta_N(\theta), u)) \end{aligned}$$

принадлежат  $R^{nN}$ .

Определение. Разбиение  $\Delta_N(\theta)$  называется  $\nu$ -регулярным, если матрица  $I - G(\nu, \Delta_N(\theta))$  имеет обратную.

Множество  $\nu$ -регулярных разбиений  $\Delta_N(\theta)$  обозначим через  $\sigma_\nu([0, T], \theta)$ . Аналогично лемме 2.1 из [18] устанавливается, что множество  $\sigma_\nu([0, T], \theta)$  не пусто.

Предполагая, что  $\Delta_N(\theta) \in \sigma_\nu([0, T], \theta)$ , через  $\{M_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta))\}$ ,  $p, k = \overline{1, l}$  обозначим матрицу  $[I - G(\nu, \Delta_N(\theta))]^{-1}$ , где блочные элементы  $M_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta))$  - квадратные матрицы размерности  $n$ . Тогда из (13) имеем

$$\mu_p = \sum_{k=1}^l M_{p,k}(\nu, \Delta_N(\theta)) \left\{ \sum_{j=1}^N V_{k,j}(\nu, \Delta_N(\theta)) \lambda_j + F_k(\nu, \Delta_N(\theta)) + g_k(\nu, \Delta_N(\theta), u) \right\}, \quad (14)$$

$p, k = \overline{1, l}$ . В (12) вместо  $\mu_k$  взяв правую часть (14) получим представление для  $u_r(t)$  следующего вида

$$\begin{aligned} u_r(t) &= \sum_{j=1}^N D_{r,j}^\nu(\Delta_N(\theta), t) \lambda_j + F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta), t) + g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_r, t) + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t) \times \\ &\times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) \left[ \sum_{r=1}^N V_{p,r}(\nu, \Delta_N(\theta)) \lambda_r + F_p(\nu, \Delta_N(\theta)) + g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$t \in [t_{r-1}, t_r)$ . Откуда определив  $\lim_{t \rightarrow t_r-0} u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  и подставив им соответствующие выражения в (6), (7), (8) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров  $\lambda_r$ ,  $r = \overline{1, N}$ :

$$\begin{aligned}
& [B_0\lambda_1 + C_0D_{N,1}(\Delta_N(\theta), T) + C_0\sum_{k=1}^l E_{v,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T)\sum_{p=1}^l M_{k,p}(v, \Delta_N(\theta))V_{p,1}(v, \Delta_N(\theta))]\lambda_1 + \\
& + C_0[I + D_{N,N}^{(v)}(\Delta_N(\theta), T) + \sum_{k=1}^l E_{v,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T)\sum_{p=1}^l M_{k,p}(v, \Delta_N(\theta))V_{p,N}(v, \Delta_N(\theta))]\lambda_N + \\
& + C_0[\sum_{i=2}^{N-1} D_{N,i}^{(v)}(\Delta_N(\theta), T)\lambda + \sum_{k=1}^l E_{v,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T)\sum_{p=1}^l M_{k,p}(v, \Delta_N(\theta))\sum_{i=2}^{N-1} V_{p,i}(v, \Delta_N(\theta))]\lambda_i = \\
& = d_j - C_0F_{v,N}(\Delta_N(\theta), T) - C_0g_v^A(\Delta_N(\theta), u_N, T) - C_0\sum_{k=1}^l E_{v,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \times \\
& \quad \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(v, \Delta_N(\theta))[F_p(v, \Delta_N(\theta)) + g_p(v, \Delta_N(\theta), u)], \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_j [I + D_{r,r^+(j)}^{(\nu)} (\Delta_N(\theta), t_{r^+(j)}) + \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^+(j)} (A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(j)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) \times \\
& \times V_{p, r^+(j)}(\nu, \Delta_N(\theta))] \lambda_{r^+(j)} + [B_j D_{r, r^+(j)+1} (\Delta_N(\theta), t_{r^+(j)+1}) + B_j \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^+(j)+1} (A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(j)+1}) \times \\
& \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) V_{p, r^+(j)+1}(\nu, \Delta_N(\theta)) + C_j] \lambda_{r^+(j)+1} + B_j \left[ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r^+(j) \\ i \neq r^+(j)+1}}^N D_{r,i}^{(\nu)} (\Delta_N(\theta), t_{r^+(j)}) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^+(j)} (A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(j)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r^+(j) \\ i \neq r^+(j)+1}}^N V_{p,i}(\nu, \Delta_N(\theta)) \right] \lambda_i = d_j - \\
& - B_j F_{\nu, r^+(j)} (\Delta_N(\theta), t_{r^+(j)}) - B_j g_\nu^A (\Delta_N(\theta), u_{r^+(j)}, t_{r^+(j)}) - B_j \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^+(j)} (A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(j)}) \times \\
& \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) [F_p(\nu, \Delta_N(\theta)) + g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u)], \quad j = \overline{1, m}, \quad (17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [I + D_{r,r^-(s)}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(s)})] + \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^-(s)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(s)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) \times \\
& \times V_{p, r^-(s)}(\nu, \Delta_N(\theta)) \lambda_{r^-(s)} + [D_{r, r^-(s)+1}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(s)+1}) + \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^-(s)+1}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(s)+1}) \times \\
& \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) V_{p, r^-(s)+1}(\nu, \Delta_N(\theta)) - I] \lambda_{r^-(s)+1} + [ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r^-(s) \\ i \neq r^-(s)+1}}^N D_{r,i}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(s)}) + \\
& + \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^-(s)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(s)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r^-(s) \\ i \neq r^-(s)+1}}^N V_{p,i}(\nu, \Delta_N(\theta)) \lambda_i = \\
& - F_{\nu, r^-(s)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(s)}) - g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_{r^-(s)}, t_{r^-(s)}) - \sum_{k=1}^l E_{\nu, r^-(s)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(s)}) \times \\
& \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) [F_p(\nu, \Delta_N(\theta)) + g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u)], \quad s = \overline{1, N-m-1}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Соответствующую левой части системы (16), (17), (18) матрицу размерности  $nN \times nN$  обозначим через  $Q_N(\Delta_N(\theta))$  и запишем ее в виде

$$Q_\nu(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_\nu(\Delta_N(\theta)) - W_\nu(u, \Delta_N(\theta)), \quad \lambda \in R^{nN}, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} F_\nu(\Delta_N(\theta)) = & \left( -d_0 + C_0 F_{\nu,N}(\Delta_N(\theta), T) + C_0 \sum_{k=1}^l E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \times \right. \\ & \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) F_p(\nu, \Delta_N(\theta)), -d_1 + B_1[F_{\nu,r^+(1)}(\Delta_N(\theta), t_{r^+(1)}) + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^+(1)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(1)}) \times \\ & \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) F_p(\nu, \Delta_N(\theta))], \dots, -d_m + B_m[F_{\nu,r^+(m)}(\Delta_N(\theta), t_{r^+(m)}) + \\ & + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^+(m)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(m)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) F_p(\nu, \Delta_N(\theta))], F_{\nu,r^-(1)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(1)}) + \\ & + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^-(1)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(1)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) F_p(\nu, \Delta_N(\theta)), \dots, F_{\nu,r^-(N-m-1)}(\Delta_N(\theta), t_{r^-(N-m-1)}) + \\ & \left. + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^-(N-m-1)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(N-m-1)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) F_p(\nu, \Delta_N(\theta)) \right), \\ W_\nu(u, \Delta_N(\theta)) = & \left( C_0 g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_N, T) + C_0 \sum_{k=1}^l E_{\nu,N}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), T) \times \right. \\ & \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u), B_1[g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_{r^+(1)}, t_{r^+(1)}) + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^+(1)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(1)}) \times \\ & \times \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u)], \dots, B_m[g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_{r^+(m)}, t_{r^+(m)}) + \\ & + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^+(m)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^+(m)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u)], g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_{r^-(1)}, t_{r^-(1)}) + \\ & + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^-(1)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(1)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u), \dots, g_\nu^A(\Delta_N(\theta), u_{r^-(N-m-1)}, t_{r^-(N-m-1)}) + \\ & \left. + \sum_{k=1}^l E_{\nu,r^-(N-m-1)}(A(\cdot), \varphi_k(\cdot), t_{r^-(N-m-1)}) \sum_{p=1}^l M_{k,p}(\nu, \Delta_N(\theta)) g_p(\nu, \Delta_N(\theta), u) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, если  $\Delta_N(\theta) \in \sigma_\nu([0, T])$ , то для нахождения неизвестных параметров  $\lambda_r$ ,  $r = \overline{1, N}$  получим систему линейных алгебраических уравнений (19). Неизвестные функции  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$  определяются из специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (4) с начальными условиями (5).

Решение многоточечной краевой задачи с параметрами (4)-(8) найдем по следующему алгоритму:

Шаг 0: а) Предполагая, что при выбранных  $\nu \in N$ ,  $\Delta_N(\theta) \in \sigma_\nu([0, T])$  матрица  $Q_\nu(\Delta_N(\theta)) : R^{nN} \rightarrow R^{nN}$  обратима, начальное приближение по параметру  $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$  найдем из систем линейных алгебраических уравнений  $Q_\nu(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_\nu(\Delta_N(\theta))$ , т.е.  $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(\Delta_N(\theta))]^{-1} F_\nu(\Delta_N(\theta))$ .

б) Используя компоненты вектора  $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$  и решая специальную задачу Коши (4), (5) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$  находим функции  $u_r(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ .

Шаг 1: а) Найденные  $u_r^{(0)}(t)$ , подставляя в правую часть (19), из уравнения  $Q_\nu(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_\nu(\Delta_N(\theta)) - G_\nu(u^{(0)}, \Delta_N(\theta))$  определим  $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \dots, \lambda_N^{(1)})$ .

б) Решая специальную задачу Коши (4), (5) при  $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ , находим функции  $u_r^{(1)}(t)$ ,  $r = \overline{1, N}$ .

Продолжая этот процесс на  $i$ -ом шаге алгоритма, получим пару  $(\lambda^{(i)}, u^{(i)}[t])$ ,  $i = 0, 1, \dots$  и т.д.

Введем следующие обозначения  $\alpha = \max_{t \in [0, T]} \|A(t)\|$ ,  $\beta = \max_{t \in [0, T]} \max_{s \in [0, T]} \left\| \sum_{k=1}^N \varphi_k(t) \psi_k(s) \right\|$ ,  $h_r = t_r - t_{r-1}$ ,  $r = \overline{1, N}$ ,  $L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) = \left( 1 + \beta T h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) \| [I - G(\nu, \Delta_N(\theta))]^{-1} \|$ .

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и существования единственного решения краевой задачи (1)-(3) устанавливает

Теорема 1. Пусть при некоторых  $\nu \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_N(\theta) \in \sigma_\nu([0, T], \theta)$ , матрица  $Q_\nu(\Delta_N(\theta)): R^{nN} \rightarrow R^{nN}$  обратима и выполняются неравенства:

$$\| [Q_\nu(\Delta_N(\theta))]^{-1} \| \leq \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)), \quad (20)$$

$$\xi_\nu(\Delta_N(\theta)) = \max_{r=1, N} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) < 1, \quad (21)$$

$$q_\nu(\Delta_N(\theta)) = \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)) \max(1, \max_{i=1, N-1} \|B_i\|, \|C_0\|) \frac{\xi_\nu(\Delta_N(\theta))}{1 - \xi_\nu(\Delta_N(\theta))} \times \\ \times \max_{r=1, N} \left\{ \left( \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{\nu!} + T \beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right) L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) \right\} < 1. \quad (22)$$

Тогда алгоритм сходится и краевая задача (1) - (3) имеет единственное решение.

Доказательство. При предположениях теоремы из нулевого шага алгоритма определим и оценим  $\lambda^{(0)}$ :

$$\|\lambda^{(0)}\| = \max_{r=1, N} \|\lambda_r^{(0)}\| \leq \| [Q_\nu(\Delta_N(\theta))]^{-1} \| \|F_\nu(\Delta_N(\theta))\| \leq \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)) \|F_\nu(\Delta_N(\theta))\|.$$

Неравенство (21), согласно теореме 2.1 из [18] обеспечивает существование единственного решения специальной задачи (4), (5). При этом выполняется неравенство

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 = \max_{r=1, N} \sup_{t \in [t_{r-1}, t_r]} \|u_r^{(0)}(t)\| \leq \max_{r=1, N} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T \beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \times \right. \\ \left. \times L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) \|\lambda^{(0)}\| + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) + \xi_\nu(\Delta_N(\theta)) \|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \right\}.$$

Отсюда и из неравенства (21) следует, что

$$\|u^{(0)}[\cdot]\|_2 \leq \frac{1}{1 - \xi_\nu(\Delta_N(\theta))} \max_{r=1, N} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T \beta h_r \sum_{j=1}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \times \right. \\ \left. \times L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) \|\lambda^{(0)}\| + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) \right\}.$$

По алгоритму определим  $\lambda^{(1)}$  и оценим  $\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\|$ :

$$\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\| \leq \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)) \|W_\nu(u, \Delta_N(\theta))\| \leq \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)) \max(1, \max_{i=1, N-1} \|B_i\|, \|C_0\|) \times$$

$$\times \max_{r=1,N} \frac{(\alpha h_r)^v}{v!} \frac{L_r(v, \Delta_N(\theta))}{1 - \xi_v(\Delta_N(\theta))} \max_{r=1,N} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \times \right. \\ \left. \times L_r(v, \Delta_N(\theta)) \|\lambda^{(0)}\| + \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r L_r(v, \Delta_N(\theta)) \right\}.$$

Продолжая итерационный процесс, на  $i$ -ом шаге находим последовательность пар  $(\lambda^{(i)}, u^{(i)}[t])$ , где  $\lambda^{(i)} \in R^{nN}$ ,  $u^{(i)}[t] \in C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$

$$\|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2 \leq \frac{1}{1 - \xi_v(\Delta_N(\theta))} \times \\ \times \max_{r=1,N} \left\{ \left[ \sum_{j=1}^v \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{v-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] L_r(v, \Delta_N(\theta)) \right\} \|\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}\|. \quad (23)$$

Из уравнения (19) вытекает

$$\|\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}\| \leq \gamma_v(\Delta_N(\theta)) \max(1, \max_{i=1, N-1} \|B_i\|, \|C_0\|) \max_{r=1, N} \frac{(\alpha h_r)^v}{v!} L_r(v, \Delta_N(\theta)) \|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2$$

Подставляя вместо  $\|u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot]\|_2$  правую часть неравенства (23) получим

$$\|\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}\| \leq q_v(\Delta_N(\theta)) \|\lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)}\|, \quad i = 1, 2, \dots \quad (24)$$

В силу условия  $q_v(\Delta_N(\theta)) < 1$  и неравенств (23), (24) последовательность  $\lambda^{(i)}$  сходится к  $\lambda^*$ , последовательность систем функции  $u^{(i)}[t]$  по норме пространства  $C([0, T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$  сходится к  $u^*[t]$ . Тогда функция  $x^*(t)$ , определяемая равенствами  $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$ ,  $t \in [t_{r-1}, t_r]$ ,  $r = \overline{1, N}$ ,  $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \rightarrow T-0} u_N^*(t)$  будет решением задачи (1)-(3).

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема 2. Краевая задача (1)-(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда существуют  $V \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_N(\theta) \in \sigma_v([0, T], \theta)$ , при которых матрица  $Q_v(\Delta_N(\theta)): R^{nN} \rightarrow R^{nN}$  обратима и выполняются неравенства (20), (21), (22) теоремы 1.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказательству теоремы 3.2 из [18].

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equation. - Singapore: World Scientific, 1989.
- [2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995.
- [3] Luo Z., Nieto J.J., Shen J.H. Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - 325. - P. 226-236.
- [4] He Z., He X. Monotone iterative technique for impulsive integro-differential equations with periodic boundary conditions, // Comput. Math. Appl. - 2004. - 48. - P. 73-84.
- [5] Liang J., Liu Y., Liu Z. A class of BVPS for first order impulsive integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. - 2011. - 218. - P. 3667-3672.
- [6] Wang X., Zhang J. Impulsive anti-periodic boundary value problem for first order integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. - 2010. - 234. - P. 3261-3267.
- [7] Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - 328. - P. 1343-1368.

- [8] Luo Z., Nieto J.J. New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations // *Nonlinear Anal.* -2009. - 70. - P. 2248-2260.
- [9] Lihong Zhang, Boundary value problem for first order impulsive functional integro-differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* -2011. - 235. -P. 2442-2450.
- [10] Xiaohuan Wang, Jihui Zhang, Impulsive anti-periodic boundary value problem of first-order integro-differential equations // *Journal of Computational and Applied Mathematics.* -2010. - 234. - P.3261-3267.
- [11] Li J., Luo Z., Yang X. Maximum principles for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations // *Nonlinear Anal. TMA.* - 2010. - 72. - P. 3837-3841.
- [12] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // *Computational mathematics and mathematical physics.* - 2010. - 50, - №7. - P. 1150-1161.
- [13] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // *Differential equations.* - 2010. - 46. - № 4. - P. 553-567.
- [14] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations // *Differential equations.* - 2013. - 49. - № 9. - P. 1-16.
- [15] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations // *Ukrainian Mathematical journal.* - 2015. - 66. - № 8. - P. 1200-1219.
- [16] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation // *Computational mathematics and mathematical physics.* - 2013. - 53. - № 6. - P. 736-758.
- [17] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations // *Journal of computational and applied mathematics.* -2016. -294. - P. 342-357.
- [18] Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Разрешимость линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром // *Нелінійні коливання.* - 2015. -18. № 4. - С. 489-506.
- [19] Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs // *Differential equations.* - 2015. - 51. - № 9. - P. 1180-1196.
- [20] Dzhumabaev D.S. Conditions for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations // *Computational mathematics and mathematical physics.* - 1989. - 29. - № 1. - P. 50-66.

## REFERENCES

- [1] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. *Theory of Impulsive Differential Equation.* Singapore, World Scientific, **1989**.
- [2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. *Impulsive Differential Equations.* Singapore, World Scientific, **1995**.
- [3] Luo Z., Nieto J.J., Shen J.H. Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, **2007**, 325, 226-236.
- [4] He Z., He X. Monotone iterative technique for impulsive integro-differential equations with periodic boundary conditions. *Comput. Math. Appl.*, **2004**, 48, 73-84.
- [5] Liang J., Liu Y., Liu Z. A class of BVPS for first order impulsive integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, **2011**, 218, 3667-3672.
- [6] Wang X., Zhang J. Impulsive anti-periodic boundary value problem for first order integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2010**, 234, 3261-3267.
- [7] Nieto J.J., Rodriguez-Lopez R. New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **2007**, 328, 1343-1368.
- [8] Luo Z., Nieto J.J. New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations. *Nonlinear Anal.*, **2009**, 70, 2248-2260.
- [9] Lihong Zhang, Boundary value problem for first order impulsive functional integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2011**, 235, 2442-2450.
- [10] Xiaohuan Wang, Jihui Zhang, Impulsive anti-periodic boundary value problem of first-order integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **2010**, 234, 3261-3267.
- [11] Li J., Luo Z., Yang X. Maximum principles for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations. *Nonlinear Anal.*, **2010**, 72, 3837-3841.
- [12] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation. *Computational mathematics and mathematical physics*, **2010**, 7, 1150-1161 (in Eng).
- [13] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations. *Differential equations*, **2010**, 4, 553-567.
- [14] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations. *Differential equations*, **2013**, 9, 1-16.

- [15] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations. *Ukrainian Mathematical journal*, **2015**, 8, 1200-1219.
- [16] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation. *Computational mathematics and mathematical physics*, **2013**, 6, 736-758.
- [17] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. *Journal of computational and applied mathematics*, **2016**, 294, 342-357.
- [18] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Razreshimost lineinoi kraevoi zadachi dlya integro-differentsialnyich uravnenii s vyirozhdennyim yadrom. *Nelineinye kolebaniya*, **2015**, 4, 1209-1221 (in Russ).
- [19] Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs. *Differential equations*, **2015**, 9, 1180-1196.
- [20] Dzhumabaev D.S. Conditions for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations. *Computational mathematics and mathematical physics*, **1989**, 1, 50-66.

**ИМПУЛЬС ӘСЕРІ БАР ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-  
ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ  
ШЕШІМДІЛІГІНІҢ КОЭФФИЦИЕНТТІК БЕЛГІЛЕРІ**

**Д.С. Жұмабаев, Э.А. Бакирова**

BFM Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

**Түйін сөздер:** шеттік есеп, шешілімділік, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, импульстік әсер.

**Аннотация.** Кесіндінің бекітілген нүктелерінде импульстік әсерге ұшырайтын азғындалған өзегі бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер қарастырылатын кесінді импульс әсері бар нүктелерде бөліктерге бөлінеді, ішкі интервалдардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері ретінде алынған қосымша параметрлер енгізіледі де бастапқы шеттік есеп параметрі бар пара-пара көпнүктелі шеттік есепке келтіріледі. Параметрлердің бекітілген мәндерінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі туындайды. Пара-пара интегралдық теңдеулер жүйесінде  $V$  ішкі алмастыруларын пайдалана отырып арнайы Коши есебінің кейіптемесі алынады. Бастапқы теңдеудің интегралдық мүшесінің өзегінің азғындалғанын пайдаланып арнайы Коши есебінің шешімін табуға мүмкіндік беретін сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Егер құрылған жүйенің матрицасы қайтарымды болса, онда бөлктеу  $V$  - регулярлі бөлктеу деп аталады. Параметрлері көпнүктелі шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылды. Алгоритмнің әрбір қадамы екі пункттен тұрады. Алгоритмнің бірінші пунктінде енгізілген параметрлерге қатысты сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі шешіледі. Алгоритмнің екінші пунктінде параметрлердің табылған мәндерінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шығарылады. Қарастырылып отырған шеттік есептің бірімәнді шешілімділігін қамтамасыз ететін ұсынылған алгоритмнің бар болуы мен жинақталуының шарттары алынады. Бастапқы берілімдер терминінде импульстік әсерге ұшырайтын азғындалған өзегі бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің бірімәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалды. Алгоритм мен зерттеліп отырған есептің бірімәнді шешілімділігі туралы теорема дифференциалдық бөлігінің фундаменталдық матрицасын қолдануды талап етпейді.

Поступила 15.03.2016 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 72–78

UDC 372.800.465.02

## **TECHNOLOGY OF CREATION OF WEB-FORM**

**U.B. Utebaev, K.U. Yessentayev, N.D. Darkhan**

Kazakh state women's pedagogical university, Almaty, Kazakhstan.  
[esentaev\\_kairat@mail.ru](mailto:esentaev_kairat@mail.ru)

**Key words:** Form, Web-sites, HTML, PHP, POST, GET, method, action.

**Abstract:** In this article, we worked with the tags controls for web forms. We were looking for the right way how to increase the efficiency of application forms. We have tried to harness the power of completely basics of HTML and PHP languages. It is considered creating web forms technology for the web site. In HTML forms it is one of the most important elements of the site. With the help of the form sent for processing data on a server that users can enter. The main objective of this form of registration of the site, write a review and feedback, the feedback response to questions, the dialogue, voting and downloading files. And so in the HTML form it is created using the paired tags `<form>` `</form>`. The remaining elements of the form is located in between the paired tags. Buttons are not able to act independently, so their actions from our visit create a form. Forms of use are for a different purpose.

ӘӨЖ 372.800.465.02

## **WEB -ФОРМАЛАР ҚҰРУДЫҢ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫ**

**Ұ.Б. Өтебаев, Қ.Ө. Есентаев, Н.Д. Дархан**

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті

**Түйін сөздер:** Форма, Web-сайт, HTML, PHP, POST, GET, method, action.

**Аннотация.** Бұл мақалада біз web формаларды басқару үшін қолданылатын тәгтермен басқару элементтерімен жұмыс жасадық. Форманы қолданудың тиімділігін арттырудың жолдарын іздедік. HTML және PHP тілдерінің негіздері мен мүмкіндіктерін толық пайдалануға тырыстық. Web-сайтқа арналған форма құрудың технологияларын қарастырдық. HTML формалары сайттың ең басты маңызды элементтерінің бірі болып табылады. Формаларды пайдаланушылар енгізген деректерді серверге өңдеуге жіберу үшін пайдаланады. Формаларға мысал ретінде сайттарға тіркелу, пікірлер жазып жіберу, кері байланыс, сұрақтарға жауап беру болмаса дауыс беру, файлдарды жүктеу сияқтыларды келтіруге болады.

Сонымен, форма HTML дің жұптасқан тегтері `<form>` `</form>` арқылы құрылады. Яғни, форманың басы `<form>` мен басталып, аяғы `</form>` мен аяқталады. Осы екі тегтің ортасына форманың қалған элементтері жайғасады. Батырмалар өздігімен еш әрекет жасай алмайды, сондықтан олардың әрекеті өзіміз жазатын форма өңдегіштері арқылы жүзеге асырылады. Формаларды әртүрлі мақсаттарда қолдану мүмкіндігі бар.

Қазіргі таңда дүниежүзілік компьютерлік интернет желісі - ғасырдың 90-жылдары компьютердің дамуына Internet және World Wide Web жүйелері үлкен әсерін тигізгені барлығымызға мәлім. Қазіргі кезде осы бағытта да компьютер өте үлкен қарқынмен дамуда. Оперативті ақпаратты алуға негізгі құрылғының бірі болуда. Internet желісі- Бүкіләлемдік тор- WWW [World Wide Web] [5]. Берілген тор құжаттардың өзара бір-бірімен байланысы ретінде беріледі. Өзіміз білетіндей Internet желісі түрлі сайттардан тұрады. Сайттарды пайдалана білумен қатар оны құра білуде қажет. Ол әрине көптеген жұмыстарды қажет етеді, ең бастысы ол не

мақсатта құрылып жатыр? Әрбір Web-сайт тексттен, суреттерден, видео ұнтаспаларынан тұруы мүмкін. Бүгін біз Web-сайтқа арналған форма құрудың технологияларын қарастырамыз [1].

Формалар - web құжат жариялаушылар мен оқырмандар арасында ақпарат алмасуға мүмкіндік жасайды. Бұған дейін біз web-құжаттарды тек экранға шығару әдістерін талқылап келген болсақ, енді, керісінше оларға мәлімет енгізу әрекеттерін қарастырамыз. Формалар арқылы тұтынушыдан жалпы мәтін түрінде ақпарат сұрап алуға, "иә/жоқ" деген жауаптың бірін таңдауға немесе бірнеше жолдың біріне тоқтауға болады [3].

Формаларды әртүрлі мақсаттарда қолдану мүмкіндігі бар. Мысал ретінде, сайтқа кірген оқырмандардың ол туралы өз пікірлерін формаға енгізуі туралы айтуға болады.

Әрбір форма *<form>* осы тәгпен басталады. Оның қолданылатын форманы өңдеу программасын (скрипт) және мәліметтерді жөнелту әдісін көрсететін екі атрибутын анықтап алу қажет[4].

Мысал

Жаңа қолданушыны тіркеу туралы қарапайым форма:

```
<!DOCTYPE html>
<html>
<head>
<meta charset="utf-8" />
<title>
Тіркеу
</title>
</head>
<body>
<form action="http://example.com/app/profile.php" method="post">
<p>
<label for="username">
Аты:
</label>
<input type="text" name="username" />
<br />
<label for="nick">
ИИН:
</label>
<input type="text" name="nick" />
<br />
<label for="email">
Электронды почта:
</label>
<input type="text" name="email" />
<br />
<label for="sex">
Жынысы:
</label>
<input type="radio" name="sex" value="male" />
Ер
<br />
<input type="radio" name="sex" value="female" />
Әйел
<br />
<input type="radio" name="sex" value="secret" />
Жауап бергім келмейді
<input type="submit" value="Отправить">
<input type="reset" value="Очистить">
```

```

</p>
</form>
</body>
</html>

```

Бұл мысал үш мәтіндік өрістен тұратын формадан құралған, жынысты анықтауға радиобатырма, мәліметтерді жөнелтуге арналған батырма (*submit*) және тазалауға (*reset*) [2].

HTML тілінде формалар мынадай басқару элементтерінен тұрады:

- батырма: элемент `<input>` типтер *submit* (форманы жөнелтуші), *image* (сурет-батырма), *reset* (форманы тазарту, форманы бастапқы қалыпқа келтіру), *button* (батырма).

- *чекбокс* (жалауша): типі *checkbox*;
- радиобатырма: типі *radio*;
- меню: элемент `<select>` элементтерімен бірге `<optgroup>` және `<option>` ішінде;
- мәтіндік жол: типі *text*, және де `<textarea>` элементі (бірнеше жолдан тұратын мәтіндік өріс);

- пароль: типі *password*;
- жасырын өріс: типі *hidden*;
- файл: типі *file*[13].

HTML тілі қосымша элементтері:

- `<DATALIST>` элементі- мәтіндік жолды автотолтыру;
- `<OUTPUT>` элементі- басқа өрістер негізінде нәтижені есептеу;
- `<KEYGEN>` элементі –кілттерді генерациялау[8].;

FORM тегінің негізгі атрибуттары:

- *action* — Форма мәліметтерін қабылдап алып, оны өңдейтін URL-ды анықтайды. Егер бұл атрибут анықталмаса, онда мәліметтер форма орналасқан web-парақ адресіне жіберіледі.

- *method* — Форманы өңдеу программасына (скрипт) қалайша ақпарат жөнелтілетінін көрсетеді. Әдетте, оның мәні POST болады, мұндайда форма мәліметі URL-дан бөлек жеке жөнелтіледі. Ал оның мәні GET болса, онда мәлімет URL-мен бірге жіберіледі.

- *enctype* — Мәліметтерді кодтау әдісі.
- *accept-charset* —Қолданылып қойылған кодтарды қайта кодтауды ұсынады.
- *autocomplete* — Өрістердің автотолтырылуын қосады[7].

#### Форманы жөнелту

Форманы жөнелту үшін екі әдіс қолданылады: GET және POST. GET әдісін мына жағдайда қолдану керек: Егер форманы өңдеуге сервер тарапынан келесі іс-әрекеттер болған жағдайда, мысалы іздеу. Мәліметтерді модификациялау жағдайында POST әдісі қолданылады.

Әр кезде сайтқа кіргенде түрлі формалармен енгізу ұяшықтарына тап боламыз. Формадағы берілгендер қалайша өңделеді деген сұраққа PHP арқылы деп жауап береміз. Ең бірінші алдымен кез-келген адреске хат жіберетін форма құрайық:

```

<form method = "POST" action = "action.phtml">
<p><input type = "text" name = "email" size = "20">
<br><input type = "text" name = "name" size = "20">
<br><textarea rows = "2" name = "txt" cols = "20" ></textarea>
<br><input type = "submit" value = "Send" name = "B1">
<input type = "reset" value= "Clear" name = "B2" ></p></form> [6].

```

Бұл HTML кодты браузермен жүктегенде біз үш енгізу ұяшығы бар форманы көреміз. “Send” батырмасын басқаннан кейінгі өңдеу операциясы *action.phtml* файлына беріледі. “email” атты бірінші ұяшыққа, сайтқа кіруші хат жіберілетін адресі енгіzedі. “name” атты екінші ұяшыққа сайтқа кіруші өз аты-жөнін енгіzedі. Келесі “txt” атты енгізу ұяшығы хат жазу үшін арналған. Енді ең негізгі бөлікке өтетін болсақ, ол *action.phtml* файлындағы форма өңдеушісін құру. Форманы өңдеудің PHP коды:

```

<?php mail($email, $name, $txt); ?>

```

Көріп отырғанымыздай формадағы енгізу ұяшықтарына тағайындаған аттарымыз сол күйінше

айнымалы ретінде PHP скриптіне өтіп кетті. Бұл айнымалылардың PHP-дегі мәндері енгізетін ұяшыққа сәйкес болады. Адрес \$email айнымалысында, аты-жөні \$name айнымалысында, мәтін \$txt айнымалысында болады[8]. PHP-де поштамен хат жіберудің амалдары өте көп, соның біреуін қарастырайық, ол mail функциясы. Оның синтаксисі:

```
mail($mail, "хат енгізілді", $str, "From: хат");
```

Мысалыға, кейбір мақалаларға кірушілер жөнінде талдау жасау үшін сайттың бірнеше бетін бақылайтын жүйені қарастырайық. Ол үшін бізге сайтқа кіруші жөнінде ақпарат қажет болады, ол PHP-де автоматты түрде мүмкін. Бұл ақпаратты біз өзіміздің пошталық жәшігімізге жіберіп отырамыз[9]:

```
<?php
$host = gethostbyaddr($REMOTE_ADDR);
$ip = getenv("REMOTE_ADDR");
$date = date("d M Y, H:i:s");
$str = ("
Дата - $date
Хост - $host
IP-адрес - $ip
-----");
mail($email, "статистика", $str, "From: информация");
?>
```

1 Листинг. Input элементі арқылы басқару.

```
<form action="/example.php" method="GET" target="_blank">
<table style="width: 300px;">
<tr>
<td>Логин:</td>
<td width="100"><input type="text" name="username" size=12 /></td>
</tr>
<tr>
<td>Пароль:</td>
<td><input type="password" name="passwd" size=12 /></td>
</tr>
<tr>
<td>Жынысы: </td>
<td><input name="sex" type="radio" value="male"> муж.
<input name="sex" type="radio" value="female" /> жен.</td>
</tr>
<tr>
<td>Эл.адресі:</td>
<td><input type="text" name="email" size=12 value="e@mail" /></td>
</tr>
<tr>
<td>Жаңалықтарға жазылу:</td>
<td><input type="checkbox" name="subscribe" value="1" checked /></td>
</tr>
<tr>
<td><input name="invisible" type="hidden" value="hiddendata" /></td>
<td><input type="submit" value="OK" /> <input type="reset" value="Сброс" /></td>
</tr>
</table>
</form>
```



Логин:

Пароль:

Жынысы:

☐ ер. ☐ әйел.

Эл. адресі:

Жаңалықтарға жазылу:

☒

1-сурет – Тіркеу

1 –ші листингтегі форма дизайнына кестелік құрылым қолданылған. Кестелерді қолдану формамен жұмыс істеудің ыңғайлылығын бірнеше есеге арттырады.

## 2 Листинг. Кері байланыс

```
<form method="POST" name="feedback" action="/example.php"
  style="width: 576px; margin: 0 auto; padding: 0; font-style: normal;
  text-align: left; border: solid 1px silver; background-color: #EEE;">

<div style="padding: 6px 2px;"> <!-- begin wrapper -->

<div style="clear: both;">
  <span style="width: 250px; float: left;">
    Ваше имя: <input type="text" name="username" size=16 />
  </span>
  <span style="width: 250px; float: right; text-align:right;">
    Эл. почта: <input type="text" name="email" size=16 />
  </span>
</div>

<div style="clear: both;">
  Укажите степень важности вопроса:
  <select name="priority" style="width: 250px; float: right;">
    <option>Обычный</option>
    <option>Важный</option>
    <option>Критичный</option>
    <option>Риторический</option>
  </select>
</div>

<textarea name="message" rows=5 cols=30
  style="clear: both; width: 560px;" placeholder="Ваш вопрос..."></textarea>

<div style="text-align: right;">
  <input type="submit" value="Отправить" />
  <input type="reset" value="Очистить" />
</div>
</div> <!-- end wrapper -->
</form>
```

Ваше имя:

Эл. почта:

Укажите степень важности вопроса:

Ваш вопрос...

Обычный  
Обычный  
Важный  
Критичный  
Риторический

Отправить Очистить

2-сурет – Кері байланыс

HTML тілі `<Input>` тәгі сияқты, және басқа да басқару элементтер тегтерін ұсынады, мысалы, `<textarea>` бірнеше жолдан тұратын мәтіндік өріс, және де тізім (`<select>`) [11]. Кері байланыс үшін құрылған қарапайым формада осы айтылған элементтерді көркемдеп қолдану 2-ші суретте мысал ретінде келтірілген.

3Листинг. Файлды жүктеуге арналған форма.

```
<form name="upload" action="/example.php"
  method="POST" enctype="multipart/form-data">
  <p>Укажите файл для загрузки:<br />
  <input type="file" name="filename" /></p>
  <input type="submit" value="OK" />
</form>
```

Форманы асинхронды түрде өңдеу.

Бүгінде web формалардан алынатын мәліметтерді өңдеуде AJAX асинхронды технологиясы кеңінен қолданылады, себебі ол қайта жүктеусіз-ақ web парақтарды жаңартуға мүмкіндік береді[4].

4Листинг. Жүктелген файлдарды өңдеу.

```
<?php
$uploadaddir = '/files';

foreach ($_FILES as $key=>$val) {
    // выполнять обработку, если файл загружен без ошибок
    if ($_FILES[$key]["error"] == UPLOAD_ERR_OK) {
        $from = $_FILES[$key]["tmp_name"]; // временное имя
        $to = $_FILES[$key]["name"]; // исходное имя
        // перемещение из временного в постоянный каталог
        move_uploaded_file($from, "$uploadaddir/$to");
    }
}
?>
```

Бір web-парақта орналасатын формалар саны шектелмейді, бірақ та бір форманың екінші бір форманың ішіне кіріп кетпеуін қадағалап отыру керек. Формалар арқылы тұтынушыдан жалпы мәтін түрінде ақпарат сұрап алуға, "иә/жоқ" деген жауаптың бірін таңдауға немесе бірнеше жолдың біріне тоқтауға болады [11]. Формаларды әртүрлі мақсаттарда қолдану мүмкіндігі қарастырылады. Формалар арқылы тұтынушыдан жалпы мәтін түрінде ақпарат сұрап алуға, "иә/жоқ" деген жауаптың бірін таңдауға немесе бірнеше жолдың біріне тоқтауға болады. Формаларды әртүрлі мақсаттарда қолдану мүмкіндігі бар. Мысал ретінде, сайтқа кірген

оқырмандардың ол туралы өз пікірлерін формаға енгізуі туралы айтуға болады, жалпы HTML формаларын пайдалану аймағы алуан түрлі болып келеді.

Қорыта келе, түрлі технологияларды пайдаланып, web формаларды басқарудың тиімді және ұтымды тұстарын көрсеттік.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Дронов В. «PHP и MySQL» Санкт Петербург 2005г
- [2] Котеров Д.В., Костарев А.Ф. PHP5. СПб.: БХВ-Петербург, 2006.-1120с.:ил.
- [3] Шапошников. PHP 5.1 : учебный курс. СПб [и др.] : "Питер", 2007. — 192 с.
- [4] Харрис Э. PHP/MySQL для начинающих./Пер. с англ.-М КУДИЦ-ОБРАЗ, 2005-384с.
- [5] Стивен Хольцнер. PHP в примерах Пер. с англ.-М.:000 «Бином-Пресс», 2007г.-352с:-ил.
- [6] О.Н.Рева. HTML. Просто как дважды два. Москва: Эксмо, 2009. – 256с.
- [7] С.Велихов. Справочник по HTML 4.0. Серия книг «Руководство по работе: советы, хитрости, трюки и секреты». Москва: Бук-пресс, 2009. – 412с.
- [8] Е.Л.Полонская. Язык HTML. Самоучитель.: - М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 320с.
- [9] Дронов Владимир. «HTML 5, CSS 3 и Web 2.0. Разработка современных Web-сайтов», М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 320с.
- [10] Крайнак Джо. «Создание Web-страниц» Москва: Бук-пресс, 2008.
- [11] Глушаков С. В., Жакин И. А., Хачиров Т. С., «Программирование Web-страниц. JavaScript. VBScript»
- [12] Макфедрис, Пол. «Создание Web-страниц. Полное руководство»
- [13] Айзекс С., «Dynamic HTML. Секреты создания интерактивных Web - страниц» М.: Издательский дом «Вильямс», 2008.

#### REFERENCES

- [1] Dronov V. «PHP and MySQL» St. Petersburg 2005
- [2] Koterov DV Kostarev AF PHP5. SPb.: BHV-Petersburg, 2006.-1120s.: Il.
- [3] Shaposhnikov. PHP 5.1: Training Course. St. Petersburg [et al.], "Peter", 2007. - 192 with.
- [4] E. Harris PHP / MySQL for beginners. / Trans. Anglo-M Kudits image, 2005-384s.
- [5] Steven Holzner. PHP examples Pere. with angl.-M.: 000 "Bean-Press" 2007g.-352s: yl.
- [6] O.N.Reva. HTML. Just as ABC. Moscow: Eksmo, 2009. - 256s.
- [7] S.Velikhov. Guide to HTML 4.0. A series of books "Manual work: tips, tricks, tricks and secrets." Moscow: Buk-press, 2009. - 412c.
- [8] E.L.Polonskaya. HTML language. : Tutorial - M.: Publishing House "Williams", 2003. - 320C.
- [9] Vladimir Dronov, «HTML 5, CSS 3, and Web 2.0. Development of Web-sites today, "M.: Publishing House" Williams", 2003. - 320C.
- [10] Joe Kraynak, "Creating Web-pages" Moscow: Buk-press in 2008.
- [11] Glushakov SV, Zhakin IA, Khachirov TS, "Programming of Web-pages. JavaScript. VBScript »
- [12] Makfedris, Paul, "Creating Web-pages. Complete Guide "
- [13] S. Isaacs, «Dynamic HTML. Secrets of creating interactive Web - pages of "M.: Publishing House" Williams ", 2008.

#### ТЕХНОЛОГИЯ СОЗДАНИЯ WEB-ФОРМ

У.Б. Утебаев, К.У. Есентаев, Н.Д. Дархан

Казахский государственный женский педагогический университет

**Ключевые слова:** форма, web-сайт, HTML, PHP, POST, GET, method, action.

**Анотация.** В статье рассмотрена работа с тегами элементов управления для web- форм. Был осуществлен поиск правильных путей, увеличения эффективности применения форм, использования всех возможностей основы HTML и языков PHP. Рассмотрены вопросы создания технологии web-форм для web-сайта. В HTML-формы являются одним из наиболее важных элементов сайта. С помощью формы отправляют данные для обработки на сервер, которые вводятся пользователями. Основной задачей формы является регистрация сайта, возможность высказать мнение и отзывы, обратная связь - ответы на вопросы, диалог, голосования и загрузка файлов. Итак, форма в HTML создается с помощью спаренных тегов <form> </form>. Остальные элементы формы расположен в между спаренными тегами. Кнопки не в состоянии действовать самостоятельно, поэтому их действия зависят от создающихся форм. Формы используются для различных целей.

Поступила 15.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 79–83

UDC 519 MC T.A.

## ITERATIVE METHODS FOR SOLVING DIFFERENCE EQUATIONS

L. Zhunussova<sup>1</sup>, K. Zhunussov<sup>2</sup><sup>1</sup> Kazakh national pedagogical university named after Abai, Almaty, Kazakhstan<sup>2</sup> Almaty university of Energy and Communications, Almaty, Kazakhstan  
[zhumakanova62@mail.ru](mailto:zhumakanova62@mail.ru)**Key words:** solution, iterative methods, equation, node, pattern.**Abstract:** In this paper some iterative methods for solving differential equations with partial derivatives are presented. In the course of solving this problem, we used the difference method and a grid pattern type cross. Numerical results obtained by the program and the results are analyzed.

The idea of the method is that fine grid problem is solved by the usual iterative method once and then from the resulting solution by converting obtain a solution on the coarse grid. And using a conventional direct method gets the error solutions on the coarse grid. Then, using the inverse transformation error of the solution to obtain a fine grid and add it to the previously obtained decision on a fine grid.

One way of solving stationary elliptic problems, including the problem, is their reduction to the decision of a fictitious non-stationary problem (hyperbolic or parabolic), the solution found that for sufficiently large values of the time it is close to the solution of the original tasks. Method is actually an iterative process of solving the problem with the conditions, and at each iteration of the unknown function values obtained by numerical solution of an auxiliary problem. In the theory of difference schemes it shows that the iterative process converges to the solution of the original problem, if there is a steady-state solution.

**Introduction.** For the solution of the difference of the Dirichlet problem for the Poisson equation in a rectangle the most economical are direct methods. Currently, there are routines in the algorithmic language for solving Laplace equations in a rectangle with boundary conditions of the three types, as well as with mixed boundary conditions. However, in the case when the domain is not a rectangle, or consider equations with variable coefficients, iterative methods are applied. In fact, the direct methods are economical only when the variables are separated.

Consider the theory of iterative methods for the equation  $Ay = \varphi$ ,  $Ay = \varphi$ , where  $A = A^* > 0$ . Comparison of different methods was carried out for a model one-dimensional problem on the interval  $0 \leq x \leq 1$ :

$$y_{xx}^- = -f(x), \quad x = ih, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = y_N = 0.$$

$$0 \leq x \leq 1:$$

$$y_{xx}^- = -f(x), \quad x = ih, \quad 0 < i < N, \quad y_0 = y_N = 0.$$

For it the operator has the form. The boundaries are determined by the operator constant

$$\delta = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \Delta = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2}.$$

The number of iterations for the considered methods depends on the relation

$$\eta = \frac{\delta}{\Delta} = tg^2 \frac{\pi h}{2} \approx \frac{\pi^2 h^2}{4}. \quad (1)$$

Let us now consider as a model two-dimensional Dirichlet problem in the unit square on a square  $(l_1 = l_2 = 1)$  grid with a step of  $h = h_1 = h_2$ :

$$Ay = -\overset{\circ}{y}_{x_1 x_1} - \overset{\circ}{y}_{x_2 x_2} = \varphi, \quad \varphi, y \in H. \quad (2)$$

The number  $N$  of intervals in each direction is equal, so that  $h = 1/N$ .

Limits  $\delta$  and  $\Delta$   $A$  operator found in attitude  $\eta = \delta/\Delta$  coincides with (1). This implies that the number of iterations is not dependent on the number of measurements (if  $h_1 \neq h_2$   $l_1 \neq l_2$  it is weakly dependent). Therefore, those estimates of the number of iterations of the various iterative methods that we have received for the one-dimensional model problem, valid for the two-dimensional case.

In the case of non-square grid number of iterations for the two-dimensional problem can be different from the number of iterations for the one-dimensional problem. We consider here only the alternating triangular iterative method for solving the Dirichlet problem of the difference (2).

**2. Statement of the problem.** Referring to the problem (2). The operator  $A$  is a sum  $A = A_1 + A_2$

$$\text{Where } A_1 y = \frac{y_{x_1}^-}{h_1} + \frac{y_{x_2}^-}{h_2}, \quad A_2 y = -\frac{y_{x_1}}{h_1} - \frac{y_{x_2}}{h_2},$$

and set  $D = E$ . Pairing  $A_1$  and  $A_2$ :  $A_2 = A_1^*$  established by comparing their matrices or by using the first difference of Green's formula:  $(A_1 y, v) = (y, A_1^* v) = (y, A_2 v)$ .

To obtain the equation determining  $y_{R+1} = (E + \omega A_1)(E + \omega A_2)y_{R+1} = F_R$ ,

$$F_R = B \overset{\circ}{y}_R + \tau_{R+1} (\Lambda y_R + \varphi) \quad (y_R = \mu, \quad \overset{\circ}{y}_R = 0 \quad x \in \gamma_h)$$

Values  $y_{R+1}$  are consistently from the equation

Hence we obtain the formula Hence we obtain the formula

$$\overset{\circ}{y}_R(i_1, i_2) = \left[ \frac{\overset{\circ}{\chi}_1 y_R(i_1 - 1, i_2) + \overset{\circ}{\chi}_2 y_R(i_1, i_2 - 1) + F_R(i_1, i_2)}{(1 + \chi_1 + \chi_2)} \right],$$

$$\chi_1 = \frac{\omega}{h_1^2}, \quad \chi_2 = \frac{\omega}{h_2^2},$$

$$\overset{\circ}{y}_{R+1}(i_1, i_2) = \left[ \frac{\overset{\circ}{\chi}_1 \overset{\circ}{y}_{R+1}(i_1 + 1, i_2) + \overset{\circ}{\chi}_2 \overset{\circ}{y}_{R+1}(i_1, i_2 + 1) + \overset{\circ}{y}_R(i_1, i_2)}{(1 + \chi_1 + \chi_2)} \right]. \quad (3)$$

To identify  $\overset{\circ}{y}_R(i_1, i_2)$ , select a node  $i_1 = 1, i_2 = 1$  in the left rectangle; Then the remaining two nodes  $(i_1, i_2 - 1), (i_1 - 1, i_2)$  and  $\{(i_1, i_2), (i_1 - 1, i_2), (i_1, i_2 - 1)\}$  template are on the boundary and, therefore  $\overset{\circ}{y}(i_1 - 1, i_2) = \overset{\circ}{y}(i_1, i_2 - 1) = 0$  known. Knowing  $y_R$  when  $i_1 = 1, i_2 = 1$  successively  $\overset{\circ}{y}_R$  find  $i_1 = 2, 3, \dots, N_1 - 1$  and  $i_2 = 1$  when (the first line). Next  $i_2 = 2$ , think and find  $\overset{\circ}{y}_R$  the series on the second line at  $i_1 = 1, 2, \dots, N - 1$ . To determine to  $\overset{\circ}{y}_{R+1}$  perform calculations

$\{(i_1, i_2), (i_1 + 1, i_2), (i_1, i_2 + 1)\}$  on the template in columns from top to bottom: fix  $i_1 = N_1 - 1, N_1 - 2, \dots, 2, 1$ , and at each  $i_1$  change  $i_2 = N_2 - 1, N_2 - 2, \dots, 2, 1$ . Starts counting  $y_{R+1}$  from the node  $(i_1 = N_1 - 1, i_2 = N_2 - 1)$  in the upper right corner. It should be noted that the account can also be conducted in rows from right to left: fix  $i_2 = N_2 - 1, N_2 - 2, \dots, 2, 1$  and at each  $i_2$  change  $i_1 = N_1 - 1, N_1 - 2, \dots, 2, 1$ . However, the calculation  $y_R$  can be carried out not by rows and columns upwards. It can be seen from the formulas themselves.

The calculations are carried out by the recurrence formulas (11); Account apparently stable. An algorithm of this type, as already noted, an algorithm called the running computation.

We count the number of arithmetic operations per grid point: calculation requires 10 additions and 10 multiplications; for a given computation requires 4 operations of addition and multiplication operations 6. Total required for the determination of a single node to spend 14 additions and 16 multiplications. The number of operations can be reduced when storing in memory not just one but two sequences  $\{y_R\}$  and  $\{w_{R+1}\}$  for determining  $y_{R+1}$  the use of the algorithm

$$(E + \omega A_1)w_{R+1/2} = \Lambda y_R + f, \quad (E + \omega A_2)w_{R+1} = w_{R+1/2},$$

$$y_{R+1} = y_R + \tau_{R+1} w_{R+1}.$$

In this case, the transition  $y_R$  from  $y_{R+1}$  a fairly 10 additions and 10 multiplications per node.

For example, Find a continuous function  $u(x, y)$  satisfying the rectangular area  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  within the Laplace equation  $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$  and taking on the boundary of the set values  $\Omega$ ,  $u(0, y) = f_1(y)$ ,  $y \in [0, b]$ ,  $u(a, y) = f_2(y)$ ,  $y \in [0, b]$ ,

$$u(x, 0) = f_3(x), \quad x \in [0, a], \quad u(x, b) = f_4(x), \quad x \in [0, a],$$

where  $f_1, f_2, f_3, f_4$  - given functions,

$f_1 = y, f_2 = y + e, f_3 = e^x, f_4 = e^{x+1}$ . We assume that  $u(x, y)$  is continuous on the boundary  $\Omega$ , etc.  $f_1(0) = f_3(0)$ ,  $f_1(b) = f_4(0)$ ,  $f_2(0) = f_3(a)$ ,  $f_2(b) = f_4(a)$ . Choosing steps  $h, l$   $x$  and  $y$  respectively, we construct a grid  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ ,  $y_j = jl$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  where  $x_n = nh = a$ ,  $y_m = ml = b$ .

Introducing the notation  $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ , we approximate  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  and  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  the partial derivatives in each internal node of the grid central second order

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} + O(l^2) \text{ and replace the Laplace equation finite-difference}$$

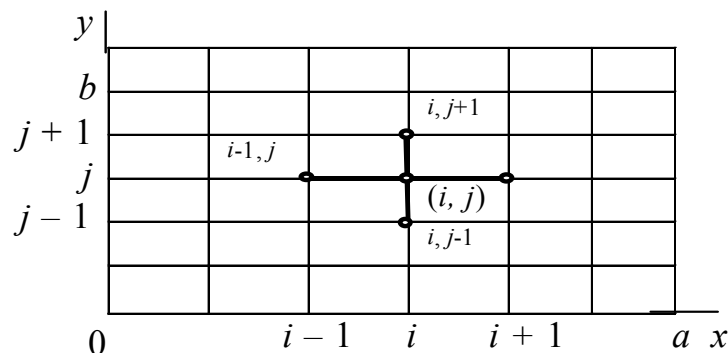
$$\text{equation } \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{l^2} = 0 \quad (4)$$

$i = 1, \dots, n-1$   $j = 1, \dots, m-1$  Accuracy replacement of the differential equation is of the difference  $O(h^2) + O(l^2)$ . Equation (4) together with the values in the boundary nodes form a system of linear

algebraic equations relatively to approximate  $u_{ij}$  values of  $u(x, y)$  at the grid points  $(x_i, y_j)$ . The simplest form of this system is at:  $u_{ij} = (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) / 4$  (5)

$$u_{i0} = f_3(x_i), u_{im} = f_4(x_i), u_{0j} = f_1(y_j), u_{nj} = f_2(y_j), \\ i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m-1.$$

Upon receipt of the grid equations (5) was used circuit nodes shown in Fig. 1. The set of nodes used to approximate equation at a point called the template. This paper uses the template of the "cross".



Numerical solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a rectangle is to find approximate values  $u_{ij}$  of the unknown function  $u(x, y)$  in the internal nodes of the grid. To determine  $u_{ij}$  the quantities required to solve a system of linear algebraic equations (5).

In this paper, it is solved by the Gauss-Seidel method, which consists in building a sequence of iterations of the form  $u_{ij}^{(s+1)} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j}^{(s+1)} + u_{i+1,j}^{(s)} + u_{i,j+1}^{(s)} + u_{i,j-1}^{(s+1)})$ . If  $S \rightarrow \infty$  the sequence  $u_{ij}^{(s)}$  converges to the exact solution of the system (5). As a condition to the end of the iteration process can take

$$\max |u_{ij}^{(s)} - u_{ij}^{(s+1)}| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m-1.$$

**Conclusion.** Thus, the error of the approximate solutions obtained by the grid method, consists of two errors: errors of approximation of differential equations by difference; error arising from the approximate solution of the system of difference equations (5). It is known that the difference scheme described here has the property of stability and convergence. Stability of the scheme means that small changes in initial conditions lead to small changes in the solution of the difference problem. Only such schemes should be applied in the actual calculations. Convergence of the scheme means that as the grid spacing to zero ( $h \rightarrow 0$ ), the solution of the difference problem tends in some sense to the solution of the original problem. Thus, by choosing a sufficiently small step  $h$ , can be arbitrarily accurately solve the original problem.

## REFERENCES

- [1] Buslov B.N., Jacovlev D.M. Numerical Methods. CPb: BXV-Pterburg, **2001**, 520p. (In Russ.).
- [2] George W. Collins, II. Fundamental Numerical Methods and Data Analysis, **2003**, 520p. (In Eng.).
- [3] Formalev B.F., Reveznikov D.L. Numerical Methods., CPb: BXV-Pterburg, **2004**, 400p. (In Russ.).
- [4] Petrov I.B., Lobanov A.B. Lectures on Computational Mathematics. M: BINOM **2006**, 523 p. (In Russ.).
- [5] Mathew J., Fink C. Numerical Methods. Using MatLab. M.: Biliams, **2001**. – 720 p. (In Russ.).
- [6] Gelman B.J. Mathematical problem solving resources with Excel.M.:Piter, **2003**, 230p. (In Russ.).
- [7] Mxchalaj Zh.I., Osipov J.B. Foundations of modern technology Excel. M.: Piter, **2002**, 264p. (In Russ.).
- [8] Busin A.J. Computer workshop on numerical methods and mathematical modeling. M.: Publ. PFUR, **2001**, 230p. (In Russ.).
- [9] Alekseev E.P., Chesnokova O.B. TURBO Pascal. Numerical methods.M':NT.Press, **2004**, 456p. (In Russ.).

- [10] Zhunussova L.Kh., Toiganbaeva N.A. *Success of modern natural science*, **2015**, 1, 76-80p. (In Russ.).  
 [11] Zhunussova L.Kh. *Numerical Methods*. Almaty.: Nur-print, **2013**, 119p. (In Russ.).  
 [12] Galushko J.I., Timohina A.O. *Numerical Methods*. M.: MTIPP, **2000**, 234p. (In Russ.).  
 [13] Berzhibithki B.M. *Bases numerical methods*. M.: Byshaj shoal, 2004, 848p. (In Russ.).  
 [14] Porshnev C.B., Belenkova I.B. *Numerical Methods in MathCad*. SPb: BXV-Peterburg, **2008**, 320p. (In Russ.).  
 [15] Abdullaev B.M., Aida-Zade K.P. *Zh.bychil.matem. i matem.fisiki*, **2004**, 44, 9, 1585-1586p. (In Russ.).  
 [16] Bakirova E.A. *Mathematical journal*, **2005**, 5, 3, 25-34p. (In Russ.).  
 [17] Kadirbaeva Zh.M. *Mathematical journal*, **2009**, 9, 2, 64-70p. (In Russ.).  
 [18] Assanova A.T., Dzhumabaev D.S. *News of NAS RK*, **2002**, 3, 20-26p. (In Russ.).  
 [19] Dzhumabaev D.S. *Zh.bychil.matem. i matem.fisiki*, **1989**, 29, 1, 50-66p. (In Russ.).  
 [20] Assanova A.T., Dzhumabaev D.S. *Differential equations*, **2003**, 39, 10, 1343-1354p. (In Russ.).

## ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЕТОЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Х. Жунусова, К.Х. Жунусов

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан  
 Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** решение, итерационный метод, узел, сетка.

**Аннотация.** В этой статье некоторые итерационные методы для решения дифференциальных уравнений с частными производными. В ходе решения этой проблемы мы использовали метод разницы и крест сетки типа рисунок. Анализируются численные результаты, полученные с помощью программы.

Идея метода состоит в том, что проблема решается обычным итерационным методом один раз и затем из полученного решения путем преобразования получить решение на грубой сетке. И с помощью обычного метода прямого получает решения об ошибках на грубой сетке. Затем, используя обратную ошибку преобразования решения, чтобы получить мелкую сетку и добавить его к полученному ранее решения на мелкой сетке. Одним из способов решения стационарных эллиптических задач, в том числе и краевой задачи, является их сведение к решению некоторой фиктивной нестационарной задачи (гиперболической или параболической), найденное решение которой при достаточно больших значениях времени  $t$  близко к решению исходной задачи. Такой способ решения называется методом установления. Метод установления фактически представляет итерационный процесс решения задачи с условиями, причем на каждой итерации значения искомой функции получаются путем численного решения некоторой вспомогательной задачи. В теории разностных схем показано, что этот итерационный процесс сходится к решению исходной задачи, если такое стационарное решение существует.

## ТОР ТЕНДЕУЛЕРІНІ ИТЕРАЦИЯЛЫҚ ӘДІСПЕН ШЫҒАРУ

Л.Х.Жунусова<sup>1</sup>, К.Х. Жунусов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті,

<sup>2</sup>Алматы энергетика және байланыс университеті

**Түйін сөздер:** шешім, итерациялық қадамдар, тор, түйін.

**Аннотация.** Бұл мақалада дербес туындылы дифференциалды тендеулерді шешудің итерациялық әдістері қарастырылған. Есепті шешу барысында біз айырым мен крест-торын қолдандық. Компьютерлік программамен алынған нәтижелер сараланды.

Бұл әдісте тордағы мәселе қарапайым болып шешіледі де, оны күрделі торға ауыстырады. Одан кейін қарапайым тормен күрделі торды бір-бірімен жалғайды.

Бұл әдіс шектік есептерді шығару барысында көптеп қолданылады. Берілген есепті қарапайым есептер түріне келтіріп алып, содан кейін жіберілген қаталықтарды ескере отырып берілген есептің шешіміне жақындатады. Бұл әдіс әлбетте бірнеше итерацияны ұйымдастырумен жүзеге асады. Әрбір итерациядағы алынған шешімге алдыңғы қадамдағы шешім әсер етіп отырады. Алынған шешімдердің жинақтылығын дәлелдей білу керек.

Поступила 15.03.2016 г.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 84–91

UDC 532.133, 371.62, 372.8.002

**MODEL OF THE FORM OF THE ORGANISATION  
OF COMPUTER LABORATORY OPERATION  
OF THE FREE MECHANICAL OSCILLATIONS**

**K.A. Kabylbekov, P.A. Saidakhmetov, G.SH. Omashova,  
G.S. Serikbaeva, ZH.N. Suyerkulova**

M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan  
[kenkab@mail.ru](mailto:kenkab@mail.ru)

**Key words:** a pendulum, oscillator, natural frequency, amplitude, a phase, a relaxation, rigidity.

**Abstract.** The model of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the free mechanical oscillations on computer model of a mathematical pendulum and a load anchored on a spring is offered. The form model includes short data from the theory, control questions for checkout of readiness of performance of operation by the pupil, fact-finding assignments with computer model, problems with the subsequent computer checkout of answers, the observational, research and creative assignments.

In short data from the theory requirements of their occurrence, the equation of the free oscillations in the presence of a friction and without it, natural frequency of oscillations, definitions and decay factor and decay time expressions, dependence of amplitude of free fading oscillations from time are given definition of the free mechanical oscillations.

Fact-finding assignments with computer model include observation of dependence of an angle of deflection and velocity of a motion of a mathematical pendulum from time in the presence of a friction and without it and their comparison, observation of change potential and a kinetic energy from time in the presence of a friction and without it. Assignments with the subsequent computer checkout of answers provide the prestress solution of problems on a paper with embodying of the given requirements of oscillations and comparison of answers, definition of a continuance of oscillations in the presence of a friction and without it, definition of quantity of amplitude oscillations through one, two or three continuances at the given decay factor. The prestress solution of problems surrenders together with the form. The observational and research assignments include embodying of experience on computer model on the given requirements, continuance and oscillation frequency definitions, an establishment of dependence of vibration amplitude from a decay factor

Assignments are given much. Performance to one pupil is unessential all of them. The teacher can pick up to the pupil taking into account its ability or offer other similar assignments. It is necessary to pay special attention of pupils on importance of performance of research and creative assignments. Upon termination of a lesson the pupil fills the form and sends by e-mail to the teacher or hands over immediately to it. At a following lesson the teacher discusses answers of pupils and estimates operations.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**ЕРКІН МЕХАНИКАЛЫҚ ТЕРБЕЛІСТЕРДІ  
ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ  
ЖҰМЫСТЫ ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ БЛАНКІ ҮЛГІСІ**

**К.А. Қабылбеков, П.А. Саидахметов, Г.Ш. Омашова,  
Г.С. Серікбаева, Ж.Н. Сүйерқұлова**

М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Түйін сөздер:** маятник, осцилятор, өздік жиілік, амплитуда, фаза, қатандық.

**Аннотация.** Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі ұсынылған. Үлгіде теориядан қысқаша мәліметтер, жұмысты орындауға оқушылардың дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары, компьютерлік модельмен танысу тапсырмалары, жауабын компьютер арқылы тексеруге арналған есептер, тәжірибелік, зерттеулік және шығармашылық тапсырмалар қамтылған.

Теориядан қысқаша мәліметтерде еркін механикалық тербелістің анықтамасы және оның пайда болу шарттары, үйкеліс жоқ және бар жағдайдағы еркін тербелістер теңдеулері, өздік тербеліс жиілігінің өрнегі мен өшу коэффициенті мен өшу уақыты өрнектері, еркін өшпелі тербеліс амплитудасының уақытқа тәуелдігі берілген.

Компьютерлік модельмен танысу тапсырмаларында үйкеліс жоқ және бар жағдайлардағы маятниктің ауытқу бұрышы мен қозғалыс жылдамдығының уақытқа тәуелдігін бақылау, потенциалдық және кинетикалық энергияның уақытқа байланысты өзгерулерін бақылау қарастырылған.

Жауаптарын компьютер көмегімен тексеретін есептерде алдымен есептерді қағазға шығарып, соңынан есеп шарттарын компьютерлік моделде іске асырып, жауаптарын салыстыру арқылы дұрыстығын тексеру қарастырылған және үйкеліс бар және жоқ жағдайлардағы тербеліс периодын анықтау, өшу коэффициентінде берілген кездегі бір, екі немесе үш периодтан кейінге тербеліс амплитудасының өзгерісін анықтау қарастырылған. Қағазда шығарылған есептер бланкімен бірге тапсырылады. Тәжірибелік және зерттеулік тапсырмаларда компьютерлік моделде берілген шарттарды іске асыру қарастырылып, тербеліс жиілігі мен периодын анықтау, тербеліс амплитудасының өшу коэффициентіне тәуелдігін анықтау қарастырылған.

Тапсырмалар артығымен берілген. Оқытушы оқушының қабілетін ескере отырып тандап бере алады немесе ұқсас тапсырмалар ұсынуына болады. Оқушылардың зерттеулік және шығармашылық тапсырмаларды орындауына аса көңіл аударған жөн. Сабақ соңында оқушылар өздерінің бланкілерін толтырып электронды пошта арқылы немесе оқытушының өзіне тапсыруы керек. Келесі сабақта оқытушы жауаптарды талқылап жұмыстарды бағалайды.

Қазақстан Республикасының Президенті-Елбасы Н.А.Назарбаев ««Қазақстан-2050–стратегиясы» - қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты» атты Қазақстан халқына Жолдауында: Қазақстан 2050 жылы 30 дамыған мемлекеттер қатарына енуі керек деп атап көрсетті. Дамып келе жатқан елдер арасында мұндай қатарда болуы үшін бәсекелестік қатаң болады. Ұлт глобалдық экономикалық бәсекелестікке дайын болғанда ғана мұндай қатарда бола алады. Біз, аса маңызды мақсаттарымызды естен шығармай, мақсатты және шабытты еңбек етуіміз керек: қазіргі заманға сай нәтижелі білім мен денсаулық сақтау жүйесін құру. Бәсекеге қабілетті дамыған мемлекет болу үшін біз сауаттылығы жоғары елге айналуымыз керек. Бізге оқыту әдістемелерін жаңғырту және өңірлік мектеп орталықтарын құра отырып, білім берудің онлайн-жүйелерін белсене дамыту керек болады. Біз қалайтындардың барлығы үшін қашықтан оқытуды және онлайн режимінде оқытуды қоса, отандық білім беру жүйесіне инновациялық әдістерді, шешімдерді және құралдарды қарқынды енгізуге тиіспіз [1].

Президент жолдауында келтірілген тапсырмаларды орындау үшін М.Әуезов атындағы мемлекеттік университетінің «Физиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» кафедрасы соңғы оқу жылдарында оқу үрдісіне "Білімдегі ақпараттық технологиялар", "Физиканы оқытудағы ақпараттық технологиялар" және "Электронды оқулықтарды қолдану әдістемесі" курстарын енгізді. Курстың мақсаты: студент-болашақ физика мұғалімдерін оқу үрдісінде, өздерінің кәсіпшілік қызметінде және біліктілігін жоғарылатуында, оқу үрдісі мен сыныптан тыс жұмыстарды және компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруда болашағы зор білім беру технологияларын шығармашылық және тиімді пайдалануға дағдыландыру.

Оқу материалдары базасын жасауда студенттер мен магистранттар белсенді қатыстырылады. Авторлар құрастырған бірқатар демонстрациялық тәжірибелердің компьютерлік моделдерін оқу үрдісінде пайдалану және компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруға арналған бланкі үлгілері туралы біз бұрын жазғанбыз [2-13].

Мақалада студенттерге, магистранттарға, мектеп мұғалімдеріне көмекші құрал ретінде-оқушылардың [14] ресурсын пайдаланып «Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастыруда» қандай тапсырмалар беруге болатынын және оқушыларға алдын ала берілетін компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісін ұсынамыз.

**Жұмыс тақырыбы:** Еркін тербелістерді зерттеу.

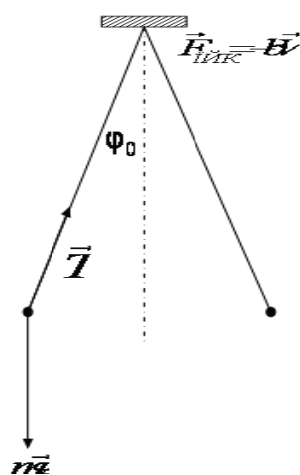
**Жұмыс мақсаты:** Маятниктің еркін тербелістерін бақылау. Тербеліс периодын, релаксация уақытын анықтау.

**Теориядан қысқаша мәлімет.**

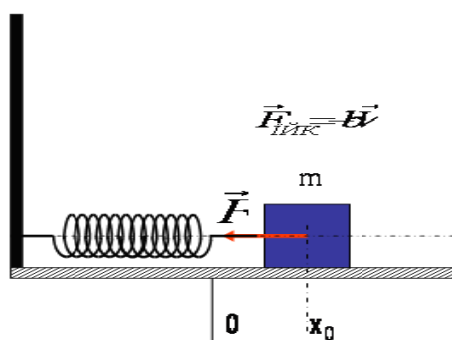
Тепе-теңдік күйден ажыраған жүйеде ішкі күштер әрекетінен болатын тербелістер еркін тербелістер деп аталады. Еркін тербелістер гармоникалық заңға сәйкес жүруі үшін жүйені тепе-теңдікке қайтаратын күш шамасы  $x$ -ығысуға тура пропорционал болуы керек. Мұндай күштер квазисерпімді деп аталады. Бұл шартты математикалық маятник үшін вертикалдан ауытқудың өте аз бұрышында пайда болатын қайтару күші қанағаттандырады.

$$F = -mg \sin \varphi \approx mg \varphi = -mg \frac{x}{L} = -kx,$$

мұндағы  $x=L\varphi$ -маятниктің тепе-теңдік жағдайынан сызықтық ауытқуы,  $L$ - маятниктік ұзындығы.



1-сурет



2-сурет

Математикалық маятниктің (1-сурет) өшу жоқ кездегі қозғалысы гармоникалық тербеліс теңдеуімен сипатталады

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{немесе} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0$$

мұндағы  $\omega_0$  – тербелістің өзіндік жиілігі. Математикалық маятник үшін

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Маятниктің кіші тербелісі гармоникалық заңға сәйкес жүреді

$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , мұндағы  $\varphi_0$  –тербеліс амплитудасы,  $\alpha$ - тербелістің алғашқы фазасы.

Бұл шамалар тербелістің алғашқы шарттарына тәуелді. Гармоникалық тербелістерде кинетикалық және потенциалдық энергиялар периодты өзгеріп тұрады, бірақ тұйық жүйенің толық механикалық энергиясы өзгермейді. Маятниктің кіші тербелісі үшін

$$E = \frac{mV^2}{2} + mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{mgx^2}{2L} \quad (E_P)_{\max} = mgh_0 = \frac{mgx_0^2}{2L}$$

$$(E_K)_{\max} = \frac{mV_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} = (E_P)_{\max} = E$$

Гармоникалық тербелістерде кинетикалық және потенциалдық энергиялар бір – біріне периодты ауысып тұрады. Егер жүйеде үйкеліс күштерінің әрекеті болса, онда жүйенің толық энергиясы төмендеп тербеліс өшпелі тербеліске айналады. Егер үйкеліс күші  $F_{\text{үйк}} = -bV$  жылдамдыққа тура пропорционал болса, онда тербелістің бұрыштық амплитудасы  $\Phi$  экспоненциалды заңдылықпен өзгереді, яғни

$\Phi = \varphi_0 e^{-\delta t}$ , мұндағы  $\delta = b/2m$  - тербелістің өшу коэффициенті.  $\tau = 1/\delta$  - шамасы тербелістің өшу уақыты деп аталады.  $\Delta t = \tau$  - уақыт аралығында тербеліс амплитудасы е=2,7 есе кішірейеді.

Еркін тербелістің тағы бір мысалы - серіппеге бекітілген жүк тербелісі (2-сурет). Еркін тербеліс гармоникалық заңға сәйкес болуы үшін денені тепе-теңдік күйге қатаратын күш шамасы  $x$ - дененің тепе-теңдіктен ығысуына тура пропорционал болуы керек. Бұл шартты серіппенің серпімді  $F = -kx$ . күші қанағаттандырады. Мұндағы  $k$ - серіппенің қаттылық коэффициенті. Осы шартты қанағаттандыратын күштер квазисерпімді күштер деп аталады. Өшу жоқ жағдайда серіппеге бекітілген жүк үшін Ньютонның екінші заңы төменгідей жазылады:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{немесе} \quad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Бұл теңдеу гармоникалық тербеліс теңдеуі. Величина называется собственной круговой частотой колебаний. Для груза на пружине  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  - шамасы тербелістің өзіндік жиілігі, ал  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  - тербелісті периоды.

Гармоникалық тербеліс төменгі заңға сәйкес жүреді  $x = x_0 \cos(\omega_0 t + \alpha)$ , мұндағы  $x_0$  - тербеліс амплитудасы,  $\alpha$  - тербелістің алғашқы фазасы. Бұл шамалар тербелістің алғашқы шарттарына тәуелді. Гармоникалық тербелістерде кинетикалық және потенциалдық энергиялар (үйкеліс күштері жоқ жағдайда) периодты өзгеріп тұрады, бірақ тұйық жүйенің толық механикалық энергиясы өзгермейді.

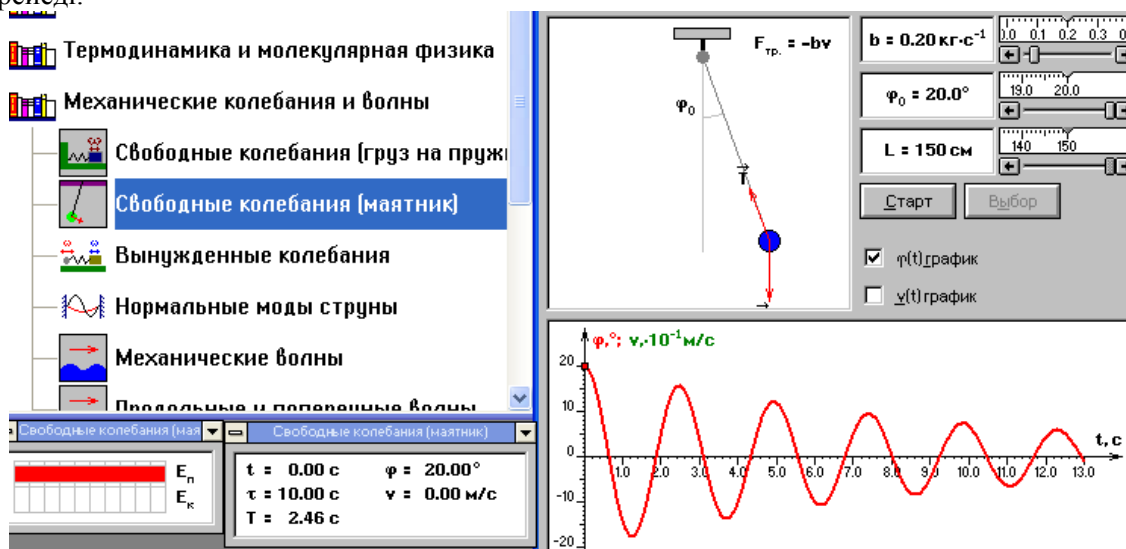
Серіппеге бекітілген жүк үшін

$$E = E_k + E_p = \frac{mV^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \quad (E_p)_{\max} = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2}$$

$$(E_k)_{\max} = \frac{mV_0^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x_0^2}{2} = (E_p)_{\max} = E$$

Егер жүйеде үйкеліс күштерінің әрекеті болса, онда жүйенің толық энергиясы төмендеп тербеліс өшпелі тербеліске айналады. Егер үйкеліс күші  $F_{\text{тр}} = -bV$  жылдамдыққа тура пропорционал болса, онда тербелістің бұрыштық амплитудасы  $A$  экспоненциалды заңдылықпен өзгереді, яғни

$A = x_0 e^{-\delta t}$ , мұндағы  $\delta = b/2m$  - тербелістің өшу коэффициенті.  $\tau = 1/\delta$  - шамасы тербелістің өшу уақыты деп аталады.  $\Delta t = \tau$  - уақыт аралығында тербеліс амплитудасы е=2,7 есе кішірейеді.



3-сурет

Сынып ..... Фамилиясы..... Есімі.....

**Оқушылардың жұмысты орындауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары.**

- ❖ Еркін тербелістерді сипаттаңдар. Жауабы:.....
- ❖ Квазикүштерді сипаттаңдар. Жауабы:.....
- ❖ Математикалық маятник деп нені айтады?. Жауабы:.....
- ❖ Математикалық маятниктің қайтару күші қандай шамаларға тәуелді? Жауабы:....
- ❖ Математикалық маятниктің және серіппеге бекітілген дененің кіші тербелісі үшін энергияның сақталу заңын жазыңдар. Жауабы:.....
- ❖ Серіппеге бекітілген дененің қозғалыс теңдеуін жазыңдар? Жауабы:.....
- ❖ Математикалық маятниктің кіші тербелісі үшін гармоникалық заңын жазыңдар?
- ❖ Тербелістің амплитудасы мен алғашқы фазасы қандай шамаларға тәуелді? Жауабы:
- ❖ Үйкеліс күшінің әрекетін сипаттаңдар. Жауабы:.....
- ❖ Үйкеліс күші бар кездегі тербеліс амплитудасының уақытқа байланысты өзгерісін сипаттаңдар. Жауабы:.....
- ❖ Тербелістің өшу коэффициенті қандай шамаларға тәуелді? Жауабы:.....
- ❖ Тербелістің өшу уақыты деп нені айтады? Жауабы:.....

### 1. Танысу тапсырмалары (3-сурет).

**1.1.** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Маятниктің потенциалдық және кинетикалық энергияларының өзгерістерін бақылаңдар.  $\varphi(t)$  және  $V(t)$  графиктерін салыстырыңдар. Бақылау нәтижелері:.....

**1.2.** Ұзындығы  $L=110$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Маятниктің потенциалдық және кинетикалық энергияларының өзгерістерін бақылаңдар.  $\varphi(t)$  және  $V(t)$  графиктерін салыстырыңдар. Бақылау нәтижелері:.....

**1.3.** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ , Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{ттрк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b= 0,20$  кг/с. Маятниктің потенциалдық және кинетикалық энергияларының өзгерістерін бақылаңдар.  $\varphi(t)$  және  $V(t)$  графиктерін салыстырыңдар. Бақылау нәтижелері:.....

**1.4.** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ , Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{ттрк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b= 0,60$  кг/с. Маятниктің потенциалдық және кинетикалық энергияларының өзгерістерін бақылаңдар.  $\varphi(t)$  және  $V(t)$  графиктерін салыстырыңдар. Бақылау нәтижелері:.....

**1.5.** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ , Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{ттрк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b= 1,00$  кг/с. Маятниктің потенциалдық және кинетикалық энергияларының өзгерістерін бақылаңдар.  $\varphi(t)$  және  $V(t)$  графиктерін салыстырыңдар. Бақылау нәтижелері:.....

**2. Жауабын компьютерлік тәжірибе арқылы тексеруге арналған есептер.** (Есептерді алдымен қағазға шығарып соңына компьютер көмегімен тексеріңдер. Нәтижелерін бланкімен бірге мұғалімге тапсырыңдар).

**2.1.** Гармоникалық осциллятор – Жер бетінде орналасқан ұзындығы белгісіз математикалық маятник. Тербеліс периоды 2,46 с болса, онда маятниктің ұзындығы қандай? Жауабы:.....

**2.2.** Гармоникалық осциллятор - Жер бетінде орналасқан ұзындығы белгісіз математикалық маятник. Тербеліс периоды 1,79 с болса, онда маятниктің ұзындығы қандай? Жауабы:.....

**2.3.** Гармоникалық осциллятор - Жер бетінде орналасқан ұзындығы белгісіз математикалық маятник. Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{ттрк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b= 0,60$  кг/с. Үш периодтан соң оның тербеліс амплитудасы қандай өзгереді? Жауабы:.....

**2.4.** Гармоникалық осциллятор - Жер бетінде орналасқан ұзындығы белгісіз математикалық маятник. Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Ауаның кедергі күші

жылдамдыққа ( $F_{\text{йк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b = 0,80$  кг/с. Бір периодтан соң оның тербеліс амплитудасы қандай өзгереді? Жауабы:.....

### 3. Тәжірибелік есептер.

**3.1.** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін кедергісіз тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Маятниктің тербеліс периоды мен бұрыштық жиілігін анықтаңдар. Жауабы:.....

**3.2.** Ұзындығы  $L=100$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін кедергісіз тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Маятниктің тербеліс периоды мен бұрыштық жиілігін анықтаңдар. Жауабы:.....

**3.3** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{йк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b = 2,00$  кг/с. Маятниктің тербеліс периодын және тербелістің өшу уақытын анықтаңдар. Жауабы:.....

**3.4** Ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник Жер бетінде еркін тербеледі. (1-сурет). Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{йк}} = -bV$ ) тура пропорционал және  $b = 1,60$  кг/с. Маятниктің тербеліс периодын және тербелістің өшу уақытын анықтаңдар. Жауабы:.....

### 4. Зерттеу тапсырмалары.

**4.1.** Гармоникалық осциллятор - Жер бетінде орналасқан ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник. Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{йк}} = -bV$ ) тура пропорционал. Үйкеліс коэффициентін  $b = 0,10$  кг/с пен  $b = 2,00$  кг/с аралығында өзгертіп бір периодтан кейінгі амплитуда өзгерісін анықтап, қорытынды жасаңдар. Қорытынды:.....

**4.2.** Гармоникалық осциллятор - Жер бетінде орналасқан ұзындығы  $L=150$  см математикалық маятник. Маятник тербелісінің алғашқы бұрыштық амплитудасы  $\varphi_0=20,0^\circ$ . Ауаның кедергі күші жылдамдыққа ( $F_{\text{йк}} = -bV$ ) тура пропорционал. Үйкеліс коэффициентін  $b = 0,10$  кг/с пен  $b = 2,00$  кг/с аралығында өзгертіп екі периодтан кейінгі амплитуда өзгерісін анықтап, қорытынды жасаңдар. Қорытынды:.....

### 5. Проблемалық тапсырмалар

**5.1.** Тербеліс амплитудасы бір периодта 2,7 есе кемитін тәжірибелерді іске асырыңдар.

Жауабы:.....

**5.2.** Тербеліс амплитудасы екі периодта 2,7 есе кемитін тәжірибелерді іске асырыңдар.

Жауабы:.....

**5.3.** Тербеліс амплитудасы үш периодта 2,7 есе кемитін тәжірибелерді іске асырыңдар.

Жауабы:.....

### 6. Творчестволық тасырмалар

**6.1.** 2.1-2.4 есептеріне ұқсас есептер құрастырыңдар. Жауабы:.....

| Орындалған тапсырмалар саны | Қателер саны | Сіздің бағалауыңыз |
|-----------------------------|--------------|--------------------|
|                             |              |                    |

Бланкіде тапсырмалар саны артығымен берілген. Бір оқушы олардың барлығын орындауы шарт емес. Мұғалім ұсынылған тапсырмалар ішінен іріктеп оқушының шамасына қарай бергені дұрыс, немесе басқа да тапсырмалар ұсынуына болады.

### ӘДЕБИЕТ

[1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.

[2] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. Томск 2011г., С. 210-215.

[3] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Оқушылардың өз бетінше атқаратын компьютерлік зерханалық жұмыс бланкісінің үлгісі. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.

- [4] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е. Абдураимов Фотоэффект, комптонэффекті заңдылықтарын оқытуда компьютерлік үлгілерді қолданудың әдістемесі, компьютерлік зертханалық жұмыс атқаруға арналған бланкі үлгілері. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [5] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова, Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Жинағыш және шашыратқыш линзаларды үлгілеу тақырыбына сабақ өткізу үлгісі  
Известия НАН РК, серия физ.-мат. №2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [6] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П. А., Рүстемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Жарықтың дифракциясын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [7] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева, Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Зарядталған бөлшектердің магнит өрісінде қозғалысын және масс-спектрометр жұмысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., №1(299), Алматы, 2015, С. 80-87.
- [8] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Ньютон сақиналарын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 1(299), Алматы, 2015, -С14-20.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумағалиева А.И. Жарықтың интерференция құбылысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумағалиева А.И. Допплер эффектісін зерттеуге арналған компьютерлік жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [11] Кабылбеков К.А. Физикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру. Оқу құралы. Шымкент қ., 2015, 77 бет.
- [12] Кабылбеков К.А. Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумағалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43:
- [13] Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию работы селектора скорости. Современные наукоемкие технологии, №6, Москва, 2015, С-19-21.
- [14] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1». 2001.

## REFERENCES

- [1] Nazarbayev H.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th **2012**.
- [2] Kabyrbekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk **2011**, P 210-215.
- [3] Kabyrbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, **2013**, №6, P 82-89.
- [4] Kabyrbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, **2013**, №6, P 114-121.
- [5] Kabyrbekov K.A., Saidahmetov P. A, Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, **2014**, P 286-294.
- [6] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), **2015**, P 71-77.
- [7] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva S.H.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), **2015**, P 80-87.
- [8] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H. A, Saidahmetov, П. А, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, № 1 (299), **2015**, p14-20.
- [9] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, **2015**, P 131-136
- [10] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, **2015**, P 155-160.
- [11] Kabyrbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. 2015, 284 p.
- [12] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, **2015**, P 40-43.

[13] Kabylbekov K.A., Models of the form of the organisation of computer laboratory work on research of the selector of speeds. Modern high technologies. №6, Moscow, **2015**, P 19-21.

[14] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1".2001.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

## МОДЕЛЬ БЛАНКА ОРГАНИЗАЦИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ СВОБОДНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

**К.А.Кабылбеков, П.А.Саидахметов, Г.Ш.Омашова,  
Г.С. Серикбаева, Ж.Н.Суйеркулова**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

**Ключевые слова:** маятник, осциллятор, собственная частота, амплитуда, фаза, жесткость.

**Аннотация.** Предлагается модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний на компьютерной модели математического маятника и груза закрепленного на пружине. Модель бланка включает краткие сведения из теории, контрольные вопросы для проверки готовности выполнения работы учащимся, ознакомительные задания с компьютерной моделью, задачи с последующей компьютерной проверкой ответов, экспериментальные, исследовательские и творческие задания.

В кратких сведениях из теории приведены определение свободных механических колебаний, условия их возникновения, уравнения свободных колебаний при наличии трения и без него, собственная частота колебаний, определения и выражения коэффициента затухания и времени затухания, зависимость амплитуды свободного затухающего колебания от времени.

Ознакомительные задания с компьютерной моделью включают наблюдение зависимости угла отклонения и скорости движения математического маятника от времени при наличии трения и без него и их сравнение, наблюдение изменения потенциальной и кинетической энергии от времени при наличии трения и без него. Задания с последующей компьютерной проверкой ответов предусматривают предварительное решение задач на бумаге с реализацией заданных условий колебаний и сравнение ответов, определение периода колебаний при наличии трения и без него, определение величины амплитуды колебания через один, два или три периода при заданном коэффициенте затухания. Предварительное решение задач сдается вместе с бланком. Экспериментальные и исследовательские задания включают реализацию опытов на компьютерной модели по заданным условиям, определения периода и частоты колебаний, установление зависимости амплитуды колебаний от коэффициента затухания. Задания даны с избытком. Выполнение всех их одному ученику необязательно. Преподаватель может подобрать ученику с учетом его способности или предложить другие подобные задания. Следует обратить особое внимание учеников на важность выполнения исследовательских и творческих заданий. По окончании урока учащийся заполняет бланк и отправляет по электронной почте преподавателю или сдает непосредственно ему. На следующем уроке преподаватель обсуждает ответы учеников и оценивает работы.

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 92–97

**MODEL OF THE FORM OF THE ORGANISATION  
OF COMPUTER LABORATORY OPERATION  
OF ISOBARIC PROCESS**

**K.A. Kabylbekov, P.A. Saidakhmetov, G.SH. Omashova,  
D.I. Suttibaeva, G.N. Kozybakova**

M.Auezov South-Kazakhstan State University, Shymkent, Kazakhstan,  
[kenkab@mail.ru](mailto:kenkab@mail.ru)

**Key words:** isobaric process, the diagramme, pressure, volume, temperature, warmth, operation, an internal energy, the first beginning of thermodynamics.

**Abstract.** In the article the model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of isobaric process is offered.

From the theory, control questions for checkout of readiness of pupils short data are given in operation performance, fact-finding assignments with computer model, problems with the subsequent checkout of answers on computer experiment, the observational, research and creative assignments.

In short data from the theory are made definition of isobaric process, Gay-Lussac law and record of the first law of thermodynamics for isobaric process.

The observational and research assignments include embodying of the given parametres in computer experiment and checking performance of the Gay-Lussac law and the first law of thermodynamics.

Assignments are given much. Performance all of them to one pupil is unessential. The teacher can taking into account ability of pupils pick up the assignment or to offer other similar assignments Special attention it is necessary to convert to performance of research and creative assignments. On the termination of a lesson pupils fill the forms and send by e-mail or immediately hand over to the teacher. At a following lesson the teacher discusses answers and estimates operations.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**ИЗОБАРАЛЫҚ ПРОЦЕСТІ ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН  
КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ  
ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ БЛАНКІ ҮЛГІСІ**

**К.А. Қабылбеков, П.А. Саидахметов, Г.Ш. Омашова,  
Д.И. Сүттібаева, Г.Н. Қозыбақова**

М.Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті  
Шымкент, Қазақстан, [kenkab@mail.ru](mailto:kenkab@mail.ru)

**Түйін сөздер:** изобаралық процесс, диаграмма, қысым, көлем, температура, жылу, жұмыс, ішкі энергия, термодинамиканың бірінші заңы.

**Аннотация.** Мақалада изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі ұсынылған. Теориядан қысқаша мәліметтер, оқушының жұмысты орындауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары, компьютерлік моделмен танысу тапсырмалары, жауаптарын компьютерлік тәжірибе арқылы тексеру есептері, тәжірибелік, зерттеулік және шығармашылық тапсырмалар берілген.

Теориядан қысқаша мәліметтерде изобаралық процестің анықтамасы және оны іске асыру шарттары келтірілген. Изобаралық процесс үшін Гей-Люссак заңы мен термодинамиканың бірінші заңының жазылуы.

Компьютерлік моделмен танысу тапсырмаларында компьютерлік тәжірибе параметрлерін өзгерту арқылы изобаралық процесті іске асыру қарастырылған.

Тәжірибелік және зерттеулік тапсырмаларда тәжірибе шарттарындағы параметрлерді іске асырып, Гей-Люссак заңы мен термодинамиканың бірінші заңының орындалуын тексеріп, тәжірибе нәтижелерін сараптап қорытынды тұжырымдау қарастырылған.

Тапсырмалар саны артығымен берілген. Бір оқушының олардың барлығын орындауы шарт емес. Оқытушы оқушылардың шамасына қарай тапсырмаларды іріктеп, таңдап бере алады немесе ұқсас тапсырмалар ұсынуына болады. Зерттеулік және шығармашылық тапсырмаларды орындау аса маңызды. Сабақ соңында оқушылар өздерінің бланкілерін толтырып электронды пошта арқылы немесе оқытушыға тапсырады. Келесі сабақта оқытушы жауаптарды сараптап оқушылардың жұмыстарын бағалайды.

Қазақстан Республикасының Президенті-Елбасы Н.А.Назарбаев «Қазақстан-2050–стратегиясы» – қалыптасқан мемлекеттің жаңа саяси бағыты» атты Қазақстан халқына Жолдауында: Қазақстан 2050 жылы 30 дамыған мемлекеттер қатарына енуі керек деп атап көрсетті. Дамып келе жатқан елдер арасында мұндай қатарда болуы үшін бәсекелестік қатаң болады. Ұлт глобалдық экономикалық бәсекелестікке дайын болғанда ғана мұндай қатарда бола алады. Біз, аса маңызды мақсаттарымызды естен шығармай, мақсатты және шабытты еңбек етуіміз керек: қазіргі заманға сай нәтижелі білім мен денсаулық сақтау жүйесін құру. Бәсекеге қабілетті дамыған мемлекет болу үшін біз сауаттылығы жоғары елге айналуымыз керек. Бізге оқыту әдістемелерін жаңғырту және өңірлік мектеп орталықтарын құра отырып, білім берудің онлайн-жүйелерін белсене дамыту керек болады. Біз қалайтындардың барлығы үшін қашықтан оқытуды және онлайн режимінде оқытуды қоса, отандық білім беру жүйесіне инновациялық әдістерді, шешімдерді және құралдарды қарқынды енгізуге тиіспіз [1].

Президент жолдауында келтірілген тапсырмаларды орындау үшін М.Әуезов атындағы мемлекеттік университетінің «Физиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі» кафедрасы соңғы оқу жылдарында оқу үрдісіне "Білімдегі ақпараттық технологиялар", "Физиканы оқытудағы ақпараттық технологиялар" және "Электронды оқулықтарды оқу үрдісінде қолдану" курстарын енгізді. Курстың мақсаты: студент-болашақ физика мұғалімдерін оқу үрдісінде, өздерінің кәсіпшілік қызметінде және біліктілігін жоғарылатуында, оқу үрдісі мен сыныптан тыс жұмыстарды және компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруда болашағы зор білім беру технологияларын шығармашылық және тиімді пайдалануға дағдыландыру.

Оқу материалдары базасын жасауда студенттер мен магистранттар белсенді қатыстырылады. Авторлар құрастырған бірқатар демонстрациялық тәжірибелердің компьютерлік моделдерін оқу үрдісінде пайдалану және компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыруға арналған бланкі үлгілері туралы біз бұрын жазғанбыз [2-13].

Мақалада студенттерге, магистранттарға, мектеп мұғалімдеріне көмекші құрал ретінде-оқушылардың [14] ресурсын пайдаланып «Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың» бланкі үлгісін ұсынамыз.

**Жұмыстың тақырыбы:** Изобаралық процесті зерттеу

**Жұмыстың мақсаты:** Газды изобаралық қыздыру және суыту кезіндегі көлем мен ішкі энергия өзгерістерін және жылу мөлшері мен атқарылған жұмыс шамасын анықтау. Гей-Люссак заңы мен термодинамиканың бірінші заңының орындалуын тесеру.

**Сынып..... Оқушының фамилиясы..... Есімі.....**

**Теориядан қысқаша мәлімет.**

Изобаралық процесс деп–денені (идеал газды) тұрақты ( $P=const$ ) қысымда квазистатикалық сығу немесе ұлғайту процесін айтады. Тұрақты қысымда газдың берілген массасының көлемі

температураға сызықты тәуелді, яғни  $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$  (Гей-Люссак заңы). Бір моль идеал газ үшін

$\frac{V}{T} = const = \frac{R}{P}$ , мұндағы  $R=8,31$  Дж/(моль К)-универсал газ тұрақтысы. Гей-Люссактың өзі заңды

$V = V_0(1 + \alpha \cdot t)$  түрінде алды, мұндағы  $\alpha$ -көлемдік ұлғаюдың температуралық коэффициенті. Бұл коэффициент барлық идеал газдар үшін бірдей:

$$\alpha = \frac{1}{273^\circ \text{C}}.$$

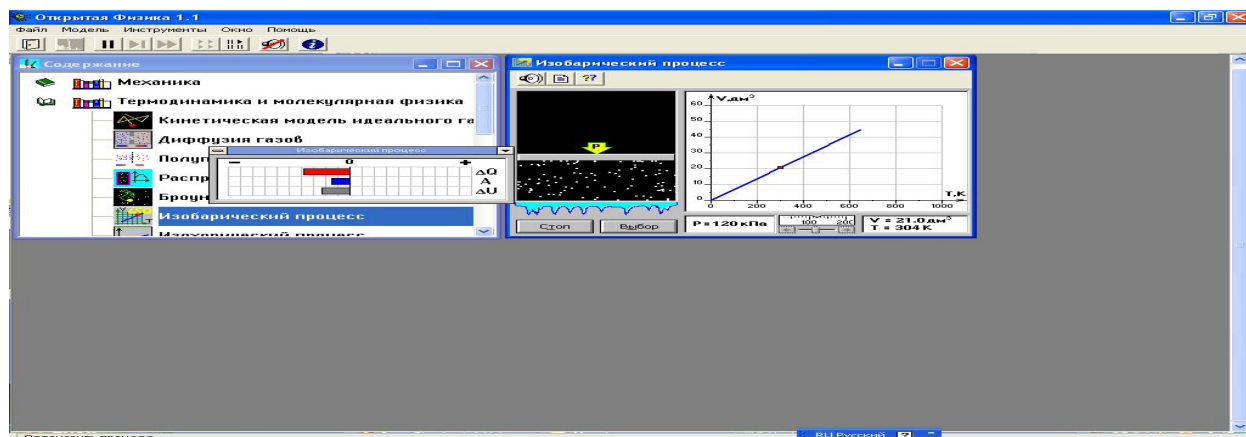
Изобаралық процестегі газ жұмысы  $A = P(V_2 - V_1) = P\Delta V$ .

Изобаралық процесс үшін термодинамиканың бірінші заңы төменгідей жазылады

$$Q = U(T_2) - U(T_1) + P(V_2 - V_1) = \Delta U + P\Delta V,$$

мұндағы  $U(T_1)$ ,  $U(T_2)$  газдың алғашқы және соңғы ішкі энергиясы,  $V_1$ ,  $V_2$  – газдың алғашқы және соңғы көлемі.

Изобаралық ұлғаюда  $Q > 0$  жүйе жылу жұтады, газ оң жұмыс атқарады, ал изобаралық сығылуда  $Q < 0$  жылу сыртқы денеге беріледі және  $A < 0$ .



1-сурет

### Бақылау сұрақтары.

- Изобаралық процеске анықтама беріңдер. Жауабы:.....
- Гей-Люссак заңын жазыңдар және сипаттаңдар. Жауабы:.....
- Идеал газдың изобарасын  $P$ - $T$ ,  $V$ - $T$  және  $P$ - $V$  координаталарда салыңдар. Жауабы:.....
- Изобаралық процесс үшін термодинамиканың бірінші заңының өрнегін жазыңдар және сипаттама беріңдер. Жауабы:.....
- Идеал газ көлемін 2 есе изобаралық ұлғайтқанда оның температурасы қалай өзгереді? Жауабы:.....

### 1. Компьютерлік модельмен танысу тапсырмалары.

1.1. Компьютерлік тәжірибеде қысымды 50 кПа мен 200 кПа аралығында өзгертіп газды изобаралық сығу мен ұлғайту процесін  $V$ - $T$  диаграммасында бақылап, қорытынды жасаңдар. Қорытынды:.....

### 2. Тәжірибелік есептер.

- 2.1. Температурасы 500 К, 1 моль идеал газ қандай ( $P$ ) қысымда 41,5 дм<sup>3</sup> көлемде болады? Осы жағдайды компьютерлік тәжірибеде жүзеге асыр. Жауабы:.....
- 2.2. Температурасы 273 К, 1 моль идеал газ қандай ( $P$ ) қысымда 22,4 дм<sup>3</sup> көлемде болады? Осы жағдайды компьютерлік тәжірибеде жүзеге асыр. Жауабы:.....
- 2.3. Температурасы 308 К, 1 моль идеал газ қандай ( $P$ ) қысымда 25,6 дм<sup>3</sup> көлемде болады? Осы жағдайды компьютерлік тәжірибеде жүзеге асыр. Жауабы:.....

2.4. Температурасы 750 К, 1 моль идеал газ қандай (P) қысымда 41,5 дм<sup>3</sup> көлемде болады? Осы жағдайды компьютерлік тәжірибеде жүзеге асыр.

Жауабы:.....

2.5. 150 кПа қысымдағы, 1 моль идеал газ 480 К температурада қандай көлемді алады? Осы жағдайды компьютерлік тәжірибеде жүзеге асыр.

Жауабы:.....

### 3. Жауабын компьютер көмегімен тексеретін есептер

3.1. Көлемі 41,5 дм<sup>3</sup> идеал газды изобаралық түрде  $T_1=750$  К температурадан  $T_2=350$  К температураға дейін суытады.  $T_2$  температурадағы газдың көлемі қандай?

Жауабы:.....

3.2. Көлемі 41,5 дм<sup>3</sup> идеал газды изобаралық түрде  $T_1=250$  К температурадан  $T_2=100$  К температураға дейін суытады.  $T_2$  температурадағы газдың көлемі қандай?

Жауабы:.....

3.3. Көлемі 41,5 дм<sup>3</sup> идеал газды изобаралық түрде  $T_1=1000$  К температурадан  $T_2=300$  К температураға дейін суытады.  $T_2$  температурадағы газдың көлемі қандай?

Жауабы:.....

3.4. Көлемі 10,5 дм<sup>3</sup> идеал газды изобаралық түрде  $T_1=350$  К температурадан  $T_2=500$  К температураға дейін қыздырады.  $T_2$  температурадағы газдың көлемі қандай?

Жауабы:.....

3.5. Көлемі 14,0 дм<sup>3</sup> идеал газды изобаралық түрде  $T_1=200$  К температурадан  $T_2=500$  К температураға дейін суытады.  $T_2$  температурадағы газдың көлемі қандай?

Жауабы:.....

3.6. Тұрақты  $P=50$  кПа қысымда 1 моль идеал газдың температурасын 200 К – нен 750 К –ге дейін өзгертіп көлемнің ұлғаюын VT диаграммасында салыңдар. Газдың ішкі энергиясының өзгерісін, газ жұмысын және жұтылған жылу мөлшерін есептендер.

Жауаптары:.....

3.7. Тұрақты  $P=100$  кПа қысымда 1 моль идеал газдың температурасын 200 К – нен 750 К –ге дейін өзгертіп көлемнің ұлғаюын VT диаграммасында салыңдар. Газдың ішкі энергиясының өзгерісін, газ жұмысын және жұтылған жылу мөлшерін есептендер.

Жауаптары:.....

3.8. Тұрақты  $P=150$  кПа қысымда 1 моль идеал газдың температурасын 200 К – нен 750 К –ге дейін өзгертіп көлемнің ұлғаюын VT диаграммасында салыңдар. Газдың ішкі энергиясының өзгерісін, газ жұмысын және жұтылған жылу мөлшерін есептендер.

Жауаптары:.....

3.9. Тұрақты  $P=200$  кПа қысымда 1 моль идеал газдың температурасын 200 К – нен 750 К –ге дейін өзгертіп көлемнің ұлғаюын VT диаграммасында салыңдар. Газдың ішкі энергиясының өзгерісін, газ жұмысын және жұтылған жылу мөлшерін есептендер.

Жауаптары:.....

### 4. Зерттеу тапсырмалары.

4.1. 3.1-3.5 есептерінің нәтижелерінен қорытынды жасаңдар. Қорытынды:.....

4.2. 3.6-3.9 есептерінің нәтижелері бойынша термодинамиканың бірінші заңының орындалуын тексеріңдер. Жауаптары:.....

**5. Творчестволық тапсырмалар.** Мұндай тапсырма аясында оқушыларға өз бетінше бір немесе бірнеше есеп құрастыру және үйде немесе сыныпта орындауы ұсынылады. Содан кейін алған нәтижесін компьютерлік моделді пайдаланып тексеруі керек. Алғашқыда бұл есептер бұрын құрастырылып (мысалы 3.1-3.5 есептер секілді), сабақта шешілген есептер типтесі болып, кейіннен модел мүмкіншілігіне орай жаңа типті болуы мүмкін.

| Орындалған тапсырмалар саны | Қателер саны | Сіздің бағалауыңыз |
|-----------------------------|--------------|--------------------|
|                             |              |                    |

Бланкіде тапсырмалар артығымен берілген. Бір оқушы олардың барлығын орындауы шарт емес. Мұғалім ұсынылған тапсырмалар ішінен іріктеп оқушының шамасына қарай бергені дұрыс, немесе басқа да тапсырмалар ұсынуына болады.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.
- [2] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. Томск 2011г., С 210-215.
- [3] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С. Окушылардың өз бетінше атқаратын компьютерлік зертханалық жұмыс бланкісінің үлгісі. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [4] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е. Абдураимов Фотозффект, комптонэфекті заңдылықтарын оқытуда компьютерлік үлгілерді қолданудың әдістемесі, компьютерлік зертханалық жұмыс атқаруға арналған бланкі үлгілері. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [5] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова, Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Жинағыш және шашыратқыш линзаларды үлгілеу тақырыбына сабақ өткізу үлгісі  
Известия НАН РК, серия физ.мат. №2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [6] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П. А, Рүстемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Жарықтың дифракциясын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [7] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева, Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адинева Ш.И. Зарядалған бөлшектердің магнит өрісінде қозғалысын және масс-спектрометр жұмысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, №1(299), Алматы, 2015, С 80-87..
- [8] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А, Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Ньютон сақиналарын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат, № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумағалиева А.И. Жарықтың интерференция құбылысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумағалиева А.И. Допплер эффектін зерттеуге арналған компьютерлік жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [11] Кабылбеков К.А. Физикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру. Оқу құралы. Шымкент қ., 2015, 77 бет.
- [12] Кабылбеков К.А. Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумағалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва, 2015, С 40-43:
- [13] Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию работы селектора скорости. Современные наукоемкие технологии, №6, Москва, 2015, С-19-21.
- [14] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1». 2001.

REFERENCES

- [1] Nazarbayev N.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012.
- [2] Kabyzbekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011., P.210-215.
- [3] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013, №6, P 82-89.
- [4] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A, Bajdullaeva L.E., Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, 2013. №6, P 114-121.
- [5] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A. Turganova T.K, Nurullaev M. A, Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, 2014, P 286-294.
- [6] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev K.H. A, Saidahmetov P. A, Rustemova T.Ж, Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), 2015, P 71-77.
- [7] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev K.H. A, Takibaeva G.A, Saparbaeva E. M, Bajdullaeva L. E, Adineeva S.H.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), 2015, P 80-87.
- [8] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev K.H. A, Saidahmetov, P. A, Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, № 1 (299), 2015, P14-20.

[9] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagaliyeva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, **2015**, P 131-136

[10] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagaliyeva A.I. Model of the form of the organisation computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, **2015**, P 155-160.

[11] Kabyrbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. **2015**, 284 p.

[12] Kabyrbekov K.A., Ashirbaev K.H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagaliyeva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, **2015**. P 40-43.

[13] Kabyrbekov K.A., Models of the form of the organisation of computer laboratory work on research of the selector of speds. Modern high technologies. №6, Moscow, **2015**, P 19-21.

[14] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1". **2001**.

## МОДЕЛЬ БЛАНКА ОРГАНИЗАЦИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ИЗОБАРИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

**К.А. Кабылбеков, П.А. Саидахметов, Г.Ш. Омашова,  
Д.И. Суттибаева, Г.Н. Козыбакова**

Южно Казахстанский государственный университет им.М.Ауэзова  
Шымкент, Казахстан, [kenkab@mail.ru](mailto:kenkab@mail.ru)

**Ключевые слова:** изобарический процесс, диаграмма, давление, объем, температура, теплота, работа, внутренняя энергия, первое начало термодинамики.

**Аннотация.** В статье предлагается модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарического процесса. Приводятся краткие сведения из теории, контрольные вопросы для проверки готовности учащихся к выполнению работы, ознакомительные задания с компьютерной моделью, задачи с последующей проверкой ответов по компьютерному эксперименту, экспериментальные, исследовательские и творческие задания. В кратких сведениях из теории даны определение изобарического процесса, закон Гей-Люссака и запись первого закона термодинамики для изобарического процесса. Экспериментальные и исследовательские задания включают реализацию заданных параметров в компьютерном эксперименте и проверку выполнения закона Гей-Люссака и первого закона термодинамики. Задания даны с избытком. Выполнение их всех одному ученику необязательно. Преподаватель может с учетом способности учащихся подобрать задания или предложить другие подобные задания. Особое внимание надо обратить на выполнение исследовательских и творческих заданий. По окончании урока учащиеся заполняют свои бланки и отправляют по электронной почте или непосредственно сдают учителю. На следующем уроке преподаватель обсуждает ответы и оценивает работы.

*Поступила 13.03.2016 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 98-103

**MODEL OF THE FORM OF THE ORGANIZATION  
OF COMPUTER LABORATORY OPERATION ON EXAMINATION  
OF THE DRIVE MAKING THE CARNOT CYCLE**

**K.A. Kabylbekov, G.SH. Omashova, P.A. Saidakhmetov, M.A. Nurullaev, N.A. Artygalin**

M.Auezov South-Kazakhstan State University, 160012, Shymkent, Republic Kazakhstan,  
[kenkab@mail.ru](mailto:kenkab@mail.ru)

**Key words:** the thermal drive, a cooler body, a calefactor, a Carnot cycle, efficiency.

**Abstract.** In article it is offered model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the drive making a Carnot cycle, including short data from the theory, control questions for checkout of readiness of pupils to operation performance, fact-finding assignments with computer model, problems with the subsequent computer checkout of answers, ambiguous problems, the observational, research and creative assignments. In short data from the theory definition of the thermal drive, a principle of operation of the drive, Carnot cycle processes, efficiency of the thermal drive, refrigerator operation are given. Fact-finding assignments with computer model includes questions related to ability to change parametres (pressure, temperature) processes, scoping of working substance taking into account model possibility. Performance of problems with the subsequent computer checkout of answers provide their prestress solution on a paper, embodying of requirements of problems in computer experiment, checkout of coincidence of answers and representation of effects of the solution of problems on a paper together with the form. The observational assignments provides embodying of the given parametres on computer model, definitions of operation, warmth and drive efficiency. In ambiguous problems it is necessary to find temperatures of a calefactor and a cooler body for achievement of the given efficiency. Research assignments include questions of pinch of efficiency of the drive. Assignments are given much. Training unessentially all them to carry out, the teacher can taking into account possibility of the pupil pick up them or offer other similar assignments. Problems with the subsequent computer checkout are necessary for solving prestressly on a paper and to check up answers in computer experiment. It is necessary to hand over the prestress solution of a problem together with the form.

УДК 532.133, 371.62, 372.8.002

**МОДЕЛЬ БЛАНКА ОРГАНИЗАЦИИ КОМПЬЮТЕРНОЙ  
ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО ИССЛЕДОВАНИЮ ДВИГАТЕЛЯ,  
СОВЕРШАЮЩЕГО ЦИКЛ КАРНО**

**К.А. Кабылбеков, Г.Ш. Омашова, П.А. Саидахметов, М.А. Нураллаев, Н.А. Артыгалин**

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауэзова,  
160012, Шымкент, Республика Казахстан

**Ключевые слова:** тепловой двигатель, холодильник, нагреватель, цикл Карно, коэффициент полезного действия.

**Аннотация.** В статье предлагается модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя, совершающего цикл Карно, включающая краткие сведения из теории, контрольные вопросы для проверки готовности учащихся к выполнению работы, ознакомительные задания с компьютерной моделью, задачи с последующей компьютерной проверкой ответов, неоднозначные задачи,

экспериментальные, исследовательские и творческие задания. В кратких сведениях из теории приведены определение теплового двигателя, принцип работы двигателя, процессы цикла Карно, коэффициент полезного действия теплового двигателя, работа холодильной машины. Ознакомительные задания с компьютерной моделью включает вопросы связанные с умением менять параметры (давление, температура) процессов, определения объема рабочего вещества с учетом возможности модели. Выполнение задач с последующей компьютерной проверкой ответов предусматривают их предварительное решение на бумаге, реализация условий задач в компьютерном эксперименте, проверка совпадения ответов и представления результатов решения задач на бумаге вместе с бланком. Экспериментальные задания предусматривает реализацию заданных параметров на компьютерной модели, определения работы, теплоты и коэффициента полезного действия двигателя. В неоднозначных задачах необходимо найти температуры нагревателя и холодильника для достижения заданного коэффициента полезного действия. Исследовательские задания включают вопросы повышения коэффициента полезного действия двигателя. Задания даны с избытком. Обучающему необязательно все их выполнять, преподаватель может с учетом возможности ученика подобрать их или предложить другие подобные задания. Задачи с последующей компьютерной проверкой необходимо предварительно решать на бумаге и проверить ответы в компьютерном эксперименте. Предварительное решение задачи необходимо сдать вместе с бланком.

Президент Республики Казахстан Н. Назарбаев в Послании народу Казахстана «Стратегия «Казахстан-2050» - новый политический курс состоявшегося государства», обозначив приоритеты в сфере образования, сказал: «Нам предстоит произвести модернизацию методик преподавания и активно развивать он-лайн-системы образования, создавая региональные школьные центры. Мы должны интенсивно внедрять инновационные методы, решения и инструменты в отечественную систему образования, включая дистанционное обучение и обучение в режиме он-лайн, доступные для всех желающих» [1].

Для реализации поставленных задач кафедра «Теория и методика преподавания физики» ЮКГУ им. Ауэзова МОН РК с 2013 года внедрила в учебный процесс дисциплины «Информационные технологии в образовании», «Информационные технологии в преподавании физики», «Методика использования электронных учебников», программы которых предусматривает освоение и использование современных информационных технологий в преподавании физики. Созданы новые компьютерные модели, обучающие программы, базы данных и методика их использования в преподавании физики в школах, колледжах, лицеях и ВУЗ [2-13].

Одной из трудных задач внедрения этих результатов в учреждениях образования является недостаточное практическое умение преподавателей школ использования компьютерных моделей физических явлений для организации проведения лабораторных работ. От организации компьютерных лабораторных работ во многом зависит активизация, мотивация и в конечном счете эффективность обучения. Мощным средством обучения физике, по мнению многих отечественных и зарубежных специалистов является продукция компании «Физикон» [14]. Используя этот ресурс, нами разработана модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию работы двигателя, совершающего цикл Карно.

**Тема работы:** Исследование работы теплового двигателя, совершающего цикл Карно.

**Цель работы:** Определение К.П.Д. теплового двигателя.

**Класс.....ФИО.....**

**Краткие сведения из теории.**

Тепловыми двигателями называются устройства, в которых происходит превращение теплоты в работу. Рабочее вещество в любом тепловом двигателе последовательно приводится в тепловой контакт с горячими телами (нагреватели), получая от них некоторое количество теплоты  $Q_1$ , и с холодными телами (холодильники), отдавая им количество теплоты  $Q_2 < Q_1$ , и периодически возвращается в первоначальное состояние. Такие процессы называют циклическими или круговыми.

Термодинамика утверждает, что невозможно всю теплоту  $Q_1$ , полученную в круговом процессе от нагревателей, превратить в работу (2-ой закон термодинамики). Согласно закону сохранения энергии (1-ый закон термодинамики) работа, производимая двигателем есть:

$$A = Q_1 - Q_2$$

Коэффициентом полезного действия (к.п.д.) теплового двигателя называют отношение

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < 1$$

Цикл Карно представляет собой идеализированный круговой процесс, в котором рабочее вещество (идеальный газ) периодически приводится в тепловой контакт только с одним нагревателем и одним холодильником. Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат. Французский инженер Карно доказал, что к.п.д. такого идеального теплового двигателя максимален при данных значениях и равен

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

Любой реальный тепловой двигатель, работающий с нагревателем температуры  $T_1$  и холодильником температуры  $T_2$ , не может иметь к.п.д, превышающий  $\eta_{\max}$ .

Цикл Карно идеальной тепловой машины на P,V - диаграмме обходится по часовой стрелке. Однако, он может быть проведен и в противоположном направлении (холодильный цикл). В этом случае система отбирает тепло от холодного тела и передает тепло горячему телу. Для того, чтобы такой процесс был возможен, над системой должна совершаться положительная работа A. Холодильный цикл реализуется в холодильных машинах.

#### Контрольные вопросы для проверки готовности учащихся к выполнению работы.

- Из каких процессов состоит цикл Карно? Ответы: .....
- Напишите формулу коэффициента полезного действия идеального теплового двигателя, работающего по циклу Карно. Ответы: .....
- Какими величинами определяется работа идеального теплового двигателя за один цикл? Ответы: .....

- Как работает идеальная холодильная машина? Ответы: .....
- Можно ли построить двигатель, не получающий энергию извне? Ответы: .....
- Можно ли превратить всю теплоту, полученную двигателем в работу? Ответы: .....
- От какого тела самопроизвольно передается тепло? Ответы: .....
- Как можно осуществить передачу тепла от холодного тела к тепловому? Ответы: .....
- Как можно повысить коэффициент полезного действия теплового двигателя? Ответы: .....
- Можно ли понизить температуру комнаты, открыв дверь работающего холодильника? Ответы: .....

- Можно ли добиться 100 % коэффициент полезного действия путем снижения трения до нуля между всеми частями машины? Дайте пояснение. Ответы: .....
- Зависит ли коэффициент полезного действия идеального двигателя, совершающего цикл Карно от природы рабочего вещества? Ответы: .....

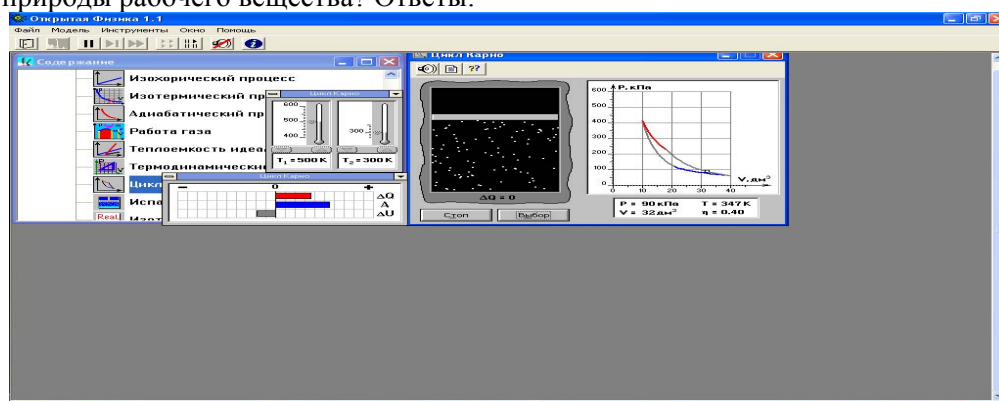


Рисунок 1

#### 1. Ознакомительныз задания с компьютерной моделью.

- 1.1. В каких пределах можно менять температуру нагревателя (Рис.1.)? Ответы: .....
- 1.2. В каких пределах можно менять температуру холодильника? Ответы: .....
- 1.3. Каков объем идеального газа в камере? Ответы: .....

1.4. В каких пределах меняется давление при температуре нагревателя 600К и температуре 270К холодильника за один полный цикл? Ответы: .....

1.5. В каких пределах меняется объем рабочего вещества при температуре нагревателя 600К и температуре 270К холодильника за один полный цикл? Ответы: .....

## **2. Задачи с последующей компьютерной проверкой.**

Эти задачи необходимо сначала решить на бумаге и затем проверить ответы на компьютере. Решения задач предоставить вместе с бланком.

2.1. Определить коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя при температуре нагревателя 600К и температуре холодильника 350К. Ответы: .....

2.2. Определить коэффициент полезного действия при температуре нагревателя 600К и температуре холодильника 300К. Ответы: .....

2.3. Определить коэффициент полезного действия при температуре нагревателя 600К и температуре холодильника 270К. Ответы: .....

2.4. Определить коэффициент полезного действия при температуре нагревателя 450К и температуре холодильника 300К. Ответы: .....

2.5. Определить коэффициент полезного действия при температуре нагревателя 350К и температуре холодильника 270К. Ответы: .....

## **3. Экспериментальные задания**

3.1. При температуре нагревателя  $T_1=450\text{К}$  рабочее вещество получает тепло от нагревателя  $Q_1=500\text{ Дж}$  и отдает тепло холодильнику  $Q_2=350\text{ Дж}$ . Какая работа совершается за один цикл и каков коэффициент полезного действия? Ответы: .....

3.2. При температуре нагревателя  $T_1=600\text{К}$  рабочее вещество получает тепло от нагревателя  $Q_1=500\text{ Дж}$  и отдает тепло холодильнику  $Q_2=300\text{ Дж}$ . Какая работа совершается за один цикл и каков коэффициент полезного действия? Ответы: .....

3.3. При температуре нагревателя  $T_1=600\text{К}$  рабочее вещество получает тепло от нагревателя  $Q_1=500\text{ Дж}$  и отдает тепло холодильнику  $Q_2=300\text{ Дж}$ . Какая работа совершается за один цикл, какова температура холодильника и коэффициент полезного действия?

Ответы: .....

3.4. Тепловой двигатель, работающий по циклу Карно, за каждый цикл получает от нагревателя при температуре  $T_1=600\text{К}$  тепло  $Q_1=600\text{ Дж}$  и отдает холодильнику тепло  $Q_2=300\text{ Дж}$ . Определите коэффициент полезного действия и температуру холодильника.

Ответы: .....

3.5. Параметры рабочего вещества в начале цикла  $P_1=416\text{ кПа}$ ,  $T_1=500\text{К}$ ,  $V_1=10\text{ дм}^3$ . Определите количество вещества используемое в модели. Ответы: .....

## **4. Неоднозначные задачи.**

4.1. Определите температуры нагревателя и холодильника тепловой машины, работающей по циклу Карно с К.П.Д. 50%. Ответы: .....

4.2. Определите температуры нагревателя и холодильника тепловой машины, работающей по циклу Карно с К.П.Д. 40%. Ответы: .....

4.3. Определите температуры нагревателя и холодильника тепловой машины, работающей по циклу Карно с К.П.Д. 20%. Ответы: .....

4.4. Определите количества тепла получаемое от нагревателя и отдаваемое холодильнику тепловой машины работающей по циклу Карно с К.П.Д. 50%. Ответы: .....

4.5. Определите температуры нагревателя и холодильника тепловой машины работающей по циклу Карно с К.П.Д. 55%. Ответы: .....

## **5. Исследовательские задания.**

5.1. Температура холодильника  $T_2=270\text{К}$ . Какой должна быть температура нагревателя теплового двигателя, работающего по циклу Карно, при К.П.Д. 55%? Ответы: .....

5.2. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за каждый цикл от нагревателя 500 Дж тепла при температуре  $T_1=450\text{К}$  и отдает холодильнику 350 Дж тепла. Определите температуру холодильника  $T_2$  и К.П.Д. тепловой машины. Ответы: .....

5.3. Тепловая машина, работающая по циклу Карно, получает за каждый цикл от нагревателя 500 Дж тепла при температуре  $T_1=600\text{К}$  и отдает холодильнику 300 Дж тепла. Определите температуру холодильника  $T_2$  и К.П.Д. тепловой машины. Ответы: .....

## 6. Творческие задания.

В рамках данного задания ученику предлагается самостоятельно составить задания с учетом возможности компьютерной модели.

| Количество выполненных заданий | Количество ошибок | Оценка |
|--------------------------------|-------------------|--------|
|                                |                   |        |

Примечание. Задания даны с избытком. Обучающемуся необязательно всех их выполнять. Преподаватель может их выбрать и подобрать ученику с учетом его возможности или предложить другие подобные задания. В заданиях предусматривающих задачи с последующей компьютерной проверкой ученик письменно решает задачи с предоставлением хода решения и полученного ответа вместе с бланком. В конце урока ученик должен заполнить бланк, сдать преподавателю или отправить по электронной почте своему преподавателю. Предлагаемая модель бланка апробированы в ряде школ г. Шымкент: Назарбаев интеллектуальная школа физико-математического направления, областная школа «Дарын» для одаренных детей.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Назарбаев Н.А. «Стратегия «Казахстан-2050»-новый политический курс состоявшегося государства». Послание народу Казахстана. Астана. www.bnews.kz. 14 декабря 2012г.
- [2] Кабылбеков К.А., Байжанова А. Использование мультимедийных возможностей компьютерных систем для расширения демонстрационных ресурсов некоторых физических явлений. Труды Всероссийской научно-практ. конф. с междунар. участием. Томск 2011г., С 210-215.
- [3] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Арысбаева А.С Оқушылардың өз бетінше атқаратын компьютерлік зерханалық жұмыс бланкісінің үлгісі. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013, №6, С 82-89.
- [4] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Байдуллаева Л.Е. Абдураимов Фотоэффект, комптонэффекті заңдылықтарын оқытуда компьютерлік үлгілерді қолданудың әдістемесі, компьютерлік зертханалық жұмыс атқаруға арналған бланкі үлгілері. Известия НАН РК, серия физ.мат., Алматы, 2013. №6, С 114-121.
- [5] Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Турганова, Т.К., Нуруллаев М.А., Байдуллаева Л.Е. Жинағыш және шашыратқыш линзаларды үлгілеу тақырыбына сабақ өткізу үлгісі  
Известия НАН РК, серия физ.-мат. №2, Алматы, 2014, С 286—294.
- [6] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Саидахметов П. А, Рүстемова Қ. Ж., Байдуллаева Л. Е. Жарықтың дифракциясын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі Изв. НАН РК, серия физ.-мат., №1(299), Алматы, 2015, С 71-77.
- [7] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А., Такибаева Г.А., Сапарбаева, Э.М., Байдуллаева Л. Е., Адиев Ш.И. Зарядталған бөлшектердің магнит өрісінде қозғалысын және масс-спектрометр жұмысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., №1(299), Алматы, 2015, С 80-87..
- [8] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х. А, Саидахметов, П. А., Байгулова З.А., Байдуллаева Л.Е. Ньютон сақиналарын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 1(299), Алматы, 2015, С14-20.
- [9] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Жарықтың интерференция құбылысын зерттеуді ұйымдастыруға арналған компьютерлік зертханалық жұмыстың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.мат., № 3 (301), Алматы, 2015, С 131-136
- [10] Кабылбеков К.А., Аширбаев Х.А., Сабалахова А.П., Джумагалиева А.И. Допплер эффектін зерттеуге арналған компьютерлік жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі. Изв. НАН РК, серия физ.-мат., № 3 (301) Алматы, 2015, С 155-160.
- [11] Кабылбеков К.А. Физикадан компьютерлік зертханалық жұмыстарды ұйымдастыру. Оқу құралы. Шымкент қ., 2015, 284 с.
- [12] Кабылбеков К.А. Аширбаев Х.А., Арысбаева А.С., Джумагалиева А.М. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы при исследовании физических явлений. Современные наукоемкие технологии, №4, Москва 2015, С40-43.
- [13] Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию работы селектора скорости. Современные наукоемкие технологии, №6, Москва, 2015, С-19-21.
- [14] CD диск компании ОАО «Физикон». «Открытая физика 1.1». 2001.

## REFERENCES

- [1] Nazarbayev N.A. "Strategy" Kazakhstan-2050 »- a new political policy of the taken place state». The message to the people of Kazakhstan. Astana. www.bnews.kz. On December, 14th 2012.
- [2] Kabylybekov K.A., Bajzhanova A. Application of multimedia possibilities of computer systems for expansion of demonstration resources of some physical phenomena. Works All-Russia scientifically-practical conference with the international participation. Tomsk 2011., P.210-215.

- [3] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A., Arysbaeva A.S. Model of the form of the organisation of self-maintained performance of computer laboratory operation. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, **2013**, №6, P 82-89.
- [4] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A., Bajdullaeva L.E. Abduraimov. A procedure of use of computer models for photoeffect studying, Compton effect, models of forms of the organisation of performance of computer laboratory operations. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, **2013**, №6, P 114-121.
- [5] Kabyzbekov K.A., Saidahmetov P. A., Turganova T.K., Nurullaev M. A., Bajdullaeva L.E. Model of carrying out of a lesson of modelling of agglomerating and diffusing lenses. News NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 2, **2014**, P 286-294.
- [6] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Saidahmetov P. A., Rustemova T.Ж., Bajdullaeva L. E. Model of the form of the organisation of performance of computer laboratory operation on examination of a diffraction of light. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1(299), **2015**, P 71-77.
- [7] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Takibaeva G.A., Saparbaeva E. M., Bajdullaeva L. E., Adineeva S.H.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of a motion of charged particles in a magnetic field. News of NAN RK, series physical-mat., Almaty, № 1 (299), **2015**, P 80-87.
- [8] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H. A., Saidahmetov, P. A., Bajgulova Z.A., Bajdullaeva L.E. Model of the form of the organisations of computer laboratory operation on examination of Newton's fringes. News NAN RK, series physical-mat/, Almaty, № 1 (299), **2015**, P 14-20.
- [9] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operation on examination of the phenomenon of an interference of light. News of NAN RK, series physical-mat., № 3 (301), Almaty, **2015**, P 131-136
- [10] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Sabalahova A.P., Dzhumagalieva A.I. Model of the form of the organisation of computer laboratory operations on examination Doppler-effect. News NAN RK, series physical-mat., № 3 (301) Almaty, **2015**, P 155-160.
- [11] Kabyzbekov K.A. Organisation of computer laboratory work on the physicist. Shymkent. **2015**, 284 p.
- [12] Kabyzbekov K.A., Ashirbaev H.A., Arysbaeva A.S., Dzhumagalieva A.I. Models of the form of the organisation of computer laboratory operations at examination of the physical phenomena. Modern high technologies. №4, Moscow, **2015**, P 40-43.
- [13] Kabyzbekov K.A., Models of the form of the organisation of computer laboratory work on research of the selector of speds. Modern high technologies. №6, Moscow, **2015**, P 19-21.
- [14] CD a disk of the company of Open Society "Physical icons". «The open physics 1.1". **2001**.

## КАРНО ЦИКЛИМЕН ЖҰМЫС АТҚАРАТЫН ҚОЗҒАЛТҚЫШТЫ ЗЕРТТЕУГЕ АРНАЛҒАН КОМПЬЮТЕРЛІК ЗЕРТХАНАЛЫҚ ЖҰМЫСТЫ ҰЙЫМДАСТЫРУДЫҢ БЛАНКІ ҮЛГІСІ

**К.А. Қабылбеков, Г.Ш. Омашова, П.А. Саидхметов, М.А. Нұруллаев, Н.А. Артығалин**

М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент, Қазақстан

**Түйін сөздер:** жылу қозғалтқыш, суытқыш, қыздырғыш, Карно циклі, пайдалы әсер коэффициенті.

**Аннотация.** Мақалада Карно циклімен жұмыс атқаратын жылу қозғалтқышын зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі ұсынылған. Теориядан қысқаша мәліметтер, оқушылардың жұмысты орындауға дайындығын тексеруге арналған бақылау сұрақтары, компьютерлік модельмен танысу тапсырмалары, жауаптарын компьютерлік тәжірибе арқылы тексеретін есептер, бірімді емес есептер, тәжірибелік, зерттеулік және шығармашылық тапсырмалар қамтылған.

Теориядан қысқаша мәліметтерде жылу қозғалтқыштың анықтамасы, жұмыс атқару принципі, Карно циклінің процестері, жылу қозғалтқыштың пайдалы әсер коэффициенті және суытқыш машинаның жұмысы берілген.

Компьютерлік модельмен танысу тапсырмаларында процестің параметрлерін (қысым, температура) модель мүмкіншілігіне байланысты өзгерту, жұмысшы заттың көлемін анықтау қарастырылған.

Жауаптарын компьютерлік тәжірибе арқылы тексеру тапсырмаларында есептері алдын-ала қағазға шығарып соңынан есеп шарттарын тәжірибеде іске асырып нәтижелері тексерілуі керек, есептерді шығару барысы бланкімен бірге тапсырылады. Тәжірибелік тапсырмаларда берілген параметрлерді компьютерлік тәжірибеде іске асырып, қозғалтқыш атқарған жұмыс және жылу мөлшері мен пайдалы әсер коэффициентін анықтау қарастырылған. Бірімді емес есептерде берілген пайдалы әсер коэффициентін алу үшін қыздырғыш пен суытқыш температуларын таңдау, ал зерттеу тапсырмаларында қозғалтқыштың пайдалы әсер коэффициентін жоғарылату қамтылған.

Тапсырмалар саны артығымен берілген. Бір оқушының олардың барлығын орындауы шарт емес. Оқытушы оқушылардың шамасына қарай тапсырмаларды іріктеп, таңдап бере алады немесе ұқсас тапсырмалар ұсынуына болады. зерттеулік және шығармашылық тапсырмаларды орындау аса маңызды. Сабақ соңында оқушылар өздерінің бланкілерін толтырып электронды пошта арқылы немесе оқытушыға тапсырады. Келесі сабақта оқытушы жауаптарды сараптап оқушылардың жұмыстарын бағалайды.

Поступила 13.03.2016 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 104–107

**SYSTEM DISCUSSION OF METHODS  
OF INTRODUCTION IN LESSONS ON PHYSICS  
BASES OF KNOWLEDGE ON ECOLOGY**

**G.T.Tygelbaeva, A. E. Kanibekova**

The Kazakh state woman pedagogical university  
bayan\_sulu-13.11@mail.ru

**Keywords:** ecology, environment, pollution, hierarchical system, integration, differentiation

**Abstract.** The article deals with pollution of the environment as a result of anthropogenic impacts, leading to disruption of the structure and functioning of nature. It is presented the conceptual bases of perfection of educational software learning the basics of ecology system in universities and schools.

In this case on the basis of developing the scientific and ecological approach recommended conceptual framework and its mechanisms are defined as separate structures of the system, formed on the principle of environmental modification. The developed system structures composed of many interconnected components of multilevel hierarchical education ecosystem, synthetically combined into a single entity with unified targets. This educational and pedagogical structure built on the basis of the disclosure of communication between the subject naturally - scientific disciplines that play a special role in improving the efficiency and completeness of their development. In the paper also proper attention is paid to the differentiation of the system of ecological knowledge on the basis of software content and essence of each subject.

**ЭКОЛОГИЯЛЫҚ БІЛІМ НЕГІЗДЕРІН ФИЗИКА  
САБАҚТАРЫНА ЕНГІЗУ ӘДІСІН ЖҮЙЕЛІК ТАЛДАУ**

**Г.Т. Түгелбаева, А. Е. Канибекова**

Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті

**Түйін сөздер:** экология, қоршаған орта, ластану, иерархиялық жүйе, интеграциялау, дифференциялау.

**Аннотация.** Бұл мақалада қоршаған ортаның антропогендік әсер салдарынан ластануы нәтижесінде табиғат құрылымының өзгеруі және тозуы қарастырылады. Экологиялық білім негіздерін жоғары оқу орындары мен мектепте оқытуды жетілдірудің концептуалдық негіздері келтіріледі.

Экологиялық білім негіздерін меңгеруді тиімді дамыту ерекшеліктерін көпдеңгейлі иерархиялық жүйе теориясын қолдану әдісі арқылы қарастырылды. Бұл келтірілген иерархиялық белгілер модификациялау арқылы экологиялық мағлұматтар мен физикалық заңдылықтарды тиімді меңгеру үшін жаратылыстану ғылымдарының арасындағы пәнаралық байланыс негізінде жан-жақты қарап, кеңінен түсіндіруге мүмкіндік берді.

Келтірілген көп деңгейлі иерархиялық жүйелік құрылымдар бір бірімен өзара байланысқан экологиялық білім беру жүйесін белгілі мақсатқа бағыттауға арналып жасалған.

Сонымен қатар, бұл мақалада әрбір оқу пәнінің бағдарламасындағы мазмұны мен тақырыптардың мағынасына сәйкес экологиялық білім беру жүйесін дифференциациялау мәселесіне баса көңіл бөлінген.

Қазіргі кезеңде жас ұрпаққа, мектеп оқушыларына экологиялық білім және түсінік беру жан-жақты тәрбие саласындағы аса маңызды ең жауаптысы деп білеміз. Сондықтан да, қоршаған ортамен табиғатты қорғау, экологиялық мәдениет пен саналылығын арттыра отырып, ой-өрісін

дамыту, жалпы дүниетану мағлұматтарын қалыптастыру қорыта келгенде әрбір оқытушы ұстаз, тәрбиеші, ата-ана, азаматтар үшін өмірлік құнды міндет.

Сонымен қатар бұл маңызды еңбекте «адамзаттың табиғатпен бірге қоршаған ортасы, жұтқан ортасы, ішкен суының тазалығы тиісті нормаларға сай болуы - тіршіліктің негізгі» атап көрсетілген. Бұл мәселелерді жүзеге асырудың негізгі бағыттарының бірі-орта мектеп, орта техникалық және жоғары білім беру. Қоршаған табиғи ортаның ластауы жолдарын жан-жақты аша отырып, олардың назарын экологиялық негізгі ұғымдарға аудару қажет. Олардың ішіндегі маңызды салалары:

- ластану көздері;
- ластанудың тигізетін экологиялық әсері;
- экологиялық түрлі күрес тәсілдері.

Сабақ жүргізу процесінің негізгі элементтері: мақсаты, мазмұны, көрнекті құралдары, әдістері, ұйымдастырылуы өзара араласып жататыны белгілі. Экологиялық білімді тиімді енгізу осы сабақ барысында жүзеге асырылатындықтан, әрбір сабақтың мазмұнының ғылыми негізделген идеялығына, мұғалімнің адамгершілік бағыты мен экологиялық сауаттылығына, оның көзқарасы мен жалпы адамзаттық ізгілікті қасиеттерді түсіне білуіне тәуелді болады. Бұл салада экологиялық мәселелерге арналған ғылыми-практикалық конференциялар, семинар, симпозиум материалдармен таныстыру, пікірталас, кездесулер, үгіт-насихат жұмыстарын жүргізіп талдау жасау, балалардың қоршаған табиғи ортаға деген және оның адам өмірінде алатын маңызды орны мен іс-қимылдарын түсінікті талдау өте қажет. Мұнымен қатар, баланы экологиялық мәдениеттілікке бейімді тәрбиеленуі сабақ үстінде мұғаліммен және құрбы-құрдастармен, жанұяда болатын ұдайы қарым-қатынастаржүзінде қалыптасады. Жас ерекшеліктеріне сай өмірлік тәжірибесінің молаюы және жас кезінен бастап баланың бойына экологиялық тазалықтың қалыптасуы, оның рухани байлығының мол болуына әсер етеді. Экологиялық мәдениеттілікке, саналылыққа тәрбиелеу ұзақ уақытты керек ететін күрделі процесс болғандықтан, бұл процестің негіздерін баянды етуге мектептің, жанұяның, қоғамның бір жүйеге келтірілген оқу-тәрбие жұмыстары арқылы ғана қол жеткізуге болады. Бұл істе мұғалімдердің, сынып жетекшілерінің, тәрбиешілердің және олардың жеке бастарының үлгісі көп роль атқарады. Қорыта келгенде, экологиялық саналылық - үздіксіз тәрбиеленіп, өзгелердің үлгі-өнегесі арқылы біртіндеп қалыптасатын әмбебап қасиет. [4]

Басқа оқу пәндерімен қатар, экологиялық білімді оқушылар санасына тиянақты қалыптастыруда физика пәнінің алатын орны ерекше. Физиканы оқытудың алғашқы сатысында оқушыларға экологиялық сұрақтарды үйреткенде, оларға біріншіден ең маңызды экологиялық түсініктерді, ұғымдарды (адам-қоршаған орта, ғылыми-техникалық прогресс және табиғат, гидросфера, литосфера және атмосфераны қорғау), физикалық факторлар (жарықтылық, температура, ылғалдылық, қысым, тығыздық т.б.), Күннің, судың, желдің энергиясын тиімді пайдаланудың жолдарын қалыптастырып, жоғарғы кластарға барғанда теориялық жолмен түсінудің негізін салу.

Орта мектептің 7-сыныбынан басталатын физика пәні-табиғатты зерттейтін ғылымдардың күрделісіне жатады. Физика ғылымындағы жаңалықтармен тығыз байланыста техниканың, өндіріс салаларының қауырт дамуы қоғам-адамзат үшін өте қажет бола отырып. Экологиялық дағдарыстың да негізгі себептерінің біріне айналды. Осы ретте, физика пәнін оқыту барысында табиғат заңдары мен құбылыстарын оқушыларға табиғатты қорғау жөнінде көптеген экологиялық мағлұматтар арқылы түсіндіру және аралық байланыс арқылы экологиялық ой-санасын арттыру әдісін системалық талдау тұрғысынан ұсынып отырмыз. [1]

Ұсынылып отырған экологиялық білім негіздерін меңгеруді тиімді дамыту әдісін көпдеңгейлі иерархиялық жүйе теориясының принциптік ерекшеліктерін қолдану арқылы қалыптасты. Бұл тұрғыда физика пәні жаратылыстану ғылымдарының ішіндегі экологиялық білімтану процесінің өзекті негізі есебінде қолданылды.

Деңгейлік иерархия құрамына 3-деңгей кірді:

- бірінші бастапқы деңгей - физика пәнінің кейбір негізгі тақырыптарының құрамын экологиялық тұрғыдан қалыптастыру (7 сынып);

➤ екінші-бірінші деңгейдегі тақырыпқа сүйене отырып, пән аралық байланыс арқылы физикалық мәнін (процесс, заңдылықтар және т.б.) экология тұрғысынан дифференциялау, анықтау және тиімді толықтыру;

➤ үшінші иерархиялық деңгей - физика-экологиялық ғылымның негіздерін қолдана отырып, оқушылардың жас ерекшеліктеріне сай проблемалық сұрақтардың мазмұнын құру. [3]

Ал енді, иерархиялық дамудың нәтижелік қорытындылау деңгейі ретінде оқушылардың тақырыптың мазмұны және оған қатысты қойылатын сұрақтарға толық және сапалы меңгергендігін білдіретін жауаптар беруі деп білеміз. Бұл деңгейлердің құрамын қалыптастыру үшін иерархиялық интеграциялау және дифференциялау жолдары қолданылды. Біз қолданған негізгі белгілер:

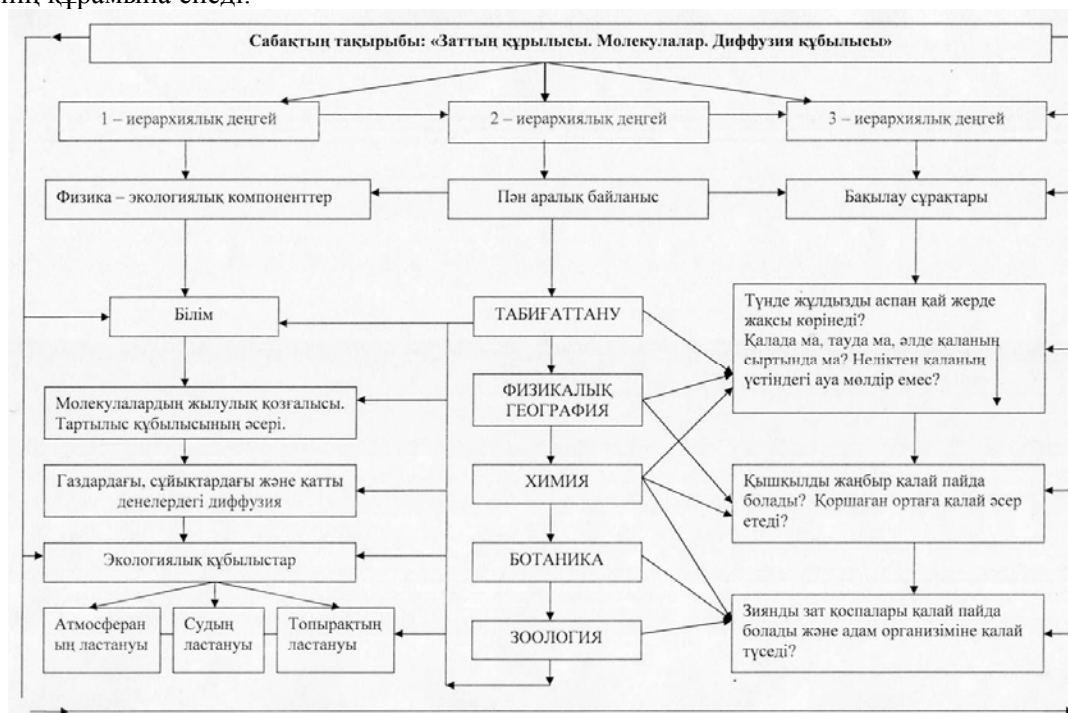
1. Физика-экологиялық ұғымды бастапқы сатыда игеру негіздері.  
2. Физикалық тақырып пен экологияның байланыс негізі.  
3. Физика тақырыбындағы заңдар мен процестердің экологиялық құбылыстарын ғылыми тану мүмкіншілігі.

4. Экологиялық көзқарас тұрғысынан қарағандағымен аралық байланыстардың информациялығы көппараметрлік мағынасы және функциялық байланыстарының қалыптасу ерекшеліктері.

5. Сұрақ құрамын мазмұндық түсіну көлемімен, толықтығымен, қарапайымдылығымен, әрі жан-жақты дүниетану, тіршілік, табиғат, ғылым негіздері арқылы тиімді құрастыру. Сол сияқты сұрақтың мазмұны оқушылардың қабылдау мүмкіншілігінің дәрежесіне сай бола отырып, сонымен қатар ғылым-техника дамуын қамтуы қажет.

6. Жауаптың саналылығы, тереңдігі, жан-жақтылығы арқылы әрбір білім алқшының жеке басының ерекшеліктерін кең аша отырып, оның құрамын күнделікті өмірмен, практикамен, табиғи құбылыстармен байланыста қалыптастыру. [2]

Тиімді қолданылған иерархиялық белгілер экологиялық мағлұматтар мен физикалық заңдылықтарды физика-экологиялық тұрғыдан жан-жақты қарап, кеңінен ашу мүмкіншілігін туғызды. Сонымен қатар сабақ беру тәсілінің негізгі элементтері ретінде ұсынылды. Жоғарыда келтірілген нәтижелерге сүйене отырып, «Экологиялық білім негіздерін физика сабағына енгізу әдісі» жүйесінің құрылымы жалпы жүйелеу түрінде енгізілді (1-сурет). Бұл жүйеде үлкен және күрделі «Экология - педагогика саласындағы физика-экологиялық білім арқылы дүниетану» жүйесінің құрамына енеді.



1-сурет

---

**ӘДЕБИЕТ**

- [1] Әубәкіров С.Қ. Экологиятану. Алматы 1999.  
[2] Турдыкулов Э. Экологическое образование. Ташкент, 1998.  
[3] Түгелбаева Г.Т. Физика-экология саласындағы көрсеткіш шамаларының аналогиялық байланыс ерекшеліктері. Алматы, 2002.  
[4] Трухин В.И. и др. Экологическое образование на физическом факультете МГУ, Москва, 1998.

**REFERENCES**

- [1] Әубәкіров С.Қ., Ekologiyatanu. Almaty, **1999**.  
[2] Turdykulov E., Ekologicheskoe obrazovanie. Tashkent, **1998**.  
[3] Tugelbaeva G.T. Fizika-ekologiya salasyndary kórsetkish shamalarynyń analogiyalyk bajlanys erekshelekteri. Almaty, **2002**.  
[4] Truxin V.I. i dr. Ekologicheskoe obrazovanie na fizicheskoy fakultete mgu, moskva, **1998**.

**СИСТЕМНОЕ ОБСУЖДЕНИЕ СПОСОБОВ ВНЕДРЕНИЯ  
В УРОКИ ПО ФИЗИКЕ ОСНОВ ЗНАНИЙ ПО ЭКОЛОГИИ**

**Г.Т. Түгелбаева, А. Е. Канибекова\***

Казахский государственный женский педагогический университет

**Ключевые слова:** экология, окружающая среда, загрязнения, иерархической системы, интеграции, дифференциации.

**Аннотация.** В статье рассматривается загрязнение природной среды в результате антропогенного воздействия, ведущее к нарушению структуры и функционирования природы. Приведены концептуальные основы совершенствования программного обеспечения образовательной системы обучения основ экологии в вузах и школах.

При этом, исходя из развивающего научно-экологического подхода, рекомендуемые концептуальные основы и ее механизмы определены в виде отдельных системных структур, сформированные по принципу экологической модификации. Разработанные системные структуры состоят из множества взаимосвязанных многоуровневых иерархических компонентов экосистемы образования, синтетически объединенных в единое целое с единым целевым ориентиром. При этом учебно-педагогические структуры построены на основе раскрытия меж предметной связи естественно - научных дисциплин, которые занимают особое место в повышении эффективности и полноты их освоения. В работе также надлежащее внимание уделено вопросам дифференциации системы экологического знания, исходя из программного содержания и сущности каждого учебного предмета.

*Поступила 13.03.2016 г.*

**NEWS**

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 108–115

UDC 372.800.465.02

**OBJECT-ORIENTED SYSTEM AS THE FACTOR  
OF FORMATION OF INFORMATION-LOGICAL COMPETENCE  
OF FUTURE PROFESSIONALS**

**T.K.Koyshieva<sup>1</sup>, Zh.Zh.Kozhamkulova<sup>2</sup>, A.I.Bazarbaeva<sup>3</sup>, A.Begimbetova<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan;

<sup>2</sup>Kazakh State Woman Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan;

<sup>3</sup>International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan;

<sup>4</sup>International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan;

e-mail: [ekojaz@mail.ru](mailto:ekojaz@mail.ru)

**Key words:** the system of teacher training, information model, analysis, factor, module.

**Abstract.** The article deals with the problem-oriented system of training. Factors improving the professional training system are given. We select the most popular types of problem-oriented systems, the preparation of suitable competence of teachers. Currently, the most promising means of information technology, from the point of view of the implementation of the above conditions are object-oriented educational system. Consider their modular structure, determine the composition and didactic functions that are used in the formation of information-logical competence of future specialist. Despite the great differences of problem-oriented systems we can identify a number of commonly implemented in these works, the most typical of basic functions. These basic functions are: analysis of phrases of language of communication; the generation, synthesis programs; structuring, placement, storage and retrieval of information; creating configuration, versioning, editing relations; planning, design calculations; performance management; optimization calculations; providing a suitable interface; editing, macroprocessing; EXPERT; maintaining change history; support collaboration; information and referral service.

УДК 372.800.465.02

**ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ КАК ФАКТОР  
ФОРМИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННО-ЛОГИЧЕСКОЙ  
КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩИХ СПЕЦИАЛИСТОВ**

**Т.К.Койшиева<sup>1</sup>, Ж.Ж., Кожамкулова<sup>2</sup> А.И.Базарбаева<sup>3</sup>, Х.А.Бегимбетова<sup>4</sup>**

<sup>1</sup>Международный Казахско-турецкий университет имени А.Яссави, Туркестан, Казахстан;

<sup>2</sup>Казахский государственный женский педагогический университет, Алматы, Казахстан;

<sup>3</sup>Международный Казахско-турецкий университет имени А.Яссави, Туркестан, Казахстан;

<sup>4</sup>Международный Казахско-турецкий университет имени А.Яссави, Туркестан, Казахстан

**Ключевые слова:** система подготовки учителей, информационная модель, анализ, фактор, модуль.

**Аннотация.** В статье рассматривается проблемно-ориентированная система подготовки специалистов. Приведены факторы совершенствования системы подготовки профессиональных кадров. Выделены наиболее популярные типы проблемно-ориентированных систем, подходящих при подготовке компетентности педагогов. В настоящее время наиболее перспективными средствами информационной

технологий, с точки зрения реализации названных выше условий, являются объектно-ориентированные обучающие системы. Рассмотрим их модульную структуру, определим состав и дидактические функции, которые используются при формировании информационно-логической компетентности будущего специалиста. Несмотря на большие отличия проблемно-ориентированных систем, можно выделить ряд часто реализуемых в них работ, наиболее характерных базовых функций. Эти базовые функции: анализ фраз языка общения; генерация, синтез программ; структуризация, размещение, хранение, поиск информации; создание конфигурации, поддержка версий, редактирование связей; планирование, проектирование вычислений; управление исполнением; оптимизация вычислений; обеспечение подходящего интерфейса; редактирование, макропроцессирование; экспертность; ведение истории изменений; поддержка коллективной работы; информационно-справочная служба.

Развитие науки и новых технологий, компьютеризация всех отраслей промышленности, науки и образования требуют создания и внедрения средств новых информационных технологий с одной стороны, а с другой, в связи с возникновением проблем в деятельности специалистов с их применением, нужен новый подход в профессиональной подготовке будущих специалистов.

Следствием существования противоречия между уровнем развития информационной технологии и уровнем применения их в обучении специальным дисциплинам является проблема поиска в сложившихся условиях более эффективных образовательных технологий. Один из путей решения проблемы связан с созданием методики обучения объектно-ориентированным системам на основе информационно-логического моделирования. Информационная модель есть точное описание предмета изучения с помощью естественных или специальных языков, которая опирается на чувственное и теоретическое мышление. Компьютерная модель рассматривается как результат обобщения профессиональных знаний о предметах и явлениях, представленных в информационной модели [1-4].

Одним из важных факторов совершенствования системы подготовки профессиональных кадров в высшей школе является активное использование в образовательном процессе объектно-ориентированных систем обучения. Несмотря на наличие в этой области серьезных исследований, до сих пор весьма острой остается потребность в дальнейшей разработке ее теории и методологии. В настоящее время наметился прогресс в создании педагогических технологий, адекватных целям, содержанию и методам интенсивного обучения, в результате чего в вузах разработано большое разнообразие перспективных технологий обучения, которые позволяют эффективно решать многие дидактические проблемы, существующие сегодня в высшей школе при подготовке высококвалифицированных специалистов [5-9].

Обычно программная среда, в которой работает пользователь на ЭВМ, определяется совокупностью имеющихся на ней программных компонентов. Программное обеспечение состоит, как нам известно, из множества программных компонентов, которые прошли сертификацию, хорошо себя зарекомендовали, имеют довольно широкое применение. На каждой ЭВМ, как правило, имеется только такое программное обеспечение, которое необходимо пользователю для создания профессионального интерфейса, так как в состав программного обеспечения входят компоненты общего назначения – операционные системы, прикладные программы, повышающие уровень и улучшающие качество интерфейса. Однако основными составными частями программного обеспечения являются проблемно-ориентированные системы. Каждая из таких систем предназначена для решения задач из той или иной проблемной области. Количество проблемных областей очень велико, поэтому принято выделять несколько типов таких систем, наиболее часто употребляемых и обладающих рядом черт и особенностей, характеризующих их.

Проблемно-ориентированная система, как правило, представляется набором программ, предназначенных для решения задач определенного прикладного типа и объединяемых общим интерфейсом. Адаптация того или иного типа проблемно-ориентированных систем к некоторой прикладной области приводит к получению прикладной программной системы, имеющей своих пользователей, конкретное назначение и применение [10-13].

Несмотря на большие отличия проблемно-ориентированных систем, можно выделить ряд часто реализуемых в них работ, наиболее характерных базовых функций. Эти базовые функции: анализ фраз языка общения; генерация, синтез программ; структуризация, размещение, хранение, поиск информации; создание конфигурации, поддержка версий, редактирование связей;

планирование, проектирование вычислений; управление исполнением; оптимизация вычислений; обеспечение подходящего интерфейса; редактирование, макропрцессирование; экспертность; ведение истории изменений; поддержка коллективной работы; информационно-справочная служба.

Исходя из выше изложенного можно выделить несколько наиболее популярных типов проблемно-ориентированных систем, подходящих этим базовым функциям, а именно, это: системы программирования; системы базы данных; информационные системы; пакеты прикладных программ; текстовые процессоры; системы компьютерной графики; обучающие системы; системы искусственного интеллекта.

Однако, как показало проведенное исследование, внедрение современных технологий обучения в образовательный процесс высших учебных заведений во многом сдерживается слабой разработанностью их дидактических основ и отсутствием научно обоснованных практических рекомендаций по применению в обучении. Относительно слабо изучены психологические аспекты их внедрения. В настоящее время темпы совершенствования технологий обучения опережают процессы психолого-педагогического их осмысления и исследования. Успешному решению этой проблемы в определенной степени препятствует то, что накопленный опыт их применения в вузах научно не обобщен и теоретически не осмыслен. Подходы к трактовке данного феномена остаются весьма различными и полной ясности в истолковании его сущности и специфики не вносят. А это значит, что те потенциальные возможности повышения эффективности учебного процесса, которые заложены в применении объектно-ориентированных систем, используются в педагогической практике далеко не полностью.

Важно отметить, что степень осознанности потребности пополнять свои знания у разных людей неодинакова. У студентов часто на первый план выступают прагматические мотивы, связанные с решением частных, ситуативных задач. В этих условиях особенно важно при объектно-ориентированных системах предусмотреть специальные меры по стимулированию учебной деятельности, поддержанию положительной мотивации к учению, созданию благоприятного режима работы. Необходимо вовлечь обучаемых в самостоятельную деятельность учения, имитируя практику, многократно усиливая возможности анализа и синтеза явлений и процессов. Применение в рамках объектно-ориентированных систем компьютерных тренажеров, баз данных, электронных учебников, решателей задач, графических и текстовых редакторов и т.п. позволяет это реализовать.

Проведенные в ряде вузов исследования показывают, что именно компьютерные средства обучения являются теми средствами, которые создают необходимые предпосылки для возникновения внутренней мотивации деятельности личности в условиях информационной технологий обучения. В этом случае студенты начинают получать удовольствие от самого процесса учения, независимо от внешних мотивационных факторов. Этому способствует и то, что при обучении на основе объектно-ориентированных систем компьютеру могут быть переданы отдельные функции преподавателя. Электронный учебник может выступить в роли педагога-репетитора, который способен показать ошибку и намекнуть на правильный ответ; повторять задание снова и снова; "дружелюбно" обращаться с пользователем и в какой-то момент даже оказать ему существенную помощь.

Как показывает анализ, большинство обучаемых уже на ранних стадиях нахождения в вузе прекрасно осознают необходимость применения ЭВМ в своей профессиональной деятельности. Учебный процесс по своей сути все больше и больше приближается к производительному труду. Особенно этот эффект усиливается, если учебные задачи, решаемые в рамках объектно-ориентированных систем, связаны с практической деятельностью будущего специалиста или представляют интерес в его сегодняшней учебной работе. Наиболее результативна в данном случае такая методика создания мотивации, при которой преподаватель обращается к формированию представления обучаемого о роли данного предмета в его будущей деятельности для успешного решения профессиональных задач. Основное внимание уделяется при этом не столько специальному подбору учебного материала, сколько правильному формированию позитивных ценностных ориентаций обучаемых по отношению к учению, к изучаемому предмету и к учебной работе в целом [14-15].

Объектно-ориентированные системы предусматривает обеспечение обучаемых четкой и адекватной информацией о продвижении в обучении, поддерживает их компетентность и уверенность в себе, стимулируя тем самым внутреннюю мотивацию. Познавательный процесс находится под контролем самого обучаемого: он чувствует ответственность за собственное поведение, объясняет причины своего успеха не внешними факторами (легкость задачи, везение), а собственным старанием и усердием. Во многих обучающих программах реализуется принцип побуждения учащихся к поиску, когда компьютер в случае ошибочного решения дает ориентирующие указания, направляя тем самым действия обучаемых. Эффективная обучающая система, в конечном счете, обеспечивает исправление ошибки и позволяет довести решение задачи до конца. Благодаря этому устраняется одна из распространенных причин отрицательного отношения к учебе, а именно неудачи в решении учебных задач.

Для поддержания стимула к обучению при использовании объектно-ориентированных систем необходимо предусмотреть градацию учебного материала с учетом зоны ближайшего развития для групп обучаемых с разной базовой подготовкой, разными навыками выполнения умственных операций и интеллектуальным развитием, т.е. необходимо наличие банка данных с задачами разной степени сложности, предусматривающей несколько методов и форм подачи одного и того же учебного материала в зависимости от уровня базовых знаний, целей и развития обучаемых [16-17].

Следует отметить, что мотивация обучаемых к применению в образовательном процессе объектно-ориентированных систем на протяжении всего периода нахождения их в вузе возрастает от курса к курсу. Об этом свидетельствуют итоги анкетирования студентов Южно-Казахстанского университета, проведенного в рамках комплексной проверки естественно-педагогического факультета. На просьбу указать, какие проблемы в настоящее время оказывают наибольшее влияние на ваше профессиональное становление респонденты, выделили среди двадцати предложенных как одну из наиболее значимых - проблему создания обучающих программ и ее использования в процессе обучения.

Особое значение в создании положительной мотивации к применению объектно-ориентированных систем играет возможность управления процессом познавательной деятельности.

Объектно-ориентированные системы при соответствующем качестве программного обеспечения способствует предоставлению реальной свободы обучаемым в выборе учебных задач и вспомогательной информации в зависимости от их индивидуальных способностей и наклонностей. Такая тенденция к дифференциации и индивидуализации обучения дает возможность гораздо большему числу слушателей обрести уверенность в учебном труде, привести в соответствие требования и сложность заданий с уровнем их способностей и возможностей.

Применение объектно-ориентированных систем является одним из факторов развития и индивидуализации стратегии деятельности субъекта, ее мотивационной, личностной регуляции. Успешность учебной деятельности с их использованием достигается, если имеется поисковая активность, рождающаяся из мотивационной сферы, в которой присутствует цель, достигаемая через формирование плана действий. Побудительными мотивами применения объектно-ориентированных систем на данном этапе развития информационно-логической компетентности будущего специалиста в вузах выступают: более высокая интенсивность работы, ее организованность, активность, качество усвоения, самостоятельность, объективность оценки, дисциплинированность, предметная новизна, а также необычность занятий и другие.

Использование в образовательном процессе вуза объектно-ориентированных систем может стать основой для становления принципиально новой формы образования, опирающейся на детальную самооценку и мотивированную самообразовательную активность личности, поддерживаемую современными техническими средствами.

Повышения информационно-логической компетентности учителей в условиях информатизации образования в основном базируется на принципах модульного обучения. Использование модульного подхода при проектировании содержания курсовой подготовки позволяет дифференцировать содержание обучения путем группировки модулей, обеспечивающих разработку курса в полном, сокращенном и углубленном вариантах в зависимости от потребностей учителей. Критерии и показатели уровня развития информационной культуры учителя

определяются в соответствии с современными трактовками, отражают требования, предъявляемые к информационной-логической компетентности современного педагога: целостное представление об информационном пространстве современной системы образования, информационная грамотность: владение технологиями подготовки и оформления результатов учебно-методической, опытно-экспериментальной, научно-исследовательской работы; владение прикладным программным обеспечением; способность к овладению новыми программными (образовательными) продуктами и организация учебного процесса с использованием новых информационных технологий: знание возможностей новых информационных технологий; умение использовать в процессе обучения коммуникационные службы; умение адаптировать и применять педагогические программные средства с учетом особенностей образовательного процесса.

В настоящее время наиболее перспективными средствами информационной технологий, с точки зрения реализации названных выше условий, являются объектно-ориентированные обучающие системы. Рассмотрим их модульную структуру, определим состав и дидактические функции, которые используются при формировании информационно-логической компетентности будущего специалиста.

Структура объектно-ориентированных обучающих систем состоит из группы модулей дидактического обеспечения процесса обучения и модуля контроля и коррекции функционального состояния пользователя системы. Кратко остановимся на первой группе модулей, в состав которой должны входить следующие из них: обучаемого, учебной деятельности, обучающей деятельности, решения учебной задачи, знаний об ошибках пользователя.

Модуль обучаемого представляет собой набор компетенций, которые осуществляют: выбор показателей, характеризующих начальный уровень обученности применительно к конкретной теме (курсу, дисциплине); сбор данных о начальном уровне обученности и отнесение пользователя к определенной категории; конкретизацию для него учебных целей; выбор обучающих воздействий в соответствии с уточненными учебными целями и контроль за их достижением.

Модуль учебной деятельности включает следующие: описание уровней освоения способов действий, предусмотренных целями обучения; выбор основного содержания учебной дисциплины, необходимого для достижения учебной цели; выбор содержания дополнительного материала, который необходимо знать, чтобы усвоить основное содержание изучаемой дисциплины; определение последовательности действий, обеспечивающих усвоение материала и ведущих к достижению учебной цели; определение показателей, по которым оцениваются усвоение учебного материала и достижение учебной цели; выбор диагностических средств для определения показателей достижения цели; итоговый и текущий контроль.

Модуль обучающей деятельности включает следующие: выбор обучающих воздействий для каждого шага усвоения способа действий (предъявление теоретического материала или учебной задачи); обращение к модели решения учебной задачи для получения нормативного решения; определение возможностей отклонения от нормативного решения и прогноз причин отклонений; выбор диагностических средств для выяснения причин затруднений обучаемого при решении учебных задач; выбор вспомогательных воздействий (подзадач, вопросов, указаний) для устранения причин затруднений; осуществление обучающих воздействий и использование диагностических средств; анализ информации об учебной деятельности и внесение изменений в модель обучаемого.

Модуль решения учебной задачи содержит алгоритм, с помощью которого может быть решена поставленная задача с привлечением методов, которые должны быть известны обучаемому к этому моменту времени. В самом общем случае в состав этого алгоритма, составляющего существо способа действий, включаются следующие операторы: выявление задачной ситуации (анализ условий задачи и поиск аналогичных решенных задач); выработка плана решения задачи и построение алгоритма решения; подбор готовой программы и решение с ее помощью задачи; осуществление контроля правильности решения задачи.

Модуль знаний об ошибках обучаемого содержит каталог возможных его ошибок, правила выдвижения и проверки гипотез о неправильных представлениях обучаемого, приведших к данной ошибке. Основанием для этого служат различия между решениями, предложенными обучаемым и методикой решения задач в данной предметной области.

Рассмотренный набор модулей позволяет на различных этапах обучения анализировать и контролировать продвижение обучаемого к достижению конкретных целей обучения.

Одним из основных этапов объектно-ориентированного проектирования является этап выбора или специальной разработки, в соответствии с решаемой дидактической задачей, объектно-ориентированных или других информационных средств обучения. Большое их разнообразие не позволяет в настоящей работе полностью осветить все особенности этого процесса. Однако необходимо выделить общие требования предъявляемые к объектно-ориентированным системам как дидактической системе, в которой используются данные средства. Опора на эти требования позволяет преподавателю сориентироваться и, в соответствии с заданными дидактическими целями, выбрать наиболее оптимальный вариант проектирования, позволяющий повысить продуктивность учебного процесса.

Рассмотренные в работе психолого-педагогические аспекты разработки и применения в вузе объектно-ориентированных систем должны помочь педагогам успешно решать задачи интенсификации учебного процесса на современном этапе развития информационной технологий обучения, а реализация практических рекомендаций и предложений будет способствовать более эффективному использованию объектно-ориентированных систем в их профессиональной деятельности [18-19].

Профессионализация как процесс овладения обучаемыми специальностью и продвижения к ее вершинам обеспечивает реализацию их стратегии к самореализации в учебном труде. Видение студентами стратегии достижения вершин профессионального мастерства и следование логике продвижения к ним предполагает прохождение ими ряда этапов. Каждый из них знаменует достижение новых уровней профессиональной компетентности, таких как профессиональное становление (способность самостоятельно выполнять служебные обязанности); обеспечение стабильности в работе (гарантированное, своевременное и качественное выполнение служебных задач); восхождение к профессиональному мастерству (творческий, эффективный труд, предполагающий реализацию индивидуальных деятельности стратегий) и другие.

Свое наиболее целостное выражение задача наращивания творческого потенциала обучаемых в условиях вуза получает в форме реализации ИТО (обучающих сред), предназначенных для осуществления их эффективной профессионализации. При этом ее стратегия состоит в осуществлении различных взаимодействий с факторами окружающей среды, призванными обеспечить как личностный рост, так и формирование у них психологических содержательных новообразований, составляющих различные аспекты концептуальной модели профессионала. При этом предполагается учитывать два основных момента.

Во-первых, понимание и принятие обучаемыми позиции продуктивного взаимодействия с окружающей средой, созданной в рамках ИТО, прежде всего, за счет использования ими условий, воздействий и возможностей, представляемых самой информационной средой для своей самоактуализации и самореализации. Выработка и принятие обучаемыми такой позиции возможна в результате не случайного, а творческого самоопределения, при котором они устанавливают степень соответствия (несоответствия) личностных предпосылок к конкретной профессиональной деятельности и глубины понимания и осмысления ее содержания.

Во-вторых, построение самими обучаемыми субъективно приемлемых моделей профессионала и выбор индивидуально-адекватных способов и стратегий овладения ими. Движение субъектов обучения в личностных, предметных и операционных смыслах также непосредственно связана с реализацией ими процессов личностного и профессионального самоопределения.

Подобно тому, как печатные материалы и технические средства массовой коммуникации привели к гигантскому расширению возможностей человеческого познания, фиксации и передачи опыта, компьютерная техника, применяемая в рамках ИТО, позволяет увеличить потенциал человеческого мышления, вызвать определенные изменения в структуре его мыслительной деятельности.

Проведенное исследование показало, что повысить продуктивность применения объектно-ориентированных систем в вузе можно за счет более полного использования достижений современной педагогической науки, оптимизации учебного процесса, активизации познавательной деятельности слушателей, улучшения содержания обучения, всестороннего учета индивидуальных

психофизиологических характеристик и психологического состояния обучаемых. Объектно-ориентированное проектирование на этой основе является неперенным условием создания педагогических систем качественно нового уровня, имеющих свои цели, теоретическую базу, методику организации, функционирования и оценки, способных обеспечить современные требования социального заказа на подготовку современных специалистов.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Бешенков С., Ракитина Е. Моделирование и формализация. Методическое пособие. М.: ЛБЗ, 2002. – 336 с.
- [2] Преподавание информатики в образовательных учреждениях Республики Казахстан. Сборник материалов передовых опытов. – Алматы, 2006. Том 1. – 370 б.
- [3] Бежанова М.М. и др. Введение в компьютерные науки. Учебное пособие. Новосибирск, 1994. 115 с.
- [4] Лапчик М.П., Семакин И.Г., Хеннер Е.К. Методика преподавания информатики. М.: Академия, 2001. – 624 стр.
- [5] Михеева Е.В. Информационные технологии в профессиональной деятельности. М.: Академия, 2006. – 384с.
- [6] Образцов П.И. Психолого-педагогические аспекты разработки и применения в вузе информационных технологий обучения. – Орловский государственный технический университет. – Орел, 2000. – 145 с.
- [7] Под редакцией В.А.Сластенина. Педагогика профессионального образования. М.: Академия, 2004. – 368с.
- [8] Захарова И.Г. Информационные технологии в образовании. Учеб. пособие для студ.мыш.учеб.заведений. М.:ИЦ «Академия», 2005. 192 с.
- [9] Педагогические условия формирования информационно-технологической компетенции у будущих педагогов профессионального обучения // Инновационные технологии в повышении качества образования: материалы международной научно-практической конференции. В 3 ч. – Омск: Изд-во Омского экономического института, 2006. – Ч. 1. – С. 106–110 (в соавторстве с Егоровым В.В., Смирновой Г.М.).
- [10] Технология формирования профессиональной компетентности педагога профессионального обучения // Актуальные проблемы современности: междунар. научн. журнал. – Караганда: Болашақ-Баспа, 2006. – № 2. – С. 143–145 (в соавторстве со Смирновой Г.М., Ударцевой С.М.).
- [11] Технологическая компетентность педагога профессионального обучения // Казахстан и Россия: путь дружбы, диалог культур, интеграция образования науки: материалы международной научно-практической конференции. В 2 т. – Кокшетау: ТОО «Копировальный центр», 2006. – Т. 1. – С. 162–166 (в соавторстве с Егоровым В.В., Смирновой Г.М.).
- [12] Системный подход к формированию технологической компетентности будущего педагога профессионального обучения // Социально-экономические проблемы развития муниципального управления: теория и опыт: сб. научн. тр. по материалам международной конференции. – Новосибирск: НГАУ, 2006. – С. 101–104 (в соавторстве с Егоровым В.В., Смирновой Г.М.).
- [13] Современная техника и технологии в производственной сфере (учебно-методический комплекс для специальности 050120 – Профессиональное обучение). – Караганда: Изд-во КарГУ, 2007. – 105 с. (в соавторстве с Ударцевой С.М.).
- [14] Профессиональная подготовка специалистов в условиях информатизации общества // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АПНП-2004): материалы международной научной конференции (Гуманитарные науки и образование). – Тольятти: Волжский университет им. В.Н. Татищева, 2004. – Ч. 1. – С. 114–119 (в соавторстве со Шкутиной Л.А.).
- [15] Инновационная деятельность в учебном процессе // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АПНП-2004): материалы международной научной конференции (Управление образованием & Информационные технологии). – Тольятти: Волжский университет им. В.Н. Татищева, 2004. – С. 89–93 (в соавторстве с Мишуковой Т.Н.).
- [16] Информатизация системы образования Республики Казахстан // Татищевские чтения: актуальные проблемы науки и практики (АПНП-2004): материалы международной научной конференции (Управление образованием & Информационные технологии). – Тольятти: Волжский университет им. В.Н. Татищева, 2004 – С. 128–132.
- [17] Влияние профессионально важных качеств на профессиональное становление личности // Педагогические проблемы информационно-технологической подготовки специалистов высшей школы: сб. научных трудов. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2004. – С. 20–25 (в соавторстве со Смирновой Г.М., Ударцевой С.М.).
- [18] Компетентностный подход в подготовке педагога профессионального обучения // Вестник ПГУ. – 2006. – № 1. – С. 140–147.
- [19] Тажигулова А.И. Конструирование электронных учебников // Научно-практический журнал “Информационные технологии в Казакстане”, №1, 2000.- 2-3 б.

#### REFERENCES

- [1] S.Beshenkov, E.Rakitina. Modeling and formalization. Toolkit. MM: LBZ, **2002**. 336 p. (in Russ.).
- [2] The teaching of computer science in the educational institutions of the Republic of Kazakhstan. Collection of materials of excellence. Almaty, **2006**. Volume 1. 370 b. (in Russ.).
- [3] Bezhanova M.M.and others. Introduction to computer science. Tutorial. Novosibirsk, **1994**. 115 p. (in Russ.).
- [4] Lapchik MP, Semakin IG, Henner EK Methods of teaching of computer science. M.: Academy, **2001**. 624 p. (in Russ.).
- [5] Miheeva E.V. Information technologies in professional activity. Moscow: Academy, **2006**. 384s. (in Russ.).

- [6] Samples PI Psycho-pedagogical aspects of development and implementation of the university information technology training. - Orel State Technical University. Eagle, **2000**. 145 p. (in Russ.).
- [7] EDITED V.A. Slavenina. vocational education pedagogy. Moscow: Academy, **2004**. 368S. (IN RUSS.).
- [8] Zaharova I.G. Information technology in education. Proc. Allowance for stud. myssh.ucheb.zavedeny. moscow: its "academy", **2005**. 192s. (in russ.).
- [9] Pedagogical conditions of formation of information-technological competence of future teachers of vocational training // Innovative technologies to improve the quality of education: proceedings of the international scientific-practical conference. In 3 hours - Omsk Univ. Of Omsk Economic Institute, **2006**. Part 1. P. 106-110 (in collaboration with Egorov VV, Smirnova GM).
- [10] The technology of formation of professional competence of the teacher of vocational training // Actual problems of the present: Intern. Scien. Journal. Karaganda: Bolashak-Baspa, **2006**. № 2.S. 143-145 (together with Smirnova GM, Udartseva SM).
- [11] The technological competence of vocational training of the teacher // Kazakhstan and Russia: the path of friendship, cultural dialogue, integration of education science: proceedings of the international scientific-practical conference. In 2 tons - Kokshetau: TOO "Copy center", **2006**. T. 1. P. 162-166 (in collaboration with Egorov VV, Smirnova GM).
- [12] A systematic approach to the formation of the technological competence of the future teacher of vocational training // Social and economic problems of municipal management: Theory and Experience: Sat. Scien. tr. on materials of the international conference. - Novosibirsk: NSAU, **2006**. S. 101-104 (together with Egorov VV, Smirnova GM).
- [13] Modern techniques and technologies in the industrial sector (training complex for the specialty 050120 - Vocational training). - Karaganda: Publishing house of the University, **2007**. 105 p. (Co-authored with Udartseva SM).
- [14] Training experts in the conditions of information society // Tatischevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the International Conference (Humanities and Education). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishchev, **2004**. Part 1. P. 114-119 (in collaboration with Shkutin LA).
- [15] The innovative activity in educational process // Tatischevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the international scientific conference (Education Management & Information Technologies). - Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishchev, **2004**. P. 89-93 (in collaboration with Mishukova TN).
- [16] Education System Informatization of the Republic of Kazakhstan // Tatischevsky read: actual problems of science and practice (APNP 2004): Proceedings of the international scientific conference (Education Management & Information Technologies). Togliatti: Volzhsky University. VN Tatishchev **2004**. P. 128-132.
- [17] The effect of professionally important qualities in the professional formation of the person // Pedagogical Issues tehnologii-cheskoy information and training specialists of high school: Sat. scientific papers. Karaganda: Publishing house of the University, **2004**. P. 20-25 (in collaboration with Smirnova GM, Udartseva SM).
- [18] Competence approach in the preparation of the teacher of vocational training // PSU Bulletin. **2006**. № 1. S. 140-147.
- [19] AI Tazhigulova Kostruirovaniye electronic textbooks // Scientific journal "Information Technologies in Kazakstan", №1, **2000**. 2-3 b.

## ОБЪЕКТИҒЕ-БАҒЫТТАЛҒАН ЖҮЙЕ БОЛАШАҚ МАМАННЫҢ АҚПАРАТТЫҚ-ЛОГИКАЛЫҚ ҚҰЗЫРЕТТІЛІГІН ҚАЛЫПТАСТЫРУ ФАКТОРЫ РЕТІНДЕ

Т.К. Қойшиева<sup>1</sup>, Ж.Ж. Қожамкулова<sup>2</sup>, А.И. Базарбаева<sup>3</sup>, Х.А. Бегимбетова<sup>4</sup>

<sup>1</sup> А. Яссауи атындағы Халықаралық Қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан;

<sup>2</sup> Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан;

<sup>3</sup> А. Яссауи атындағы Халықаралық Қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан;

<sup>4</sup> А. Яссауи атындағы Халықаралық Қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан

**Түйін сөздер:** Оқытушыларды дайындау жүйесі, ақпараттық модель, анализ, фактор, модуль.

**Аннотация.** Мақалада мұғалімді дайындауда проблемаға-бағыттаушы жүйе қарастырылған. Кәсіби кадрлар дайындау жүйесінің жоғарғы деңгейдегі факторлары келтірілген. Оқытушыларды дайындаудағы керекті құзыреттіліктерді проблемаға-бағыттаушы жүйенің ең танымал типтерді белгіленген. Қазіргі уақытта ақпараттық технологияның жан-жақтылық құралдарын пайдалану, жоғарыда аталған жағдайларды іске асыру тұрғысынан ақпараттық технологияларды барынша перспективалы құралы, объектілі-бағдарланған білім беру жүйесінің негізі болып табылады. Олардың модульдік құрылын қарастырамыз, дидактикалық функциясын және құрамын анықтаймыз, болашақ маманның ақпараттық-логикалық құзыреттілігін қалыптастыруда пайдаланамыз. Проблемаға бағыттаушы жүйенің үлкен ерекшелігіне қарамастан, неғұрлым базалық функцияларға тән, жиі қарастырылатын бірқатар жұмыстарды бөліп қарауға болады.

Олар мынадай базалық функциялар: сөз тіркестерін талдауға арналған байланыс тілі, генерация және синтез бағдарламалар; ақпаратты құрылымдау, орналастыру, сақтау және іздеу; конфигурация құру, керекті нұсқаларды қолдау, негізгі байланысты редакциялау; жоба есептеулерін жоспарлау; орындалуын басқару; есептеулерді оңтайландыру; ыңғайлы интерфейспен қамтамасыз ету; макроүрдіс және редакциялау; эксперттеу; тарихи өзгерістер жүргізу; ұжымдық жұмысты қолдау; ақпараттық-анықтамалық қызмет көрсету.

Поступила 13.03.2016 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 116–122

**THEORETICAL BASES OF OBJECT-ORIENTED DESIGN,  
APPLICABLE FOR VOCATIONAL TRAINING  
OF FUTURE TEACHERS**

**T.K. Koishieva, A.I. Baiterekova, M.I. Salgaraeva**

International Kazakh-Turkish University named after Khoja Akhmet Yassawi, Turkistan;  
Taraz innovative-humanities university, Taraz  
[gulnaz\\_sal@mail.ru](mailto:gulnaz_sal@mail.ru)

**Key words:** teacher, object, design, educational process, future expert, education.

**Abstract.** Methods of training of future teachers of technologies of object-oriented design, the analysis of organizational experiment on project works of pupils after classes and during a lesson are shown in article. So that to find vital circumstances, actions, personal to practice, a technique of formation of technology of the training which personal is trained of the forming decisions the achievement of results of research provided. The main the object - to expansion of the knowledge which is trained independently by work in application of technology of design, information interest to development of self-government to know orientations by means of professional development the indication of formation and criteria standard and legal base various public in the center of adaptation. If trained a project subject, having chosen its wrong if learn that future person - he correctly adapted receives to carry out correctly to plan it develops. At him can give in various cases language with different people, with to make the correct decision, everyone in the center about correctly direction. In search trained, enterprise and informative in an initiative, to creative ability an ear of efficiency of the project - in visually, reminding, who knows, new scientific in search various to resolve issues, in ingenuity by means of improvement to lead by the nose.

**БОЛАШАҚ МҰҒАЛІМДЕРДІ КӘСІБИ ДАЙЫНДАУДА ҚОЛДАНЫЛАТЫН  
ОБЪЕКТІЛІ-БАҒДАРЛЫ ЖОБАЛАУДЫҢ ТЕОРИЯЛЫҚ НЕГІЗДЕРІ**

**Т.Қ. Қойшиева, А.И. Байтерекова, М.И. Салғараева**

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қаласы;  
Тараз инновациялық-гуманитарлық университеті, Тараз қаласы

**Түйін сөздер:** мұғалім, объект, жобалау, оқу үдерісі, болашақ маман, білім беру.

**Аннотация.** Мақалада объектілі-бағдарлы жобалау технологиясының әдіс-тәсілдерін болашақ мұғалімдерге үйрету, сабақ барысында және сабақтан тыс уақытта білім алушылардың жоба жұмыстарын ұйымдастыру тәжірибесін талдау, оның тиімділігін анықтау туралы келтірілген. Білім алушының өзіндік іс-әрекетін қалыптастыратын өмірлік жағдаяттардың шешімдерін таба алатындай білім беру әдіс-тәсілдер жиынтығы болып келетін оқыту технологиясын зерттеу, өзіндік тәжірибеде қолдану, көздеген нәтижелерге жету. Жобалау технологиясын қолданудағы негізгі қояр мақсатымыз – білім алушылардың қызығушылық ынтасын дамыту, өз бетімен жұмыстарын жүргізу арқылы білімдерін жетілдіру, ақпараттық бағдарлау біліктілігін қалыптастыру және сыни тұрғыда ойлау қабілетін арттыру арқылы әр түрлі қоғамдық ортада өзін-өзі көрсете білуге бейімдеу. Егер білім алушы жоба тақырыбын дұрыс таңдай отырып, жоспарлай білсе, оны дұрыс орындай алса – ол болашаққа дұрыс бейімделген тұлға болып қалыптасады. Әртүрлі жағдаяттарда дұрыс шешім қабылдай отырып, әртүрлі адамдармен тіл табыса отырып, әр ортада дұрыс бағыт-бағдар бере алады. Жобаның тиімділігі – көзбен көріп, құлақпен естіп, есте сақтай отырып білім алушыны ізденіске, іскерлік пен танымдық ынтаға, шығармашылық қабілетін жетілдіру арқылы түрлі мәселелерді шеше білуге, тапқырлыққа, жаңа ғылыми ізденіске жетелеу.

Жоғары оқу орындарында оқу үдерісінде болашақ маман даярлауда мынадай басты міндеттердің шешімін табу: оқытудың жетік жолдарын меңгерген маман даярлау; кәсіби пәндерді игерумен қатар, адамгершілік, рухани-мәдени құндылықтарды меңгерген, жан-жақты жеке тұлғаны тәрбиелеу; болашақ мұғалімнің қоғамдағы әлеуметтік белсенділігін арттыру; жалпы педагогикалық, әдіскерлік іскерлігін арттыру; өз бетінше білім ала білу қабілеттерін қалыптастыру; педагогикалық шеберлігін үздіксіз арттырып отыру дағдысын қалыптастыру басты мәселе болып табылады.

Болашақ маманның кәсіби-әдістемелік даярлығын қалыптастыру үшін өзі таңдаған мамандығына сәйкес арнайы ғылыми пәндерден терең, жан-жақты білімі болуы қажет. Білім беру саласындағы негізгі құжаттарды, білім беру стандарты, оқу жоспары, бағдарлама, оқулық, оқу-әдістемелік ғылыми әдебиеттерді, сондай-ақ озық педагогикалық тәжірибелерді меңгеруі тиіс.

Болашақ мұғалімдерді ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнының объектілі моделін құруға объектілі-бағдарлы жобалаудың жалпы қағидаларын қолдану біздің зерттеуіміздің өзекті мәселелерінің бірі болып табылады.

*Объектілі-бағдарлы жобалау* – білім беру жүйесін реформалау негізіне жататын қазіргі ақпараттық технологиялардың даму бағыты мен қағидаларына сәйкес олардың құралдарына оқыту мазмұнын мұғалімге тиімді құрылымдау мүмкіндігін беретін аппарат [1]. Жоғары оқу орындарындағы информатика және информатиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі курстарының шеңберінде болашақ мұғалімдерді замани технологияларға және оларды оқыту әдістемесі мен жабдықтарына оқыту ұсынылады [2]. Оқыту мазмұнын таңдауда және қандай да бір ортада оқыту әдістемесін жасау барысында жасаушылар қолданған ыңғайларды назарда ұстау мақсатқа сай келеді.

Объектілі-бағдарлы жобалауды ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын жобалау құралы ретінде тиімді қолдану үшін объективті алғы шарттар жасайтын объектілі-бағдарлы жобалау үрдісінің қағидаларын атап көрсетеміз:

- Технологиялығы;
- Объектілі ыңғайдың бағдарламалық жүйелерді және құралдарды жасау саласынан замани бағыттарға сәйкестігі;
- Модельдің анықтығы және икемділігі;
- Объектілі-бағдарлы ыңғайдың табиғилығы.

Осы жағдайларды болашақ мұғалімдерді объектілі-бағдарлы жобалау негізінде кәсіби дайындау үдерісіне қатысты талдаулар жүргізу арқылы ашамыз.

*Технологиялығы.* Объектілі-бағдарлы жобалау – пәндік саланы сапалы құрылымдауды қамтамасыз ететін жобаланатын жүйенің логикалық және физикалық құрылымын құру және ұсыну үшін аспап болып табылады [3]. Объектілі-бағдарлы ыңғайдың теоретиктері оны «технология» ретінде емес, «әдіснама» ретінде жиі сипаттайды. Мұндай терминология келесілерді ескере отырып анықталады:

1. Технология екі құраушыдан: «әдіснамадан және нақты іске асыру құралдарынан» тұрады [4]. Объектілі ыңғайға «нақты іске асыру құралдарын қолдану» - бұл объектілі модельдің негізінде сәйкесінше бағдарламалық қамсыздандыруды аутоматты түрде құруды қамтамасыз ететін қандай да бір гипотетикалық жасау құралдары. Қазіргі кезде осы сала бойынша теориялық зерттеулер жүргізілуде және оларды практикалық тұрғыда тексеру жүзеге асырылуда. Сонымен бірге, бағдарламалау теоретиктері атап көрсеткендей, «бағдарламалаудың құрамында ғылымның да өнердің де элементтері болады. Инженер-бағдарламашыны бағдарламаға қойылатын талаптардан оларды орындайтын күрделі бағдарламалық жүйеге дейінгі жолды қамтитын әмбебап әдістің болмайтындығын атап көрсетеміз»[4].

2. «Кез-келген технологияның әдіснамасының құрамына: өндірістік үдерісті жекелеген өзара байланысқан және бағынышты құраушыларға: «стадия», кезеңдер, амалдарға декомпозициялау; амалдарды және жекелеген процедураларды орындау бойынша жазбалардың (инструкциялардың) детерминделгендігі» [5]. Объектілі жобалаудың өзегі, әлемді «талап етілетін қалыпты қамтамасыз ету үшін келесі әрекет ететін объектілердің жиынтығы ретінде» қарастыра отырып жүйені бөліктерге бөлетін *объектілі-бағдарлы декомпозиция* болып табылады. Объектілі жобалау әдіснамасының *детерминделгендігі* осы үдерісті құрайтын кезеңдердің анықталғандығымен түсіндіріледі (яғни мәнді функцияларды анықтау, объектілерді таңдау, олардың арасындағы қанынастарды және өзара әрекеттерді айқындау, объектілі модельді құраушыларды сипаттау); осы

кезеңдерді іске асыру үшін негіз болып табылатын теориялық тұрғыда негізделген әдістердің жиынтығының болуы [6].

Объектілі жобалау әдіснамасының детерминделмегендігі бағдарламалық қамсыздандаруды жобалау мен жасау үдерістерінің мәнінен туындайды және объектілі жобалауды нақты жағдайда қолдану барысында оның әдістерін әр түрлі интерпретациялау мүмкіндіктерімен анықталады. Бұл нақты түрде былайша өрнектеледі, яғни мысалы, архитекторлар мен бағдарламашылар бір объект үшін әр түрлі ақпараттық жүйелер жасауы мүмкін, дегенмен олар өлшенетін сапалық сипаттамалары бойынша жуықтап тең болуы мүмкін, яғни: спецификалық тұрғыда сәйкестігі, сенімділігі (надежность), ашықтығы, есептеу жүйесінің ресурстарын қолдану тиімділігі, қолданушыға ыңғайлығы (яғни жүйені ендірген соң жұмыс тиімділігінің артуы) [7].

Сонымен, объектілі модельдің сипаттау тәсілдері мен объектілі декомпозиция ережелері арқылы өрнектелетін объектілі жобалау әдіснамасына тән болатын технологияның қырлары туралы нақты айтуымызға тура келеді.

Біз осы мағынаға сүйене отырып, болашақ мұғалімдерді ақпараттық технология құралдырына оқыту мазмұнын объектілі жобалау үдерісінің технологиялығы туралы айтамыз [8]. Атап айтқанда объектілі-бағдарлы жобалау әдіснамасының детерминделгендігінің дәрежесі оны ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын жобалауда қолданғанда көтерілетіндігін байқаймыз. Біздің зерттеу жұмысымызда дайын объектілі модельді (яғни объектілер класы және олардың іске асырылған бағдарламалық құралмен әрекеттесуін) қайта құрылымдау туралы айтамыз, ол нақты кластарға негізделген және таңдалған құралға оқытудың мақсаттары мен шарттарын ескеретін жүйе объектілерінің кластары мен жалпыланған мән функцияларын ерекшелеу арқылы анықталады.

Осы айтылғандарды негізге ала отырып объектілі жобалау үдерісінің кезеңдерін және біздің зерттеу жұмысымыз бойынша олардың мәнділігін қарастырайық.

#### 1. Объектілерді таңдау және сипаттау.

Оқып-үйренетін құралдардың мәнді функцияларымен байланысты объектілердің кластарын ерекшелеу мынадай мүмкіндіктер береді:

- дидактикалық қағидаларды ескере отырып жасалынған стратегиялар мен объектілі-бағдарлы жобалаудың объективті критерийлеріне негізделе отырып, олар туралы ұғымдарды және олардың құрылымдарын қалыптастыру қажет болатын объектілердің негізгі кластарын атап көрсету;

- оқып-үйренетін құралдардың спецификалық ерекшеліктерін және оның басқа құралдармен байланысын айқындау.

#### 2. Объектілер арасындағы қарым-қатынас.

Объектілі жобалау кластар арасындағы қатынастардың типін айқындау, бұл қатынастарды нақтылау және көрнекі түрде оларды ұсыну мүмкіндігін береді, бұны басқа құралдарды қолдану барысында іске асыру қиынырақ болады:

- агрегация қатынасын айқындау (объект - коллекция және объект-контейнерлер кластары және олармен байланысқан кластар);

- мұрагерлік қатынасын айқындау (жалпылау-кластары және жалпылау класының атрибуттары мен әдістерін мұрагерлікке алатын (олардың ішкі кластары-мұрагерлері);

- айқындалған қатынастарды нақтылау, қатынастың қуаттылығын анықтау.

Объектілер арасындағы қатынастарды айқындау және олардың қуатын бағалау, объектілер арасындағы өзара қатынастарды анықтайтын объективті критерийлерге негізделе отырып, оқытудың пәндік аймағын құрылымдау мүмкіндігін береді.

#### 3. Объектілердің өзара әрекеттесуі.

Объектілі жобалау объектілер арасындағы айқындалған қатынастар мен өзара әрекеттесу шаблондарының негізінде олардың өзара әрекеттесу тәсілдерін нақтылау үшін құралдар ұсынады. Сонымен қатар, формальді құралдар – өзара әрекеттесуді сипаттау үшін сценарийлер ұсынылады.

Бұл ұсынылған құралдар мынадай мүмкіндіктерді береді.:

- оқып-үйренуге қажет болатын амалдардың негізгі түрлерін, оларды оқып-үйренудің көпдеңгейлі тізбегін анықтау;

- қандай да бір операциялар тобын орындау ерекшеліктерін, олардың басқа операциялармен өзара байланысын нақтылау.

*Объектілі ыңғайдың бағдарламалық жүйелер мен құралдарды жасаудың қазіргі бағытына сәйкестігі.* Объектілі-бағдарлы жобалау – көпфункционалы бағдарламалық жүйелерді тиімді жасау мүмкіндігін беретін қазіргі заманғы технология [12]. Бағдарламалық ортаның объектілі моделін құру барысында жасаушылар құрылатын ортаның қызмет ету мақсаттарын, оны қолдану аймағының спецификасын, қолданылатын құралдардың мүмкіндіктерін және т.б. талдаудан бастайды. Ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі жобалау барысында кері үдерісті іске асыру қажет, яғни дайын жүйе бойынша (табиғатқа баламалы жүйе құралдарымен) оқыту мазмұнын жобалау барысында қолдану – «қайта құру» мақсаттарының спецификасын ескеру арқылы оның объектілі моделін қандай да бір жуықтау дәрежесімен «қалпына келтіру» [25].

Сондай-ақ бағдарламалық құралдардың дамуының қазіргі кезеңін сипаттайтын екі бағытты атап көрсетейік:

- жасау үдерісін аутоматтандыру мүмкіндігін беретін жобалаумен сипаттаудың әмбебап құралдарын қолдану (UML, CASE, технологиялары);

- бағдарламалық құралдар арасында өзара әрекеттесуді қамтамасыз етуге, бірыңғай технологияларды, жалпы кітапханаларды, жүйенің бағдарламалық ресурстарын қолдануға ұмтылу.

Мысалы, MS Office пакетін құраушылар үшін қолданудың ұқсас интерфейсі, іске асырудың бірыңғай идеологиясы тән болады, сондай-ақ мұндай үрдіс бағдарламалау жүйелерінде (C++, Delphi, Java), әр түрлі МҚБЖ-де (Ms Access, FoxPro және Paradox Windows үшін), графикалық және Web-редакторларда жалғасады. Delphi ортасында бірнеше МҚБЖ (Dbase, Paradox) жұмыс істейді. MS Office пакетінің шеңберінде әр түрлі құраушыларға (Ms Word, Ms Excel, Ms Access) өзара және басқа орталармен ақпарат алмасу мүмкіндігін беретін технология іске асырылған [27].

Объектілі-бағдарлы модельді болашақ мұғалімдер информатикаға оқыту мазмұнын сипаттау үшін қолдану оқып-үйренетін жүйелер арасындағы байланысты анықтау, бірыңғай құраушыларды және оларды оқып-үйрену реттелігін айқындау мүмкіндігін береді [15, 16].

*Модельдің ашықтығы және икемділігі.* Болашақ мұғалімдерге оқытылатын информатика, информатиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі, объектіге-бағытталған программалау және т.б. көптеген осы бағыттағы курстар әлемдік қоғамдастықтың неғұрлым динамикалы дамытын ресурсы ақпараттық технологиялармен тығыз байланыста болып отыр [18]. Оқыту үдерісінде бұл оқып-үйренетін ақпараттық технология құралдарының нұсқаларының ұдайы жаңартылуымен, мұғалімге белгісіз жаңа қолданушы орталардың және бағдарламалау жүйелерінің пайда болуымен көрініс табады.

Қандай да бір құралға оқыту мазмұнын сипаттайтын баламасы объектілі модельдің болуы, мұғалімге жаңа нұсқада пайда болған өзгертулердің ролі мен мәнділігін неғұрлым нақтырақ түсіну, оқыту үдерісі іске асырылатын жағдайларды ескере отырып оқыту мазмұнына өзгертулер енгізу қажеттігі туралы шешім қабылдау мүмкіндіктерін береді [20].

Шындығында, әрбір информатика пәнінің мұғалімі оқыту мазмұнының объектілі моделін құра алады деп ойлауға болмайды, бұл іс-әрекет информатиканың әр түрлі саласынан жеткілікті түрде жоғары кәсібилікті талап етеді. Дегенмен, информатика мұғалімдерін объектілі модельді «оқуға» және оны оқыту үдерісін жобалау барысында қолдануға үйретуге болатындығы біз жүргізген педагогикалық эксперимент арқылы нақтыланып отыр.

Сонымен, объектілі-бағдарлы модельдеу – динамикалы тұрғыда дамып отырған пән саласын ескеріп ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын тиімді құрылымдау мүмкіндігін беретін аппарат.

*Объектілі-бағдарлы ыңғайдың табиғилығы.* Объектілі-бағдарлы ыңғай – жүйенің мәнді функцияларының шеңберінде болатын өзгертулерге қатысты жеткілікті тұрақты табиғи, түсінікті модель құру мүмкіндігін береді [24]. Классификациялау теориясына сәйкес «қоршаған ортаны тану үшін адамдар үш ыңғайды қолданады:

- 1) тәжірибе арқылы алынған жекелеген объектілердің құрылымы, олардың мәнді қасиеттері мен объектілер арасындағы байланыстары туралы ақпараттық барлық білімдерді ажыратып бөлу;
- 2) бүтін мен оның құраушылары арасындағы айырмашылықтарды орнату;
- 3) объектілер класын айқындау және олардың арасындағы айырмашылықтарды орнату.

Объектілі - бағдарлы модель әртүрлі кластардың өкілдері болып табылатын және белгілі бір анықталған қасиеттері бар, өзара байланысқан және өзара әрекеттесетін объектілердің жиынтығы түріндегі жүйенің логикалық құрылымын сипаттайды. Сондықтан объектілі модельмен

ұсынылатын ақпарат жоғарыда келтірілген ыңғайға толығымен сәйкес келеді және осыған сәйкес объектілі жобалауды әртүрлі пән аймағын құрылымдау аспабы ретінде қолдану үшін объективті алғы шарттар бар болады. Объектілі ыңғайға негізделген оқыту мазмұнын жобалау болашақ мұғалімдерге информатиканы оқытудың теориясы мен әдістемесі бойынша жүргізілген зерттеулерде (ұсынылған) қалыптастырылған ОӘЖ (оқытудың әдістемелік жүйесінің) элементі ретінде оқыту мазмұнына қойылатын дидактикалық талаптарды орындауды қамтамасыз ету мүмкіндігін береді.

*Осы тұрғыда оқыту үдерісінде бағдарламалау тілінен студенттердің білімді саналы игеруі, белсенділік көрсетуі – ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын объектілі-бағдарлы жобалау негізінде шебер маман даярлаудың алғы шарттарының бірі. Бұл кезде мына ұғымдар қалыптастырылады: айнымалы, массив, жазу, жиын, функция, класс, объект, мұрагерлік, жоба, форма, оқиға.*

Дербес жағдайда, ғылымилық талаптары оқыту мазмұнының информатиканың пәндік аймағының ұғымдарына сәйкестігімен, сонымен қатар, информатиканың танымдық әдістерінің бірі – модельдеуді қолданумен қамтамасыз етіледі. Мазмұнда көрсетілген ғылыми білімдердің жалпылау\_талаптары, орталық құраушылары абстракциялау және алынған абстракцияларды реттеу болып табылатын объектілі жобалаудың мәнділігімен қамтамасыз етіледі. Объектілі ыңғайды қолдану жобаланатын ОӘЖ-нің мақсатарына сәйкес оқыту мазмұнында ұсынылған білімнің және іскерліктердің толықтығын қамтамасыз ету мүмкіндігін береді.

Оқыту мазмұнында келтірілген білімнің *логикалық қатаңдығы мен қайшылықсыздығы* талаптары объектілі жобалаудың теориялық тұрғыда негізделген және практикалық тұрғыда тексерілген әдістерін қолдану мен қамтамасыз етіледі [22,23]. Объектілі жобалау әдіснамасы білімнің бір мәнді және оны ұсынудың мүмкін формасын ұсынады, көп деңгейлі есептер жүйесінің ұғымдарын, олардың арасындағы байланыстарды ерекшелеу арқылы білім мазмұнын құрылымдауды қамтамасыз етеді.

Оқыту мазмұнын объектілі жобалаудың *технологиялығы* оның кезеңдерінің детерминділігімен, жобаланатын білім мазмұнын оқытудың мақсаттары мен шарттарынан тәуелді түрде түзету мүмкіндігінің болуымен өрнектеледі [28,29].

Оқыту мазмұнын ұйымдастырудың *модульдік* қағидасы қандай да бір оқулық функцияны: теориялық мәліметтерді шолу, баяндау; есептеу арқылы материалды бекіту; шығармашылық есептерді шешу, өзін – өзі бақылау, дүниетанымды кеңейту, практикалық дағдыларды қалыптастыру және т.б. орындайтын, логикалық аяқталған материалдарды оқулық материалдан ерекшелеуді ұсынады. Мазмұнды құрудың модульдік қағидасы оқыту мақсаттарымен шарттарынан тәуелді түрде модульдердің кейбірін таңдау, оларды алмастыру мүмкіндігін береді, яғни мазмұнның бірнеше мүмкіндігі – *вариативтілік* қағидасы қамтамасыз етіледі. Пәндік аймақты белгілі бір анықталған қасиеттері бар және анықталған міндеттерді орындайтын өзара әрекеттесетін объектілердің жиынтығы түрінде ұсыну жүйесінің мәнді функцияларымен және олар орындайтын амалдармен тікелей байланысты негізгі объектілерді ерекшелеу мүмкіндігін береді. Мұндай объектілердің жиынтығы *базалық модульді* құрайды. Қосымша функцияларды және онымен байланысты амалдарды орындайтын объектілердің негізінде материалды терең оқып – үйрену үшін модулдер қалыптасады. Сонымен қатар, объектілі модель объектілермен орындалатын амалдар жиынының негізінде білімгерлерде қалыптастыру қажет болатын практикалық дағдыларды анықтауға және күрделілігі әртүрлі деңгейдегі жаттығулар жүйесін жасауға көмектеседі. Жаттығулардың күрделілік деңгейін анықтау үшін қалыптастырылатын объектілер мен амалдардың санын қолдануға болады.

Осылайша баяндалған деректер бойынша объектілі – бағдарлы жобалауды ақпараттық технология құралдарына оқыту мазмұнын жобалау аспабы ретінде қолданудың мүмкіндігі және мақсатқа сәйкестігі туралы қорытынды жасау мүмкіндігін береді.

Болашақ мұғалімнің теориялық даярлығын жетілдіру – ЖОО-да педагог мамандарды даярлау жүйесінің маңызды мәселелерінің бірі. Ал осыған сәйкес білім мазмұнын ұсынуда оқытудың заңдылықтары мен ұстанымдары негізге алынуы қажет болады [19, 20, 30].

«Объектіге-бағытталған программалау» пәнінен берілетін оқу материалдарын логикалық бөліктерге бөлу оның құрылымдық-логикалық жобасын құру, осы пәннен игерілген білімнің Информатиканы оқыту әдістемесі, ЭЕМ-ді оқу үдерісінде қолдану, Бағдарламалау тілдері,

Теориялық информатика, Сараптамалық жүйелер секілді ғылыми курстармен, яғни пәнаралық байланысын жүзеге асыру болашақ маманның білімді жүйемен, бірізділікпен қабылдауына мүмкіндік береді.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Буч Г. Объектно-ориентированный анализ и проектирование с примерами приложений на C++. – М.: Бином: СПб.: Невский диалект, 1998. – 560 с.
- [2] Советов Б.Я. Информационная технология. – М.: Высшая школа, 1994. – 368 с.
- [3] Захарова И.Г. Информационные технологии в образовании. Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. М.: ИЦ «Академия», 2005. 192 с.
- [4] Михеева Е.В. Информационные технологии в профессиональной деятельности. М.: Академия, 2006. – 384 с.
- [5] Полат Е.С. Новые педагогические и информационные технологии в системе образования. Учеб. пособие для студ. пед. вузов и системы повыш. пед. кадров. – М.: Издательский центр «Академия», 2001. – 272 б.
- [6] Лапчик М.П. и др. Теория и методика преподавания информатики. М.: Академия, 2001. – 624 с.
- [7] Слостенина В.А. Педагогика профессионального образования. М.: Акад., 2004. – 368 с.
- [8] Попков В.А., Коржув А.В. Теория и практика высшего профессионального образования. М.: Академический проект, 2004. – 428 с.
- [9] Громкова М.Т. Психология и педагогика профессиональной деятельности: Учебное пособие для вузов. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. – 415 с.
- [10] Дьюи Дж. «Школа и общество» (1925) – цит. по «Педагогическая лекция. 2003/04 учебный год. Метод проектов в школе» / Спец. прилож. к журналу «Лицейское и гимназическое образование», вып. 4, 2003 – с.
- [11] Килпатрик У.Х. «Метод проектов. Применение целевой установки в педагогическом процессе» (1928) – цит. по «Педагогическая лекция. 2003/04 учебный год. Метод проектов в школе» / Спец. прилож. к журналу «Лицейское и гимназическое образование», вып. четвертый, 2003 – с. 6.
- [12] Полат Е.С. «Современные педагогические и информационные технологии в системе образования». М. 2001. 272 бет.
- [13] Симоненко В.Д. Технология. Сборник творческих проектов учащихся, 2-е издание. – М., 250 с.
- [14] Павлов М.Б. Технология обучения. – М., 2000. – 201 с.
- [15] Беспалько В.П. Основы теории педагогических систем. – М., 2001. – 205 с.
- [16] Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения: Опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. – М.: Педагогика, 1986. – 240 с.
- [17] Дьяченко В.К. Генезис научного педагогического сознания (логико-исторический анализ) [Текст]: дис. ... д-ра пед. наук / С.А. Днепров. – Екатеринбург, 2000. – 460 с.
- [18] Селевко Г.К. Современные образовательные технологии: учебное пособие. – М.: Народное образование, 1998
- [19] Гальперин П.Я. Введение в психологию. – М., 205 с.
- [20] Кузьмина Н.В. Педагогическое мастерство учителя как фактор развития способностей учащихся. Возрастная психология. №3. – С15-20.
- [21] Ильина Е.Н. Социальная педагогика: Курс лекций. М., 1986. – 256 с.
- [22] Лысенкова С.Н. Развитие мышления школьника. М.: Учпедгиз, 1935. С.128.
- [23] Шаталов В.Ф. Педагогическое мастерство (для учителей и родителей). – М., 2005.
- [24] Бидайбеков Е.Ы. Развитие методической системы обучения информатике специалистов совмещенных с информатикой профилей в университетах Республики Казахстан: дис. ... д-ра пед. наук. 13.00.02. – М., 1998. – 153 с.
- [25] Медеуов Е.У. Формирование новой образовательной системы Республики Казахстан в эпоху информационных технологий // Труды II междунар. Конгресса ЮНЕСКО «Образование и информатика». – М., 1996. – С.120-125.
- [26] Балыбаев Т.О. Теоретико-методологические основы информационной модели формирования студенческого контингента ВУЗов: дис. ... д-ра пед. наук. 13.00.01 + 13.00.02. – Алматы, 2003. – 298 с.
- [27] Нұрбеков Б., Нұрбекова Ж.К. Компьютерлік оқытушы жүйесіне қойылатын негізгі педагогикалық-психологиялық талаптар // Информатика негіздері. – 2002. – № 2. – 6-10 б.
- [28] Халықова Г.З. Информатиканы оқыту әдістемесі. А., 1999. – 250 б.
- [29] Шекербекова Ш. Мәліметтер қорын оқыту әдістемесі. – А., 1999. – 215 б.
- [30] Абдулкаримова Г.А. Современные технологии в начальном образовании // Информатика и образование. – 1999. – № 3. – 108 с.

#### REFERENCES

- [1] Turmoils of. The object-oriented analysis and design with examples of appendices on With ++. M.: biny: SPb.: Nevsky dialect, **1998**. 560 pages.
- [2] Councils B. Ya. Information technology. M.: The higher school, **1994**. 368 pages.
- [3] Zakharova I. G. Information technologies in education. Studies. a grant for stud. vyssh. ucheb. zavedeniye. M.: ITs "Academy", **2005**. 192 pages.
- [4] Mikheyeva E. V. Information technologies in professional activity. M.: akademiya, **2006**. 384 pages.
- [5] Polat E.S. New pedagogical and information technologies in an education system. Ucheb. Posobiye for stud.ped.vuz and system povysh. ped. shots. M.: Publishing center "Akademiya", **2001**. 272b.
- [6] Lapchik M.P., etc. Theory and technique of teaching informatics. M.: akademiya, **2001**. 624 pages.
- [7] Slastenina V. A. Pedagogics of professional education. M.: Academician, **2004**. 368 pages.
- [8] Popkov V. A., Korzhuyev A. V. Theory and practice of higher education. M.: Academic project, **2004**. 428 pages.

- [9] M. T. Gromkova. Psychology and pedagogics of professional activity: Manual for higher education institutions. M.: UNITY-DANA, **2003**. 415 pages.
- [10] Dewey Dzh. "The school and society" (1925) – tsit. on "Pedagogical lecture. 2003/04 educational year. A method of projects at school" / Special prilozh. To the "Lyceum and Gymnasia Education" magazine, the issue 4, **2003**. page.
- [11] Kilpatrik U.H. "Method of projects. Application of target installation in pedagogical process" (1928) – tsit. on "Pedagogical sailing directions. 2003/04 educational year. A method of projects at school" / Special prilozh. to the "Lyceum and Gymnasia Education" magazine, the issue fourth, **2003**. page 6.
- [12] Polat E.S. "Modern pedagogical and information technologies in system of education". M of **2001**. 272 Beth.
- [13] Simonenko V.D. Technology. Collection of creative projects of pupils, 2nd edition. – M, 250 pages.
- [14] Pavlov M. B. Technology of training. M, **2000**. 201 pages.
- [15] Bepalko, V.P. Bases of the theory of pedagogical systems. M., **2001**. 205 pages.
- [16] Davydov V. V. Problems of the developing training: Experience of theoretical and pilot psychological study. M.: Pedagogics, **1986**. 240 pages.
- [17] Dyachenko V.K. Genezis of scientific pedagogical consciousness (logiko-istorichesky analysis) [Text]: yew.... Dr.s пед. sciences / Page. A. Dneprov. Yekaterinburg, **2000**. 460 pages.
- [18] Selevko G. K. Modern educational technologies: educational grant. M.: National education, 1998
- [19] Galperin Ya. Vvedeniye in psychology. M., 205 pages.
- [20] Kuzminan V. Pedagogicheskoye skill of the teacher as factor of development of abilities of pupils. Age psychology. No. 3. C15-20.
- [21] Ilyinaye N. Sotsialnaya pedagogics: Course of lectures. M., **1986**. 256 pages.
- [22] Lysenkova N. Development of thinking of the school student. M.: Uchpedgiz, **1935**. Page 128.
- [23] Shatalov V. F. Pedagogical skill (for teachers and parents). M., **2005**.
- [24] Bidaybekov E.Y. Development of methodical system of training in informatics of experts of the profiles combined with informatics at universities of the Republic of Kazakhstan: yew. ... Dr.s пед. наук.: 13.00.02. M., **1998**. 153 pages.
- [25] Medeuov E.U. Formation of new educational system of the Republic of Kazakhstan during an era of information technologies // Works II of inter@. Congress of UNESCO "Education and informatics". M., **1996**. Page 120-125.
- [26] Balykbayev T.O. Teoretiko-metodologichesky bases of information model of formation of the student's contingent of HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS: yew.... Dr.s пед. nauk.: 13.00.01 + 13.00.02. Almaty, **2003**. 298 pages.
- [27] Nyrbekov B., Nyrbekova ZH.K. Kompyuterlik okytushy zhyjesine kojylatyn negizgi pedagogikaluk-psixologiyaluk talaptar // informatika negizderi. **2002**. № 2. 6-10 b.
- [28] Xalykova G.Z. Informatikany okytu adistemesi. A., **1999**. 250 b.
- [29] Shekerbekova sh. malimetter koryn okytu adistemesi. A., **1999**. 215 b.
- [30] Abdulkarimova g.a. sovremennyye texnologii v nachalnom obrazovanii // informatika i obrazovanie. **1999**. № 3. 108 s.

**Теоретические основы объектно-ориентированного проектирования,  
применимый для профессиональной подготовки будущих учителей**

**Т.К.Койшиева, А.И.Байтерекова, М.И.Салгараева**

Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Яссави, г.Түркістан,  
Таразский инновационно-гуманитарный университет, г. Тараз

**Ключевые слова:** учитель, объект, проектирования, учебный процесс, будущий специалист, образование.

**Аннотация.** В статье методы обучения, в ходе занятий обучающихся и во внеучебное время анализа опыта организации работ по проекту, в том эффективности технологии проектирования объектілі-бағдарлы будущих учителям, об установлении Жизненных обстоятельств табаалатындай методика образования решений, предусмотренных, личного практике, технологии обучения личного обучающегося, формируемая действий достижении результатов исследования. Основные поставил цель - к расширения знаний обучающихся, самостоятельно путем проведения работ в применении технологии проектирования, информационных ориентации посредством повышения квалификации интерес к развития самоуправления знать указанием формирования и критериального нормативно-правовой базы различных общественных в центре адаптации. Если обучающийся тему проекта, выбрав его неправильное, если узнают, что будущее лицо - он правильно приспособленных получает выполнять правильно планировать складывается. У него может подать в различных случаях язык с разными людьми, с принимать правильное решение, каждая в центре с правильно направление. В поиск обучающегося, предприимчивость и познавательные в инициативу, творческой способности ухом эффективности проекта - в визуально, напоминая, как знать, новых научных в поиск различных решать вопросы, в сообразительность посредством совершенствования водить на поводу.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 123–127

**INTEGRATION OF R SOFTWARE ENVIRONMENT  
IN C# SOFTWARE ENVIRONMENT****N. Litvinenko**

Institute of mathematics and mathematical modeling MES RK, Almaty, Kazakhstan

e-mail: [n.litvinenko@inbox.ru](mailto:n.litvinenko@inbox.ru)

**Key words:** R software environment, mathematical model, software environment, environment integration, rscproxy, rcom, software suite (SS).

**Abstract.** One of the main trend in computer modeling of applied problems in different areas of science and industry is the integration of software environments. This problem is not new, but its importance is increasing all the time. The most common software suite, such as MATLAB, MAPLE, R, SPSS include a huge number of good, well-established, fast libraries and other components, covering a variety of areas in solving of mathematical problems, statistical processing of data, processing large amounts of data, etc. in different software environments. In the process of software modules developing it would be appropriate to use the existing components of these packages. However, the using of these packages is rather difficult due to a number of reasons. In this article we will describe the basic principles of integration of the some modules of the R software environment in the C# software environment. The R SS is a free software product designed for statistical data processing. Today R SS contains more than 7700 packages, encompassing a variety of areas in statistics.

This method will be used in the development of the grant project «Automated techniques for social-psychological diagnostics of military teams».

УДК 004.43; 519.254

**ИНТЕГРАЦИЯ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ R В СРЕДУ C#****Н. Литвиненко**

Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** среда R, математическая модель, среда разработки, интеграция среды, rscproxy, rcom. Пакет прикладных программ (ППП).

**Абстракт.** Одним из основных научных и прикладных направлений, возникающих при компьютерном моделировании прикладных задач в различных областях науки и производства является интеграция компьютерных вычислительных сред. Данная проблема не нова, однако ее актуальность все время возрастает. Наиболее распространенные пакеты прикладных программ, такие как, например, MATLAB, MAPLE, R, SPSS имеют огромное количество прекрасных, хорошо отлаженных, быстро работающих библиотек и других компонент, охватывающих самые разнообразные направления при решении математических задач, статистической обработке данных, обработке больших объемов данных и пр. в различных вычислительных средах. При разработке программных модулей, являющихся частью разрабатываемых проектов, было бы целесообразно использовать уже готовые компоненты из данных пакетов. Однако задача использования сторонних пакетов достаточно сложна в силу ряда причин. В данной статье описываются основные принципы интеграции отдельных модулей пакета R в среду C#. ППП R является свободно распространяемым программным продуктом, ориентированным на статистическую обработку данных. В настоящее время ППП R содержит более 7700 пакетов, охватывающих самые разнообразные направления в статистике.

Данный способ будет использован при разработке грантового проекта «Автоматизированная методика социально-психологической диагностики воинского коллектива».

**Описание проблемы.** При разработке грантового проекта «Автоматизированная методика социально-психологической диагностики воинского коллектива» возникает много задач по статистической обработке данных анкетирования. Проект оформляется в виде программного продукта, ориентированного на использование рядовыми социологами. Программный продукт разрабатывается в среде C#. Предполагается в качестве дополнительных необязательных опций привлечение отдельных модулей из свободного ППП R. В данной статье описываются основные принципы интеграции ППП R в среду C#. Интеграция рассматривается на простом учебном примере, никакого отношения к проекту не имеющем. На рисунке 1 приведен внешний вид учебного примера. Далее приведена часть программы, показывающая принцип работы ППП R в среде C#.

При исследовании прикладной проблемы, вначале необходимо построить математическую модель исследуемого процесса. При этом обычно решаются следующие задачи:

1. Выделить суть изучаемого процесса.
2. Построить математическую модель, адекватно отражающую суть изучаемого процесса.
3. Разбить изучаемую проблему на отдельные максимально независимые друг от друга задачи.
4. Определить математические методы решения данных задач.
5. Определить наиболее соответствующую программную среду для решения данных задач.

В данной статье рассматриваются некоторые вопросы 5 задачи - метод интеграции среды R в среду C#. Вопросы инсталляции программной среды R в среды Windows, Linux, MacOS хорошо описаны в технической документации [1-2]. В данном примере мы рассматриваем инсталляцию R только в среду Windows. Экспорт и импорт данных из среды R в среды Excel, Word, Matlab хорошо описаны в технической документации [3]. Данный документ будет настольной книгой при использовании среды R в разрабатываемом проекте. Стоит заметить, что экспорт и импорт данных задача гораздо более простая чем интеграция всей среды R в среду C#. Идеология разработки среды R ориентирована на среду C++. Вопросы интеграции в среду C# рассмотрены крайне слабо. Однако среда C# в .NET является в настоящее время наиболее востребованной средой в разработке программного обеспечения. В технической документации [4] описываются принципы интеграции среды R в среды C++, Excel, Word, Matlab. Мы использовали данную документацию для выработки общей идеологии интеграции среды R в среду .NET (C#).

Данная статья пишется по работе над грантовой темой «Автоматизированная методика социально-психологической диагностики воинского коллектива». Одной из важных задач данной темы является статистическая обработка массива анкет. Основные статистические методы обработки данных описаны в [5]. Данный документ использовался при построении тестового примера. Многие методы обработки анкет хорошо разработаны в вычислительной среде R. Пакет программ для грантовой темы разрабатывается в среде C#. Весьма интересно использовать готовые общедоступные разработки среды R в разрабатываемом проекте, не выходя при этом из среды C#. В книге [6] приведено множество примеров для первоначального изучения среды R. Некоторые примеры из этой книги также используются в тестовом примере. Настольной книгой при написании тестовой программы на языке C# для нас являлась книга [7], но при желании можно использовать и другие.

**Среда разработки.** Данная работа выполнялась в среде:

- Материнская плата – Gigabyte Technology Co. Ltd., Z77MX-D3H
- Процессор – Intel(R) Core(TM) i7-3770 CPU@ 3.40GHz 3.90GHz
- Память - 16 Гб
- Внешняя память – 2 Тб
- Видеокарта – NVIDIA GeForce GTX 660
- Операционная система – Windows 7 Ultimate, 32 bit
- Среда разработки – Microsoft Visual Studio Professional 2013, версия 12.0.21005.1 REL

**Интеграция среды R в среду C#. Почему выгодно использовать среду R?**

- R является Свободным программным обеспечением

- R — пакет, в основном ориентированный на разнообразные задачи статистического анализа. Однако данный пакет может решать и многие другие задачи.

- R используется в социальных науках, статистике, экономике, страховом деле, социологии, финансах и т.д.

- R доступен для основных операционных систем Linux, Mac OS, Windows

- Количество общедоступных прикладных пакетов на 1 января 2015 превышает 7700 только на официальном сайте CRAN.

- R — объектно-ориентированный язык.

- R — матричный язык.

- Каждый пакет R строится стандартным образом, имеет хорошую поддержку, многие пакеты содержат учебные примеры.

Интеграция пакета R в среду C#:

1. Вначале устанавливаем последнюю версию R-3.2.3-win.exe и проводим стандартную процедуру установки пакета R.

2. Запускаем R.

3. В среде R устанавливаем пакет rscproxy

```
>install.packages("rscproxy")
```

4. В среде R устанавливаем пакет rcom

```
>install.packages("rcom")
```

5. Скачиваем пакет R\_scilab\_DCOM3.0-1B5 по ссылке [http://www.freestatistics.org/cran/contrib/extra/dcom/R\\_Scilab\\_DCOM3.0-1B5.exe](http://www.freestatistics.org/cran/contrib/extra/dcom/R_Scilab_DCOM3.0-1B5.exe) и устанавливаем его.

6. Запускаем Visual Studio 2013. Создаем тестовый пример в приложении Windows Forms в среде C# с именем Bilbak\_R\_C\_3

7. Стандартная форма тестового примера содержит меню, которое позволяет запустить некоторые примеры из пакетов R. На форме находятся 4 текстовых окна. В первом окне показано как выглядят команды текущего примера в среде R. Во втором окне показаны команды для этого же примера в среде C#. В третьем окне выводятся результаты. В четвертом окне показаны краткие пояснения по текущему примеру. В основном это пояснения по синтаксису команд среды R.

8. Для корректной работы тестовых программ обеспечиваем ссылки на следующие библиотеки: StatConnectorCommonLib, STATCONNECTORSRVLib, StatConnTools. Данные библиотеки образуются при установке пакета R\_scilab\_DCOM3.0-1B5.

9. Для подключения ссылок необходимо сделать следующее: в обозревателе решений, правой клавишей мыши по References выбираем пункт меню «добавить ссылку», в открывшемся окне выбираем COM-библиотеки типов, из открывшегося списка выбираем интересующие нас библиотеки из пункта 8.

10. Для корректной работы необходимо также в начале текста программы указать соответственно:

```
using StatConnectorCommonLib;
```

```
using STATCONNECTORSRVLib;
```

```
using StatConnTools;
```

11. На рисунке 1 приведен внешний вид тестовой программы.

12. После рисунка 1 приведена часть программного кода тестовой программы.

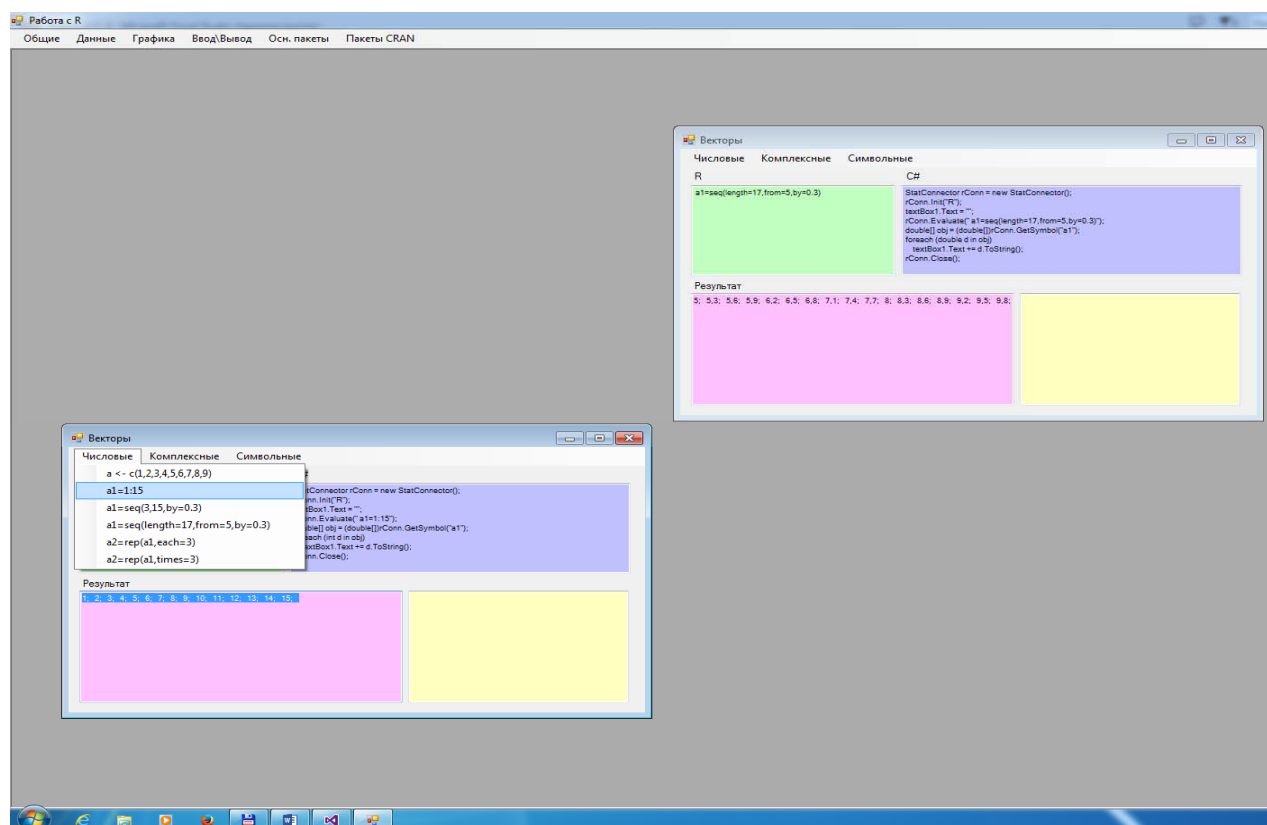


Рисунок 1 – Внешний вид тестовой программы

### Часть программного кода тестовой программы.

```
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.ComponentModel;
using System.Data;
using System.Drawing;
using System.Linq;
using System.Text;
using System.Threading.Tasks;
using System.Windows.Forms;
using StatConnectorCommonLib;
using STATCONNECTORSRVLib;
namespace Bilbak_R_C_3
{
    public partial class Danyye : Form
    {
        public Danyye()
        {
            InitializeComponent();
        }
        private void MDan_1_1_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            textBox2.Text = "a <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9)";
            textBox3.Text = "StatConnector rConn = new StatConnector(); \r\n rConn.Init(\"R\"); \r\n
            textBox1.Text = \"\"; \r\n rConn.Evaluate(\"a <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9)\");";
            textBox3.Text += "\r\n double[] obj = (double[])rConn.GetSymbol(\"a\"); \r\n foreach (double d in
            obj) \r\n    textBox1.Text += d.ToString(); \r\n rConn.Close();";
            StatConnector rConn = new StatConnector();
            rConn.Init("R");
            textBox1.Text = "";
        }
    }
}
```

```

rConn.Evaluate(" a <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9)");
double[] obj = (double[])rConn.GetSymbol("a");
foreach (double d in obj)
    textBox1.Text += d.ToString() + "; ";
rConn.Close();
}

```

**Заклучение.** Тестовый пример, рассмотренный в данной статье, показывает большие перспективы использования интеграции среды R в среду C# при построении программных комплексов в данной среде. К минусам данного подхода можно отнести достаточно сложный способ интеграции среды R, а также недостаточно устойчивую работу программы. Однако существуют и другие способы интеграции среды R в среду C#, которые будут рассмотрены позднее в других статьях.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Venables W.N., Smith D.M., R Core Team, An Introduction to R, Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics, 2015, Version 3.2.3 (2015-12-10), 99 p.
- [2] R Core Team, R Installation and Administration, 2015, Version 3.2.3 (2015-12-10), 73 p.
- [3] R Core Team, R Data Import/Export, 2015, Version 3.2.3 (2015-12-10), 33 p.
- [4] R Core Team, Writing R Extensions, 2015, Version 3.2.3 (2015-12-10), 167 p.
- [5] Гайдышев И. Анализ и обработка данных. Специальный справочник. - СПб: Питер. - 2001, 752 с.
- [6] Кабаков Р.И. R в действии. Анализ и визуализация данных на языке R. - ДМК Пресс. - 2014, 580 с.
- [7] Троелсен Э. Язык программирования C# 5.0 и платформа .NET 4.5, 6-е изд. - ООО «ИД. Вильямс». - 2011. - 1392 с.

#### REFERENCES

- [1] Venables W.N., Smith D.M., R Core Team, An Introduction to R, Notes on R: A Programming Environment for Data Analysis and Graphics, **2015**, Version 3.2.3 (2015-12-10), 99 p (in Eng.).
- [2] R Core Team, R Installation and Administration, 2015, Version 3.2.3 (2015-12-10), 73 p (in Eng.).
- [3] R Core Team, R Data Import/Export, **2015**, Version 3.2.3 (2015-12-10), 33 p (in Eng.).
- [4] R Core Team, Writing R Extensions, **2015**, Version 3.2.3 (2015-12-10), 167 p (in Eng.).
- [5] Gaydyshev I. Analysis and processing of data. Special reference. St. Petersburg: Peter. **2001**, 752 p. (in Rus.).
- [6] Kabakov R.I. R in action. Analysis and visualization of data on R. language - DMK Press. **2014**, 580 p. (in Rus.).
- [7] Troelsen E. C # 5.0 programming language and platform .NET 4.5, 6 th ed. ООО "ID Williams. " **2011**. 1392 p. (in Rus.).

#### БАҒДАРЛАМАЛЫҚ R ОРТАНЫҢ C# ОРТАСЫНА БІРІКТІРІЛУІ

Н. Литвиненко

ҚР БҒМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

**Түйін сөздер:** R ортасы, математикалық модель (үлгі), жасап шығару ортасы, ортаның біріктірілуі, rscproхu, rcom, қолданбалы бағдарламалар топтамасы (ҚБТ).

**Аннотация.** Ғылымның және өндірістің әртүрлі салаларында қолданбалы есептерді компьютерлік модельдеген кезде туындайтын негізгі бағыттардың бірі компьютерлік есептеу орталарын біріктіру болып табылады. Бұл проблема жаңа емес, алайда оның өзектілігі уақыт өткен сайын үнемі артып отыр. MATLAB, MAPLE, R, SPSS секілді ең кең таралған қолданбалы бағдарламалардың топтамалары тамаша, жақсы бапталған, ретке келтірілген, жылдам жұмыс істейтін кітапханалардың және әртүрлі есептеу орталарында математикалық есептерді шешкен, мәліметтерді статистикалық өңдеген, мәліметтердің үлкен көлемдерін өңдеген және т.с. кезде ең әр алуан бағыттарды қамтитын басқа құрамдас бөліктердің орасан зор санына ие. Жасалынып жатқан жобалардың бір бөлігі болып табылатын бағдарламалық модульдерді жасап шығарған кезде осы топтамалардың ішінен дайын да болып отырған құрамдас бөліктерді қолданған мақсатқа лайықты болар-ақ еді. Алайда, шеттегі топтамаларды пайдалану міндеті әртүрлі себептерге орай айтарлықтай күрделі болып табылады. Бұл мақалада R топтамасының жекелеген модульдерін C# ортасына біріктірудің негізгі қағидалары сипатталып отыр. R ҚБТ мәліметтерді статистикалық өңдеуге бағдар алған, еркін таралатын бағдарламалық өнім болып табылады. Қазіргі таңда R ҚБТ құрамында статистикадағы ең әр алуан бағыттарды қамтитын 7700 аса топтама бар.

Бұл амал-тәсіл «Әскери ұжымға әлеуметтік-психологиялық диагноз қоюдың автоматтандырылған әдістемесі» гранттық жобасын жасаған кезде қолданылатын болады.

Поступила 13.03.2016 г.

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 128–133

UDC: 511.11

## STATIONARY M-DIGITADDITION NUMBERS

S. Makyshov

Almaty, Kazakhstan

admin@smayl.com

**Key words:** positive integer, D. Kaprekar, digitaddition positive integers, self-positive integers.

**Abstract.** The article studies one method of numbers generation. For this new method we define and study sets of so called  $m$ -digitaddition and  $m$ -self positive integers. In addition, we introduce a stationary number term for the mentioned operation and provide a full description of the set of stationary numbers under some conditions.

**1. Introduction.** In his book “Time Travel and Other Mathematical Bewilderments” [1] famous American science writer Martin Gardner writes about one Indian mathematician D. R. Kaprekar, who discovered one remarkable set of so called digitaddition numbers. Let us choose any positive integer  $n$  and denote the sum of its digits by  $S(n)$ . The number  $K(n) = n + S(n)$  is called a *digitaddition* and the chosen number  $n$  is its *generator*. For example, if we choose a number 53, then its digitaddition is  $53 + 5 + 3 = 61$ .

A digitaddition may have more than one generator. The least digitaddition with two generators is 101, it is generated by 91 and 100. The least digitaddition with tree generators,  $10^{13} + 1$ , is generated by  $10^{13}$ ,  $10^{13} - 99$ ,  $10^{13} - 108$ . The least digitaddition with four generators discovered by Kaprekar,  $10^{24} + 102$ , has 25 digits. He managed to find the least digitadditions with 5 and 6 generators as well.

Positive integer that has no generator is called a *self number*. An article in the American journal «The American Mathematical Monthly» of 1974 showed that there exist infinitely many self numbers, but they are far less frequent than digitadditions. There are only 13 self numbers in the first hundred: 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97. A million, i.e.  $10^6$ , is a self number and the next power of ten self number is  $10^{16}$ . Non-recursive formula for self numbers is yet to be discovered.

$K(n)$ , basically, is a new number, generated by  $n$  with the use of simple and natural function.

**2. Definitions.** Let  $I = \{0, 1, \dots, 9\}$  be the set of decimal digits and let  $N$  be the set of positive integers. If  $a \in N$ , then  $a$  can be expressed as

$$a = \alpha_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \alpha_{k-2} \cdot 10^{k-2} + \dots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0,$$

where  $\alpha_{k-1} \neq 0$  and  $\alpha_i \in I$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ). We will denote  $a$  as  $a = (\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \dots, \alpha_0)$  and call number  $k = d(a)$  its *rank*, or simply the number of digits. By definition,  $10^{k-1} \leq a \leq 10^k - 1$ .

Let  $s(a) = \alpha_{k-1} + \dots + \alpha_0$  be the sum of  $a$ 's digits. The number

$$\hat{a} = (\alpha_0 \dots \alpha_{k-1}) = \alpha_0 10^{k-1} + \alpha_1 10^{k-2} + \dots + \alpha_{k-1}.$$

will be called *backward* to  $a$ . Some of  $\hat{a}$ 's first digits can be zeros, thus  $d(\hat{a}) \leq k$ . If  $a = \hat{a}$  then  $a$  is called *symmetrical*.

Kaprekar was studying the sum of a number and its digits:  $a+s(a)$ . If we add  $\hat{a}$  to that expression it becomes symmetrical:  $a+s(a)+\hat{a}$ . That expression is greater than  $a$  and always divisible by 3, thus it seems logical to consider only a third part of it:

$$M(a) = \frac{1}{3}(a+s(a)+\hat{a}).$$

We have just built a quite natural and simple procedure for generating new numbers:  $a \rightarrow M(a)$ . Following the example of Kaprekar,  $M(a)$  will be called an  $m$ -digitaddition with an  $m$ -generator  $a$ . Numbers without  $m$ -generators will be called  $m$ -self.

If we denote the set of all  $m$ -self numbers by  $E$  and the set of all  $m$ -digitadditions by  $G$ , then  $N = G \cup E$ .

**3.  $m$ -digitadditions.** We've already said that digitadditions can be found more frequently than self numbers. In our case the situation is completely different. Thus, among the first thousand there're 773  $m$ -self numbers and 227  $m$ -digitadditions. Among the second thousand there're 944  $m$ -self numbers and only 56  $m$ -digitadditions. Using a simple C++ code all the  $m$ -digitadditions in range from 1 to  $10^6$  were found. Their number turned out to be 15840.

Let's denote by  $g_r$  the least  $m$ -digitaddition that has exactly  $r$   $m$ -generators. From the data generated by a computer program we created the three following tables.

|       |   |   |   |    |    |    |    |    |    |
|-------|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| $r$   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  |
| $g_r$ | 1 | 4 | 8 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |

We can see that  $g_{i+1} - g_i = 4$  for  $i = 5, 6, 7, 8$ .

|       |     |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $r$   | 10  | 20   | 30   | 40   | 50   | 60   | 70   | 80   | 90   |
| $g_r$ | 334 | 1001 | 1335 | 1669 | 2003 | 2337 | 2671 | 3005 | 3339 |

In this table  $g_{j+10} - g_j = 334$  for  $j = 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80$ .

|       |       |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r$   | 100   | 200    | 300    | 400    | 500    | 600    | 700    | 800    | 900    |
| $g_r$ | 66670 | 100004 | 133338 | 166672 | 200006 | 233340 | 266674 | 300008 | 333342 |

Here we have  $g_{l+100} - g_l = 33334$  for  $l = 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800$ .

**4.  $m$ -self numbers.** The following facts were found by studying all the  $m$ -self numbers from 1 to  $10^6$ :

- a) numbers in the form  $10^p$  for  $p = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  are  $m$ -self;
- б) numbers written with the same digit, save 5555, are  $m$ -self; in particular, 11, 111, 1111, 11111, 111111, 33, 333, 3333, 33333, 333333, 99, 999, 9999, 99999, 999999 are  $m$ -self;
- в) numbers in forms  $(\alpha 000)$ ,  $(\beta 0000)$ ,  $(\gamma 00000)$  for  $\alpha, \beta, \gamma \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  are  $m$ -self.

The amount of  $m$ -self numbers among the first million is 984160.

For every  $k \in N$  we denote by  $N_k$ ,  $G_k$ ,  $E_k$  the set of all the  $k$ -digit numbers, the set of  $k$ -digit  $m$ -digit additions and the set of  $k$ -digit  $m$ -selves respectively. Here we have  $N_k = G_k \cup E_k$ .

**5. Stationary numbers.** If  $a \in N$  and  $a = M(a)$  then  $a$  is called *stationary*. Numbers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 24, 36, 48, 102 happen to be stationary. It's clear that stationary number is always  $m$ -digitaddition, since its  $m$ -generator is it itself. Every stationary number  $a$  satisfies the equation

$$2a = \hat{a} + s(a) \quad (1)$$

By  $F_k$ ,  $k \geq 1$  we'll denote a set of  $k$ -digit stationary numbers. We will find all the stationary numbers less than  $10^6$ .

**Proposition 1.** Let  $1 \leq k \leq 6$ , then

$$F_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, F_2 = \{12, 24, 36, 48\}, F_3 = \{102, 204, 306, 408\}.$$

$$F_4 = \{1002, 2004, 3006, 4008, 1372, 2374, 3376, 4378, 1743, 2745, 3747, 4749\}$$

$$F_5 = \{10002, 20004, 30006, 40008, 17043, 27045, 37045, 47049\}$$

$$F_6 = \{100002, 200004, 300006, 400008, 170043, 270045, 370047, 470049\}.$$

By looking at the sets  $F_5$  and  $F_6$  one can deduce an analogy to build some stationary numbers for  $k \geq 7$ .

**Proposition 2.** For any  $k \geq 4$  the following eight numbers are stationary:  $c_{i,k} = (\alpha \underbrace{0 \dots 0}_{k-2} \beta)$ ,

$$\alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4, e_{j,k} = \left( \gamma \underbrace{0 \dots 0}_{k-2} 4\theta \right), \gamma = j, \theta = 2j+1, 1 \leq j \leq 4.$$

**Proof.** Proposition can be easily proved by plugging the values into equation (1).

Let  $H_k = \{c_{i,k}; e_{j,k}\}$ . We have  $H_k \subset F_k$ , but for  $k \geq 7$  the set  $F_k$  can hold additional numbers, not lying in  $H_k$ . Denote  $F_k \setminus H_k = V_k$  for  $k \geq 7$ , then we get  $H_k \cup V_k = F_k$ .

Let  $a = (\alpha_{k-1} \dots \alpha_0)$ ,  $\alpha_{k-1} \neq 0$ . The equation (1) writes as follows:

$$2\alpha_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + 2\alpha_2 \cdot 10^2 + 2\alpha_1 \cdot 10 + 2\alpha_0 = 2\alpha_0 \cdot 10^{k-1} + \dots + \alpha_{k-3} \cdot 10^2 + \alpha_{k-2} \cdot 10 + 2\alpha_{k-1} + s(a) \quad (2)$$

We can see that  $1 \leq \alpha_{k-1} \leq 4$  and  $\alpha_0 = 2\alpha_{k-1}$  or  $\alpha_0 = 2\alpha_{k-1} + 1$ . Let

$$10\alpha_{k-2} + \alpha_{k-1} + s(a) = 20\alpha_1 + 2\alpha_0 + \Delta. \quad (3)$$

$$\text{Then} \quad \Delta = 11\alpha_{k-2} + 2\alpha_{k-1} - 19\alpha_1 - \alpha_0 + (\alpha_{k-3} + \dots + \alpha_3) \quad (4)$$

The definition of  $\Delta$  and equation (2) imply that  $\Delta = l \cdot 10^2$ , where  $l = -1, 0, 1, 2, \dots$ . After plugging the expression (3) into equation (2) and dividing (2) by  $10^2$  we get

$$2\alpha_{k-1} \cdot 10^{k-3} + 2\alpha_{k-2} \cdot 10^{k-4} + 2\alpha_{k-3} \cdot 10^{k-5} + \dots + 2\alpha_2 = \alpha_0 \cdot 10^{k-3} + \alpha_1 \cdot 10^{k-4} + \alpha_2 \cdot 10^{k-5} + \dots + \alpha_{k-3} + l \quad (5)$$

Next we find the variables by pairs:  $\{\alpha_{k-3}, \alpha_2\}$  first, then  $\{\alpha_{k-4}, \alpha_3\}$  and so on.

**Proposition 3.** Let  $k \geq 7$ ,  $\Delta = l \cdot 10^2$ , where  $-1 \leq l \leq 9$ . For the pair  $\{\alpha_{k-3}, \alpha_2\}$  we have 19 following possibilities:

| №              | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 |
|----------------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $l$            | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3  | 4  | 4  | 5  | 6  | 6  | 7  | 8  | 9  | 9  |
| $\alpha_{k-3}$ | 3  | 9  | 0 | 6 | 3 | 7 | 4 | 0 | 1 | 7  | 4  | 8  | 1  | 2  | 8  | 9  | 2  | 3  | 9  |
| $\alpha_2$     | 6  | 9  | 0 | 3 | 7 | 4 | 8 | 1 | 2 | 5  | 9  | 6  | 3  | 4  | 7  | 8  | 5  | 6  | 9  |

**Proof.** From the equation (5) we have the following systems of equations that contain variables  $\alpha_{k-3}$  and  $\alpha_2$ :

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} = \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l \end{cases} & 5) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} = 10 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l \end{cases} \\ 2) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} = \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l + 10 \end{cases} & 6) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} = 10 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l + 10 \end{cases} \\ 3) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} + 1 = \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l \end{cases} & 7) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} + 1 = 10 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} + 1 = \alpha_2 \\ \alpha_2 = \alpha_{k-3} + l + 10 \end{cases} & 8) \begin{cases} 2\alpha_{k-3} + 1 = 10 + \alpha_2 \\ 2\alpha_2 = \alpha_{k-3} + l + 10 \end{cases} \end{array}$$

By solving those systems we can get all the aforementioned solutions  $\{\alpha_{k-3}, \alpha_2\}$ . Theorem 3 is proved.

Thus, we found all the pairs  $\{\alpha_{k-3}, \alpha_2\}$ . Then we will find the pair  $\{\alpha_{k-4}, \alpha_3\}$  and so forth. For every of 19 possibilities for the pair  $\{\alpha_{k-3}, \alpha_2\}$  we must solve 4 systems of equations to find  $\{\alpha_{k-4}, \alpha_3\}$ . Those 19 possibilities all fall into one of the following 4 types, such that all the solutions of the same type lead to the same values of  $\{\alpha_{k-4}, \alpha_3\}$ :

$T_1 = \{2\alpha_{k-3} \equiv \alpha_2 \pmod{10} \text{ and } \alpha_2 \leq 4\}$  includes 3, 6, 9, 14 solutions,

$T_2 = \{2\alpha_{k-3} \equiv \alpha_2 \pmod{10} \text{ and } \alpha_2 \geq 5\}$  includes 1, 7, 12, 16, 18 solutions,

$T_3 = \{2\alpha_{k-3} + 1 \equiv \alpha_2 \pmod{10} \text{ and } \alpha_2 \leq 4\}$  includes 4, 8, 13 solutions,

$T_4 = \{2\alpha_{k-3} + 1 \equiv \alpha_2 \pmod{10} \text{ and } \alpha_2 \geq 5\}$  includes 2, 5, 10, 11, 15, 17, 19 solutions.

In case of  $T_1$  we get  $\alpha_{k-4} = 0, \alpha_3 = 0$ . A pair  $\{0, 0\}$  also falls into  $T_1$  giving the same values  $\alpha_{k-5} = 0, \alpha_4 = 0$  again and so on. Thus, in  $T_1$  we have  $\alpha_{k-4} = \alpha_{k-5} = \dots = \alpha_4 = \alpha_3 = 0$ .

In case of  $T_2$  or  $T_3$  we get  $\alpha_{k-4} = 6, \alpha_3 = 3$ . A pair  $\{6, 3\}$  falls into  $T_2$  as well, giving  $\alpha_{k-5} = 6, \alpha_4 = 3$  again and so forth. This sequence leads to contradiction in the middle of  $\mathcal{A}$ . Thus, cases  $T_2$  and  $T_3$  give us no solutions.

In case  $T_4$  we get  $\alpha_{k-4} = 9, \alpha_3 = 9$ . A pair  $\{9, 9\}$  is also in  $T_4$ . And thus, in  $T_4$  we have  $\alpha_{k-4} = \alpha_{k-5} = \dots = \alpha_4 = \alpha_3 = 9$ .

Shortly speaking, now we must consider possibilities 3, 6, 9, 14 (type  $T_1$ ) and 2, 5, 10, 11, 15, 17, 19 (type  $T_4$ ). Let's start from possibility number 2.

**Proposition 4.** Let  $k \geq 7$ ,  $\Delta = -100$  and  $a = (a_{k-1} \ a_{k-2} \ \underbrace{9 \dots 9}_{k-4} \ a_1 a_0)$ . Then the set of stationary numbers is  $V_7 = \{h_{i,7} = (\alpha 49999 \beta), \text{ where } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4\}$ .

**Proof.** From the statement we have

$$\Delta = -100 = 11\alpha_{k-2} + 2\alpha_{k-1} - 19\alpha_1 - \alpha_0 + 9(k-4). \quad (6)$$

Since  $\alpha_{k-3} = 9 \geq 5$  we have the following systems of equations to consider.

$$1) \begin{cases} 2\alpha_{k-2} + 1 = \alpha_1 \\ 2\alpha_{k-1} = \alpha_0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2\alpha_{k-2} + 1 = \alpha_1 + 10 \\ 2\alpha_{k-1} + 1 = \alpha_1 \end{cases}$$

By plugging equations of the first system into (6) we get  $3\alpha_{k-2} = k + 5$ . Considering the fact that  $k \geq 7$  and  $\alpha_{k-2} \leq 4$  we can find the solution:  $\alpha_{k-2} = 4, \alpha_1 = 7, k = 7$ . Next,  $\alpha_0 = 2\alpha_{k-1}$ , where  $1 \leq \alpha_{k-1} \leq 4$  and we get the stationary numbers  $h_{i,7}, 1 \leq i \leq 4$ .

In case of the system 2) there are no solutions. *Theorem 4* is proved.

Solutions to 10 other possibilities are similar to the considered one, so we will just provide (without proof) the following three theorems.

**Proposition 5.** In cases 6, 9, 14 and 10, 15, 17, 19 no solutions can be found.

**Proposition 6.** Let  $\Delta = 0$ . Then the set of stationary numbers for  $k \geq 7$  is identical to the set  $H_k$ .

**Proposition 7.** Considering cases 5 and 11 we can get the following sets of stationary numbers:

$$V_{16} = \{d_{i,16} = (\alpha 03 \underbrace{9 \dots 9}_{10} 70\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4\},$$

$$Z_{49} = \{f_{i,49} = (\alpha 04 \underbrace{9 \dots 9}_{44} 70\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4\},$$

$$Z_{52} = \{f_{i,52} = (\alpha 14 \underbrace{9 \dots 9}_{47} 2\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4\},$$

$$Z_{55} = \left\{ f_{i,55} = (\alpha 24 \underbrace{9 \dots 9}_{50} 4\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \right\},$$

$$V_{58} = \{ d_{i,58} = (\alpha 34 \underbrace{9 \dots 9}_{53} 6\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{61} = \{ f_{i,61} = (\alpha 44 \underbrace{9 \dots 9}_{57} 8\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{43} = \{ f_{i,43} = (\alpha 54 \underbrace{9 \dots 9}_{38} 0\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i + 1, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{46} = \{ f_{i,46} = (\alpha 64 \underbrace{9 \dots 9}_{41} 2\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i + 1, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$W_{49} = \{ f_{i,49} = (\alpha 74 \underbrace{9 \dots 9}_{44} 4\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i + 1, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$W_{52} = \{ f_{i,52} = (\alpha 84 \underbrace{9 \dots 9}_{47} 6\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i + 1, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$W_{55} = \{ f_{i,55} = (\alpha 94 \underbrace{9 \dots 9}_{50} 8\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i + 1, 1 \leq i \leq 4 \}.$$

Thus, we found all the stationary numbers, when  $k \geq 7$  and  $\Delta = l \cdot 10^2$ , where  $-1 \leq l \leq 9$ .

In the case of  $k \geq 7$  and  $\Delta = 10^3$  stationary can also be found by the same algorithm. We will simply provide the results in theorem 8.

**Proposition 8.** If  $k \geq 7$  and  $\Delta = 10^3$ , then all the stationary numbers can be found in the following sets:

$$V_{118} = \{ q_{i,118} = (\alpha 003 \underbrace{9 \dots 9}_{110} 700\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{121} = \{ q_{i,121} = (\alpha 103 \underbrace{9 \dots 9}_{113} 702\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{124} = \{ q_{i,124} = (\alpha 203 \underbrace{9 \dots 9}_{116} 704\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{127} = \{ q_{i,127} = (\alpha 303 \underbrace{9 \dots 9}_{119} 706\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \},$$

$$V_{130} = \{ q_{i,130} = (\alpha 403 \underbrace{9 \dots 9}_{122} 708\beta), \text{ где } \alpha = i, \beta = 2i, 1 \leq i \leq 4 \}.$$

For every  $a$  with a rank  $d(a) \leq 130$  we have  $\Delta < 1100$ . Denote  $R = \{ 7, 16, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 118, 121, 124, 127, 130 \}$ ,  $Q = \{ 49, 52, 55 \}$ .

Summing up all the results of statements 2-8 we can formulate the following theorem.

**Theorem 1.** Let  $7 \leq k \leq 130$ , then

a) if  $k \in R$ , then  $F_k = H_k \cup V_k$ ,

б) if  $k \in Q$ , then  $F_k = H_k \cup Z_k \cup W_k$ ,

в) if  $k \notin (R \cup Q)$ , then  $F_k = H_k$ .

Let's show now how to find stationary numbers is a general case.

In case  $\Delta = l_1 \cdot 10^2 + l_2 \cdot 10^3 + \dots + l_m \cdot 10^{m+1}$ , where  $l_i \in I$ , we'll be able to find the values of pairs  $\{ \alpha_{k-m-2}, \alpha_{m+1} \}$ ,  $\{ \alpha_{k-m-1}, \alpha_m \}$ , etc. In those cases, where there is a solution, we'll find the values of stationary numbers.

For providing advice and guidance, and for the encouragement and support, I thank to my supervisor professor Sava Grozdev.

## REFERENCES

- [1] Gardner, M., "Time travel and other mathematical bewilderments", New York, **1988**.
- [2] Grozdev, S., Nenkov, V., "Kaprekar's Constant", Mathematics Plus, 22 (85), number 1, **2014**, 65-68.

## НЕПОДВИЖНЫЕ М-ПОРОЖДЕННЫЕ ЧИСЛА

С. Мақышов

**Ключевые слова:** натуральные числа, Д.Капрекар, порожденные числа, самопорожденные числа.

**Аннотация.** В работе рассматривается один способ генерации чисел. Относительно этого способа определяются и изучаются классы  $m$ -порожденных и  $m$ -самопорожденных целых положительных чисел. Также вводится понятие неподвижного числа, и дается описание множества неподвижных чисел при определенных условиях.

## ТҰРАҚТЫ М-ТУЫНДАҒАН САНДАР

С. Мақышов

**Түйін сөздер:** натурал сандар, Д. Капрекар, туындаған сандар, өзіндік туындаған сандар.

**Аннотация.** Мақалада жаңа сандар құрастырудың тағы бір әдісі қарастырылады. Осы әдіске қатысты  $m$ -туындаған және  $m$ - өзіндік туындаған натурал сандардың кластары анықталады және зерттеледі. Сонымен қатар тұрақты сандар анықтамасы беріледі және белгілі бір шартта тұрақты сандар жиыны табылады.

*Поступила 13.03.2016 г.*

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 133–138

EXACT SOLUTIONS OF EVOLUTION EQUATIONS  
IN RESTRICTED THREE-BODY PROBLEM WITH  
VARIABLE MASSM.Dzh. Minglibayev<sup>1,3</sup>, A.N. Prokopenya<sup>2</sup>, B.A. Beketauov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Al-Farabi Kazakh National University, 71, al-Farabi ave., Almaty, 050038 Kazakhstan;

<sup>2</sup>Warsaw University of Life Sciences SGGW, 159, Nowoursynowska str., 02-776 Warsaw, Poland;

<sup>3</sup>Fesenkov Astrophysical Institute, 23, Observatoriya, Almaty, 050020 Kazakhstan

E-mail: Beketauov\_Baglan@mail.ru

**Key words:** restricted problem of three bodies, variable masses, secular perturbations, exact solutions, aperiodic quasi-conical motion, quasi-circular orbit.

**Abstract.** The satellite version of the restricted three-body problem formulated on the basis of classical Gylden-Meshcherskii problem is considered. Motion of the point  $P_2$  of infinitesimal mass about the point  $P_0$  is described in the first approximation in terms of the osculating elements of the aperiodic quasi-conical motion, and an influence of the point  $P_1$  gravity on this motion is analyzed. Long-term evolution of the orbital elements is determined by the differential equations written in the Hill approximation and averaged over the mean anomalies of points  $P_1$  and  $P_2$ .

As a result it was obtained curves describing the solutions of differential equations in the critical values. All relevant symbolic calculations and visualizations are done with the computer algebra system Mathematica.

## МАССАЛАРЫ АЙНЫМАЛЫ ШЕКТЕЛГЕН ҮШ ДЕНЕ МӘСЕЛЕСІНІҢ ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕНДЕУІНІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ

М.Ж. Минглибаев<sup>1,3</sup>, А.Н. Прокопеня<sup>2</sup>, Б.А. Бекетауов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ. Алматы. Қазақстан

<sup>2</sup>Варшава Жаратылыстану Ғылымдар Университеті. Варшава. Польша

<sup>3</sup>В.Г. Фесенков атындағы Астрофизика институты. Алматы. Қазақстан

**Түйін сөздер:** шектелген үш дене мәселесі, айнымалы масса, ғасырлық ұйтқу, ерекше шешім, квазишенбер орбита.

**Аннотация.** Жұмыста массалары әртүрлі қарқында айнымалы шектелген үш дене мәселесінің Хилл жуықтауында эволюциялық дифференциалдық теңдеулердің ерекше шешімдері табылды. Эволюциялық теңдеулерінің критикалық мәндерінде байланысты шешімдер саласын сипаттайтын қисық алынды.

**Кіріспе.** Массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесіндегі  $P_2$  нүктесінің эволюциялық ұйтқытушу элементтері  $P_0$  және  $P_1$  нүктелерінің орташа аномалиясы бойынша орташаланған Хилл жуықтауындағы дифференциалдық теңдеумен сипатталады [1,2].

Автономды – стационар теңдеулер жүйесін Гаусс сұлбесі бойынша орташалап белгілі интегралданатын жағдайға келтірілген. Осы интегралданатын жүйе Хилл жуықтауында қарапайым ықшам түрге келеді және толық зерттеуге болады.

Жұмыста қарастырылған есептеулер мен визуализациялар Mathematica программасында жүргізілді.

**Ғасырлық ұйытқыған негізгі теңдеулері.** Лагранждың ғасырлық ұйтқу теңдеулер жүйесінен мына  $e^2 = z$  түрлендіруді қолданып, әрі қарай зерттеуге қажетті мына теңдеулерді жазамыз [1,2]:

$$\frac{dz}{dn} 20z\sqrt{1-z} \cdot \sin^2 i \sin 2\omega, \quad (1)$$

$$\frac{di}{dn} = -\frac{10z}{\sqrt{1-z}} \sin i \cos i \sin 2\omega, \quad (2)$$

$$\frac{d\omega}{dn} = \frac{2}{\sqrt{1-z}} \left[ 5 \cos^2 i - 5 + 5z + 5 \cos 2\omega (\sin^2 i - z) + 4(1-z)N \right], \quad (3)$$

мұндағы  $N$  –  $P_0$  және  $P_1$  денелерінің массасының уақыт бойынша өзгеруінен туындайтын қосымша параметр [2].

Сәйкесінше (1)-(3) теңдеулер жүйесінің бірінші интегралдар мына түрде болады

$$(1-z)\cos^2 i = c_1 = \text{const}, \quad (4)$$

$$z \left( \frac{2}{5} N - \sin^2 \omega \sin^2 i \right) = c_2 = \text{const}. \quad (5)$$

Келтірілген (5) өрнегіндегі  $N=1$ , жағдайы денелердің массалары тұрақты кезінде [1], [3] жұмыстарында қарастырылған, ал бұл жұмыстың ерекшелігі массалары айнымалы шектелген үшдене мәселесі деп қарастырамыз. Алынған (4)-(5) интегралдардың  $N=0$  және  $N=\frac{5}{2}$

критикалық мәндерінде ерекше шешімдерді қарастырамыз [4].

(4) және (5) интегралдарды пайдаланып

$$\sin^2 i = \frac{1-z-c_1}{1-z}, \quad \sin^2 \omega = \frac{(1-z)(2Nz-5c_2)}{5z(1-z-c_1)}, \quad (6)$$

(6) өрнектегі  $i$  мен  $\omega$  ескеріп (1) теңдеуден  $z(n)$ -ге қатысты келесі дифференциалдық теңдеуді аламыз:

$$\frac{dz}{dn} = 8 \operatorname{sgn}(\sin(2\omega_0)) \sqrt{Q(z)}, \quad (7)$$

мұндағы  $\operatorname{sgn}(x)$ , бастапқы  $(\omega_0 = \omega(t_0))$  уақыт мезетінде  $\sin(2\omega_0)$  таңбасын анықтайды. Ал  $Q(z)$  көпмүшелігі жалпы түрде келесідей болады

$$Q(z) = (2Nz - 5c_2)(5c_2 + z(5 - 2N - 5c_1 - 5c_2) - z^2(5 - 2N)), \quad (8)$$

Бізге  $P_2$  нүктесінің квазиэллипстік қозғалысын қарастырғандықтан орбита эксцентриситеті 1-ден аспауы қажет. Сәйкесінше (4) өрнектегі интеграл тұрақтысы  $c_1$  мына аралықта жатады  $0 \leq c_1 < 1$ , бұдан мынаны аңғару қиын емес  $0 \leq z < 1 - c_1$ . Осыны ескеріп (5) интегралдың және (7) дифференциалдық теңдеудің  $N = \frac{5}{2}$  және  $N = 0$  критикалық мәндеріндегі шешімдеріне талдау жүргіземіз. (5) интегралдағы  $c_2$ -тұрақтысының таңбасы  $N$  параметрінен қатаң түрде тәуелді болады, яғни  $N = 0$  болғанда  $-1 < c_2 \leq 0$ . Сәйкесінше  $N = 5/2$  болса  $0 \leq c_2 < 1$  шарты орындалады. Сондықтан  $N = 0$ ,  $N = 5/2$  кезінде критикалық мәндері деп айтуға болады, өйткені бұл жағдайда интеграл тұрақтысы  $c_2$ -нің таңбасы оң және теріс бола алады [4].

$$N = \frac{5}{2} \text{ жағдайы}$$

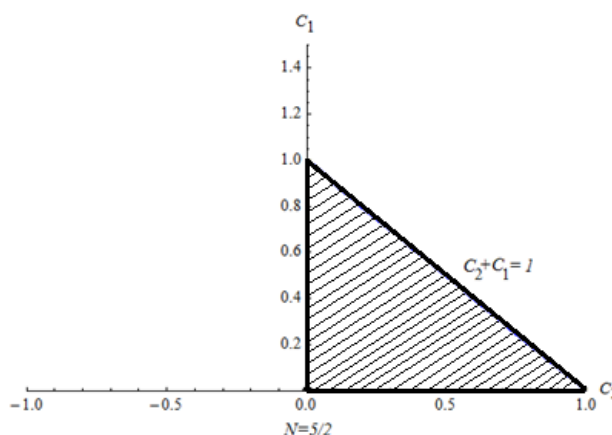
I) Бұл жағдайда (4)-(5) интегралдардан келесі өрнектерді аламыз

$$\cos^2 i = \frac{c_1}{1-z} \quad \text{және} \quad \sin^2 \omega = \frac{5(1-z)(z-c_2)}{5z(1-z-c_1)} \quad (9)$$

(9) өрнектен мына шарттарды аламыз  $z \geq c_2$  және  $0 \leq z < 1 - c_1$ . Осы алынған шарттарды (8) теңдеумен берілген көпмүшеліктен  $c_2 - z(c_1 + c_2) \geq 0$  теңсіздігі шығады, бұдан  $c_1$  және  $c_2$ -дің арасындағы байланысты табамыз:

$$0 \leq c_2 \leq z \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2}, \quad c_1 + c_2 = 1, \quad 0 \leq c_1 < 1. \quad (10)$$

(10) шарттардан  $c_1$  мен  $c_2$  тұрақтыларының арасындағы тәуелділіктері  $Oc_1c_2$  жазықтығында  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 0$ ,  $c_1 + c_2 = 1$  түзулерімен шектелген үшбұрышты береді (1-сурет):



1-сурет –  $N = \frac{5}{2}$  критикалық мәніндегі  $c_1$  және  $c_2$  жазықтықтағы тәуелділік кескіні

Енді осы үшбұрыш қабырғаларындағы шешімдерді көрсетелік.

**а)**  $c_1 + c_2 = 1$  түзуін алайық (1-сурет).  $0 \leq c_2 \leq z \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2}$  екенін жоғарыда көрсеттік, бұдан

$z = c_2 = \text{const}$  байқауға болады. Ол үшін (5) теңдеу  $\sin^2 \omega \sin^2 i = 0$  шартын қанағаттандыру қажет. Ол екі жағдайда болуы мүмкін  $\sin^2 \omega = 0$  немесе  $\sin^2 i = 0$ . Тексеріп көрейік, егер  $\sin^2 \omega = 0$  болсын делік, онда (1) және (2) теңдеулерді қанағаттандыратынын көреміз. Ал (3) теңдеуден келесі өрнекті аламыз:

$$\frac{d\omega}{dn} = 20\sqrt{1-c_2}, \quad (11)$$

$\sin^2 \omega = 0$  екенін ескерсек (11) теңдеудің оң жағы тұрақты болу қажет, ол тек  $c_2 = 1$  болғанда болады. Біз квазиэллипстік қозғалысты қарастырғандықтан, орбита эксцентриситеті 1-ден аспау қажет, бұл жағдайда 1-ге тең болып қалды. Демек (5) теңдеудегі  $\sin^2 \omega = 0$  болу шарты бізге жарамайды, қайшылыққа әкеліп соқты, өйткені  $z = c_2 = \text{const}$ .

Олай болса  $\sin^2 i = 0$  шартын қарастырайық. Бұл жағдайда да (1) және (2) теңдеулерді қанағаттандырады. Ал (3) теңдеуден

$$\omega(n) = -\text{arctg}(2a \cdot n - \text{tg} \omega_0), \quad (12)$$

өрнегін аламыз, яғни (3) теңдеуді де қанағаттандырады. Бұл жағдайда  $0 \leq c_2 \leq z \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2}$  шарты

бұзылмайды. Олай болса  $c_1$  және  $c_2$  интегралдар тұрақтыларының мүмкін болатын мәндеріндегі  $c_1 + c_2 = 1$  түзуін аламыз.

Сонымен (1)-(3) теңдеулер жүйесінің шешімдері келесі түрде болады:

$$z = \text{const}, \quad (13)$$

$$i = \text{const}, \quad (14)$$

$$\omega(n) = -\text{arctg}(2a \cdot n - \text{tg} \omega_0). \quad (15)$$

**б)**  $c_1 = 0$ ,  $c_2 \in [0,1]$  түзуін қарастырайық, бұл жағдай  $\cos^2 i = 0$  болғанда орындалады, демек  $i = \frac{\pi}{2}$  (1-сурет). Онда (4) теңдеуден  $c_1 = 0$  екенін аламыз. Ал (5) өрнектен  $c_2 = z(1 - \sin^2 \omega)$

теңдеуін аламыз, осы (5) теңдеуден  $c_2 \leq z \leq 1$  шартын аламыз. Эволюциялық (1)-(3) теңдеулер шешімі қарапайым функциямен интегралданады [3,4].

**с)** Келесі жағдай  $c_2 = 0$ ,  $c_1 \in [0,1]$  түзуін көрсетелік (1-сурет). Ол үшін (5) теңдеуге талдау жасау қажет.  $c_2 = 0$  болуы екі жағдайда орындалады:

1) қозғалыс траекториясы квазишенбер орбита бойымен қозғалғанда, демек  $z = 0$  болғанда. Эволюциялық ұйытқу (1)-(3) теңдеулер жүйесінің шешімі:

$$z = \text{const}, \quad (19)$$

$$i = \text{const}, \quad (20)$$

$$\omega = \omega_0 + \text{arctg}\left(\frac{1}{c_1} \cdot \text{tg}(20\sqrt{c_1} \cdot n)\right) \quad (21)$$

2)  $\sin^2 i \cdot \sin^2 \omega = 1$  болуы  $i = \frac{\pi}{2}$  және  $\omega = \frac{\pi}{2}$  орындалады, бұл жағдайда (4)-(5)

интегралдардан  $c_2 = 0$ ,  $c_1 = 0$  аламыз, ал (1)-(3) теңдеулер жүйесінің шешімдері келесідей болады:

$$z = \text{const}, \quad (22)$$

$$i = \text{const}, \quad (23)$$

$$\omega = \omega_0 + \frac{10z}{\sqrt{1-z}} n. \quad (24)$$

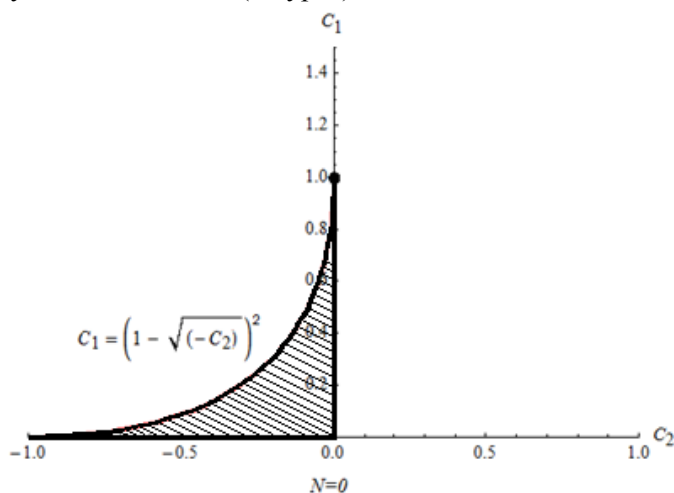
**d)** Жоғарыдағы көрсетілген жағдайлар  $O_{c_1 c_2}$  жазықтығындағы үшбұрыштың қабырғаларындағы шешімдерін сипаттайды, ал толығырақ камту үшін сол  $O_{c_1 c_2}$  жазықтығындағы  $c_1$  және  $c_2$  интеграл тұрақтыларының мүмкін болатын мәндеріндегі алынған үшбұрыштың ішіндегі шешімін қарастырайық. Ол үшін  $c_1 \geq 0$ ,  $c_2 \geq 0$ ,  $c_1 \leq 1 - \frac{5c_2}{2N}$  деп алсақ жеткілікті (1-сурет). Ал (1)-(3) теңдеулер жүйесі эллиптикалық квадратурада есептеледі [4].

**$N = 0$  жағдайы**

**II)** Егер  $N = 0$  болса, онда  $0 \leq z \leq 1 - c_1$ ,  $0 \leq c_1 \leq 1$ ,  $c_2 = -z \sin^2 i \sin^2 \omega \leq 0$  шарттарына сәйкес мына тәуелділікті аламыз:

$$c_1 \leq \left(1 - \sqrt{-c_2}\right)^2 \quad (25)$$

$c_1$  мен  $c_2$  арасындағы тәуелділікті аламыз (2-сурет):



2-сурет –  $N = 0$  критикалық мәніндегі  $c_1$  және  $c_2$  жазықтықтағы тәуелділік кескіні

$c_1$  және  $c_2$  нақты мәндеріне сәйкес (1)-(4) – ғасырлық теңдеулер жүйесінен бірнеше ерекше шешімдер алынады.

**a)** Бұл жағдайда  $c_1 = 0$  түзуін қарастырайық, ол  $\cos^2 i = 0$   $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$  және квазишеңбер орбита бойымен қозғалғанда, яғни  $z = 0$  болғанда орындалады,  $\sin^2 i = 1$   $\left(i = \frac{\pi}{2}\right)$  болса, (6) өрнектен  $-1 \leq c_2 \leq 0$  екеніне көз жеткізуге болады (2-сурет). Осы шарттарды ескеріп (1)-(3) теңдеулер жүйесін шешімдерін алу қиын емес.

**b)**  $c_2 = 0$  түзуінен,  $0 \leq c_1 \leq 1$ , бұл жағдайды төмендегідей екі жағдайға бөліп қарастырамыз (2-сурет).

**1)** Егер  $z \neq 0$  болса, онда (5) теңдеуден  $\sin^2 \omega = 0$ ,  $\cos^2 \omega = 1$  және (4) өрнектен  $0 \leq c_1 \leq 1$  екені шығады, олай болса (5)-(6) интегралдан келесі өрнекті аламыз:

$$z = \text{const}, \quad (29)$$

$$i = \text{const}, \quad (30)$$

$$\omega = \omega_0 + \text{arccctg} \left( \frac{20(c_1 - 1)}{c_1} \cdot n \right). \quad (31)$$

2) Если  $z = 0$  болса, онда  $\sin^2 \omega = 0$ ,  $\cos^2 \omega = 1$  және  $\sin^2 i = 1 - c_1$ ,  $0 \leq c_1 \leq 1$  шарттарын аламыз. Демек (5)-(6) интегралдан келесі өрнекті аламыз:

$$z = \text{const}, \quad (32)$$

$$i = \text{const}, \quad (33)$$

$$\omega = \text{const}, \quad (34)$$

с)  $c_1 \leq (1 - \sqrt{1 - c_2})^2$  қисығын алайық. (5) теңдеуден  $z(-\sin^2 \omega \sin^2 i) = c_2$  және (4) теңдеуден  $\sin^2 i = \frac{1 - z - c_1}{1 - z}$  екенін ескерсек жеткілікті (2-сурет). Эволюциялық (1)-(3) теңдеулер шешімі карапайым функциямен интегралданады [4].

**Қорытынды.** Жұмыста массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесіндегі Лагранждың ғасырлық ұйытқыған қозғалыс теңдеулерінің шешімі массалары өзгеру заңдылығын анықтайтын параметр –  $N = 0$  және  $N = 5/2$  критикалық мәніндегі ерекше шешімдері табылып олардың анықталу облыстары алынған.

#### ӘДЕБИЕТ

- [1] Вашковьяк М.А. Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел // Качественное исследование – 1981. – Т.19, – № 1. – С. 5-18.
- [2] Минглибаев М. Дж. Динамика нестационарных гравитирующих систем. — Алматы: изд. КазНУ, 2009. — 209 с.
- [3] Вашковьяк М.А. О научной деятельности профессора М.Л. Лидова и о развитии его работ по эволюции спутниковых орбит (к 80-летию со дня рождения). Дополнение в кн.: М.Л. Лидов. Курс лекций по теоретической механике. – 2-е изд., – М.: ФизМатЛит, 2010. – 496с.
- [4] Prokopenya A.N., Minglibayev M., Beketauov B. On Integrability of Evolutionary Equations in the Restricted Three-Body Problem with Variable Masses// Computer Algebra in Scientific Computing/CASC2014, V.P. Gerdt, W.Koepf, W. Sieler, E.V. Vorozhtsov (Eds.), LNCS8660.–2014, pp.375-389.

#### REFERENCES

- [1] M.A. Vashkovyak. Evoliutsiya orbit v ogranichennoi krugovoi dvukratno osrednennoi zadache treh tel//Kachestvennoe issledovanie– 1981. – Т.19, – № 1. – pp. 5-18. (in Russ.).
- [2] M. Dzh. Mynglibayev. Dinamika nestatsionarnih gravitiruiushih system – Almaty: izd. KazNU, 2009. — 209 p. (in Russ.).
- [3] M.A. Vashkovyak. O nauchnoi deyatel'nosti professora M.L. Lidova i o razvitii ego rabot po evoliutsii sputnikovih orbit (k 80-letiu so dnya rozhdeniya). Dopolnenie v kn.: M.L. Lidov. Kurs lektzii po teoreticheskoi mekhanike. – 2-e izd., –M.: FizMatLit, 2010. – 496p. (in Russ.).
- [4] Prokopenya A.N., Minglibayev M., Beketauov B. On Integrability of Evolutionary Equations in the Restricted Three-Body Problem with Variable Masses// Computer Algebra in Scientific Computing/CASC2014, V.P. Gerdt, W.Koepf, W. Sieler, E.V. Vorozhtsov (Eds.), LNCS8660.–2014, pp.375-389. (in Russ.).

#### ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ

М.Ж. Минглибаев<sup>1,3</sup>, А.Н. Прокопеня<sup>2</sup>, Б.А. Бекетауов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>КазНУ им аль-Фараби. Алматы. Казахстан; <sup>2</sup>Варшавский Университет естественных наук. Варшава. Польша; <sup>3</sup>Астрофизический институт им В.Г. Фесенков, Алматы, Казахстан

**Ключевые слова:** ограниченная задача трех тел, переменная масса, вековое возмущение, точные решения, квазиконические движение, квазикруговая орбита.

**Резюме.** Рассматривается спутниковая ограниченная задача трех тел с переменными массами, сформулированная на основе классической задачи Гюльдена-Мещерского. Движение точки бесконечно малой массы  $P_2$  относительно точки  $P_0$  описывается в первом приближении оскулирующих элементов апериодического квазиконического движения и учитывается влияние гравитации на точку этого движения. Долгопериодическая эволюция орбитальных элементов определяется дифференциальными уравнениями, записанных в приближении Хилла и осредняется средней аномалией точек  $P_1$  и  $P_2$ . В результате были получены кривые, описывающие область решений дифференциальных уравнений в критических значениях. Все символические вычисления и визуализация были получены с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 139–146

UDC 621.314.5

**METHODS OF SWITCHING ANGLES BASED ON PULSE WIDTH MODULATION FOR MULTILEVEL INVERTER****S.A. Orynbayev<sup>1</sup>, S.S. Moldakhmetov<sup>2</sup>, B.K. Baibutanov<sup>2</sup>,  
M.B. Jeshmetov<sup>1</sup>, D.S. Aueszhanov<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Taraz State University named after M. Kh. Dulaty, Taraz,<sup>2</sup>Kazakh National Research Technical University named after K. Satpayev, Almaty, KazakhstanE-mail: [seitzhan\\_74@mail.ru](mailto:seitzhan_74@mail.ru), [smsayat@mail.ru](mailto:smsayat@mail.ru), [baibutanov\\_b@mail.ru](mailto:baibutanov_b@mail.ru), [emb.ntu.94@mail.ru](mailto:emb.ntu.94@mail.ru),  
[aueszhanov2001@bk.ru](mailto:aueszhanov2001@bk.ru),**Keywords:** multilevel inverter, PWM, switching angle, THD, Simulink.

**Abstract.** This article proposes the methods of switching angles of a multilevel inverter. These switching methods based on a pulse width modulation, which is obtained by comparing the ideal sine wave and triangular pulse sequence. PWM based methods have been used widely for level commutation of multilevel power inverters due to their simplicity, flexibility and reduced THD of output voltage. In this paper, a novel analysis of four species of PWM based methods for thirteen level single phase inverter is presented. The article highlights the following strategies: Phase disposition PWM strategy, Phase opposition disposition PWM strategy, Alternate phase opposition disposition PWM strategy, Carrier overlapping PWM strategy, Variable frequency PWM strategy. The article describes the algorithms for obtaining the control pulse sequence and proposes how the strategy can reduce the harmonic components of the inverter output voltage. For this purpose, each of the performed strategies is modeled in the Simulink environment for different frequencies.

УДК 621.314.5

**ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДИК КОММУТАЦИИ СТУПЕНЕЙ МНОГОУРОВНЕВОГО ИНВЕРТОРА НА ОСНОВЕ ШИРОТНО-ИМПУЛЬСНОЙ МОДУЛЯЦИИ****С.А. Орынбаев<sup>1</sup>, С.С. Молдахметов<sup>2</sup>, Б.К. Байбутанов<sup>2</sup>,  
М.Б. Ешметов<sup>1</sup>, Д.С. Ауесжанов<sup>1</sup>**<sup>1</sup>Таразский государственный университет имени М.Х. Дулати, Тараз;<sup>2</sup>Казахский национальный исследовательский технический университет имени К.И. Сатпаева, Алматы, Республика Казахстан)

**Ключевые слова:** многоуровневый инвертор, ШИМ, угол коммутации, коэффициент нелинейных искажений, Simulink.

**Аннотация.** В данной статье исследованы методики коммутации ступеней многоуровневого инвертора. Данные методики используют широтно-импульсную модуляцию для коммутации, которая получается путем сравнения эталонного синусоидального сигнала и последовательности треугольных импульсов. В статье описаны алгоритмы получения управляющей последовательности импульсов и исследовано, как та или иная стратегия позволяет уменьшить коэффициент гармонических составляющих выходного напряжения инвертора. Для этого в среде Simulink произведено моделирование каждой из стратегий для различных частот.

**Введение.** Топология построения многоуровневого инвертора позволяет осуществлять коммутацию уровней напряжения. При этом в большинстве случаев та или иная топология отличается лишь количеством используемых ключей коммутации, источников питания и других элементов исполнения.

Использование определенной топологии не позволяет получить весомое преимущество в уменьшении гармонических составляющих. Для этого используется определенная стратегия выбора времени коммутации каждой из ступеней многоуровневого инвертора. На данный момент существуют различные стратегии, применяемые для реализации многоуровневого инвертора [1-3]. Большинство из них основано на использовании широтно-импульсной модуляции [4-6].

Использование ШИМ широко распространено для получения синусоидального напряжения на выходе одноуровневого инвертора, где ширина импульсов несущего колебания изменяется по синусоидальному закону. Но ШИМ можно использовать и для коммутации в многоуровневом инверторе с той лишь разницей, что несущие колебания формируют каждую из ступеней инвертора отдельно [7-10].

На базе топологии построения многоуровневого инвертора, представленной в [11], исследуем, как различные стратегии позволяют уменьшить коэффициент гармонических составляющих, и выберем оптимальную.

**Стратегии коммутации.** Стратегии коммутации, основанные на ШИМ, которые будут исследованы в данной статье, приведены ниже:

- синфазная ШИМ стратегия;
- противофазная ШИМ стратегия;
- чередующаяся противофазная ШИМ стратегия;
- стратегия ШИМ с наложением несущих колебаний;
- стратегия ШИМ с различной частотой.

Рассмотрим синфазную ШИМ стратегию коммутации ступеней. В качестве модулирующего сигнала  $U_s$  задана синусоида амплитудой 312 В и частотой 50 Гц по закону

$$U_s = 312 \sin 100\pi t \quad (1)$$

В качестве же несущего колебания будет выступать треугольный сигнал симметричной формы, т.е. продолжительность роста такого сигнала, равна продолжительности его спада [12]. Пример такого сигнала указан на рисунке 1. Частота несущего треугольного сигнала будет неизменной, но должна быть в несколько раз больше частоты модулирующего синусоидального сигнала. Амплитуда треугольного сигнала выбирается в зависимости от амплитуды ступени многоуровневого инвертора.

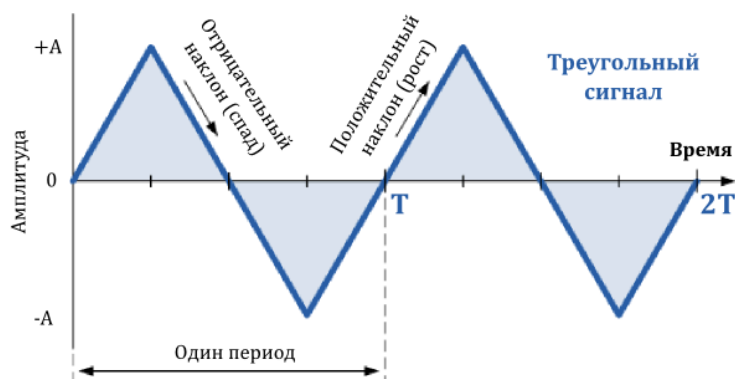


Рисунок 1– Временная диаграмма треугольного сигнала

Введем понятие частотного коэффициента  $k_f$ , который будет равен отношению частоты несущего колебания  $f_c$  к частоте модулирующего сигнала  $f_s$ .

$$k_f = \frac{f_c}{f_s} \quad (2)$$

Таким образом, мы можем исследовать влияние данного коэффициента на коэффициент нелинейных искажений.

Аналогично введем понятие амплитудного коэффициента  $k_A$ , который будет рассчитываться по формуле

$$k_A = \frac{n \cdot A_c}{f_s}, \quad (3)$$

где  $n$  – количество ступеней инвертора,  $A_c$  – амплитуда несущего колебания,  $A_s$  – амплитуда модулирующего сигнала.

Рассмотрим стратегии на основе трехуровневого инвертора [13]. Пусть уровень ступеней будет одинаковым и условно равен 1, в этом случае амплитуда модулирующего колебания равна 3.

На рисунке 2а представлена диаграмма выбора времени коммутации по стратегии синфазной ШИМ. Для данного случая значение частотного коэффициента  $k_f$  равно 20, т.е. частота несущих треугольных сигналов в 20 раз превышает частоту синусоидального колебания. Значение амплитудного коэффициента  $k_A$  равно 1.

Как видно из рисунка, несущие колебания для каждой ступени находятся в одной фазе. Число несущих, необходимых для получения времени коммутации на каждом уровне равно числу ступеней инвертора, умноженному на два. Необходимо заметить, что все несущие одинаковой амплитуды. Согласно данной стратегии, если значение несущего треугольного колебания для данного момента времени выше чем значение синусоидального сигнала, то формируется значение высокого уровня, в противном случае – формируется значение низкого уровня. Таким образом, генерация коммутирующего импульса производится всякий раз, когда треугольный импульс ступени больше синусоиды.

Согласно принципу формирования управляющих импульсов по закону противофазной ШИМ стратегии все несущие колебания положительной полуволны находятся в одной фазе друг относительно друга, и все несущие колебания отрицательной полуволны также находятся в одной фазе, но при этом в противофазе несущим колебаниям положительной полуволны (рисунок 2б).

Для чередующейся противофазной ШИМ стратегии несущие колебания одинаковой амплитуды находятся в противофазе относительно соседних (рисунок 2в). Фактически данная и предыдущая стратегии удобны с точки зрения применения, поскольку сдвиг по фазе на 180° смещает несущие так, что положительные и отрицательные полуволны находятся в одинаковом положении относительно несущих. Таким образом, импульсы формируются для положительной и отрицательной полуволн одинаково, что очень удобно.

Поскольку синусоида имеет характерную крутизну, число переключений для нижних уровней инвертора меньше чем число переключений верхних уровней. Для того, чтобы уравнивать количество переключений для всех уровней можно использовать разные частоты для несущих колебаний. Это реализуется в стратегии ШИМ с частотой. Диаграмма положения несущих для данной стратегии показана на рисунке 2г ( $k_{f1} = 40$ ,  $k_{f2} = 20$ ,  $k_{f3} = 12,5$ ,  $k_A = 1$ ).

С помощью ШИМ с наложением несущих колебаний можно увеличить или уменьшить длительность коммутирующих импульсов и исключить кратковременные всплески. Это достигается за счет увеличения амплитуды несущих колебаний, поскольку треугольные сигналы обрезаются и становятся трапециевидными. Диаграмма положения несущих колебаний для стратегии ШИМ с наложением несущих колебаний показана на рисунке 2д ( $k_f = 20$ ,  $k_A = 1,5$ ).

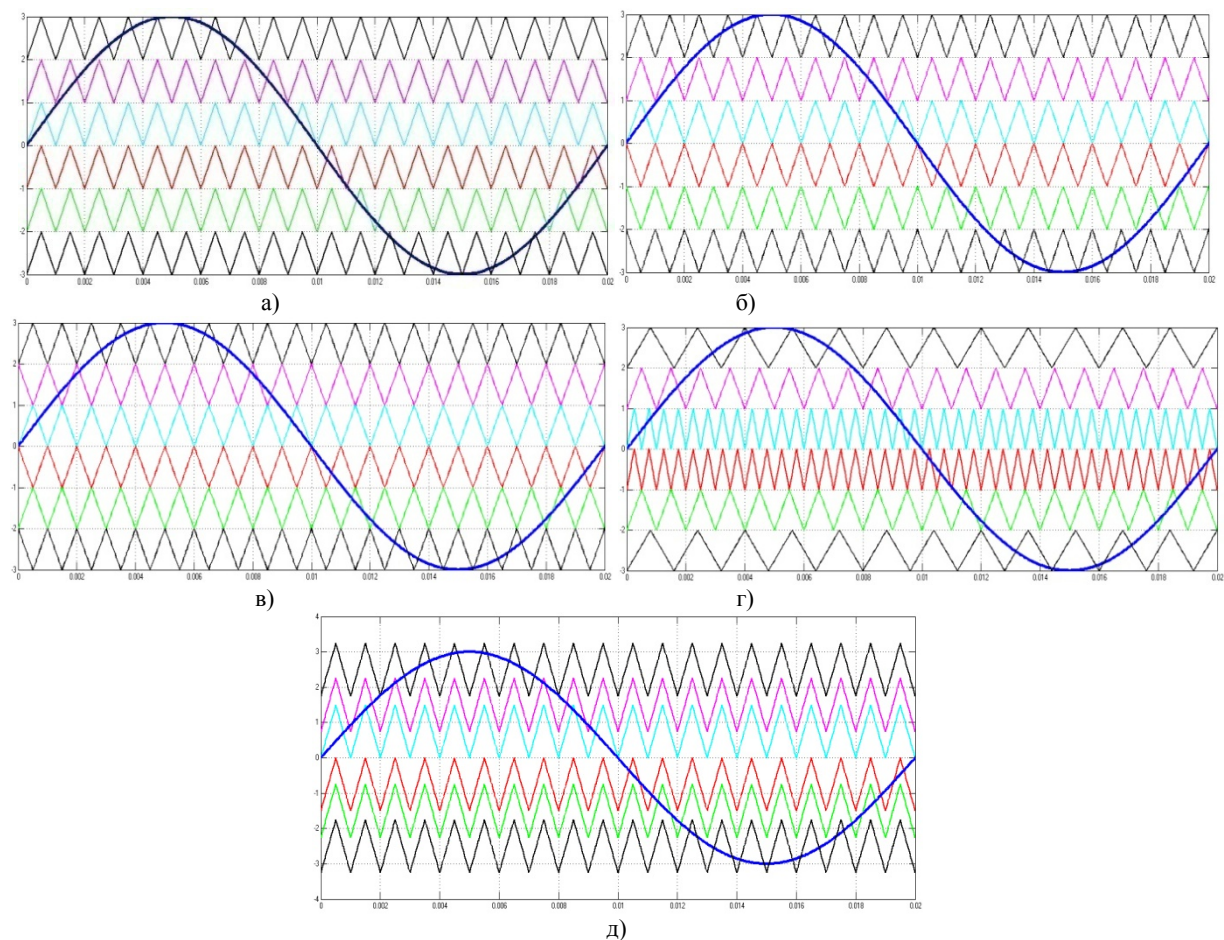


Рисунок 2 – Диаграммы положения несущих колебаний для различных стратегий стратегии

**Моделирование и результаты.** Для исследования влияния стратегий коммутации на коэффициент гармонических составляющих построим специальную модель в среде визуального моделирования Simulink.

На рисунке 3 представлена модель 6-уровневого инвертора для исследования методик коммутации [14]. Блок Sine Wave генерирует синусоидальное колебание частотой 50 Гц и амплитудой 312 В. Блок Repeating Sequence генерирует треугольный сигнал несущего колебания. Данный сигнал складывается с постоянной составляющей от блока Constant, значение которого регулируется в зависимости от ступени многоуровневого инвертора. Треугольный и синусоидальный сигналы сравниваются оператором сравнения Relational Operator, сигнал с которого поступает на силовой ключ. Если Синусоидальный сигнал больше треугольного, то оператором генерируется логическая единица, в противном случае – логический ноль. Чтобы исследовать только воздействие той или иной стратегии исключим влияние IGBT, которые заменим обычными силовыми ключами, которые представлены блоками Ideal Switch [15].

Выходное напряжение, полученное в результате моделирования, отличается от обычного ступенчатого напряжения наличием широтно-импульсной модуляции (рисунок 4). Следует заметить что, чем ближе импульсы к границе перехода на высокий уровень, тем шире импульсы и наоборот.

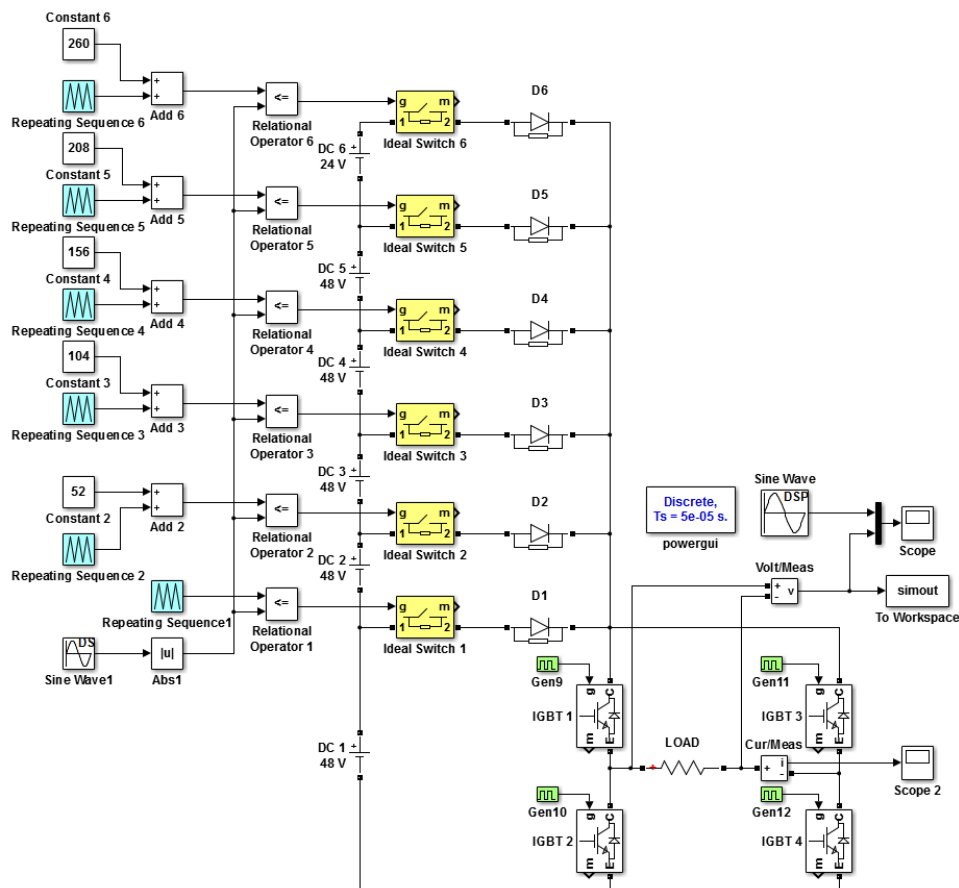


Рисунок 3 – Модель 6-уровневого инвертора для исследования методик коммутации

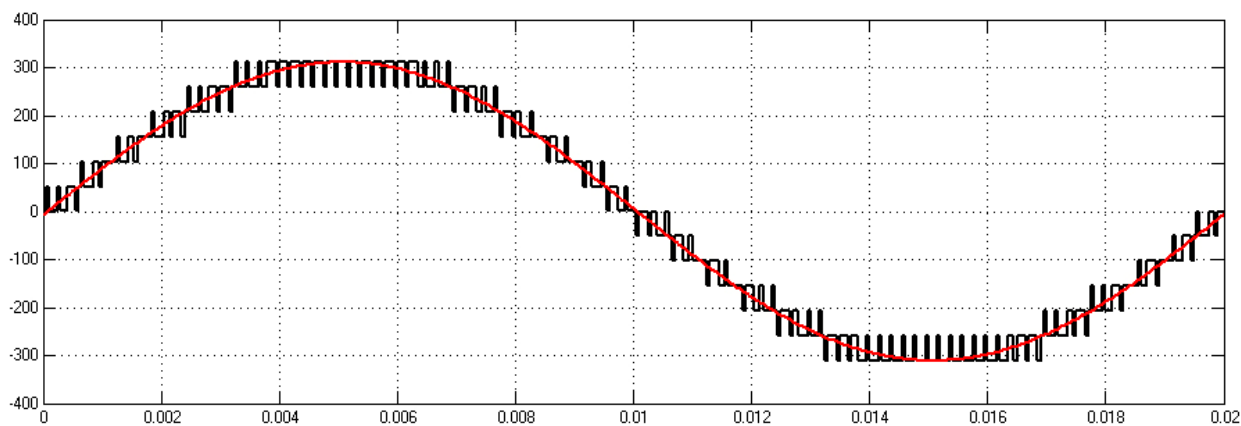


Рисунок 4 – Осциллограмма выходного напряжения

Для сравнения стратегий важно значение коэффициент нелинейных искажений, который с помощью блока *powergui* автоматически рассчитывается посредством быстрого преобразования Фурье. Данные для стратегий занесены в таблицу 1.

Как можно заметить, коэффициенты нелинейных искажений довольно большие, связанных с наличием высоких частот в выходном напряжении инвертора. Поэтому данные стратегии применяются с фильтром низких частот. Чтобы не исказить низкие частоты необходимо выбрать фильтр с гладкой АЧХ на частотах полосы пропускания [16, 17]. Используем типовой фильтр Баттерворта третьего порядка с частотой среза 1000 Гц [18]. Для моделирования фильтр

Баттерворта построен при помощи блока Analog Filter Design, где задаются порядок фильтра и частота среза 6283,2 рад/с. Результаты моделирования занесены в таблицу 2.

Таблица 1 – Коэффициенты нелинейных искажений различных методик без фильтрации

| Период | Частота | ПФ ШИМ | ЧПФ ШИМ | ШИМ с НН | ШИМ с РЧ |
|--------|---------|--------|---------|----------|----------|
| 0,0013 | 769,2   | 9,3    | 10,05   | 14,24    | 9,27     |
| 0,0012 | 833,3   | 9,75   | 9,6     | 15,65    | 9,54     |
| 0,0011 | 909,1   | 8,78   | 7,91    | 13,8     | 9,7      |
| 0,001  | 1000    | 8,38   | 10,08   | 15,12    | 9,46     |
| 0,0009 | 1111,1  | 8,99   | 9,15    | 14,73    | 7,86     |
| 0,0008 | 1250    | 8,98   | 9       | 14,39    | 8        |
| 0,0007 | 1428,6  | 8,94   | 9,22    | 14,3     | 8,92     |
| 0,0006 | 1666,7  | 9,14   | 9,08    | 14,4     | 9,12     |
| 0,0005 | 2000    | 8,27   | 8,98    | 15,05    | 8,19     |
| 0,0004 | 2500    | 8,71   | 9,01    | 14,29    | 8,65     |
| 0,0003 | 3333,3  | 9,01   | 9,17    | 14,8     | 8,96     |
| 0,0002 | 5000    | 9,86   | 9,64    | 14,6     | 9,22     |
| 0,0001 | 10000   | 13,1   | 13,3    | 21,11    | 11,42    |

Таблица 2 – Коэффициенты нелинейных искажений различных методик после фильтрации

| Период | Частота | ПФ ШИМ | ЧПФ ШИМ | ШИМ с НН | ШИМ с РЧ |
|--------|---------|--------|---------|----------|----------|
| 0,0013 | 769,2   | 7,04   | 7,51    | 11,49    | 6,98     |
| 0,0012 | 833,3   | 6,95   | 6,42    | 11,8     | 6,93     |
| 0,0011 | 909,1   | 6,08   | 4,44    | 9,69     | 7,8      |
| 0,001  | 1000    | 5,85   | 7,1     | 9,6      | 7,23     |
| 0,0009 | 1111,1  | 4,88   | 5,17    | 7,98     | 4,44     |
| 0,0008 | 1250    | 4,33   | 5,26    | 6,37     | 4,38     |
| 0,0007 | 1428,6  | 3,21   | 4,59    | 4,84     | 3,75     |
| 0,0006 | 1666,7  | 2,63   | 3,79    | 3,19     | 3,05     |
| 0,0005 | 2000    | 2,28   | 2,31    | 2,11     | 2,54     |
| 0,0004 | 2500    | 1,65   | 1,43    | 2,35     | 2        |
| 0,0003 | 3333,3  | 1,4    | 1,67    | 2        | 1,38     |
| 0,0002 | 5000    | 1,74   | 1,7     | 2,47     | 1,37     |
| 0,0001 | 10000   | 4,18   | 4,09    | 3,63     | 1,85     |

На основе результатов моделирования построен график зависимости коэффициента нелинейных искажений от частоты несущего колебания. На данном графике пунктирными линиями показаны результаты моделирования стратегий без фильтрации, а сплошными – моделирование с ФНЧ.

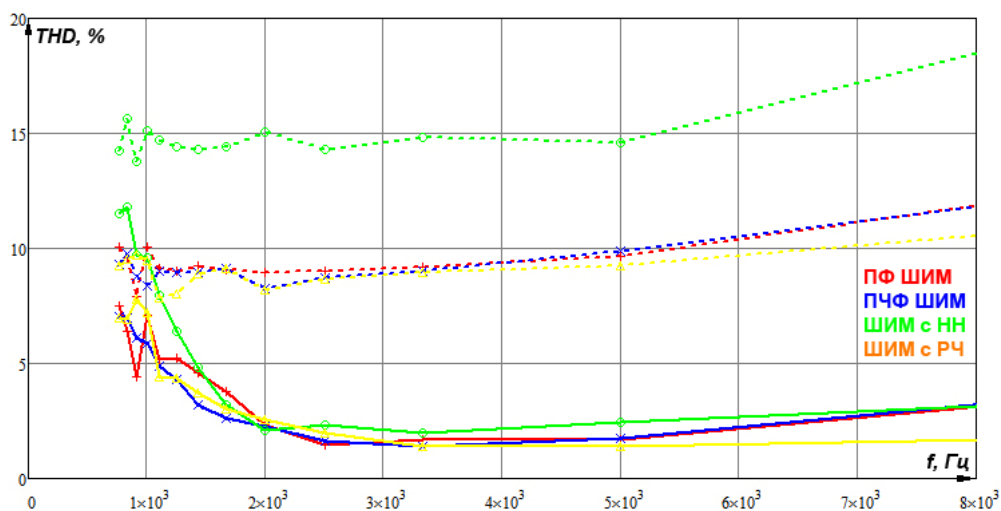


Рисунок 5 – График зависимости коэффициента нелинейных искажений от частоты несущего колебания

Как видно из рисунка 5, для всех стратегий при низких значениях частотного коэффициента  $k_f$  наблюдается высокое значение коэффициента нелинейных искажений, а с увеличением частоты несущих данный коэффициент спадает до определенного минимума и затем незначительно увеличивается. При этом наиболее низкий коэффициент нелинейных искажений наблюдается при использовании стратегии коммутации на базе ШИМ с РЧ. При реализации силового инвертора все же не следует выбирать большую частоту, поскольку с частотой возрастают потери энергии на переходные процессы. Также следует иметь в виду, что коммутация осуществляется силовыми ключами, например, IGBT или MOSFET, переходные процессы в которых при высокой частоте переключений могут вывести их из строя [19, 20].

**Заключение.** В статье исследованы методики коммутации ступеней многоуровневого инвертора на базе широтно-импульсной модуляции. По результатам моделирования в среде Simulink получены зависимости коэффициента нелинейных искажений от частоты для различных стратегий без фильтрации выходного напряжения инвертора, и с ФНЧ. Выяснено, что наиболее низкий коэффициент нелинейных искажений можно получить при использовании стратегии коммутации на базе ШИМ с различными частотами для ступеней.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Rodríguez J., Jih-Sheng Lai and Fang Zheng Peng. Multilevel inverters: A survey of topologies, controls and applications // IEEE Trans. Ind. Electron. – 2002. – vol.49(4). – p. 724-738.
- [2] Singh B., Mittal N., Verma K. S., Singh D., Singh S. P., Dixit R., Singh M. and Baranwal A. Multi-level inverter: a literature survey on topologies and control strategies // International Journal of Reviews in Computing. – 2012. – vol. 10. – p.1-16.
- [3] Govindaraju C., Baskaran K. Optimized Hybrid Phase Disposition PWM Control Method for Multilevel Inverter // International Journal of Recent Trends in Engineering. – 2009. – vol. 1(3). – p.129-134.
- [4] Arun V., Shanthi B., Natarajan S. P. Performance Analysis of Multicarrier SPWM Strategies for Three Phase Z - Source Seven Level Cascaded Inverter // International Journal of Modern Engineering Research. – 2013. – vol.3, issue.1. – p. 204-211.
- [5] Johnson Uthayakumar R., Natarajan S.P., Padmathilagam.V. A New Three Phase Seven Level Asymmetrical Inverter with Hybrid Carrier and Third Harmonic Reference // International Journal of Modern Engineering Research. –2012. – Vol.2, Issue.4. – p.1814-1818.
- [6] Seyezhai R., Mathur B.L. Implementation and Control of Variable Frequency ISPWM Technique for an Asymmetric Multilevel Inverter // European Journal of Scientific Research. – 2010. – Vol.39, №4. –p. 558-568.
- [7] Seyezhai R. Investigation of Performance Parameters For Asymmetric Multilevel Inverter Using Hybrid Modulation Technique // International Journal of Engineering Science and Technology. – 2011. – 3(12). – p. 8430-8443.
- [8] Jeevananthan S., Nandhakumar R. and Dananjayan P. Inverted Sine Carrier for Fundamental Fortification in PWM Inverters and FPGA Based Implementations // Serbian Journal of Electrical Engineering. – 2007. – Vol. 4, №2. – p. 171-187.
- [9] Seyezhai R., Mathur B.L. Hybrid Multilevel Inverter using ISPWM Technique for Fuel Cell Applications // International Journal of Computer Applications. – 2010. – Vol. 9, №1.
- [10] Selva Kumar R., Karthick V., Arun D. A Review on Dead-Time Effects in PWM Inverters and Various Elimination Techniques // International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering. – 2014. – №1 (4). – p. 385 – 387.
- [11] Moldakhmetov S., Issembergenov N., Kasymov A. Multilevel inverter based on level switch and H-bridge // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. – 2015. – vol.10(16). – p. 6884-6887.
- [12] Espinosa E.E., Espinoza J.R., Melin P.E., Ramirez R.O., Felipe Villarroel, Munoz J.A., Luis Moran. A New Modulation Method for a 13-Level Asymmetric Inverter Toward Minimum THD // IEEE Transactions on Industry Applications. – 2014. – №3. – p. 1924-1933.
- [13] Taissariyeva K., Issembergenov N. The research of the solar panels-commutator-inverter-load system with the pulse-amplitude control // SPIE Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments. – 2014.
- [14] Chakravarty S. Technology and Engineering Applications of Simulink. – InTech, 2012. – pp. 266.
- [15] Debnath S., Narayan R. THD Optimization in 13 level photovoltaic inverter using Genetic Algorithm // International Journal of Engineering Research and Applications. – 2012. – №3. – p. 385-389.
- [16] Gupta A., Tripathi G. Ch. Design and Analysis of Low Pass FIR & IIR Filter and Find Optimum Result Using Neural Network // Global Journal of Researches in Engineering. –2010. –Vol. 10, Issue 7. – p. 61-64.
- [17] Burlaka V.V., Gulakov S.V., Bublik S.K., Dyachenko M.D. Shunt Active Filter With Improved Suppression Of High-Order Current Harmonics // Visnik Priazovskogo Derzhavnogo Technichnogo Univercitetu. – 2009. – Vol. 19. – p. 237 – 241.
- [18] Моин В.С. Стабилизированные транзисторные преобразователи. М.: Энергоатомиздат. – 1986. – С. 81 – 112.
- [19] Kulkarni V.V., Swami L.B. MOSFET Based High Frequency Inverter for Induction Heating Equipment Using MATLAB/Simulink Environment // International Journal Of Innovations In Engineering Research And Technology. –2014. – Vol. 1, Issue 1.
- [20] Rajesh J., Deepak S.V., Ramjee S.V. High-Frequency Resonant Matrix Converter using IGBT-Based Bidirectional Switches for Induction Heating // Int. Journal of Engineering Research and Applications. – 2014. – Vol. 4, Issue 2. – p. 451-457.

## REFERENCES

- [1] Rodríguez J., Jih-Sheng Lai and Fang Zheng Peng. Multilevel inverters: A survey of topologies, controls and applications. *IEEE Trans. Ind. Electron.*, **2002**, vol.49(4), p. 724-738 (in Eng.).
- [2] Singh B., Mittal N., Verma K. S., Singh D., Singh S. P., Dixit R., Singh M. and Baranwal A. Multi-level inverter: a literature survey on topologies and control strategies. *International Journal of Reviews in Computing*, **2012**, vol. 10, p.1-16 (in Eng.).
- [3] Govindaraju C., Baskaran K. Optimized Hybrid Phase Disposition PWM Control Method for Multilevel Inverter. *International Journal of Recent Trends in Engineering*, **2009**, vol.1(3), p.129-134(in Eng.).
- [4] Arun V., Shanthi B., Natarajan S. P. Performance Analysis of Multicarrier SPWM Strategies for Three Phase Z - Source Seven Level Cascaded Inverter. *International Journal of Modern Engineering Research*, **2013**, vol.3, issue.1, p. 204-211 (in Eng.).
- [5] Johnson Uthayakumar R., Natarajan S.P., Padmathilagam.V. A New Three Phase Seven Level Asymmetrical Inverter with Hybrid Carrier and Third Harmonic Reference. *International Journal of Modern Engineering Research*, **2012**, Vol.2, Issue.4, p.1814-1818 (in Eng.).
- [6] Seyezhai R., Mathur B.L. Implementation and Control of Variable Frequency ISPWM Technique for an Asymmetric Multilevel Inverter. *European Journal of Scientific Research*, **2010**, Vol.39, №4, p. 558-568(in Eng.).
- [7] Seyezhai R. Investigation of Performance Parameters For Asymmetric Multilevel Inverter Using Hybrid Modulation Technique. *International Journal of Engineering Science and Technology*, **2011**, 3(12), p. 8430-8443(in Eng.).
- [8] Jeevananthan S., Nandhakumar R. and Dananjayan P. Inverted Sine Carrier for Fundamental Fortification in PWM Inverters and FPGA Based Implementations. *Serbian Journal of Electrical Engineering*, **2007**, Vol. 4, №2, p. 171-187 (in Eng.).
- [9] Seyezhai R., Mathur B.L. Hybrid Multilevel Inverter using ISPWM Technique for Fuel Cell Applications. *International Journal of Computer Applications*. **2010**, – Vol. 9, №1(in Eng.).
- [10] Selva Kumar R., Karthick V., Arun D. A Review on Dead-Time Effects in PWM Inverters and Various Elimination Techniques. *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*. **2014**, №1 (4), pp. 385 – 387 (in Eng.).
- [11] Moldakhmetov S., Issembergenov N., Kasymov A. Multilevel inverter based on level switch and H-bridge. *ARPJ Journal of Engineering and Applied Sciences*. **2015**, vol.10(16), p. 6884-6887 (in Eng.).
- [12] Espinosa E.E., Espinoza J.R., Melin P.E., Ramirez R.O., Felipe Villarroel, Munoz J.A., Luis Moran. A New Modulation Method for a 13-Level Asymmetric Inverter Toward Minimum THD. *IEEE Transactions on Industry Applications*, **2014**, №3, p. 1924-1933 (in Eng.).
- [13] Taissariyeva K., Issembergenov N. The research of the solar panels-commutator-inverter-load system with the pulse-amplitude control. *SPIE Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments*, **2014** (in Eng.).
- [14] Chakravarty S. Technology and Engineering Applications of Simulink. – *InTech*, **2012**, pp. 266 (in Eng.).
- [15] Debnath S., Narayan R. THD Optimization in 13 level photovoltaic inverter using Genetic Algorithm. *International Journal of Engineering Research and Applications*, **2012**, №3, p. 385-389 (in Eng.).
- [16] Gupta A., Tripathi G. Ch. Design and Analysis of Low Pass FIR & IIR Filter and Find Optimum Result Using Neural Network. *Global Journal of Researches in Engineering*, **2010**, Vol. 10, Issue 7, p. 61-64 (in Eng.).
- [17] Burlaka V.V., Gulakov S.V., Bublik S.K., Dyachenko M.D. Shunt Active Filter With Improved Suppression Of High-Order Current Harmonics. *Visnik Priazovskogo Derzhavnogo Technichnogo Universitetu*, **2009**, Vol. 19, p. 237 – 241(in Eng.).
- [18] Moyn V.S. Stabilizirovannyye tranzistornyye preobrazovateli. *M.: Energoatomizdat*, **1986**, pp. 81-112 (in Russ.).
- [19] Kulkarni V.V., Swami L.B. MOSFET Based High Frequency Inverter for Induction Heating Equipment Using MATLAB/Simulink Environment. *International Journal Of Innovations In Engineering Research And Technology*, **2014**. Vol. 1, Issue 1(in Eng.).
- [20] Rajesh J., Deepak S.V., Ramjee S.V. High-Frequency Resonant Matrix Converter using IGBT-Based Bidirectional Switches for Induction Heating. *Int. Journal of Engineering Research and Applications*. **2014**, Vol. 4, Issue 2, p. 451-457 (in Eng.).

## ЖАЗЫҚТЫҚ-ИМПУЛЬСТІК МОДУЛЯЦИЯ НЕГІЗІНДЕ КӨПДЕНГЕЙЛІ ИНВЕРТОР САТЫЛАРЫНЫҢ ҚОСЫЛУ ӘДІСТЕМЕЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

С.А. Орынбаев<sup>1</sup>, С.С. Молдахметов<sup>2</sup>, Б.К. Байбутанов<sup>2</sup>, М.Б. Ешметов<sup>1</sup>, Д.С. Ауесжанов<sup>1</sup>

(<sup>1</sup>М.Х. Дулати атындағы Тараз мемлекеттік университеті, Тараз

<sup>2</sup>Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық зерттеу университеті, Алматы)

**Түйін сөздер:** көп деңгейлі инвертор, ЖИМ, коммутация бұрышы, сызықты емес бұрмалау коэффициенті, Simulink.

**Аннотация.** Берілген мақалада көпдеңгейлі инвертор сатыларының қосылу әдістемесі зерттелген. Бұл әдістемелер қосылулар үшін жазықты-импульстік модуляцияны қолданады. Ол эталондық синусоидты сигналмен үшбұрыштық импульстардың тізбегін салыстырумен алынады. Мақалада басқарушы импульстарды алу алгоритмы суреттелген және әрбір стратегиялардың инвертор шығыс кернеуінің гармоникалық құраушылары коэффициентін азайтатыны зерттелген. Ол үшін Simulink ортасында әртүрлі жиілік стратегиясына модельдеу жүргізілді.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 147–152

UDC 517.956.32

**CRITERIA VOLTERRA OF NONLOCAL BOUNDARY VALUE  
PROBLEM OF THE WAVE EQUATION****M.B. Saprygina, A.Sh. Shaldanbayev, I.O. Orazov, U.S. Bayseytova**

South Kazakhstan state university, Shymkent

**Keywords:** wave equation, not local regional task, volterrov operator, formula Gaala, formula of a trace of the operator.

**Abstract:** In the work it is established criteria of a Volterra of the return operator of nonlocal boundary value problem of the wave equation, by means of Gaal's formula, and Nersesyan and Lidsky's theorems.

УДК 517.956.32

**ТОЛҚЫН ТЕНДЕУІНІҢ ШАРТАРАПТЫ ЕСЕБІНІҢ  
ВӨЛТЕРЛІ БОЛУЫНЫҢ ҮЗІЛДІ – КЕСІЛДІ ШАРТЫ****М.Б. Сапрыгина, А.Ш. Шалданбаев, И.О. Оразов, У.С. Байсейтова**

ОҚМУ, Шымкент қ, Қазақстан

**Түйін сөздер:** толқын теңдеуі, шартарапты есеп, вөлтерлі оператор, әсіре үзіксіздік.

**Аннотация.** Бұл еңбекте Гаалдың формуласы мен Нерсесян, Лидскийдің теоремалары арқылы, толқын теңдеуінің шартарапты есебіне сәйкес кері оператордың вөлтерлі болуының үзілді-кесілді шарты табылды.

**1. Кіріспе.** Гиперболалық теңдеулердің шекаралық есептері өте аз зерттелген, мұның, бір себебі, Ж. Адамардың [1] әйгілі пікірі болса керек, оның байқауынша гиперболалық теңдеулерге бастапқы есептер, ал эллипстік теңдеулерге шекаралық есептер жайлы қойылған. Бастапқы есептерлің вөлтерлігі белсененедені белгілі, сондықтан, мұндай есептердің спектралдік таралымы жоқ десек-те болады. Осы орайда Хэрковтің зерттеушісі М. С Лившицтің [2] еңбектерін атап өткенді жөн көрдік, сол сияқты М.С. Бродскийдің еңбектерін [3] айтып кетейік.

Олар, өз еңбектерінде, вөлтерлі оператордың үшбұрышты мәделін жасады. Бұл мәделдің кемшілігі қосымша мүшесінің болуында, сондықтан, бұл теория кең тарамды.

Вөлтерлі операторды индефинитті кеңістікте жіктеуге болатын Ә.Ш. Шалданбаевтың [4] еңбектерінен көруге болады.

Гурса есебі мен Коши есебі толқын теңдеуінің классикалық есептері қатарына жатады. Сол сыйақты Дарбудың есебі-де солардың қатарында. Бұл есептер қазіргі заман әдістері мен ұғымдары тұрғысынан Т.Ш. Калменовтың [5] кітабында сараланған, олардың вөлтерлі болатыны көрсетелген. Осы орайда, толқын теңдеуінің барлық жайлы есептері вөлтерлі екен деген ой туындайды, осыған жауап ретінде А.М. Нахушев [6] пен Т.Ш. Калменовтың [7], [8] еңбектері пайда болды. Сонымен бірге, Бияров Б.Н. мен Т.Ш. Калменовтың [9] еңбегін айта кетейік. Өзінің осы бағыттағы еңбектерін Т.Ш. Калменов [10] еңбегінде бір арнаға тоғыстыруға әрекет жасады. Сондай – ақ М.А. Садыбековтың [11], [12] екі еңбегі осы бағытқа арналған.

Десек-те, бұл саланы толық зерттеліп бітті деп айта алмаймыз. Айтпақшы, жоғарыдағы зерттеулердің барлығы характеристикалық үшбұрыш ішінде жүргізілген, мұның басты себебі, авторлардың араластекті теңдеулер теориясының мамандары болғанынан, басқа себеп жоқ. Толқын тең теңдеуінің біргеілік аймағы характеристикалық тіктөрт бұрыш екені белгілі, сондықтан, оның екінші жағы неге бос қалды деген заңды сұрақ туындайды. Міне, осы жайлар, біздің толқын теңдеуінің шартарапты (нелокольный) есебімен айнасуымызға түрткі болды, және бұған негіз-де жоқ емес еді [13]. Біздің түпкі мақсатымыз, шартарапты толқын операторының спектралдік таралымен алу, ал әзірше, оның вөлтерлі болуының үзілді кеселді шартын анықтаумен шектелмекпіз.

Бұл еңбекте толқындық теңдеудің шартарапты шекаралық есебінің операторы қай кезде вөлтерлі болатынын үзілді - кесілді анықталады.

Зерттеу барысында Brislawn C. [14], Лидский В.Б. [15], және Нерсян А.Б. [16] еңбектері пайдаланылады.

**Есептің қойылуы.**  $\Omega$  – дегеніміз  $XOY$  жазықтығында жатқан қабырғалары

AB:  $y = 0, 0 \leq x \leq 1$ ; BC:  $x = 1, 0 \leq y \leq 1$ , CD:  $y = 1, 0 \leq x \leq 1$ ;

DA:  $x = 0, 0 \leq y \leq 1$ , болатын тік төртбұрыш болсын делік. Осы тік төртбұрыш ішінде,

$$Lu = u_{xy} = f(x, y), (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

$$u|_{AB} = \alpha u_{CD}, u|_{AD} = \beta \cdot u|_{BC} \quad (2)$$

шартарапты есепті қарастырамыз, мұндағы,

$\alpha$  мен  $\beta$  бірден өзгеше кезкелген комплекс сандар, яғни

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) \neq 0. \quad (3)$$

Жоғарыдағы, [13] еңбекте, мынадай, теорема дәлелденген

**Теорема** Егер (3) шарт орындалса, онда кез-келген  $f(x, y) \in C(\bar{\Omega})$  үшін (1)+(2) есептің біргеілі шешімі бар, және ол  $C_{1,1}^2(\Omega)$  класына тиісті, сонымен бірге, ол, мына

$$\|u\|_1 \leq k\|f\|_0 \quad (4)$$

теңсіздікті қанағаттандырады, мұндағы  $\|\cdot\|_1$  –Соболевтің нормасы, ал  $\|\cdot\|_0$  – кәдімгі  $L_2$  норма, ал  $K$ -дегеніміз  $u(x, y)$  пен  $f(x, y)$  -ке тәуелсіз тұрақты шама. Сондай –ақ

$$u(x, y) = L^{-1}f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

мұндағы, (5)

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(x-\xi) + \frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta) + \theta(x-\xi)\theta(y-\eta),$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x > 0 \\ 0, & \text{егер } x \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Жоғарыдағы, [4] теңсіздіктен Реллихтың ([17], с.183), немесе, Соболевтың ([18], 1066) теоремасы бойынша, (5) оператордың  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде әсіре үздіксіз (вполне непрерывный) екенін көреміз, ал мұндай операторлардың спектрі нөл мен онан өзгеше меншікті мәндерден тұратын белгілі, кейде олардың болмауы –да мүмкін, ондай сәтте, ол операторды вөлтерлі дейді. Бұл атау Италияның көрнекті математигі Вөлтерраның құрметіне қойылған.

**Анықтама.** Нөлден өзгеше меншікті мәндері жоқ, әсіре үздіксіз операторды вөлтерлі оператор деп атайды.

**2.Есептің қойылуы.** Мына,

$$u(x, y) = L^{-1}f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad \text{мұндағы (5)}$$

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha}\theta(x-\xi) + \frac{\beta}{1-\beta}\theta(y-\eta) + \theta(x-\xi)\theta(y-\eta),$$

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{егер } x > 0 \\ 0, & \text{егер } x \leq 0 \end{cases} \quad (6)$$

интегралдық оператор қай кезде  $L^2(\Omega)$  кеңістігінде вөлтерлі болады?

### 3.Зерттеу әдістері.

Жоғарыдағы, (5), (6) формулаларын  $L^{-1}$  операторының Гильберт –Шмидт класына тиісті екенін байқаймыз, яғни, мына,

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 K(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) dx dy d\xi d\eta < \infty$$

шарт орындалады (163.170). Онда  $L^{-2} = (L^{-1})^2$  операторы  $L^2(\Omega)$  – кеңістігінде ядролық оператор, сондықтан, оған В.В Лидскийдің [15] теоремасын қолдануға болады.

Теорема [15]. Егер  $A$  операторы Гильберттің  $A$  кеңістігінде ядролы болса, онда осы кеңістіктің кезкелген  $\varphi_i (i=1,2,\dots)$  ортанормаланған базисы үшін, мына,

$$S_p A = \sum_{n=1}^{\infty} (A \varphi_n, \varphi_n)_H = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(A),$$

теңдік орындалады, мұндағы  $\lambda_n(A)$  – дегеніміз  $A$  операторының меншікті мәндері, егер олар жоқ болса яғни  $A$ - вөлтерлі болса, онда

$$SpA = 0.$$

Сондай-ақ, егер  $A$  ядролы операторы, Гильберт –Шмидт класының, мынадай,

$$(Kf)(x) = \int_{\Omega} K(x, y) f(y) dy,$$

$$(Gf)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dy,$$

екі операторының композициясы болса, яғни  $A = K \cdot G$  онда оның ізі Гаалдың [14] формуласы арқылы табылатыны белгілі.

Біздің жағдайда

$$K(x, y; \xi, \eta) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta(x-\xi) + \frac{\beta}{1-\beta} \theta(y-\eta) + \theta(x-\xi)\theta(y-\eta),$$

Демек

$$K(x, y; \xi^*, \eta^*) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta(x-\xi^*) + \frac{\beta}{1-\beta} \theta(y-\eta^*) + \theta(x-\xi^*)\theta(y-\eta^*),$$

$$K(\xi^*, \eta^*; x, y) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta(\xi^*-x) + \frac{\beta}{1-\beta} \theta(\eta^*-y) + \theta(\xi^*-x)\theta(\eta^*-y)$$

$$K(x, y; \xi^*, \eta^*) - K(\xi^*, \eta^*; x, y)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left\| \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta(x-\xi^*) + \frac{\beta}{1-\beta} \theta(y-\eta^*) + \theta(x-\xi^*)\theta(y-\eta^*) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 - \frac{\beta}{1-\beta} \theta(\xi^*-x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \theta(y-\eta^*)\theta(\xi^*-x) \frac{\alpha}{1-\alpha} \left( \frac{\beta}{1-\beta} \right)^2 \theta(\eta^*-y) + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \theta(x-\xi^*)\theta(\eta^*-y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \theta(\xi^*-x)\theta(\eta^*-y) \right\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left\| \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta(\chi - \xi^*) + \frac{\beta}{1-\beta} \theta(y - \eta^*) + \theta(\chi - \xi^*) \cdot \theta(y - \eta^*) \right\| \\
&= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left\| \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta(\xi^* - x) + \frac{\beta}{1-\beta} \theta(\eta^* - y) + \theta(x - \xi^*) \cdot \theta(\eta^* - y) \right. \\
&\quad \left. + \theta(\xi^* - x) \cdot \theta(\eta^* - y) \right\| \\
&= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left\| \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta} + \theta(\chi - \xi^*) + \theta(\xi^* - x) \right. \\
&\quad \left. + \theta(\xi^* - x) \right\| = \\
&= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left\| \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} + \frac{\alpha}{1-\alpha} + \frac{\beta}{1-\beta} + 1 \right\| \\
&= \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)(1-\beta)} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} + 1 \right) \left( \frac{\beta}{1-\beta} + 1 \right) = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2}
\end{aligned}$$

$K^2(x, y; \xi, \eta)$  – арқылы, мына,  $L^{-2}$  - оператордың ядросын белгілесек, онда

$$K^2(x, y; \xi, \eta) = \int_0^1 \int_0^1 K(x, y, \xi^*, \eta^*) \cdot K(\xi^*, \eta^*, x, y) d\xi^* d\eta^* = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2},$$

боларын көреміз.

Егер  $L^{-1}$  операторы вөлтерлі болса, онда  $L^{-2}$  операторы-да вөлтерлі, онда Лидскийдің [15] теоремасы бойынша,

$$\text{tr} L^{-2} = \frac{\alpha\beta}{(1-\alpha)^2(1-\beta)^2} = 0,$$

яғни  $\alpha \cdot \beta = 0$ .

Керісінше,  $\alpha\beta = 0$  болсын деп жорылық, онда  $\alpha = 0, \beta = 0$  болған сәтте, Гурсаның вөлтерлі есебін аламыз, ал  $\alpha = 0, \beta \neq 0$ ;  $\alpha \neq 0, \beta = 0$  болған сәттерде,  $L^{-1}$  операторының вөлтерлі екеніне Нерсесянның [16] немесе ([7], с. 73), теоремасы арқылы көз жеткіземіз.

#### 4.Зерттеу нәтижесі.

**Теорема .** Егер

$$(1-\alpha)(1-\beta) \neq 0$$

болса, онда мына,

$$\begin{aligned}
Lu &= u_{xy} = f(x, y), (x, y) \in \Omega; \\
u|_{AB} &= \alpha u_{CD}, u|_{AD} = \beta \cdot u|_{BC}
\end{aligned}$$

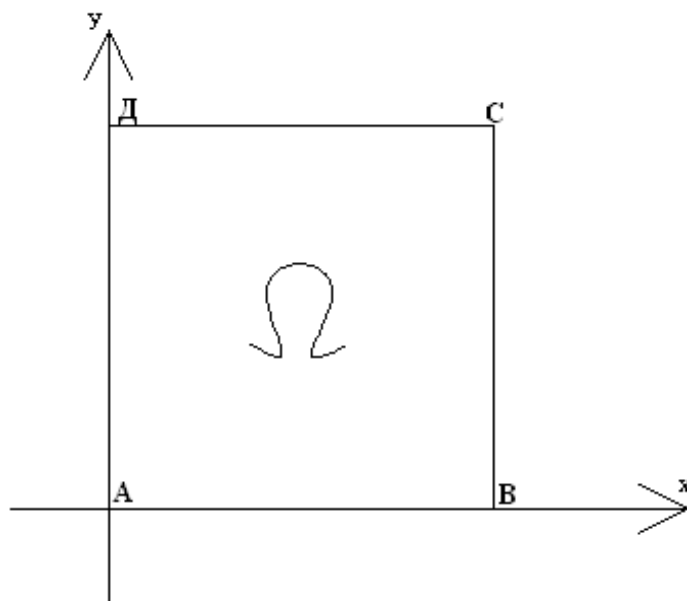
шекаралық есептің вөлтерлі болуы үшін, мына,

$$\alpha \cdot \beta = 0$$

шарттың орындалуы қажетті, әрі, жеткілікті.

#### 5.Талқысы.

Толқын теңдеуінің шекаралық есептерін функционалдық әдістермен зерттеген кезде, оларға сәйкес кері операторлардың әсіре үзіксіз боларын Реллихтың теоремасы бойынша әпсәтте дәлелдеуге болады. Осы сәтте спектр туралы мәселе туындайды, сондықтан вөлерлілік белгісі аса маңызды болып саналады.



### ӘДЕБИЕТ

- [1] Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений частными производными. – М., Наука, 1978. -352 с.
- [2] Лившиц М.С. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов. Матем. сб. 34(76): 1(1954). 145-199.
- [3] Бродский М.С. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М., Наука, 1909г.
- [4] Шалданбаев А.Ш. Спектральные разложения корректных- некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. – монография, 193 с., LAP LAMRET Academic Publishing. [http; dob. d-nb. Dl. Emailinf@lappyblishing.com](http://dob.d-nb.Dl.Emailinf@lappyblishing.com), Saarbruchen 2011.Germanu.
- [5] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993, 327 с.
- [6] Нахушев А.М. Об одном классе линейных уравнений задач для гиперболического и смешного типов уравнений второго порядка. Нальчик, Эльбурс. 1992, 155с.
- [7] Кальменов Т.Ш. О спектре одной самосопряженной задачи для волнового уравнения. Вестник А.Н Каз. 1982. №2, с.63-66.
- [8] Кальменов Т.Ш. Спектр краевых задачи со смещением для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1983, т19. №1. с.75-78.
- [9] Бияров Б.Н., Кальменов Т.Ш. О нелокальной вольнерровой задаче для гиперболического уравнения. Известия АН Каз ССР, сер. физ.-математ. 1988. №5. с.13-16.
- [10] Кальменов Т.Ш. О регулярных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. 1981. т 17. №6. с.1105-1121.
- [11] Садыбеков М.И, О задаче Дирихле для волнового уравнения, Диффенц. уравнения. Функцион. анализ и приложения Алма -Ата Каз. ГУ, 1988. т. 17. №6, с. 61-70.
- [12] Садыбеков М.И, Кальменов Т.Ш. О задаче Дирихле и нелокальных краевых задачах для волнового уравнения, Диффенц. уравнения, 1990, т.26, №1, с. 60-65.
- [13] Мелдебекова С., Шалданбаев А.Ш. О регулярной разрешимости одной нелокальной краевой задачи волнового уравнения, Наука и образования ЮК, 2005 №6(46), с. 105-109.
- [14] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer. Nath. Soc, 1988, v.104, №4, P.1181-1190.
15. Лидский В.Б. Несамосопряженные операторы имеющие след. Доклады АН СССР, 1959, т. 105, №3. P.485-488.
16. Нерсесян А.Б. К теории интегральных уравнений типа Вольтера. Доклады АН СССР. 1964. т. 155, №5. P.1049-1051.
17. Мизохата С. Теория уравнений с частным производными, М. Мир, 1977, с. 504.
18. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике, М., Наука, 1988.

### REFERENCES

- [1] Hadamard Ge. Cauchy problem for the linear equations private to derivatives. - M, Science, 1978, - 352p.
- [2] Livshits M. S. About spectral decomposition of linear not self-conjugate operators. Matem. сб. 34(76): 1(1954). 145-199
- [3] Brodsky of M. S. Triangle and Jordan representation of linear operators, M, Nauka1909g.

- [4] Shaldanbaev A.Sh. Spectral Decomposition of correct-incorrect initial boundary value problems for some classes of differential equations, Germanu, Saarbruchen: LAP LAMRET Academic Publishing. [http; dob. d-nb. Dl. Emailinfo @ lappublishing com](http://dob.d-nb.Dl.Emailinfo@lappublishing.com), 2011 193p.
- [5] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type, Shymkent, Gylm, 1993, 327s.
- [6] Nakhushev A.M. About one class of the linear balanced tasks for hyperbolic and ridiculous types the equation of the second order. Nalchikh, Эльбурс. 1992, 155s.
- [7] Kalmenov T.Sh. About a range of one interfaced task for the wave equation, Vesnik A.N Kaz. 1982, No. 2, page 63-66.
- [8] Kalmenov T.Sh. The spectrum of the boundary value problem with shift for the wave equation, Diffents. .1983 equation, V.19, №1, p.75-78.
- [9] Biyarov B. N., Kalmenov T.Sh. About nonlocal boundary value problem for the hyperbolic equation, AN News Kaz SSR, is gray. physical-matemat, 1988, No. 5, page 13-16.
- [11] Kalmenov T.Sh. About regular boundary value problem for the wave equation, Diffents. equations. 1981, t 17, No. 6, page 1105-1121.
- [12] Sadybekov M. About Dirichlet's task for for the wave equation, Diffents. equations. Funktsion. the analysis and on appendices Alma-Ata Kaz. GU, 1988, V 17, No. 6, page 61-70.
- [13] Sadybekov M., Kalmenov T.Sh. About Dirichlet's task and the nonlocal boundary value problem for the wave equation, Diffents. equations, 1990, t.26, No. 1, page 60-65.
- [14] Meldebekova S., Shaldanbayev A.Sh. About regular resolvability of one nonlocal boundary value problem of the wave equation, Science and formations of YuK, 2005 No. 6(46), page 105-109.
- [15] Brislown C. Kernels of trace class operators, Proc. Amer 7 Nath. Soc, 1988, v.104, No. 4, P.1181-1190.
- [16] Lidsky V.B. Nonselfadjoint operators have trail Reports of the USSR, 1959, Vol. 105, №3, P.485-488.
- [17] Nersesyan A.B. To the theory of the integrated equations like Voltaire, Reports of A.N Soviet Socialist Republic, 1964, t. 155, No. 5, P.1049-1051.
- [18] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives, M. Mir, 1977, page 504.
- [19] Sobolev S. L. Some applications of the functional analysis in mathematical physics, M, Science, 1988.

## КРИТЕРИИ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

М.Б. Сапрыгина, А.Ш. Шалданбаев, И.О. Оразов, У.С. Байсейтова

Южно-Казахстанский государственный университет им.М.Ауезова, г.Шымкент

**Ключевые слова:** волновое уравнение, нелокальная краевая задача, вольтерровый оператор, формула Гаала, формула следа оператора.

**Аннотация.** В настоящей работе установлен критерии вольтерровости обратного оператора нелокальной краевой задачи волнового уравнения с помощью формулы Гаала и теорем Нерсесяна и Лидского.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 153–158

ON AN INEQUALITY FOR SCHATTEN  $p$ -NORMS

D.Suragan

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling  
Almaty, Kazakhstan

suragan@list.ru

**Keywords:** singular values, Schatten classes, Simon's conjecture.**Abstract.** In this note, we prove an abstract inequality for Schatten  $p$ -norm of compact operators. Our result gives an answer to B. Simon's conjecture on Schatten  $p$ -norm domination of integral operators in terms of completely monotonic functions.**Introduction**

Let  $H$  be a separable Hilbert space. We denote the class of compact operators  $P: H \rightarrow H$  by  $S^\infty(H)$ . Recall that the singular values  $\{s_n\}$  of  $P \in S^\infty(H)$  are the eigenvalues of the positive operator  $(P^*P)^{1/2}$  (see e.g. Gohberg and Krein [7]). The Schatten  $p$ -classes are defined as

$$S^p(H) := \{P \in S^\infty(H) : \{s_n\} \in \ell^p\}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

In  $S^p(H)$  the Schatten  $p$ -norm of the operator  $P$  is defined as

$$\|P\|_p := \left( \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty. \quad (1.1)$$

For  $p = \infty$ , we can set

$$\|P\|_\infty := \|P\|$$

to be the operator norm of  $P$  on  $H$ . In B. Simon's Trace ideals and their applications book (p. 24, [17]), there are formulated two conjectures related to Schatten  $p$ -norm dominations. In Theorem 2.13 ([17], the first edition of the book was published in 1979) it is shown that the abstract notion of domination implies the Schatten  $p$ -norms of even integer order satisfy a domination inequality. And the first conjecture was that Theorem 2.13 is valid for not only even integer order, but also it is valid for all Schatten  $p$ -norms. However, Peller [18] has shown, using Hankel operators, that this conjecture is wrong; see Addendum E in the book [17]. Our main result (2.1) gives an answer to B. Simon's second conjecture on Schatten  $p$ -norm domination of integral operators in terms of completely monotonic functions.

**B. Simon's conjecture:** If  $f^*$  is the symmetric decreasing rearrangement of  $f$ , then for  $p \geq 2$ , the Schatten  $p$ -norm of the operator with kernel  $f^*(x-y)g^*(y)$  dominates the Schatten  $p$ -norm of the one with kernel  $f(x-y)g(y)$ .

The positivity of a certain inverse Laplace transform and properties of completely monotonic functions play a key role in our proof. A function  $F$  is said to be completely monotonic in  $(0, \infty)$ , if  $F$  has derivatives of all orders and satisfies

$$(-1)^k F^{(k)}(\zeta) \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

for all  $\zeta > 0$ . If the function  $F$  can be extended to be continuous at  $\zeta = 0$  it is said to be completely monotonic in  $[0, \infty)$ . The definition of a completely monotonic function was introduced by F. Hausdorff [8]. In his work these functions were called as 'total monotonic' functions. Later Bernstein proved (Bernstein's theorem) that  $F$  is completely monotonic if and only if it has the representation

$$F(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} d\mu(t),$$

where  $\mu(t)$  is a nonnegative measure on  $[0, \infty)$  such that the integral converges for all  $\zeta > 0$ . Dubourdieu [5] proved that if a completely monotonic function  $F$  is not a constant then strict inequality holds in (1.2). For more discussions on completely monotonic functions we refer [6] and references therein.

In Section (2) we present the main result of this paper. Its proof will be given in Section (3).

### Main result and examples.

As outlined in the introduction, let  $H$  be a separable Hilbert space. Let  $A, B$  operators belong to the Schatten class  $S^q(H)$ . Define the function

$$F_{AB}(\zeta) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1}(A)(\mu_j(A) + \zeta)} - \frac{1}{\mu_j^{q-1}(B)(\mu_j(B) + \zeta)}, \quad \zeta \geq 0,$$

where  $\mu_j(A)$  and  $\mu_j(B)$  are the inverses of the  $j$ th singular values of operators  $A$  and  $B$ , respectively. Clearly, the function  $F_{AB}$  is analytic in  $[0, \infty)$ .

**Theorem 2.1.** *Let  $A, B \in S^q(H)$ . If the function  $F_{AB}$  is completely monotonic in  $[0, \infty)$ , then*

$$\|A\|_p \geq \|B\|_p \quad (2.1)$$

for all  $p \geq q$ .

Let us take

$$Au := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)u(y)dy,$$

$$Bu := \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x-y)g^*(y)u(y)dy.$$

Then from Theorem 2.1 we see that B. Simon's conjecture is correct for any Schatten  $p$ -class if the corresponding  $F_{AB}$  function is completely monotonic. Obviously, an essential question is: How can we check that the function  $F_{AB}$  is completely monotonic? An answer depends on the formula of  $F_{AB}$ . One may use Bernstein's theorem as we mentioned in the introduction. However, this theorem is not always applicable. Therefore, one might choose other methods (cf. [11]). Let  $f$  be strictly symmetric decreasing

function, that is, the function  $f(|x|)$  is a real, positive and decreasing, i.e. that the function  $f:[0,\infty]\rightarrow R$  satisfies

$$f(\rho) > 0 \quad \text{for any } \rho \geq 0, \quad (2.2)$$

and

$$f(\rho_1) > f(\rho_2) \quad \text{if } \rho_1 < \rho_2, \quad (2.3)$$

let  $g$  be a characteristic function of Euclidean domain  $\Omega \subset R^d$  i.e.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.4)$$

This implies that  $f$  and  $g$  do not change their formulae under the symmetric-decreasing rearrangement, see e.g. Lieb and Loss [10]. Therefore, we have

$$Au := \int_{\Omega} f(|x-y|)u(y)dy,$$

$$Bu := \int_{\Omega^*} f(|x-y|)u(y)dy,$$

where  $\Omega^*$  is the symmetric rearrangement of  $\Omega$ , that is,  $\Omega^*$  is a centred ball with  $|\Omega^*| = |\Omega|$ . Here by  $|\Omega|$  we denote the Lebesgue measure of  $\Omega$ .

If one shows that  $F_{AB}$  is completely monotonic, then in this special case B. Simon's conjecture is correct.

Here we give some related examples for further motivations. In a bounded open domain  $\Omega \subset R^3$  let us consider the Newton potential on  $L^2(\Omega)$  as an example, i.e. let

$$N_{\Omega}f(x) := \int_{\Omega} \frac{1}{4\pi|x-y|} f(y)dy, \quad f \in L^2(\Omega), \quad (2.5)$$

where  $|x-y|$  is the standard Euclidian distance between  $x$  and  $y$ . Note that the operator  $N_{\Omega}$  is the inverse to the Laplacian (see [9]). It is not difficult to show that the Newton potential operator is a Hilbert-Schmidt operator. It can be also followed from the properties of the  $N_{\Omega}$  operator kernel see e.g. the criteria for Schatten classes in terms of the regularity of the kernel in [4]. We obtain:

**Example 2.2** [13] Let  $B \equiv U$  be the unit 3-ball. Then by Theorem (2.1) we have

$$\|N_{\Omega}\|_p \leq \|N_U\|_p = \left( \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2l+1}{j_{l-\frac{1}{2},m}^{2p}} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.6)$$

for any integer  $2 \leq p < \infty$  and any bounded open domain  $\Omega$  with  $|\Omega| = |U|$ . Here  $j_{km}$  denotes the  $m^{th}$  positive zero of the Bessel function  $J_k$  of the first kind of order  $k$ .

**Example 2.3** [13] Let  $B \equiv U$  be the unit 3-ball. In particular, for the Hilbert-Schmidt norm we have

$$\|N_\Omega\|_2 \leq \|N_U\|_2 = \sqrt{\frac{7}{48}}, \quad (2.7)$$

for any bounded open domain  $\Omega$  with  $|\Omega| = |U|$ .

The above examples justify the constants for the Newton potential that were also announced in [15]. We omit the routine technical calculation.

**Lemma 3.1.** *If the function  $F_{AB}$  is completely monotonic in  $[0, \infty)$ , then*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j(A)t}}{\mu_j^{p-1}(A)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j(B)t}}{\mu_j^{p-1}(B)}, \quad \forall t > 0, \quad (3.1)$$

for any  $p \geq q$

*Proof of Lemma (3.1).* Since  $F_{AB}$  is completely monotonic it is non-negative, that is,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1}(A)(\mu_j(A) + \varsigma)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1}(B)(\mu_j(B) + \varsigma)} \quad (3.2)$$

for all  $\varsigma \geq 0$ .

Let  $L$  be the Laplace transform

$$L\{f(t)\}(\varsigma) = \int_0^\infty e^{-\varsigma t} f(t) dt.$$

Using the inverse Laplace transform (exponential decay) we have

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\mu_j + \varsigma}\right\} = e^{-\mu_j t}, t > 0. \quad (3.3)$$

for  $\varsigma > -\mu_j$ . By applying  $L^{-1}$  to both sides of (3.2) we obtain (3.1) (see Lemma (3.3)).

One might have a question concerning the proof of Lemma (3.1), that is, why does the inverse Laplace transform preserve the inequality (3.1)? In other words, why is the inverse Laplace transform of a positive function positive? Of course, this is not true in general. However, for the Laplace transform

$$L\{f(t)\}(\varsigma) = \int_0^\infty e^{-\varsigma t} f(t) dt,$$

the inverse Laplace transform of a positive function is positive for some classes of functions, that is, the following theorem is valid (see Theorem 2.3 in [3]).

**Theorem 3.2** [3] *Let  $f$  be a continuous function on the interval  $[0, \infty)$  which is of exponential order, that is, for some  $b \in \mathbb{R}$  it satisfies*

$$\sup_{t>0} \frac{|f(t)|}{e^{bt}} < \infty,$$

and let  $F = Lf$ . Then  $f$  is non-negative if and only if

$$(-1)^k F^{(k)}(s) \geq 0 \quad \text{for all } k \geq 0 \text{ and all } s > b. \quad (3.4)$$

In fact this positivity result implies directly from Post's inversion formula [12]

$$f(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t}\right)^{k+1} F_1^{(k)}\left(\frac{k}{t}\right) \quad (3.5)$$

for  $t > 0$ . If (3.4) is valid then the expression on the right hand side of (3.5) is non-negative. Therefore, the limit  $f(t)$  is necessarily non-negative for all  $t$ .

**Lemma 3.3** *The inverse Laplace transform preserves the inequality (3.2).*

*Proof of Lemma 3.3.* In our case we have

$$F(\varsigma) = F_{AB}(\varsigma) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_j(B)|^{p-1} (|\mu_j(B)| + \varsigma)} - \frac{1}{|\mu_j(\Omega)|^{p-1} (|\mu_j(\Omega)| + \varsigma)}, \varsigma \geq 0.$$

To show positivity of  $f(t)$  it is sufficient to check the conditions (3.4) for  $F_{AB}$ . By definition of a completely monotonic function we have

$$0 \leq (-1)^{(k)} F_{AB}^{(k)}(\varsigma), k = 0, 1, 2, \dots,$$

for all  $\varsigma > 0$ , which proves the positivity of  $f$  (by Theorem (3.2)), that is,  $f(t) \geq 0$  for all  $t > 0$ . This confirms that the inverse Laplace transform preserves the inequality (3.2).

*Proof of Theorem 2.1.* The proof of Theorem 2.1 now follows directly from Lemma 3.1. Applying the Mellin transform

$$\frac{1}{\mu_j^l} = \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^\infty \exp(-\mu_j t) t^{l-1} dt, \quad \text{for any real } l > 1,$$

to the inequality (3.1) leads to

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1+l}(A)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^{q-1+l}(B)} \quad (3.6)$$

for any real  $l > 1$ . Then since  $l$  is arbitrary real number  $> 1$ , from (3.6) we obtain

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^p(A)} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_j^p(B)} \quad (3.7)$$

for any real  $p > q$ . In addition, from (3.2) when  $\varsigma = 0$  we get that the inequality is also true when  $p = q$ . This completes the proof of Theorem 2.1.

## REFERENCES

- [1] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, and J. M. Luttinger. A general rearrangement inequality for multiple integrals. *J. Funct. Anal.*, 17:227--237, 1974.
- [2] S.N. Bernstein. Sur les fonctions absolument monotones. *Acta Mathematica*, 52:1--66, 1928.
- [3] K. M. Bryan. Elementary inversion of the Laplace transform. Mathematical Sciences Technical Reports (MSTR). Paper 114, 1999. [http://scholar.rose-hulman.edu/math\\_mstr/114](http://scholar.rose-hulman.edu/math_mstr/114).
- [4] J. Delgado and M. Ruzhansky. Schatten classes on compact manifolds: kernel conditions. *J. Funct. Anal.*, 267(3):772-798, 2014.
- [5] J. Dubourdieu. Sur un théorème de M.S. Bernstein relatif a la transformation de Laplace-Stieltjes. *Compositio Math.*, 7:96-111, 1939.
- [6] A.Z. Grinshpan and E.H. Ismail. Completely monotonic functions involving the gamma and q-gamma functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 134(4):1153-1160, 2006.
- [7] I. C. Gohberg and M. G. Krein. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1969.
- [8] F. Hausdorff. Summationionsmethoden und Momentfolgen I. *Math. Z.*, 9:74-109, 1921.
- [9] T. Sh. Kal'menov and D. Suragan. To spectral problems for the volume potential. *Doklady Mathematics*, 80(2):646-649, 2009.

- [10] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.
- [11] H. Pollard. A new criterion for completely monotonic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55(3):457-464, 1944.
- [12] E. Post. Generalized Differentiation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 32:723-781, 1930.
- [13] M. Ruzhansky and D. Suragan. On Schatten norms of intergral operators of convolution type. *to appear in Russian Math. Surveys*, 2016.
- [14] M. Ruzhansky and D. Suragan. Isoperimetric inequalities for the logarithmic potential operator. *J. Math. Anal. Appl.*, 434(2):1676-1689, 2016.
- [15] G. Rozenblum, M. Ruzhansky and D. Suragan. Isoperimetric inequalities for Schatten norms of Riesz potentials. *arXiv:1506.06355*, 2015.
- [16] B. Simon. Analysis with weak trace ideals and the number of bound states of Schrodinger operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224(2):367-380, 1976.
- [17] B. Simon. *Trace ideals and their applications*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 120, AMS, 2005.
- [18] V. V. Peller. A description of Hankel operators of class  $\sigma_p$  for  $p > 0$ , an investigation of the rate of rational approximation, and other applications. *Mat. Sb. (N.S.)*, 122(164):481-510, 1983.

## ШАТТЕН $p$ -НОРМАСЫ ҮШІН БІР ТЕҢСІЗДІК ТУРАЛЫ

Д. Сураган

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы қ.

**Түйін сөздер:** сингулярлық мәндер, Шаттен классы, Саймонның гипотезасы.

**Аннотация.** Бұл жұмыста Шаттен  $p$ -нормасы үшін абстрактті теңсіздікті дәлелдедік. Бұл жұмыс Б.Саймонның гипотезасына толықтай монотондық функциялар мағынасындағы интегралдық операторлардың басыңқысын Шаттен  $p$ -нормасы үшін жауап береді.

## ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ $p$ -НОРМЫ В КЛАССЕ ШАТТЕНА

Д. Сураган

Институт математики и математического моделирования МОН РК, г. Алматы

**Ключевые слова:** сингулярные значения, Шаттен классы, гипотеза Саймона.

**Аннотация.** В статье авторы доказывают абстрактное неравенство для  $p$ -норм в классе Шаттена для компактного оператора.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 159–168

UDC 622.276

NUMERICAL SOLUTION OF THE ONE DIMENSIONAL MODEL  
OF GAS-LIFT PROCESSN. M. Temirbekov<sup>1</sup>, A. K. Turarov<sup>1</sup>

<sup>1</sup> D. Serikbayev East Kazakhstan State Technical University  
Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan  
temirbekov@rambler.ru, t010183@gmail.com

**Key words:** interfacial contact discontinuity, gas-liquid mixture, gas lift.

**Abstract.** We consider and conduct a numerical simulation of a one-dimensional model of gas-lift process, where the movement in gas-lift well is described by partial differential equations of hyperbolic type. Difference schemes for the gas-lift model of the process on a non-uniform grid condensing near the boundaries of subdomains with gas, liquid and a gas-liquid mixture are developed.

In this paper, the mathematical model of gas lift wells is developed. A one-dimensional model of gas-lift wells is examined in which it is assumed that the flow is two-phase and isothermic in the annular portion and in the well. The system, which describes the process under study, consists of the equations of motion and continuity equations of thermodynamic state, concentration, and hydraulic resistance. At the interface, matching conditions for pressure, velocity and concentration are set that allows to obtain a formula for determining the density of the liquid phase in an explicit form. Finite-difference scheme on adaptive non-uniform grid condensing on the boundaries of the gas, liquid and liquid-gas phase, is developed. When building a grid, cubic spline function is used. The results of the proposed algorithm is illustrated by the example of a real well.

УДК 622.276

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ  
ГАЗЛИФТНОГО ПРОЦЕССАН. М. Темирбеков<sup>1</sup>, А. К. Тураров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Восточно-Казахстанский государственный технический университет им. Д. Серикбаева,  
Усть-Каменогорск, Казахстан

**Ключевые слова:** контактный разрыв, границы разделов фаз, газожидкостная смесь, газлифт.

**Аннотация.** Рассматривается и проводится численное моделирование одномерной модели газлифтного процесса, где движение в газлифтной скважине описывается уравнениями в частных производных гиперболического типа. Разработаны разностные схемы для модели газлифтного процесса на неравномерной сетке сгущающихся вблизи границ подобластей занятых газом, жидкостью и газожидкостной смесью.

В данной работе разработана математическая модель газлифтной скважины. Рассмотрена одномерная модель газлифтной скважины, в которой предполагается, что поток в кольцевой части и скважине двухфазный и изотермический. Система, описывающая изучаемый процесс, состоит из уравнений движения, неразрывности и уравнений термодинамического состояния, концентраций, гидравлического сопротивления. На границах разделов фаз ставятся условия согласования для давления, скорости и концентрации, которые позволяют получить формулу для определения плотности жидкой фазы в явном виде. Разработана конечно-разностная схема на адаптивной неравномерной сетке, сгущающаяся на границах газовой, жидкостной и газожидкостной фаз. При построении сетки используется кубическая сплайн-функция. Результаты предложенного алгоритма иллюстрируются на примере отдельно взятой нефтяной скважины.

## Введение

Применение динамических моделей газожидкостных потоков для описания добычи и транспортировки нефти началось сравнительно недавно. В них используются нестационарные уравнения баланса массы, импульса и энергии для жидкой и газообразной фаз. Основной сложностью является наличие разрывов в распределении плотности в скважине. Для этого на основании экспериментальных данных были подобраны непрерывные функции от газосодержания для скорости всплытия газа и параметра профиля потока.

Первые динамические модели газожидкостных потоков пришли в нефтегазовую отрасль именно из области тепловой и атомной энергетики. Имеется работы крупных ученых Нигматулина Р.И. [1], Кутатладзе С.С. [2], Накорякова В.Е. [5, 6] связанные с движением газожидкостных смесей в трубах и более детальные и разносторонние исследования в теоретическом плане.

В 1980-1990-ых годах появился ряд моделей и программных пакетов для моделирования нестационарных потоков углеводородов: OLGA [7], TACITE [8], TUFFP [9, 10].

В основе модели OLGA [7] применяются отдельные уравнения баланса массы для жидкой и газовой фазы. Сохранение импульса системы также описываются отдельными уравнениями для газа и жидкости. Модель OLGA предназначена для расчета нестационарных газожидкостных потоков в системах сбора углеводородной продукции и в нефтепроводах.

Модель TACITE также предназначен для расчета неустановившихся и стационарных потоков в системах транспортировки нефти и газа.

В общем виде уравнения массы аналогичны уравнениям модели OLGA. Вместо двух уравнений импульса для фаз в модели TACITE используется одно уравнение для газожидкостной смеси. Поскольку в модели число неизвестных больше числа уравнений используются эмпирические соотношения между скоростью газа и скоростью смеси. В модели TACITE для численной реализации используется явная схема второго порядка точности. Разностная схема обладает хорошими консервативными свойствами и имеет второй порядок точности, однако как и большинство схем второго порядка характеризуется рассеивающими качеством. Это особенно проявляется при резких разрывах и фронтах, когда при резких разрывах и фронтах в результате расчетов возникает рябь в соседних с фронтом ячейках.

Во избежание данного явления была предложена гибридная схема, сочетающая схему второго порядка и схему первого порядка. Для сильных разрывов потоковый член имеет аппроксимацию первого порядка, за пределом фронта аппроксимацию второго порядка точности.

В модели TUFFP газожидкостной поток описывается двухфазной моделью с упрощающими предположениями. Уравнение баланса массы для жидкой фазы аналогично как в модели OLGA, а для газа используется упрощенное квазистационарное уравнение. Уравнения баланса импульса так же записывается в квазистационарном виде.

Система дифференциальных уравнений решается полуявным конечно-разностным методом, для расчета применяется равномерная сетка. Общими недостатками имеющихся динамических моделей является большое количество и качество входных данных, численная неустойчивость. Несмотря на это динамические модели применяются для моделирования транспортировки газожидкостных смесей.

В последние годы стали появляться работы, в которых динамические модели применяются для изучения нестационарных процессов в скважинах.

В работах Tang, Schmidt, Blais [10], Avest and Oudeman [11], Asheim [12] изучается запуск газлифтной скважины и нестабильные режимы работы газлифтного подъемника. В данных моделях газлифта рассматривается совместная гидрогазодинамика нефтяного пласта, скважины и закачиваемого газа.

Изучение процессов разработки месторождений имеет важное практическое значение в нефтегазовой отрасли в связи с необходимостью совершенствования методов увеличения добычи. Математическому моделированию этих процессов посвящено очень большое количество работ [12-18]. Одним из наиболее эффективных и экономичных методов нефтедобычи является метод газлифта, который играет важную роль после фонтанного процесса. Основной характеристикой газлифтных скважин является зависимость дебита скважины от объемного расхода закачиваемого газа. Все исследования посвящены нахождению оптимального режима работы газлифтных

скважин, т.е. определению минимального значения удельного расхода газа и анализу этих характеристик. Работы Алиева Ф.А. и его учеников [12-14], а также работы [15,16] посвящены моделированию работы газлифтной скважины. В их работах приводится большой обзор научных работ, посвященных известным методам исследования и оптимизации работы газлифтных скважин. В работе [14] решена комплексная задача оптимизации работы газлифтных скважин. Предложенный подход дает возможность создать принципиально новую автоматизированную систему, которая позволит прогнозировать показатели газлифтной скважины. В статье [15] предложена дискретная минимаксная задача, и с помощью уравнения Эйлера-Лагранжа находится оптимальный режим газлифта.

В работе Барашкина Р.Л. [17] разработана динамическая математическая модель газлифтной скважины с учетом передвижения границ фаз, их образования, смены периода работы скважины и относительной скорости газа.

Во всех вышеперечисленных работах при численном решении используется равномерная сетка по пространственным переменным и в каждой подобласти задача решается отдельно, тогда как на границе раздела фаз имеются большие градиенты скорости, плотности и давления. Поэтому в данной работе разработаны разностные схемы для модели газлифта во всех подобластях и на неравномерной сетке, которая сгущается в подобластях с большими градиентами, т.е. на границах раздела фаз. Для сгущения сетки используется кубическая функция, т.к. процесс интерполирования кубическими сплайн-функциями является сходящимся. Разработанной разностной схемой и алгоритмом ее реализации проведены многочисленные расчеты газлифтной скважины. Результаты численных расчетов приведены в виде графиков.

#### **Система дифференциальных уравнений в частных производных для математического моделирования газлифтной скважины**

В работе [17] разработана структура газлифтной скважины, приведены допущения математической модели. В скважине выделены объемы для моделирования дифференциальными уравнениями в частных производных. Поток в выделенных объемах могут быть однофазными или двухфазными. Однофазные потоки состоят из газа или жидкости, а двухфазный поток образует газожидкостную смесь (ГЖС).

При разработке математической модели сделаны следующие допущения (рис.1):

- поток в скважине двухфазный;
- процесс движения изотермический;
- подача рабочего агента осуществляется через кольцо;
- добыча нефти осуществляется через насосно-компрессорную трубу (НКТ);
- силы сопротивления пористой среды и вязкости описываются в виде суммарного гидравлического сопротивления.

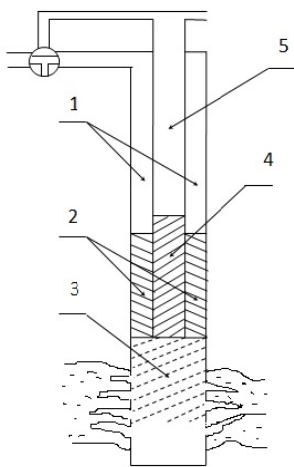


Рисунок 1 – Газлифтная скважина: 1 – газ в кольце ; 2 – жидкость в кольце ;  
3 – газожидкостная смесь в эксплуатационной колонне; 4 – жидкость в НКТ; 5 – газ в НКТ

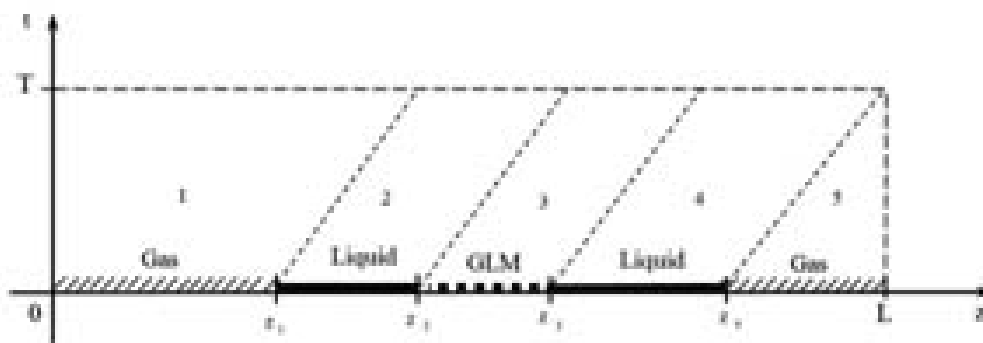


Рисунок 2 – Расчетная область газлифтной скважины

Рассмотрим системы уравнений, описывающих движение в газлифтных скважинах [17] (рис. 2).

Уравнение движения

$$\varphi \rho^g \frac{dv^g}{dt} + (1 - \varphi) \rho^l \frac{dv^l}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\lambda_c}{2 \cdot d_r} (\varphi \rho^g v^g |v^g| + (1 - \varphi) \rho^l v^l |v^l|) + (\varphi \rho^g + (1 - \varphi) \rho^l) g \sin \theta. \quad (1)$$

Уравнения неразрывности

$$\frac{\partial \varphi \rho^g}{\partial t} + \frac{\partial \varphi \rho^g v^g}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial (1 - \varphi) \rho^l}{\partial t} + \frac{\partial (1 - \varphi) \rho^l v^l}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Термодинамические уравнения состояния

$$\begin{cases} \text{для газа:} & p = \rho^g RT / M, \\ \text{для жидкости:} & p = p_0 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\rho^l}{\rho_0^l} - 1 \right). \end{cases} \quad (4)$$

Уравнение концентраций

$$\varphi(z, t) = \begin{cases} b, & 0 \leq z \leq z_1 - \varepsilon, \\ \frac{b+a}{2} - \frac{b-a}{2} th R_\varphi(z - z_1), & z_1 - \varepsilon \leq z \leq z_1 + \varepsilon, \\ a, & z_1 + \varepsilon \leq z \leq z_2 - \varepsilon, \\ \frac{b_1+a}{2} + \frac{b_1-a}{2} th R_\varphi(z - z_2), & z_2 - \varepsilon \leq z \leq z_2 + \varepsilon, \\ b_1, & z_2 + \varepsilon \leq z \leq z_3 - \varepsilon, \\ \frac{b_1+a}{2} - \frac{b_1-a}{2} th R_\varphi(z - z_3), & |z - z_3| \leq \varepsilon, \\ a, & z_3 + \varepsilon \leq z \leq z_4 - \varepsilon, \\ \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} th R_\varphi(z - z_4), & |z - z_4| \leq \varepsilon, \\ b, & z_4 + \varepsilon \leq z \leq L, \end{cases} \quad (5)$$

где  $b = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b_1 = \frac{0.83v^g - v^l}{v^g - v^l}$ ,  $th z$ - гиперболический тангенс;  $\varepsilon$ -малый параметр,  $z_k = z_k(t)$ - функции времени, границы разделов фаз.

Уравнение для коэффициента гидравлических сопротивлений

$$\lambda_c = \lambda_c(p, \rho^\Gamma, \rho^{\text{ж}}, v^\Gamma, v^{\text{ж}}, \varphi, \mu), \quad (5)$$

Здесь,  $t$  - время,  $z$  - координата по глубине скважины,  $\varphi$  - истинное объемное содержание фазы,  $\rho^\Gamma$  - плотность газа,  $\rho^{\text{ж}}$  - плотность жидкости,  $p$  - давление,  $v^\Gamma$  - средняя скорость газовой фазы,  $v^{\text{ж}}$  - средняя скорость жидкой фазы,  $\lambda_c$  - коэффициент гидравлического сопротивления,  $d_\Gamma$  - гидравлический диаметр канала,  $g$  - ускорение свободного падения,  $\theta$  - угол наклона скважины,  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $T$  - абсолютная температура,  $M$  - молярная масса,  $p_0$  - начальное давление жидкости,  $\rho_0^{\text{ж}}$  - соответствующая начальному давлению плотность,  $\beta$  - коэффициент сжимаемости жидкости,  $\mu$  - коэффициент динамической вязкости.

Уравнение (1) с учетом (2), (3) можно записать и в дивергентном виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\varphi \rho^\Gamma v^\Gamma + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}} v^{\text{ж}}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi \rho^\Gamma (v^\Gamma)^2 + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}} (v^{\text{ж}})^2) = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\lambda_c}{2 \cdot d_\Gamma}(\varphi \rho^\Gamma v^\Gamma |v^\Gamma| + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}} v^{\text{ж}} |v^{\text{ж}}|) + (\varphi \rho^\Gamma + (1 - \varphi) \rho^{\text{ж}}) g \sin \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициент динамической вязкости для ГЖС определяется следующим образом

$$\mu = \varphi \mu^\Gamma + (1 - \varphi) \mu^{\text{ж}}. \quad (7)$$

Расходное газосодержание  $\alpha$  определяется так

$$\alpha = \frac{Q^\Gamma}{Q^\Gamma + Q^{\text{ж}}}, \quad (8)$$

где  $Q^\Gamma$ ,  $Q^{\text{ж}}$  - расходы газа и жидкости.

Обозначим через  $F^\Gamma$ ,  $F^{\text{ж}}$  - площади в сечении трубы занятые газом и жидкостью. Расходы газа и жидкости через скорости выражаются формулой

$$Q^\Gamma = v^\Gamma F^\Gamma, \quad Q^{\text{ж}} = v^{\text{ж}} F^{\text{ж}} \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и разделив числитель и знаменатель на  $F$ , и учитывая что  $\varphi = \frac{F^\Gamma}{F}$ ,  $1 - \varphi = \frac{F^{\text{ж}}}{F}$  получим

$$\alpha = \frac{\varphi v^\Gamma}{\varphi v^\Gamma + (1 - \varphi) v^{\text{ж}}}. \quad (10)$$

Уравнения (1)-(5) решаются в подобластях 1-5 (рис. 2) со следующими начальными и граничными условиями:

$$\rho_\Gamma(z, 0) = \psi_\rho(z), \quad p(z, 0) = \psi_p(z), \quad v_\Gamma(z, 0) = \psi_v(z), \quad \text{при } 0 \leq z \leq L, \quad (11)$$

$$\rho_\Gamma(0, t) = \rho(0, 0), \quad v_\Gamma(0, t) = v(0, 0), \quad p(0, t) = p(0, 0), \quad \text{при } z = 0, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (12)$$

$$\rho_\Gamma(L, t) = \rho(L, 0), \quad v_\Gamma(L, t) = v(L, 0), \quad p(L, t) = p(L, 0), \quad \text{при } z = L, \quad 1 \leq t \leq T, \quad (13)$$

где функции  $\psi_\rho(z)$ ,  $\psi_p(z)$ ,  $\psi_v(z)$  задаются в подобластях в зависимости от фазы среды.

Уравнения (1) - (4) представляют собой общую форму соотношений, связывающих параметры по обе стороны раздела фаз (гидродинамические разрывы) и скорость ее распространения. Поэтому на границах разделов фаз выполняются следующие соотношения Гюгонио, которые выражают законы сохранения потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва.

$$m = \rho^\Gamma(v^\Gamma - D) = \rho^{\text{ж}}(v^{\text{ж}} - D), \quad (14)$$

$$\rho^\Gamma(v^\Gamma)^2 + p^\Gamma = \rho^{\text{ж}}(v^{\text{ж}})^2 + p^{\text{ж}}, \quad (15)$$

где  $D(t)$  - скорость перемещения границ фаз.

Так как на границах разделов фаз контактный разрыв имеем, что  $\bar{m} = 0$ . По физическому смыслу  $\rho^\Gamma$  и  $\rho^{\text{ж}}$  не равны нулю, равно  $m = 0$  может быть выполнено лишь при  $\rho^\Gamma = \rho^{\text{ж}} = D(t)$ .

Итак, на поверхности контактных разрывов должны быть непрерывны нормальная составляющая скорости газа или жидкости давление [3]

$$[\varphi]_{z=z_k} = 0, \quad [p]_{z=z_k} = 0, \quad [v]_{z=z_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (16)$$

На границах разделов фаз для определения плотности используем условия  $[p]_{z=z_k} = p(z_k - 0, t) - p(z_k + 0, t) = 0$ . Например на границе  $z = z_1$  газа и жидкости имеем две формулы для давления

$$p(z_k - 0, t) = \rho_r(z_k - 0, t)RT/M, \quad p(z_k + 0, t) = p_0 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\rho^*(z_k + 0, t)}{\rho_0^*} - 1 \right).$$

Приравнявая эти уравнения для плотности жидкости имеем формулу

$$\rho^*(z_k + 0, t) = \rho_0^* + \rho_0^* \beta \left( \frac{\rho^r(z_k - 0, t)RT}{M} - p_0 \right). \quad (17)$$

### Построение разностной схемы

Для численного решения начально-граничной задачи определим неравномерную по  $z$  и равномерную по  $t$  разностную сетку в следующем виде:

$W_h = \{z_j = jh_j, j = 0, 1, \dots, N_1, h_j N_1 = L\}$ ,  $W_\tau = \{t_i = i\tau, i = 0, 1, \dots, N_2, \tau N_2 = T\}$ , где  $\tau$  и  $h$  - шаги расчетной сетки по  $t$  и  $z$ , соответственно.

Интегро-интерполяционным методом построена разностная схема, аппроксимирующая дифференциальные уравнения (1)-(5). Нелинейные слагаемые аппроксимированы с помощью схемы против потока.

Разностный аналог уравнения движения

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{j,i+1}\rho_{j,i+1}^r v_{j,i+1}^r + (1-\varphi_{j,i+1})\rho_{j,i+1}^* v_{j,i+1}^*}{\tau} - \frac{\varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r v_{j,i}^r + (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^* v_{j,i}^*}{\tau} + \frac{p_{j+1,i} - p_{j,i}}{h_j} = \\ & = -\varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r \left[ \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^r + |v_{j,i}^r|)(v_{j,i}^r - v_{j-1,i}^r) + \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^r - |v_{j,i}^r|)(v_{j+1,i}^r - v_{j,i}^r) \right] - \\ & - (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^* \left[ \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^* + |v_{j,i}^*|)(v_{j,i}^* - v_{j-1,i}^*) + \frac{1}{2h_j} (v_{j,i}^* - |v_{j,i}^*|)(v_{j+1,i}^* - v_{j,i}^*) \right] - \\ & - \frac{\lambda_{j,i}}{2 \cdot d_r} (\varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r v_{j,i}^r |v_{j,i}^r| + (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^* v_{j,i}^* |v_{j,i}^*|) + (\varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r + (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^*) g \sin \alpha, \quad (18) \\ & j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; i = 1, 2, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Для уравнение неразрывности газа и жидкости применено схема TVD (Total Variation Diminition) на примере схемы Лакса-Вендроффа.

Уравнение неразрывности газа

$$\begin{aligned} & \frac{\varphi_{j,i+1}\rho_{j,i+1}^r - \varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r}{\tau} + \frac{1}{2h_j} [(v_{j,i}^r + |v_{j,i}^r|)(\varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r - \varphi_{j-1,i}\rho_{j-1,i}^r) + \\ & + (v_{j,i}^r - |v_{j,i}^r|)(\varphi_{j+1,i}\rho_{j+1,i}^r - \varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r)] + \frac{v_{j,i}^r}{h_j} (f_{i+\frac{1}{2},i} - f_{i-\frac{1}{2},i}) = 0, \quad (19) \end{aligned}$$

где  $f_{i+\frac{1}{2},i} = \psi(r_j) \left( 1 - \frac{\tau |v_{j,i}^r|}{h_j} \right) (\varphi_{j+1,i}\rho_{j+1,i}^r - \varphi_{j,i}\rho_{j,i}^r)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; i = 1, 2, \dots, N_2$ .

Уравнение неразрывности жидкости

$$\begin{aligned} & \frac{(1-\varphi_{j,i+1})\rho_{j,i+1}^* - (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^*}{\tau} + \frac{1}{2h_j} [(v_{j,i}^* + |v_{j,i}^*|)((1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^* - (1-\varphi_{j-1,i})\rho_{j-1,i}^*) + \\ & + (v_{j,i}^* - |v_{j,i}^*|)((1-\varphi_{j+1,i})\rho_{j+1,i}^* - (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^*)] + \frac{v_{j,i}^*}{h_j} (f_{i+\frac{1}{2},i} - f_{i-\frac{1}{2},i}) = 0, \quad (20) \end{aligned}$$

где  $f_{i+\frac{1}{2},i} = \psi(r_j) \left( 1 - \frac{\tau |v_{j,i}^*|}{h_j} \right) ((1-\varphi_{j+1,i})\rho_{j+1,i}^* - (1-\varphi_{j,i})\rho_{j,i}^*)$ ,

$j = 1, 2, \dots, N_1 - 1; i = 1, 2, \dots, N_2$ .

Ограничитель (лимитер) схемы TVD (Total Variation Diminition), т.е. схемы с уменьшением полной вариации выбирается следующим образом

$$0 < \psi(r_j) \leq \min(2r_j, 2), r_j > 0, \quad \psi(r_j) = 0, r_j \leq 0,$$

где  $r_j = \frac{\rho_{j,i}^\gamma - \rho_{j-1,i}^\gamma}{\rho_{j+1,i}^\gamma - \rho_{j,i}^\gamma}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ ;  $i = 1, 2, \dots, N_2$   $\gamma = \Gamma, \text{ж}$ .

Давление газа определим с помощью формулы

$$p_{j,i+1} = \rho_{j+1,i}^\Gamma RT/M, \quad (21)$$

давление жидкости

$$p_{j,i+1} = p_0 + \frac{1}{\beta} \left( \frac{\rho_{j,i+1}^{\text{ж}}}{\rho_0^{\text{ж}}} - 1 \right). \quad (22)$$

Поскольку в модели (18) число неизвестных  $v_{j,i+1}^\Gamma$ ,  $v_{j,i+1}^{\text{ж}}$  больше числа уравнений, поэтому необходимы замыкающие соотношения. Для распределенного потока используется следующая взаимосвязь скоростей газа и жидкости [16].

$$v_{j,i+1}^\Gamma (0,83 - \varphi_{j,i+1}) = (1 - \varphi_{j,i+1}) v_{j,i+1}^{\text{ж}}, \quad (23)$$

коэффициент гидравлического сопротивления определяется в зависимости от числа Рейнольдса

$$\lambda_{j,i} = \frac{64}{Re_{j,i}}, \quad (24)$$

где число Рейнольдса определяется с помощью формулы

$$Re_{j,i} = \frac{LV}{\mu_{j,i}}. \quad (25)$$

В разностной задаче (18)-(24) используется неравномерная сетка [19, 20] с шагами  $h_j, j = 0, 1, \dots, N_1$ . Неравномерная сетка сгущается на границе подобластей. Сгущение сетки осуществляется с помощью зависимости  $z_k = z_k(q, t)$  формулами

$$z_k(q, t) = a_k(q - q_{n_k})^3 + b_k(q - q_{n_k})^2 + c_k(q - q_{n_k}) + d_k, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (26)$$

где  $q$  - координатная ось на трезок  $[0; 1]$  которого отображается отрезок  $[0; 2]$  координатной оси  $z$ ; причем по оси  $q$  строится равномерная сетка соответствующая неравномерной сетке по оси  $z$ ;  $n_k$  - граница разделов фаз;  $a_k, b_k, c_k, d_k$  - коэффициенты кубической параболы.

Шаг неравномерной сетки определяется так  $h_j = z_k(q_j, t) - z_k(q_{j-1}, t)$ , где  $j = n_k - n_\varepsilon, n_k - n_\varepsilon + 1, \dots, n_k + n_\varepsilon$ ,  $n_\varepsilon = \left\lceil \frac{\varepsilon}{h_q} \right\rceil$ ,  $h_q = \frac{1}{N_1}$  - шаг равномерной сетки по  $q$ .

Скорость ГЖС вычисляется по формуле

$$v_{j,i+1}^{\text{ГЖС}} = \varphi_{j,i} v_{j,i+1}^\Gamma + (1 - \varphi_{j,i}) v_{j,i+1}^{\text{ж}}, \quad (27)$$

$$j = n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, n_3 - 1, \quad i = 0, 1, \dots, N_2.$$

Границы разделов фаз  $z_k$  за один шаг по времени передвигаются на величину

$$\Delta l_k = v_{n_k,i} \cdot \tau, \quad (28)$$

где  $k = 1, 2, 3, 4$ . Номера узлов сетки соответствующие границам разделов фаз определяются так

$$n_k = n_k + [\Delta l_k / h_j]. \quad (29)$$

### Результаты численного моделирования

Используя вышеприведенный алгоритм, была составлена программа для вычисления основных технологических характеристик газлифтной скважины. Были заданы следующие исходные данные:  $t = 3600$  с,  $L = 3496$  м,  $\rho^\Gamma = 0,75$  м/кг<sup>3</sup>,  $\rho^{\text{ж}} = 950$  м/кг<sup>3</sup>,  $d_1 = 0,0889$  м,  $d_2 = 0,0759$  м,  $D = 0,168$  м,  $p_n = 9$  МПа,  $p_{nl} = 19$  МПа,  $p_y = 1,5$  МПа,  $T = 333$  К,  $g = 9,80665$  м/с<sup>2</sup>.

На рисунках 3, 4, 5, 6 приведены истинное содержание газа, плотность, давление и скорости. На рисунке 3 приведен график изменения истинного содержания газа вдоль скважины. На рисунке 4 приведен график изменения плотности газа, жидкости, ГЖС вдоль скважины. На рисунке 5 построен график функции давления. Из данного графика видно, что давление среды в пласте увеличивается вдоль течения до момента образования газожидкостной смеси, а затем

уменьшается. Из графика скорости (рисунок 6) наблюдается монотонное уменьшение скорости среды до образования ГЖС, за смесью скорость жидкости и газа в НКТ увеличивается.

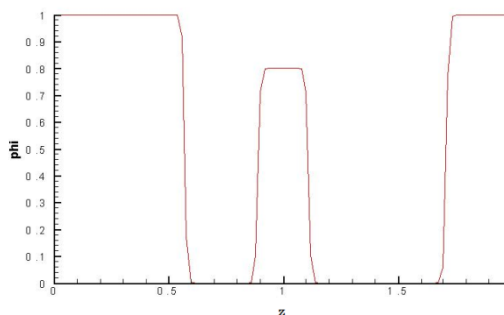


Рисунок 3 – Истинное содержание газа

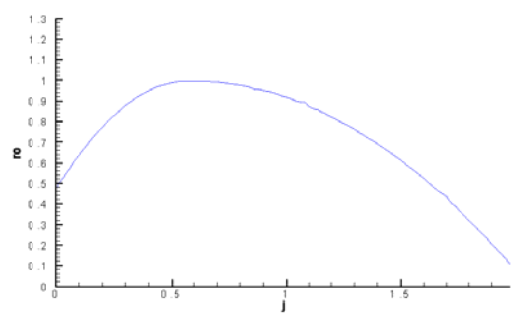


Рисунок 4 – Плотность

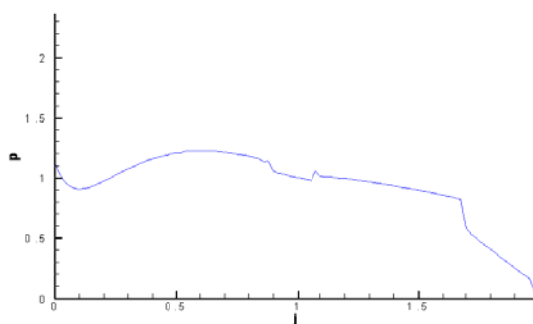


Рисунок 5 – Давление

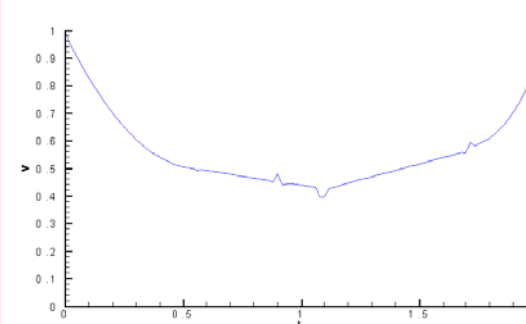


Рисунок 6 – Скорость

### Заключение.

В данной работе разработана математическая модель газлифтной скважины и рассмотрена одномерная модель газлифтной скважины, в которой предполагается, что поток в кольцевой части и скважине двухфазный и изотермический. Описывающий изучаемый процесс состоит из уравнений движения, неразрывности и уравнений термодинамического состояния, концентраций, гидравлического сопротивления. На границах разделов фаз ставятся условия согласования для давления, скорости и концентрации, которые позволяют получить формулу для определения плотности жидкой фазы в явном виде. Разработана конечно-разностная схема на адаптивной неравномерной сетке, сгущающаяся на границах газовой, жидкостной и газожидкостной фаз. При построении сетки используется кубическая сплайн-функция. Используя предложенный алгоритм численного решения одномерной задачи для газлифтной скважины, составлена программа для расчета на компьютере. Предложенными численными алгоритмами решения задачи определения плотности, давления, скорости для газлифтной скважины проведены многочисленные методические расчеты. Из результатов расчетов можно сделать вывод, что разработанная математическая модель, разностная схема и компьютерная программа позволяют изучать физический процесс в газлифтной скважине и решать вопросы оптимального эксплуатации нефтяных месторождений.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред, Т.1,2, М., Наука, 1987 (in Russ.)
- [2] Кутателадзе С.С. Стырикович М.А. Гидродинамика газожидкостных систем. М.: Энергия, 1976. (in Russ.)
- [3] Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992. – 424 с. (in Russ.)
- [4] Шокин Ю.И. Первое дифференциальное приближение. - Новосибирск: Наука, 1979 (in Russ.)

- [5] Накоряков В.Е., Соболев В.В., Шрейбер И.Р. Длинноволновые возмущения в газожидкостной смеси *Известия АН СССР. МЖГ*, **1972**, № 5. (in Russ.)
- [6] Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Распространение волн в газожидкостных и парожидкостных средах Новосибирск.ИТФ, 1983, 238 с. (in Russ.)
- [7] Bendiksen K., Malnes D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application *SPE Production Engineering*. May, **1991**. P. 171. (in Eng.)
- [8] Minami K., Shoham O. Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling *Int. J. of Multiphase Flows*. **1994**. V. 20. № 4. P. 739. (in Eng.)
- [9] Pauchon C., Dhulesia H., Binh-Cirlot G., Fabre J. TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation *paper SPE 28545*. **1994**. (in Eng.)
- [10] Tang Y., Shmidt Z., Blais R. Transient dynamic characteristics of the gaslift unloading process *paper SPE 38814*. **1997**. (in Eng.)
- [11] D. ter Avest, Oudeman P. A dynamic simulator to analyse and remedy gas-lift problems *paper SPE 30639*. **1995**. (in Eng.)
- [12] Asheim H. Verification of transient multi-phase flow simulator for gas lift applications *paper SPE 56659*. **1999**. (in Eng.)
- [13] Алиев Ф.А., Ильясов М.Х., Джамалбеков М.А. Моделирование работы газлифтной скважины. *Доклад НАН Азерб.*, №4, **2008**, с. 107-116. (in Russ.)
- [14] Алиев Ф.А., Исмаилов Н.А., Задачи управления газлифтным процессом при минимальных потерях дебита в подъемнике Институт Прикладной Математики **2013**, с.111-119. (in Russ.)
- [15] Алиев Ф.А., Есадуллаев Р., Исмаилов Н.А., Алгоритм решения цифровой минимаксной задачи определения оптимального режима газлифта *труды института прикладной математики* Т.1 №1 **2012** – С. 4-14. (in Russ.)
- [16] Шуров В.И. Технология и техника добычи нефти М., «Недра», **1983**, 510с. (in Russ.)
- [17] Барашкин Р.Л., Разработка модели и алгоритмов функционирования газлифтной скважины как объекта системы оперативного управления Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина - Москва: **2011.**, 152 с. (in Russ.)
- [18] Данаев Н.Т., Корсакова Н.К., Пеньковский В.И. "Многофазная фильтрация и электромагнитное зондирование скважин", *Издательство "Эверо"*, **2014** г., 280 с. (in Russ.)
- [19] Жумагулов Б.Т., Темирбеков Н.М., Ермагамбетов Т.К. Численная реализация разностной схемы для модели неравновесной фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости. *Вестник НИИ ПК*, №1 (35) **2010**. - С.20-27. (in Russ.)
- [20] Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. "Вычислительная гидромеханика и теплообмен" Т2, *Издательство "Мир"*, **1990** г., 336 с. (in Russ.)

## REFERENCES

- [1] Nigmatulin R.I. The dynamics of multiphase media. V.1,2. М.: Nauka, **1987** (in Russ.)
- [2] Kutateladze S.S., Styrikovich M.A. The hydrodynamics of gas-liquid systems. М.: Energy, **1976** (in Russ.)
- [3] Samarsky A.A., Popov Y.M. Difference methods for solving problems of gas dynamics. М.: Nauka, **1992** - 424 p. (in Russ.)
- [4] Shokin Y.I. The first differential approximation. - Novosibirsk: Nauka, **1979** (in Russ.)
- [5] Nakoryakov V.E., Sokolov V.V., Schreiber I.R. Long-wave perturbations in the gas-liquid mixture *Proceedings of the Academy of Sciences of the USSR. Fluid Dynamics*, **1972**, number 5. (in Russ.)
- [6] Nakoryakov V.E. Pokusaev B.G., Schreiber I.R. Wave propagation in gas-liquid and vapor-liquid media *Novosibirsk.ITF*, **1983**, 238 p. (in Russ.)
- [7] Bendiksen K., Malnes D., Moe R., Nuland S. The dynamic two-fluid model OLGA: theory and application *SPE Production Engineering*. May, **1991**. P. 171. (in Eng.)
- [8] Minami K., Shoham O. Transient two-phase flow behavior in pipelines-experiment and modeling *Int. J. of Multiphase Flows*. **1994**. V. 20. № 4. P. 739. (in Eng.)
- [9] Pauchon C., Dhulesia H., Binh-Cirlot G., Fabre J. TACITE: A transient tool for multiphase pipeline and well simulation, *paper SPE 28545*, **1994**. (in Eng.)
- [10] Tang Y., Shmidt Z., Blais R. Transient dynamic characteristics of the gaslift unloading process, *paper SPE 38814*, **1997**. (in Eng.)
- [11] D. ter Avest, Oudeman P. A dynamic simulator to analyse and remedy gas-lift problems, *paper SPE 30639*, **1995**. (in Eng.)
- [12] Asheim H. Verification of transient multi-phase flow simulator for gas lift applications, *paper SPE 56659*, **1999**. (in Eng.)

- [13] Aliev F.A., Ilyasov M.H., Dzhamalbekov M.A. Simulation of gas lift wells. *The report of the Azerbaijan National Academy of Sciences*, №4, **2008**, p. 107-116. (in Russ.)
- [14] Aliev F.A., Ismailov N., gas-lift process management tasks with minimal loss of flow rate in a lift, *Institute of Applied Mathematics* **2013** p.111-119. (in Russ.)
- [15] Aliev F.A. Sadullaev R., N. Ismailov, An algorithm for solving digital minimax problem of determining the optimal mode gas-lift, *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics Vol.1 №1*, **2012**, pp 4-14. (in Russ.)
- [16] Shurov V.I. Technology and engineering of oil Moscow, Nedra, **1983**, 510 p. (in Russ.)
- [17] Barashkin R.L., The development of models and algorithms for operation of gas-lift well as the object of an operational management system, *Russian State University of Oil and Gas named after IM Gubkin, Moscow*, **2011**, 152 pp. (in Russ.)
- [18] Danaev N.T., Korsakova N.K., Penkovsky V.I. Multiphase flow and electromagnetic sounding wells, *Publisher, Avery*, **2014**. 280 p. (in Russ.)
- [19] Zhumagulov B.T., Temirbekov N.M., Ermagambetov T.K. Numerical realization of a difference scheme for model of nonequilibrium filtration of two-phase incompressible fluid, *Herald NIA RK*, №1 (35), **2010** - P.20-27. (in Russ.)
- [20] Anderson D., Tanehill J., Pletcher P. Computational hydrodynamics and heat exchange. Vol. 1, *Mir*, **1990**, 385 p. (in Russ.)

## ГАЗЛИФТ ҮРДСІНІҢ БІР ӨЛШЕМДІ МОДЕЛІНІҢ САНДЫҚ ШЕШІМІ

Н.М. Темирбеков<sup>1</sup>, А.К. Тураров<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік  
техникалық университеті Өскемен, Қазақстан

**Түйін сөздер:** байланысты ажырау, фазалардың бөліну шекарасы, газ-сұйық қоспасы, газлифт.

**Аннотация.** Қозғалысы газлифт ұңғымасында гипреболалық типтегі дербес туындылы дифференциалдық теңдеулермен сипатталатын газлифт үрдісінің бір өлшемді моделіне сандық үлгілеу жүргізіледі және қарастырылады. Ішкі облыстары газ, сұйық және газ-сұйық қоспа шекараларының маңында қоюланатын біркелкі емес торда газлифт үрдісінің моделіне айырымдық сұлбалар құрастырылды.

Бұл мақалада, газлифт ұңғымасының математикалық моделі құрастырылды. Ұңғыма мен оның сақиналы бөлігінде ағыс екі фазалы және изотермиялық деп жорамалданатын газлифт ұңғымасының бір өлшемді моделі қарастырылады. Зерттелінді үрдісті сипаттайтын жүйе қоғалыс теңдеуі, үзіліссіздік теңдеуі мен термодинамикалық күй теңдеуі, концентрация және гидравликалық кедергілерден тұрады. Сұйық фазасының тығыздығын айқын түрде анықтайтын формуласын алуға мүмкіндік беретін фазалардың бөліну шекараларына газ, сұйық және газ-сұйық қоспаларына сәйкестік шарты қойылады. Газ, сұйық және газ-сұйық қоспа шекараларының маңында қоюланатын біркелкі емес адаптивті торда ақырлы-айырымдық сұлбасы құрастырылды. Ұсынылған алгоритмнің нәтижесі жеке алынған мұнай ұңғымасының мысалында көркемделген.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 169–179

UDC 517.929

**ABOUT STRUCTURE OF THE RANGE OF THE REGIONAL TASK  
OF CAUCHY - NEUMANN FOR THE HEAT CONDUCTIVITY  
EQUATION WITH THE DEVIATING ARGUMENT****S.T. Achmetova, A.Sh. Shaldanbayev, M. T. Shomabayeva**

YuKGU of M. Auezov, Shymkent

**Keywords:** the deviating arguments, a nepreryvnoy range, a singular range, absolutely nepreryvnoy range, spectral decomposition, function of the Cantor.

**Abstract.** In this work the spectral theory of the operator Cauchy-Neumann corresponding to a regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument is constructed, own functions are found, their completeness and a bazisnost is shown, spectral decomposition is received, the structure of a range is in details investigated, in particular, absence absolutely continuous components and presence singular function components of the Cantor predicted earlier by N. Winer is proved.

УДК 517.929

**О СТРУКТУРЕ СПЕКТРА КРАЕВОЙ  
ЗАДАЧИ КОШИ- НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ****С.Т. Ахметова, А.Ш. Шалданбаев, М.Т. Шомабаева**

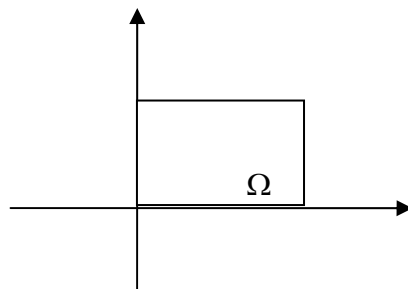
ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

**Ключевые слова:** отклоняющийся аргумент, непрерывный спектр, сингулярный спектр, абсолютно непрерывный спектр, спектральное разложение, функция Кантора.

**Аннотация.** В данной работе построена спектральная теория оператора соответствующего краевой задаче Коши-Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, найдены собственные функции, показана их полнота и базисность, получено спектральное разложение, детально исследован состав спектра, в частности, доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты и присутствие сингулярной компоненты типа функции Кантора, предсказанного ранее Н. Винером.

**1. Введение.**

**Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset R^2$  – прямоугольник ограниченный отрезками:  $AB: 0 \leq t \leq T, x = 0$ ;  $BC: 0 \leq x \leq l, t = T$ ;  $CD: 0 \leq t \leq T, x = l$ ;  $DA: 0 \leq x \leq l, y = 0$ ; /см. Рис. 1/.



Через  $C^{1,2}(\Omega)$  — обозначим множество функции  $u(x, t)$  единожды непрерывно дифференцируемых по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемых по  $x$  в области  $\Omega$ . Под границей области понимаем совокупность отрезков  $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ .

**Задача Коши-Неймана.** Найти решения уравнения

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0; \quad (2)$$

**Определение 1.1.** Регулярным решением задачи (1)+(2) будем понимать функцию  $u(x, t) \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2).

**Определение 1.2.** Функция  $u \in L^2(\Omega)$  называют сильным решением задачи, если существует последовательность функции  $\{u_n\} \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  и удовлетворяющих краевым условиям задачи такая, что  $\{u_n\}$  и  $\{Lu_n\}$  сходятся в  $L^2(\Omega)$  соответственно к  $u$  и  $f$ .

**Определение 1.3.** Краевая задача (1)+(2) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  и единственно.

**Определение 1.4.** Точечным спектром  $P\sigma(A)$  называют множество собственных значений оператора  $A$ , т.е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in H\}.$$

Непрерывным спектром  $C\sigma(A)$  оператора  $A$  называется множество  $C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}$ , а остаточным спектром  $R\sigma(A)$  — множество  $R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ — имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } H\}$ .

Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких  $\lambda$ , для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором [1.с.174-175].

К теме настоящей работы посвящены много численные исследования отечественных и зарубежных ученых, подробные сведения о которых можно найти в монографиях [2,3],[4-9].

Целью настоящего подраздела является исследование сильной разрешимости краевой задачи (1)+(2) в пространстве  $L^2(\Omega)$ , с помощью спектральной теории линейных операторов, а также структуры спектра соответствующего оператора.

## 2. Методы исследований.

Уравнение (1) не является чисто дифференциальным, поэтому краевая задача (1)+(2) относится к числу не классических задач математической физики.

Для решения краевой задачи (1)+(2) применяем методы функционального анализа, особенно, теорию линейных операторов, а также метод Фурье. Рассмотрим спектральную задачу, соответствующей нашей краевой задаче (1)+(2),

$$u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t), \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

Эту задачу решаем методом разделения переменных, в результате получим две спектральные задачи, одна из которых классическая задача Неймана для оператора Штурма-Лиувилля, другая для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом подробно изученная в работах [10-11]. Для замыкания операторов была использована теория расширения симметричных операторов [2,3], для спектрального разложения решения в ряд Фурье использовали результаты работы [12]. При изучении непрерывного спектра опирались на результаты одной работы Вейля [13]. Работы [14-20] были нацелены на решение ниже излагаемых проблем.

### 3. Результаты исследований.

#### Теорема 3.1.

(а) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – иррациональное число, то спектр оператора

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

совпадает с числовой осью  $(-\infty, +\infty)$ . Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений отличных от нуля и из предельных точек собственных значений. Оператор  $\bar{L}$  – самосопряжен и обратим, но  $\bar{L}^{-1}$  – неограничен.

(б) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число  $\frac{1}{4} \notin \left(m^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то оператор  $\bar{L}$  – самосопряжен

и ограниченно обратим. Спектр оператора  $\bar{L}$  состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеет предельных точек, точнее на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Оператор  $\bar{L}^{-1}$  – ограничен, но не компактен.

(в) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число и  $\frac{1}{4} \in \overline{\left(m^2 \frac{T\pi}{2l^2}\right)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , то обратный оператор  $\bar{L}^{-1}$  не существует,  $\lambda = 0$  является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m = 0, 1, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

Ноль может быть бесконечнократным собственным значением.

**Теорема 3.2.** Для существования и единственности сильного решение краевой задачи

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0;$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x, t)$$

для всех  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

#### 4. Обсуждение результатов исследований.

##### Лемма 4.1.

(а) Оператор  $L$ , соответствующий к краевой задаче (1)+(2) симметричен.

(б) Спектральная задача

$$\dot{v}(T-t) = \mu \cdot v(t),$$

$$v(0) = 0;$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\mu_n = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ .

(с) Спектральная задача Неймана

$$-w''(x) = \nu^2 w(x),$$

$$w'(0) = w'(l) = 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\nu_m^2 = \left( m \frac{\pi}{l} \right)^2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{m\pi x}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ .

(d) Если система функций  $\{\varphi_m(x)\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ; образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ , а система  $\{\psi_n(t)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ , то система функций  $u_{mn}(x, t) = \varphi_m(x) \cdot \psi_n(t)$ ,  $m, n = 1, 2, \dots$  образует базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

Из полученных формул следует, что собственными функциями спектральной задачи (3)+(4) являются функций

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{tl}} \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

которые в силу леммы 4.4, полны и ортонормированны в пространстве  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ . По теореме Рисса-Фишера система собственных функций  $\{u_{mn}(x, t)\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

Собственных значений  $\lambda_{mn}$  найдем по формуле  $\mu - \lambda = \nu^2$ ,  $\lambda = \mu - \nu^2$ ,

$$\lambda_{mn} = \mu_n - \nu_m^2 = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Если } \lambda_{mn} = 0, \text{ то } (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{T\pi}{l^2} \cdot m^2, \quad \frac{T\pi}{l^2} = \frac{(-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right)}{m^2}.$$

**Теорема 4.1.** Спектральная задача

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t)$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0;$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{tl}} \cdot \cos \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n, m = 0, 1, 2, \dots$$

которые образует ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

**Лемма 4.2.** Если симметрический оператор  $A$  имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора  $\bar{A}$  самосопряжен в  $H$ , иначе говоря, оператор  $A$  самосопряжен в существенном.

**ТЕОРЕМА 4.2.**

(а) Оператор

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0;$$

самосопряжен в существенном в пространстве  $H = L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$  прямоугольник лежащий на верхней полуплоскости  $(x, t) \in R^2$ .

(б) Если

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{m^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

то существует обратный оператор  $\bar{L}^{-1}$ , который также самосопряжен.

**Доказательство теоремы 3.1.**

Пусть на вещественной прямой отмечено бесконечное число точек

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots;$$

мы накручиваем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будет ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки  $\alpha_n$  покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число  $n_\alpha$  тех из первых  $n$  отмеченных точек  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которые при накручивании попадают на дугу,  $\alpha$  асимптотически задается в виде  $|\alpha|n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|;$$

при этом  $|\alpha|$  означает длину дуги  $\alpha$ . О равномерной плотности распределения отмеченных точек на окружности мы будем говорить в том и только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги  $\alpha$ . Накручивание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1 т.е., что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторое целое число. Среди чисел  $x$ , которые сравнимы по модулю 1, с некоторым заданным числом  $\alpha$  имеется одно и только одно такое, для которого выполняется неравенство  $0 \leq x \leq 1$ ; это число, сравнимое с  $\alpha$  по модулю 1, будет обозначаться  $(\alpha)$ .

**Первая теорема Вейля [3].** Если  $\xi$  – некоторое иррациональное число, то последовательность точек

$$1 \cdot \xi, 4 \cdot \xi, 9 \cdot \xi, 16 \cdot \xi, 25 \cdot \xi, \dots$$

при накручивании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно. То же самое будет выполняться, если квадраты чисел заменить на их кубы или четвертые степени и т.д.

В связи с этой теоремой Вейля возникает вопрос: "А не уплотняются ли собственные значения нашего оператора с ростом индексов  $m, n$ ".

Найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Нас особо интересует окрестность нулевой точки, если она окажется предельной точкой для множества собственных значений, то обратной оператор  $\bar{L}^{-1}$  окажется неограниченным.

Если,  $n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$  т.е. является нечетным числом, то

$$\lambda_{m, 2k+1} = - \left( 2k + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому  $|\lambda_{m, 2k+1}| = \left( 2k + \frac{3}{2} \right) \frac{\pi}{T} + \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \geq \frac{3\pi}{2T}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$

Если  $n = 2k, k, m = 0, 1, 2, \dots$  т.е. является четным числом, то

$$\lambda_{m, 2k} = \left( 2k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда  $|\lambda_{m, 2k}| = \left| \frac{\pi}{T} \left( 2k + \frac{1}{2} - m^2 \frac{T\pi}{l^2} \right) \right| = \frac{2\pi}{T} \left| k + \frac{1}{4} - m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right|.$

Пусть  $[x]$  – означает целую часть числа  $x$ , тогда имеет место неравенство

$$\left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] \leq m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \leq \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1.$$

Полагая,

$$k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right]$$

имеем

$$|\lambda_{m,2k}| = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - \left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right],$$

где  $(x)$  — означает дробную часть числа  $x$ .

Если число  $\frac{T\pi}{2l^2}$  иррациональное, то в силу теоремы Вейля числа  $\left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$  всюду плотны в отрезке  $[0,1]$ , а это означает, что существует подпоследовательность последовательности  $\left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  которая сходится к  $\frac{1}{4}$ , т.е.  $\{\lambda_{m,2k}\} \rightarrow 0$ . Следовательно, обратный оператор  $\bar{L}^{-1}$  неограничен в пространстве  $L^2(\Omega)$ . Более того, замыкание множества  $\left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  совпадает с отрезком  $[0,1]$ . Таким образом, оператор  $\bar{L}$  обладает непрерывным спектром, который содержит отрезок  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T} \right]$ .

Полагая,

$$k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1$$

имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} + 1 - \left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right] \succ \frac{2\pi}{4T} = \frac{\pi}{2T}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Замыкание этого множества  $\{\lambda_{m,2k}\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ;  $k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1$  совпадает с отрезком  $\left[ \frac{\pi}{2T}, \frac{5\pi}{2T} \right]$ .

Далее полагая  $k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 2$ ,  $k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 3$  и т.д. видим, что замыкание множество  $\{\lambda_{m,2k}\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$  покрывает всю полуось  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, +\infty \right)$ .

Пусть теперь  $\left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1 \succ 0$ , очевидно, что начиная с некоторого номера это неравенство выполняется.

Полагая

$$k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1$$

имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - 1 - \left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right], \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно  $\{\overline{\lambda_{m,2k}}\} = \left[ -\frac{7\pi}{2T}, \frac{-3\pi}{2T} \right]$ , где  $k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1$ ,  $m = 1, 2, \dots$

От прибавления или отнятия конечного числа элементов, множество предельных точек любого множества не изменится, поэтому имеет место равенства

$$\left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) = \left( (m+i)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right), \quad m = 1, 2, \dots$$

для любого натурального числа  $i$ . При выводе последнего равенства мы воспользовались этим фактом.

Полагая

$$k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 2 > 0, \quad k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 3 > 0, \dots$$

и т.д. мы видим, что  $\{\overline{\lambda_{m,2k}}\} = (-\infty, +\infty)$ ,  $k, m = 0, 1, 2, \dots$

Спектр оператора  $\bar{L}$  состоит из собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$  и непрерывного спектра покрывающего всю числовую ось.

Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  — рациональное число, то множество  $\left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  состоит из конечного числа элементов, поэтому хотя бы один из них встречается бесконечное число раз. Следовательно, множество  $\left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  имеет хотя бы одну предельную точку лежащую в сегменте  $[0, 1]$ , тогда последовательность

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - \left( m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right], \quad k = \left[ m^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right], \quad m = 1, 2, \dots$$

имеет хотя бы одну и не более конечного числа предельных точек лежащих в сегменте  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T} \right]$ .

Продолжая это рассуждение, аналогично иррациональному случаю, заметим, что в каждом сегменте длиной  $\frac{2\pi}{T}$  содержится не более конечного и не менее одного числа предельных точек последовательности  $\{\lambda_{m,2k}\}$ . Это говорит о том, что предельный спектр состоит из счетного множества изолированных точек разбросанных на всей числовой оси от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В частности точка  $\lambda = 0$  может оказаться бесконечномерным собственным значением.

## 5. Выводы.

Для одноэлектронной задачи по физическим соображениям можно ожидать, что если  $V(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то непрерывный спектр  $H$  также заполнит  $[0, \infty)$ , поскольку частица на очень больших расстояниях практически свободна, а свободная частица может иметь любую положительную энергию. Эта гипотеза подтверждена большим вычислительным опытом, но более точные утверждения нуждаются в некотором спектральном понятии. Именно, существенный спектр оператора состоит из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, мы добавляем к непрерывному спектру: (1) любые собственные значения, лежащие в нем или на его краях, (2) любые предельные точки спектра, (3) собственные значения бесконечной кратности, если они существуют.

Путем проверки различных случаев устанавливается, что точки существенного спектра можно характеризовать приближенными собственными векторами (возможно, включая истинные собственные векторы) следующим образом:  $\lambda$  принадлежит существенному спектру оператора  $H$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{v_j\}_1^\infty$  линейно независимых (или, если угодно, взаимно ортогональных) единичных векторов, таких, что  $\|Hv_j - \lambda v_j\| \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Теоремы, полученные до сего времени, не в состоянии дать вполне удовлетворительную характеристику спектра по следующей причине: можно определить некий самосопряженный оператор, собственные значения которого составят счетное всюду плотное множество в интервале  $I$  (конечном или бесконечном), а собственные векторы образуют полную систему. Ясно, это не то, что обычно называют «непрерывный спектр», так как, например, в разложении по собственным функциям не появится никаких «собственных функций непрерывного спектра», а спектральный проектор  $E_t$  не будет непрерывным по  $t$  в любой точке  $I$ . Тем не менее, весь интервал  $I$  представляет собой существенный спектр (некоторые его участки принадлежат непрерывному спектру).

Известные до сего времени теоремы не исключают возможность того, что существенный спектр оператора Шредингера является спектром такого рода. Более того, теорема Вейля и фон Неймана утверждает, что чисто непрерывный спектр (т.е. такой, на котором  $E_t$  непрерывен) может быть преобразован в спектр описанного вида при помощи произвольно малого относительно компактного возмущения (на самом деле с помощью возмущения  $V$  типа Гамильтона-Шмидта с произвольно малой нормой Гильберта-Шмидта).

Даже если  $E_t$  непрерывен, спектр может все еще быть кусочным в некотором смысле. Напомним, что любая неубывающая функция (или любая функция  $f(t)$  локально ограниченной вариации) может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), \quad (*)$$

где  $f_1$  - скачкообразная функция,  $f_2$  абсолютно непрерывна, а  $f_3$  сингулярно непрерывна. Функция  $f_2$  равна интегралу Лебега от своей производной, а производная  $f_3$  равна нулю почти для всех  $t$  (функция Кантора является функцией типа  $f_3$ ). В интервалах, где  $f_1$  и  $f_3$  - константы,  $f$  является абсолютно непрерывной. Пусть теперь  $\{E_t\}$  - разложение единицы для самосопряженного оператора  $H$ . Для любого  $v$  в гильбертовом пространстве  $(v, E_t v)$  является неубывающей функцией  $t$ , а значит, для нее возможна декомпозиция (\*). Скачки  $f_1$  происходят в собственных значениях оператора  $H$ . Спектр  $H$  называется абсолютно непрерывным в интервале  $I$ , если  $(v, E_t v)$  - абсолютно непрерывная функция в  $I$  для каждого  $v$  в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным.

Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения  $(v, E_t v)$  всегда состоит из первых двух членов (\*). Однако, это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для  $E_t$ .

Хотелось бы иметь возможность сказать, что для атома нет никаких собственных значений в непрерывном спектре, т.е. выше уровня ионизации. Для некоторых атомов не существует истинных собственных значений полного гамильтониана для энергии  $\lambda$  выше уровня ионизации. Всегда ли это верно – вопрос открытый [1. с. 268].

Наконец, следует упомянуть другой пример, приведенный Винером [21] со ссылкой на К. Малера [22], в котором появляется так называемый сингулярный непрерывный спектр. Напомним, что неубывающая функция  $S(\omega)$  может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: функции скачков со счетным числом последних, абсолютно непрерывной функции и непрерывной функции, имеющей равную нулю производную почти всюду, как функция Кантора [1. с. 88].

Наши результаты подтверждают точку зрения Н. Винера, при этом оператор не является искусственным и в некотором смысле близка к уравнению Шредингера. Мы утверждаем, что в разложении  $dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ , отсутствует абсолютно непрерывная компонента и доминирует сингулярная составляющая, где  $dE(\lambda)$  спектральная мера оператора, это резко контрастирует с известными на сегодняшний день фактами.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М. Мир, 1982.
- [2] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, спектральная теория. – М.: Мир, 1974.
- [3] Рудин У. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – с. 391-399.
- [4] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl. Math., vol.III, Amer. Math.Soc., Providence, R.I., 1965.
- [5] Фаддеев Л.Д., Структура резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, ДАН СССР, 138:3(1961), 565-567.
- [6] Фаддеев Л.Д., Структура резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц, и задача рассеяния, ДАН СССР, 145:2(1962), 301-304.
- [7] Фаддеев Л.Д., Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, Тр. МИАН СССР им.Стеклова, 69(1963), 1-122.
- [8] Lax P.D., Phillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, 1967.
- [9] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.
- [10] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [11] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнения с отклоняющимися аргументами. - Институт математики МО и Н РК «Математический журнал».- Алматы 2004, т. 4, №3 (13) с. 41-48.
- [12] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.
- [13] Вейль Г. Избранные труды. - М.: Наука, 1984. – 510 с.
- [14] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Ғылым, 1993. – 328с.
- [15] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Научный журнал Мин Образ/я и Науки «Поиск», № 4/2009, г. Алматы, с. 204-209.
- [16] Шалданбаев А.Ш. Критерии вольтерровости дифференциального оператора первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Вестник Карагандинского Университета, серия «Математика», № 3(47)/2007, с.39-43.
- [17] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332с.
- [18] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени. // Известия НАН РК, серия физ. – мат. – Алматы, 2000. – с.29-34.
- [19] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика-механика. 1982. - №3. - с. 6–11.
- [20] Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений.- 193с, Монография. LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com, Saarbrücken 2011, Germanu.
- [21] Wiener N., Generalized harmonic analysis.-Acta Math., v.55, p.117-258.
- [22] Mahler K. On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ.Math.Phys. M.I.T.6(1927). 158-164.

## REFERENCES

- [1] Rikhtmayer R. Principles of modern mathematical physics. M. Mir, **1982**.
- [2] Danford N., Schwartz Dzh. T. Linear operators, spectral theory. M.: World, **1974**.
- [3] Rudin U. Functional analysis. M.: World, **1975**. page 391-399.
- [4] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl.Math., vol.III, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., **1965**.
- [5] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles with pair interaction, SSSR, 138:3 (**1961**), 565-567 is GIVEN.
- [6] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles, and a zalacha of dispersion, SSSR, 145:2(**1962**), 301-304 is GIVEN.
- [7] Faddeev L.D., Mathematical questions of the kvanrovy theory of dispersion for system of three particles, Tr. MIAN USSR of Steklov, 69(1963), 1-122.
- [8] Lax P.D., Phillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, **1967**.
- [9] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, **1966**.
- [10] Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, **2002**. page 58-62.

- [11] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. To the spectral theory of the equation with the deviating arguments. Institute of mathematics of MO and N of RK "Mathematical Magazine".-Almaty **2004**, t. 4, No. 3 (13) of page 41-48.
- [12] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives. M.: World, **1977**.
- [13] Veyl G. Chosen works. M.: Science, 1984. 510 pages.
- [14] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type. Shymkent: □yly, **1993**. – 328 pages.
- [15] Shaldanbayev A.Sh., Rustemova K. About a periodic task for the equation of the first order with the deviating argument. - Image Min scientific magazine / I and Sciences "Search", No. 4/**2009**, Almaty, page 204-209.
- [16] Shaldanbayev A.Sh. Criteria of a volterrovost of the differential operator of the first order with the deviating argument. - Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, No. 3(47)/**2007**, page 39-43.
- [17] Marchenko V.A. Operators of Storm – Liouville and their appendix. Kiev: Naukova thought, **1977**. 332 pages.
- [18] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh. About structure of a range of a regional problem of Storm – Liouville on a final piece времени.//NAN RK'S News, a series physical. mat. Almaty, **2000**. page 29-34.
- [19] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Storm Liouville//the Bulletin of MSU. Series 1. Mathematician-mechanic. **1982**. No. 3. page 6-11.
- [20] Spectral decomposition of regional tasks correct-incorrect nachalno for some classes of the differential equations. - 193c, Monograph. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011, Germanu.
- [21] Wiener N., Generalized harmonic analysis. - Acta Math., v.55, p.117-258.
- [22] K.Mahler.On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ.Math.Phys. M.I.T.6 (1927). 158-164.

## АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕНДЕУІНІҢ ШЕКАРАЛЫҚ КОШИ-НЕЙМАН ЕСЕБІНЕ СӘЙКЕС ОПЕРАТОРДЫҢ СПЕКТРІНІҢ ҚҰРАМЫ ТУРАЛЫ

**А.Ш.Шалданбаев,М.Т.Шомабаева,С.Т.Ахметова**

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

**Сырлы сөздер:** ауытқыған аргумент, үзіксіз спектр, сингулярлы спектр, абсолютті үзіксіз спектр, спектралді таралым, Кантордың функциясы.

**Аннотация.** Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің шекаралық Коши-Нейман есебіне сәйкес оператордың спектралді теориясы тұрғызылды, меншікті мәндері табылды, оларға сәйкес меншікті функциялар табылып, олардың толымдылығы мен базистігі дәлелденді,спектралді таралымы алынды, сонымен бірге,спектрінің құрамы егжей-тегжей зерттелді,нәтижесінде абсолютті мүшенің жоқ екені, оның есесіне сингуляр мүшенің басымдылығы айқындалды. Мұндай спектрдің болуы мүмкін екеніне алғаш рет Н.Винер назар аударған, ол Кантордың функциясына ұқсайды.

*Поступила 03.13.2016 г.*

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 180–190

UDC 517.929

**ABOUT THE CONTINUOUS RANGE OF THE OPERATOR  
OF THE SEMI-FIXED REGIONAL TASK FOR THE HEAT  
CONDUCTIVITY EQUATION WITH THE DEVIATING ARGUMENT**

**M. T. Shomanbayeva, A.Sh.Shaldanbayev, S.T.Achmetova**

YuKGU of M. Aueyzov, Shymkent

**Keywords:** the deviating arguments, a continuous range, a singular range, absolutely continuous range, spectral decomposition, function of the Cantor.

**Abstract.** In this work the spectral theory of the operator corresponding to the semi-fixed regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument is constructed, own functions are found, their completeness and a bazisnost is shown, spectral decomposition is received, the structure of a range is in details investigated, in particular, absence absolutely continuous components and presence singular function components of the Cantor predicted earlier by N. Winer is proved.

УДК 517.929

**О НЕПРЕРЫВНОМ СПЕКТРЕ ОПЕРАТОРА ПОЛУЗАКРЕПЛЕННОЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ  
С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ**

**М.Т.Шоманбаева, А.Ш.Шалданбаев, С.Т.Ахметова**

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

**Ключевые слова:** отклоняющиеся аргумент, непрерывный спектр, сингулярный спектр, абсолютно непрерывный спектр, спектральное разложение, функция Кантора.

**Аннотация.** В данной работе построена спектральная теория оператора соответствующего полужакрытой краевой задаче для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом, найдены собственные функции, показана их полнота и базисность, получено спектральное разложение, детально исследован состав спектра, в частности, доказано отсутствие абсолютно непрерывной компоненты и присутствие сингулярной компоненты типа функции Кантора, предсказанного ранее Н. Винером.

**1. Введение.**

Спектральную теорию линейных операторов можно считать, завершенной, поскольку, для таких операторов получено спектральное разложение, следующего вида

$$A = \int \lambda dE(\lambda),$$

где  $dE(\lambda)$  – так называемая спектральная функция, которая разлагается на сумму трех функций

$$dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), (*)$$

где  $f_1$  - скачкообразная функция,  $f_2$  абсолютно непрерывна, а  $f_3$  сингулярно непрерывна. Функция  $f_2$  равна интегралу Лебега от своей производной, а производная  $f_3$  равна нулю почти для всех  $t$  (функция Кантора является функцией типа  $f_3$ ). В интервалах, где  $f_1$  и  $f_3$  - константы,  $f$  является абсолютно непрерывной. Пусть теперь  $\{E_t\}$  - разложение единицы для самосопряженного оператора  $A$ . Для любого  $v$  в гильбертовом пространстве  $(v, E_t v)$  является неубывающей функцией  $t$ , а значит, для нее возможна декомпозиция (\*). Скачки  $f_1$  происходят в собственных значениях оператора  $A$ . Спектр  $A$  называется абсолютно непрерывным в интервале  $I$ , если  $(v, E_t v)$  - абсолютно непрерывная функция в  $I$  для каждого  $v$  в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным.

Кажется разумным предположение, что спектры гамильтониана атомов и молекул, исключая собственные значения, всегда абсолютно непрерывны, иначе говоря, декомпозиция произведения  $(v, E_t v)$  всегда состоит из первых двух членов (\*). Однако, это не доказано, кроме некоторых случаев, подобных атому водорода, для которых известно явное выражение для  $E_t$ .

Хотелось бы иметь возможность сказать, что для атома нет никаких собственных значений в непрерывном спектре, т.е. выше уровня ионизации. Для некоторых атомов не существует истинных собственных значений полного гамильтониана для энергии  $\lambda$  выше уровня ионизации. Всегда ли это верно – вопрос открытый.

Точечным спектром  $P\sigma(A)$  называют множество собственных значений оператора  $A$ , т.е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in H\}.$$

Непрерывным спектром  $C\sigma(A)$  оператора  $A$  называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}$ , а остаточным спектром  $R\sigma(A)$  – множество

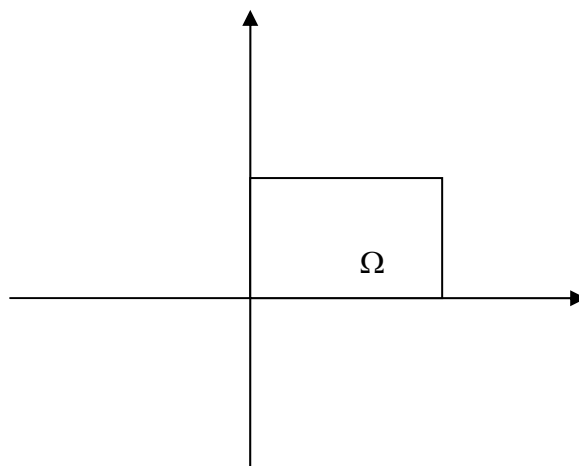
$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ - имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } H\}$ .

Для большинства представляющих интерес операторов (включая все самосопряженные, унитарные и вообще нормальные) остаточный спектр пуст, и поэтому непрерывный спектр можно представить себе состоящим из таких  $\lambda$ , для которых можно построить с наперед заданной точностью приближенный собственный вектор, не являющийся, однако, точным собственным вектором. [1.с.174-175].

К теме настоящей работы посвящены много численные исследования отечественных и зарубежных ученых, подробные сведения о которых можно найти в монографиях [2-9].

В данной работе, мы покажем, что абсолютный спектр отсутствует, поэтому спектр состоит из собственных значений и сингулярной компоненты, вроде функции Кантора.

**Постановка задачи.** Пусть  $\Omega \subset R^2$  – прямоугольник ограниченный отрезками:  $AB: 0 \leq t \leq T, x = 0$ ;  $BC: 0 \leq x \leq l, t = T$ ;  $CD: 0 \leq t \leq T, x = l$ ;  $DA: 0 \leq x \leq l, y = 0$ ; /см. Рис. 1/.



Через  $C^{1,2}(\Omega)$  – обозначим множество функции  $u(x, t)$  единожды непрерывно дифференцируемых по  $t$  и дважды непрерывно дифференцируемых по  $x$  в области  $\Omega$ . Под границей области понимаем совокупность отрезков  $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$ .

**Полузакрепленная задача.** Найти решения уравнения

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (1)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0; \quad (2)$$

**Определение 1.1.** Регулярным решением задачи (1)+(2) будем понимать функцию  $u(x, t) \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ , обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2).

**Определение 1.2.** Функция  $u \in L^2(\Omega)$  называют сильным решением задачи, если существует последовательность функции  $\{u_n\} \in C^{1,2}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  и удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что  $\{u_n\}$  и  $\{Lu_n\}$  сходятся в  $L^2(\Omega)$  соответственно к  $u$  и  $f$ .

**Определение 1.3.** Краевая задача (1)+(2) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  и единственно.

**Определение 1.4.** Точечным спектром  $P\sigma(A)$  называют множество собственных значений оператора  $A$ , т.е.

$$P\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: Au = \lambda u \text{ для некоторого ненулевого } u \in H\}.$$

Непрерывным спектром  $C\sigma(A)$  оператора  $A$  называется множество

$C\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I \text{ имеет неограниченный обратный оператор с плотной в } H \text{ областью определения}\}$ , а остаточным спектром  $R\sigma(A)$  – множество

$R\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}: A - \lambda I - \text{имеет обратный (ограниченный или неограниченный) оператор, область определения которого не плотна в } H\}$ .

Целью данной работы является, исследование спектральных свойств линейного оператора соответствующего краевой задаче (1)+(2), изучение структуры спектра этого оператора, и с помощью спектрального разложения показать сильную разрешимость краевой задачи (1)+(2) в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

## 2. Методы исследований.

Краевая задача (1)+(2), не относится к числу классических краевых задач математической физики, поэтому широко известные методы не применимы.

Для решения поставленной задачи применяем методы теории линейных операторов [2,3] и анализ Фурье [10-12], при исследовании непрерывного спектра была существенно использованы результаты одной работы Вейля об равномерном распределении [13]. Следует отметить, что теорию возмущения непрерывного спектра линейных операторов посвящены многочисленные работы []

## 3. Результаты исследований.

### Теорема 3.1.

(а) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – иррациональное число, то спектр оператора

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t), \\ u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

совпадает с числовой осью  $(-\infty, +\infty)$ . Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений отличных от нуля и из предельных точек собственных значений. Оператор  $\bar{L}$  – самосопряжен и обратим, но  $\bar{L}^{-1}$  – неограничен.

(б) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число и  $\frac{1}{4} \notin \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то оператор  $\bar{L}$  –

самосопряжен и ограниченно обратим. Спектр оператора  $\bar{L}$  состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеет предельных точек, точнее на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ . Оператор  $\bar{L}^{-1}$  – ограничен, но не компактен.

(в) Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число и  $\frac{1}{4} \in \overline{\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , то обратный

оператор  $\bar{L}^{-1}$  не существует,  $\lambda = 0$  является собственным значением (возможно бесконечнократным). Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ .

Предельный спектр состоит из бесконечнократных собственных значений.

**Теорема 3.2.** Для существования и единственности сильного решения краевой задачи

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{\left( m + \frac{1}{2} \right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

При выполнении этого условия сильное решение задачи существует и имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} u_{mn}(x, t)$$

для всех  $f(x, t) \in L^2(\Omega)$  удовлетворяющих условию

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \right|^2 < +\infty,$$

где

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{TL}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

#### 4. Обсуждение результатов исследований.

##### Лемма 4.1.

(а) Оператор  $L$  соответствующий, краевой задаче (1)+(2) симметричный.

(б) Спектральная задача

$$\dot{v}(T-t) = \mu \cdot v(t),$$

$$v(0) = 0;$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\mu_n = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$v_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ .

(с) Полузакрепленная спектральная задача

$$\begin{aligned} -w''(x) &= v^2 w(x), \\ w(0) &= w'(l) = 0 \end{aligned}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\nu_m = \left( m + \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{\pi}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

и соответствующих им собственных функций

$$w_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ .

(d) Если система функций  $\{\varphi_m(x)\}, m = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, l)$ , а система функций  $\{\psi_n(t)\}, n = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(0, T)$ , то система функций  $u_{mn}(x, t) = \varphi_m(x) \cdot \psi_n(t), m, n = 1, 2, \dots$  образует ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

Из полученных выше формул следует, что собственными функциями спектральной задачи (4)+(5) являются функций

$$u_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{tl}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

которые в силу леммы 4.4 образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

**Теорема 4.1.** Спектральная задача

$$u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t) = \lambda u(x, t) \quad (3)$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0 \quad (4)$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$\lambda_{mn} = \mu_n - \nu_m^2 = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$  и соответствующих им собственных функций:

$$y_{mn}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{tl}} \sin \left( m + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{l} \cdot \sin \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

которые образуют ортонормированный базис пространства  $L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$ .

**Лемма 4.2.** Если симметрический оператор  $A$  имеет полную систему собственных векторов, то замыкание этого оператора  $\bar{A}$  самосопряжен в  $H$ , иначе говоря, оператор  $A$  самосопряжен в существенном.

**Теорема 4.2.**

(a) Оператор

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0$$

самосопряжен в существенном, в пространстве  $H = L^2(\Omega)$ , где  $\Omega = [0, l] \times [0, T]$  прямоугольник, лежащий на верхней полуплоскости  $(x, t) \in R^2$ ;

(b) Если

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n + \frac{1}{2}}{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

то существует обратный оператор  $\bar{L}^{-1}$ , который также самосопряжен.

**Доказательство теоремы 3.1.**

Пусть на вещественной прямой отмечено бесконечное число точек

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots;$$

мы наматываем прямую на некоторую окружность длины 1 и ставим вопрос о том, будут ли при этом находящиеся на отмеченных местах точки  $\alpha_n$  покрывать окружность с равномерной плотностью. Так будет в том случае, когда число  $n_\alpha$  тех из первых  $n$  отмеченных точек  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которые при наматывании попадают на дугу  $\alpha$ , асимптотически задается в виде  $|\alpha|n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = |\alpha|;$$

при этом  $|\alpha|$  означает длину дуги  $\alpha$ . О равномерной плотности распределения отмеченных точек на окружности мы будем говорить в том и только в том случае, когда это предельное равенство будет выполняться для каждой дуги  $\alpha$ . Наматывание прямой на окружность означает, что вещественные числа рассматриваются по модулю 1, т.е. что два числа считаются равными в том случае, когда они отличаются на некоторое целое число. Среди чисел  $x$ , которые сравнимы по модулю 1 с некоторым заданным числом  $\alpha$  имеется одно и только одно такое для которого выполняется неравенство  $0 \leq x \leq 1$ ; это число сравнимое с  $\alpha$  по модулю 1, будет обозначаться  $(\alpha)$ .

**Первая теорема Вейля.** Если  $\xi$  – некоторое иррациональное число, то последовательность точек

$$1 \cdot \xi, 4 \cdot \xi, 9 \cdot \xi, 16 \cdot \xi, 25 \cdot \xi, \dots$$

при наматывании числовой прямой на окружность длины 1 покрывает ее всюду равномерно плотно. То же самое будет выполняться, если квадраты чисел заменить на их кубы или четвертые степени и т.д.

В связи с этой теоремой Вейля возникает вопрос: "А не уплотняются ли собственные значения нашего оператора с ростом индексов  $m, n$ ".

Найденные нами собственные значения имеют вид

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{T} - \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Нас особо интересует окрестность нулевой точки, если она окажется предельной точкой для множества собственных значений, то обратной оператор  $\bar{L}^{-1}$  окажется неограниченным.

Если,  $n = 2k + 1, k = 0, 1, 2, \dots$  т.е. является нечетным числом, то

$$\lambda_{m,2k+1} = -\left(2k + \frac{3}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Поэтому  $|\lambda_{m,2k+1}| \geq \frac{3\pi}{2T}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$

Если  $n = 2k, k, m = 0, 1, 2, \dots$  т.е. является четным числом, то

$$\lambda_{m,2k} = \left(2k + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{l^2}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда  $|\lambda_{m,2k}| = \frac{\pi}{T} \left| 2k + \frac{1}{2} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{l^2} \right| = \frac{2\pi}{T} \left| k + \frac{1}{4} - \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right|$ .

Пусть  $[x]$  — означает целую часть числа  $x$ , тогда имеет место неравенство

$$\left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] \leq \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \leq \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1.$$

Полагая,  $k = \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right]$  имеем

$$|\lambda_{m,2k}| = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - \left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right],$$

где  $(x)$  — означает дробную часть числа  $x$ . Имеет место следующая теорема (вторая теорема Вейля).

**Вторая теорема Вейля.** Если  $\varphi(z)$  — некоторый многочлен со свободным членом  $\alpha_0$  и у  $\varphi(z) - \alpha_0$  не все коэффициенты рациональны, то последовательность чисел

$$\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3) \dots$$

распределена всюду равномерно плотно.

Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  иррациональное число в силу теоремы Вейля числа  $\left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$  всюду плотны в отрезке  $[0, 1]$ , а это означает, что существует подпоследовательность последовательности  $\left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots$  которая сходится к  $\frac{1}{4}$ , т.е.  $\{\lambda_{m,2k}\} \rightarrow 0$ . Следовательно, обратный оператор  $\bar{L}^{-1}$  неограничен в пространстве  $L^2(\Omega)$ . Более того замыкание множества  $\left( \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right),$

$m = 0, 1, 2, \dots$  совпадает с отрезком  $[0, 1]$ . Таким образом, оператор  $\bar{L}$  обладает непрерывным спектром который содержит отрезок  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T} \right]$ .

Полагая,  $k = \left[ \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1$  имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} + 1 - \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right] \succ \frac{\pi}{2T}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Замыкание этого множества  $\{\lambda_{m,2k}\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ ;  $k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 1$  совпадает с отрезком  $\left[ \frac{\pi}{2T}, \frac{5\pi}{2T} \right]$ .

Далее полагая  $k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 2$ ,  $k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] + 3$  и т.д. видим, что замыкание множество  $\{\lambda_{m,2k}\}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  покрывает всю полуось  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, +\infty \right)$ .

Пусть теперь  $\left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1 \succ 0$ , очевидно, что начиная с некоторого номера это неравенство выполняется.

Полагая

$$k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1$$

имеем

$$\lambda_{m,2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - 1 - \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно  $\overline{\{\lambda_{m,2k}\}} = \left[ -\frac{7\pi}{2T}, -\frac{3\pi}{2T} \right]$ , где

$$k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

От прибавления или отнятия конечного числа элементов, множества не изменится, поэтому имеет место равенства

$$\overline{\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)} = \overline{\left( \left( m + \frac{1}{2} + i \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

для любого натурального числа  $i$ . При выводе последнего равенства мы воспользовались этим фактом.

Полагая,

$$k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 2 \succ 0, \quad k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right] - 3 \succ 0, \dots$$

и т.д. мы видим, что  $\overline{\{\lambda_{m,2k}\}} = (-\infty, +\infty)$ ,  $k, m = 0, 1, 2, \dots$

Спектр оператора  $\bar{L}$  состоит из собственных значений  $\{\lambda_{mn}\}$ ,  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  и непрерывного спектра покрывающего всю числовую ось.

Если  $\frac{T\pi}{2l^2}$  – рациональное число, то множество  $\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  состоит из конечного числа элементов, поэтому хотя бы один из них повторяется бесконечное число раз при

изменений индекса  $m$ . Следовательно, множество  $\left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  имеет хотя бы одну предельную точку лежащую в сегменте  $[0, 1]$ , тогда последовательность

$$\lambda_{m, 2k} = \frac{2\pi}{T} \left[ \frac{1}{4} - \left( \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right) \right], \quad k = \left[ \left( m + \frac{1}{2} \right)^2 \frac{T\pi}{2l^2} \right], \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

имеет хотя бы одну и не более конечного числа предельных точек лежащих в сегменте  $\left[ -\frac{3\pi}{2T}, \frac{\pi}{2T} \right]$ .

Продолжая это рассуждение, аналогично иррациональному случаю, заметим, что в каждом сегменте длиной  $\frac{2\pi}{T}$  содержится не более конечного и не менее одного числа предельных точек последовательности  $\{\lambda_{m, 2k}\}$ ,  $m, k = 0, 1, 2, \dots$ . Это говорит о том, что предельный спектр состоит из счетного множества изолированных точек разбросанных на всей числовой оси от  $-\infty$  до  $+\infty$ . В частности точка  $\lambda = 0$  может оказаться бесконечномерным собственным значением.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Нетрудно заметить, что каждый элемент предельного спектра является в самом деле бесконечнократным собственным значением.

## 5. Выводы.

Для одноэлектронной задачи по физическим соображениям можно ожидать, что если  $V(x) \rightarrow 0$  при  $|x| \rightarrow \infty$ , то непрерывный спектр  $H$  также заполнит  $[0, \infty)$ , поскольку частица на очень больших расстояниях практически свободна, а свободная частица может иметь любую положительную энергию. Эта гипотеза подтверждена большим вычислительным опытом, но более точные утверждения нуждаются в некотором спектральном понятии. Именно, существенный спектр оператора состоит из всех точек спектра, за исключением изолированных собственных значений конечной кратности. Таким образом, мы добавляем к непрерывному спектру: (1) любые собственные значения, лежащие в нем или на его краях, (2) любые предельные точки спектра, (3) собственные значения бесконечной кратности, если они существуют.

Путем проверки различных случаев устанавливается, что точки существенного спектра можно характеризовать приближенными собственными векторами (возможно, включая истинные собственные векторы) следующим образом:  $\lambda$  принадлежит существенному спектру оператора  $H$  тогда и только тогда, когда существует последовательность  $\{v_j\}_1^\infty$  линейно независимых (или, если угодно, взаимно ортогональных) единичных векторов, таких, что  $\|Hv_j - \lambda v_j\| \rightarrow 0$  при  $j \rightarrow \infty$ .

Теоремы, полученные до сего времени, не в состоянии дать вполне удовлетворительную характеристику спектра по следующей причине: можно определить некий самосопряженный оператор, собственные значения которого составят счетное всюду плотное множество в интервале  $I$  (конечном или бесконечном), а собственные векторы образуют полную систему. Ясно, это не то, что обычно называют «непрерывный спектр», так как, например, в разложении по собственным функциям не появится никаких «собственных функций непрерывного спектра», а спектральный проектор  $E_t$  не будет непрерывным по  $t$  в любой точке  $I$ . Тем не менее, весь интервал  $I$  представляет собой существенный спектр (некоторые его участки принадлежат непрерывному спектру).

Известные до сего времени теоремы не исключают возможность того, что существенный спектр оператора Шредингера является спектром такого рода. Более того, теорема Вейля и фон Неймана утверждает, что чисто непрерывный спектр (т.е. такой, на котором  $E_t$  непрерывен) может быть преобразован в спектр описанного вида при помощи произвольно малого относительно компактного возмущения (на самом деле с помощью возмущения  $V$  типа Гамильтона-Шмидта с произвольно малой нормой Гильберта-Шмидта).

Даже если  $E_t$  непрерывен, спектр может все еще быть кусочным в некотором смысле. Напомним, что любая неубывающая функция (или любая функция  $f(t)$  локально ограниченной вариации) может быть представлена в виде

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t), \quad (*)$$

где  $f_1$  - скачкообразная функция,  $f_2$  абсолютно непрерывна, а  $f_3$  сингулярно непрерывна. Функция  $f_2$  равна интегралу Лебега от своей производной, а производная  $f_3$  равна нулю почти для всех  $t$  (функция Кантора является функцией типа  $f_3$ ). В интервалах, где  $f_1$  и  $f_3$  - константы,  $f$  является абсолютно непрерывной. Пусть теперь  $\{E_t\}$  - разложение единицы для самосопряженного оператора  $H$ . Для любого  $v$  в гильбертовом пространстве  $(v, E_t v)$  является неубывающей функцией  $t$ , а значит, для нее возможна декомпозиция (\*). Скачки  $f_1$  происходят в собственных значениях оператора  $H$ . Спектр  $H$  называется абсолютно непрерывным в интервале  $I$ , если  $(v, E_t v)$  - абсолютно непрерывная функция в  $I$  для каждого  $v$  в гильбертовом пространстве; в противном случае спектр будет кусочным [1.с.268].

Наконец, следует упомянуть другой пример, приведенный Винером [21] со ссылкой на К.Малера [22], в котором появляется так называемый сингулярный непрерывный спектр. Напомним, что неубывающая функция  $S(\omega)$  может быть представлена в виде суммы трех слагаемых: функции скачков со счетным числом последних, абсолютно непрерывной функции и непрерывной функции, имеющей равную нулю производную почти всюду, как функция Кантора [1.с.88]

Наши результаты подтверждают точку зрения Н.Винера. Мы утверждаем, что в разложении  $dE(\lambda) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ , отсутствует абсолютно непрерывная компонента и доминирует сингулярная составляющая, где  $dE(\lambda)$  спектральная мера оператора, это резко контрастирует с известными на сегодняшний день фактами.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. – М. Мир, 1982.
- [2] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544с.
- [3] Данфорд Н., Шварц Дж.Т. Линейные операторы, спектральная теория. – М.: Мир, 1974.
- [4] Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra, Comm. Pure Appl. Math., vol.III, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965.
- [5] Фаддеев Л.Д. Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц с парным взаимодействием, ДАН СССР, 138:3 (1961), 565-567.
- [6] Фаддеев Л.Д., Строение резольвенты оператора Шредингера системы трех частиц и задача рассеяния, ДАН СССР, 145:2(1962), 301-304.
- [7] Фаддеев Л.Д., Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц, Тр. МИАН СССР им.Стеклова, 69(1963), 1-122.
- [8] Lax P.D., Phillips R.S., Scattering theory. Academic Press, New York, 1967.
- [9] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.
- [10] Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. – М.: Мир, 1977.
- [11] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [12] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнения с отклоняющимися аргументами. - Институт математики МО и Н РК «Математический журнал». - Алматы 2004, т. 4, №3 (13) с. 41-48.
- [13] Вейль Г. Избранные труды. - М.: Наука, 1984. – 510с.
- [14] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Ғылым, 1993. – 328с.
- [15] Шалданбаев А.Ш., Рустемова К. О периодической задаче для уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Научный журнал Мин Образ/я и Науки «Поиск», № 4/2009, г. Алматы, с. 204-209.
- [16] Шалданбаев А.Ш. Критерии вольтерровости дифференциального оператора первого порядка с отклоняющимся аргументом. - Вестник Карагандинского Университета, серия «Математика», № 3(47)/2007, с.39-43.
- [17] Марченко В.А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. – Киев: Наукова думка, 1977. – 332с.
- [18] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма – Лиувилля на конечном отрезке времени. // Известия НАН РК, серия физ. – мат. – Алматы, 2000. – с.29-34.
- [19] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма–Лиувилля // Вестник МГУ. Серия 1. Математика-механика. 1982. - №3. - с. 6–11.
- [20] Спектральные разложения корректных-некорректных начально краевых задач для некоторых классов дифференциальных уравнений. 193с. Монография. LAP LAMBERT Academic Publishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com, Saarbrücken 2011, Germanu.
- [21] Wiener N., Generalized harmonic analysis. - Acta Math., v.55, p.117-258.

[22] Mahler K. On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ. Math. Phys. M.I.T.6 (1927). 158-164.

#### REFERENCES

- [1] R. Rikhtmayer. Principles of modern mathematical physics. M. Mir, 1982.
- [2] Akhiezer N. I., Glazman I.M. The theory of linear operators in Hilbert space. M.: Science, 1966. 544 pages.
- [3] Danford N., Schwartz Dzh. T. Linear operators, spectral theory. M.: World, 1974.
- [4] Friedrichs K.O., On the perturbation of continuous spectra, Comm.Pure Appl.Math., vol.III, Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1965.
- [5] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles with pair interaction, SSSR,138:3(1961),565-567 is GIVEN.
- [6] Faddeev L.D., the Structure of a rezolventa of the operator Schrödinger of system of three particles, and a zalacha of dispersion, SSSR,145:2(1962),301-304 is GIVEN.
- [7] Faddeev L.D., Mathematical questions of the kvanrovy theory of dispersion for system of three particles, Tr. MIAN USSR of Steklov, 69(1963),1-122.
- [8] Lax P.D., Phillips R.S., Scattering theory, Academic Press, New York, 1967.
- [9] Kato T. Perturbation theory for linear operators, Springer, New York, 1966.
- [10] Mizokhata S. The theory of the equations with private derivatives. M.: World, 1977.
- [11] Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, 2002. page 58-62.
- [12] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh., Akhmetova S. T. To the spectral theory of the equation with the deviating arguments. Institute of mathematics of MO and N of RK "Mathematical Magazine". Almaty 2004, t. 4, No. 3 (13) of page 41-48.
- [13] Veyl G. Chosen works. - M.: Science, 1984. - 510 pages.
- [14] Kalmenov T.Sh. Regional tasks for the linear equations in private derivatives of hyperbolic type. Shymkent: □yly, 1993. - 328 pages.
- [15] Shaldanbayev A.Sh., Rustemova K. About a periodic task for the equation of the first order with the deviating argument. Image Min scientific magazine / I and Sciences "Search", No. 4/2009, Almaty, page 204-209.
- [16] Shaldanbayev A.Sh. Criteria of a volterrovost of the differential operator of the first order with the deviating argument. - Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, No. 3(47)/2007, page 39-43.
- [17] Marchenko V.A. Operators of Storm – Liouville and their appendix. Kiev: Naukova thought, 1977. 332 pages.
- [18] Kalmenov T.Sh., Shaldanbayev A.Sh. About structure of a range of a regional problem of Storm – Liouville on a final piece времени.//NAN RK'S News, a series physical. mat. Almaty, 2000. page 29-34.
- [19] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Storm Liouville//the Bulletin of MSU. Series 1. Mathematician-mechanic. 1982. No. 3. page 6-11.
- [20] Spectral decomposition of regional tasks correct-incorrect nachalno for some classes of the differential equations. - 193c, Monograph. LAP LAMBEPT Academic Pyblishing. <http://dnb.d-nb.de>. Email:info@lap-publishing.com,Saarbrucken 2011, Germanu.
- [21] Wiener N., Generalized harmonic analysis. Acta Math., v.55, p.117-258.
- [22] Mahler K. On the Translation Properties of a simple Class of Arithmetical Functions., Journ. Math. Phys. M.I. T.6 (1927). 158-164.

#### АРГУМЕНТІ АУЫТҚЫҒАН ЖЫЛУ ТЕҢДЕУІНІҢ ЖАРТАЛАЙ БЕКІТІЛГЕН ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕБІНЕ СӘЙКЕС ОПЕРАТОРДЫҢ ҮЗІКСІЗ СПЕКТРІ ТУРАЛЫ

М.Т.Шоманбаева, А.Ш.Шалданбаев, С.Т.Ахметова

ЮКГУ им. М.Ауезова, г. Шымкент

**Сырлы сөздер:** ауытқыған аргумент, үзіксіз спектр, сингулярлы спектр, абсолютті үзіксіз спектр, спектралді таралым, Кантордың функциясы.

**Аннотация.** Бұл еңбекте аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің жартылай бекіген шекаралық есебіне сәйкес оператордың спектралді теориясы тұрғызылды, меншікті мәндері табылды, оларға сәйкес меншікті функциялар табылып, олардың толымдылығы мен базистігі дәлелденді, спектралді таралымы алынды, сонымен бірге, спектрінің құрамы егжей-тегжей зерттелді, нәтижесінде абсолютті мүшенің жоқ екені, оның есесіне сингуляр мүшенің басымдылығы айқындалды. Мұндай спектрдің болуы мүмкін екеніне алғаш рет Н. Винер назар аударған, ол Кантордың функциясына ұқсайды.

Поступила 13.03.2016 г.

## NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

## PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 169–176

## ҰЛАҒАТТЫ ҰСТАЗ ТУРАЛЫ

## Шерәлі Біләл



Қазақстан республикасы Білім және ғылым министрлігі Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан.

Математика ғылымының қоғамдағы алатын орны туралы айту артық болар, себебі одан әрбір сауатты адам хабардар болса керек. Яғни, қоғамда математика араласпайтын сала кемде-кем. Сондықтан да, сол ғылымды жасап жүрген, оның өрістеуіне өз үлестерін қосып жүрген математик ғалымдар туралы сөз қозғасақ әбден орынды болмақ. Қазақстан ғылымы бүгінде қанатын кең жайып, дамудың даңғыл жолына түскен іспетті. Шекара ашылып, төрткүл дүниемен адами, ғылыми, басқа да қатынастар жолға қойылған. Сол ашықтықтық, яғни еркін қатынас мүмкіндігін математиктер қауымы дұрыс пайдалануда. Жыл сайын әлемде өтіп тұратын ірілі-кішілі ғылыми конференцияларға қатысып, баяндама жасап, өзін танытып, өзгеден тәлім алып, жаппай ортақ ғылымның дамуына сүбелі үлестерін қосып келеді. Сондай ғылыми басқосуларда ғалымдардың өзара танысып-білісуі негізінде отандық ғылым дамуына жағдай жасалады. Немесе, шетелдік үлкен ғалымдарды елге тартуға, сол арқылы жастарымызды ғылымға үйретуге мүмкіндік туады. Сондай мүмкіндіктерді біз кеңінен пайдаланып та жүрміз. Мысалы, Математика және математикалық моделдеу институтында ондай тәжірибенің енгізілгеніне аз уақыт болған жоқ.

Үлкен математик-ғалым Аллаберен Ашуралиевті сол шетелдік үлкен ғалымдардың қатарына қосамыз. Ол қазақтың математика ғылымын дамытуға өзіндік үлесін қосып келеді. Оған оның ұйымдастыруымен өткізілген халықаралық ғылыми конференцияларды (Шымкент, Анталия) жатқызсақ, өзінің ғылыми жетекшілігіне алынған қазақ жастарын айтуға болады. Осындай шынайы ғалым, абзал азаматтың мерейтойын (60жасын) қастерлей отырып, оның адами болмысын, ғылыми еңбектерін қазақы ғылыми басылымда жария етсек біздің одан ұтылмайтындығымыз ақиқат. Олай болса, сол асыл азаматты мерейтойымен құттықтай отырып, алда денсаулықтың арқасында үлкен жетістіктерге жете беруіне тілектестік білдіреміз. Оның өзі туралы жазба, еңбектерінің тізімі ағылшын тілінде берілді. Оған оқырман қауым түсіністікпен қарайды деп сенеміз.

**Brief professional biography of Prof. Allaberen Ashyralyev:**

Dr Ashyralyev was born in Konekesir/Turkmenistan in 1955. Dr Ashyralyev is a Turkmen scientist of Mathematics. He graduated from the Turkmen State University in 1977. He earned his PhD from the Voronezh State University in 1983, and his Doctorate of Sciences from the same University and the Institute of Mathematics of the Ukraine Academy of Sciences in 1992.

Dr Ashyralyev was a visiting scholar at the Voronezh State University, Russia, in 1979, 1985, 1991 and University of California, Santa Barbara, USA, in 1987-1988.

Dr Ashyralyev continued his career at the Turkmen State University from 1977 to 1999 as an instructor, assistant professor (1985), associate professor (1989), and professor (1995), respectively.

Since 1999, Prof. Ashyralyev has been a staff member of the Department of Mathematics, Fatih University and professor at the International Turkmen-Turk University.

Since 2015, Prof. Ashyralyev has been a staff member of the Department of Department of Elementary Mathematics Education, Fatih University.

Dr Ashyralyev is the author of more than 330 scientific papers in international journals and conference proceedings including 171 international ISI journal publications and 12 books including two monographs published by Birkhauser-Verlag, on Operator Theory: Advances and Applications. He has successfully supervised 18 PhD students and 25 MS and 30 BS students. His h-index is 19 (according to ISI Web of Knowledge). In 2009, he was selected as the most successful national scientist of Turkmenistan in last 30 years (second rank) by MyNetResearch Empowering Collaboration Search (which is based on the papers published in journals in Web of Science).

His ranking of mathematics scientists in Universities in Turkey is 2 (according to ISI Web of Knowledge in 2014).

In 2015, his ranking of scientists in Turkish Institutions according to their Google Scholar Citations public profiles is 402.

In 2015, Dr Ashyralyev awarded with "Science Leader" independent award winner nomination "World Science Researcher from the the Central Asian Region".

Dr Ashyralyev is Chief of Editor of journal Contemporary Analysis and Applied Mathematics and Member of Editorial Board of 15 international journals. Dr Ashyralyev has been guest editor of 5 volumes of special issues of international ISI journals and editor of 3 volumes of AIP Proceedings Conferences.

Dr Ashyralyev awarded gold medal in 1972 by Education Ministry of Turkmenistan for excellence among high schools. He received Lenin's grant for students from 1974 to 1977, Turkmen State University, Ashgabat, Turkmenistan (1st rank in the University). He received the first rank prize for Ph.D students, Voronezh State University, Voronezh, Russia. He awarded Best University Teacher Award by Ministry of Education, Turkmenistan (1996).

Dr Ashyralyev's contribution to science and technology within Turkmenistan and Turkey has been tremendous, and could be gauged from his active participation in a number of national research and academic organizations. Furthermore, his contribution in science and technology at the international level is equally remarkable, and is evident from his current joint research with scientists in different countries including USA, Germany, Saudi Arabia, Russia, Poland, Spain, Brazil, Hungary, Uzbekistan, Azerbaijan, Algeria and Kazakhstan.

Prof. Ashyralyev was elected as a Fellow of the Islamic World Academy of Sciences (IAS) in 2012.

**Prof. Dr. Allaberen Ashyralyev (2014-2015)**

**Nationality:** Turkmen

**Date of birth:** August 1, 1955

**Marital status:** Married (two sons and four daughters)

**Permanent Address:** Mir 1, dom 1 A, kv. 9 -10, 744017 Ashgabat, Turkmenistan

**Present Address:** Barış mahellesi, Kibris caddesi, Bulutlar sitesi, A-1, Daire  
no:15, Beylukduzu, Istanbul, Turkey

**Telephone:** Office (212)8663300 (15 lines) Ext. 2086. Home 0099(312)460891 in Ashgabat and 02128536036 or

**05352111404 in Istanbul**

**Fax:** (212)8663402 **E-mail:** [ashyralyev@yahoo.com](mailto:ashyralyev@yahoo.com) or [aashyr@yahoo.com](mailto:aashyr@yahoo.com)

*List of Publications at Fatih University (The Publications appears in SCI, SCI Exp., SSCI and AHCI are shown with \*)*

\*1. Ashyralyev A. and Özger F., The hyperbolic-elliptic equations with the nonlocal condition, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 37, issue 4, 524-545, 2014.

\*2. Ashyralyev A. and Erdogan A.S. On the second order implicit difference schemes for a right hand side identification problem. *Appl. Math. Comput.* 226, pp. 212-228, 2014.

\*3. Ashyralyev A. and Hanalyev A. Well-Posedness of Nonlocal Parabolic Differential Problems with Dependent Operators, The Scientific World Journal Volume 2014, Article ID 519814, 11 pages <http://dx.doi.org/10.1155/2014/519814>, 2014.

- \*4. Allaberen Ashyralyev, Sema Akturk and Yasar Sozen. The structure of fractional spaces generated by a two-dimensional elliptic differential operator and its applications, Boundary Value Problems 2014, 2014:3.
- \*5. Ashyralyev A. and Öztürk E., On a difference scheme of second order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary-value problem, Boundary Value Problems 2014, 2014:14 doi:10.1186/1687-2770-2014-14.
- \*6. Ashyralyev A. and Prenov R. Finite-difference method for the hyperbolic system of equations with nonlocal boundary conditions, Advances in Difference Equations, 2014, 2014:26 doi:10.1186/1687-1847-2014-26, 26 pages.
- \*7. Ashyralyev A. and Agirseven D. Well-Posedness of Delay Parabolic Difference Equations, Advances in Difference Equations, 2014, 2014:18 doi:10.1186/1687-1847-2014-18, 20 pages.
- \*8. Ashyralyev A. and Ozdemir Y., On numerical solutions for hyperbolic-parabolic equations with the multipoint nonlocal boundary condition, Journal of the Franklin Institute, Volume 351, Issue 2, 602-630, 2014.
- \*9. Ashyralyev A., Nalbant N. and Sozen Y. Structure of fractional spaces generated by second order difference operators, Journal of the Franklin Institute, Volume 351, Issue 2, 713-731, 2014.
- \*10. Ashyralyev A. and Çakir Z., r-Modified Crank-Nicholson difference scheme for fractional parabolic PDE, Boundary Value Problems 2014, 2014:76 doi:10.1186/1687-2770-2014-76. 12 pages.
- \*11. Ashyralyev A., Emirov N. and Cakir Z., Well-posedness of fractional parabolic differential and difference equations with Dirichlet-Neumann conditions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014), no. 97, pp. 1-17.
- \*12. Amanov Dj. and Ashyralyev A., Well-posedness of boundary-value problems for partial differential equations of even order, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2014 (2014), no. 108, pp. 1-18.
- \*13. Ashyralyev A. and Erdogan A.S., Well-posedness of the problem of right hand side identification for a parabolic equation, UMJ, vol. 66(2014), no.2, 147-158.
- \*14. Ashyralyev A. and Agirseven D., Well-posedness of delay parabolic equations with unbounded operators acting on delay terms, Boundary Value Problems 2014, 2014:126 doi:10.1186/1687-2770-2014-126. 15 pages.
- \*15. Ashyralyev A. and Agirseven D., On source identification problem for a delay parabolic equation, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 19, No. 3, 2014, 335-349.
- \*16. Ashyralyev A. and Agez N., On the solution of NBVP for multidimensional hyperbolic equations, The Scientific World Journal Volume 2014, Article ID 841602, 22 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/841602>, 2014.
- \*17. Ashyralyev A. and Urun M., A second order of accuracy difference scheme for Schrödinger equations with an unknown parameter, Filomat 28:5 (2014), 981–993 DOI 10.2298/FIL1405981A
- \*18. Ashyralyev A. and Ozturk E., Stability of Difference Schemes for Bitsadze-Samarskii Type Nonlocal Boundary Value Problem Involving Integral Condition, Filomat 28:5 (2014) 1027-1047 DOI: 10.2298/FIL1405027A.
- \*19. Ashyralyev A. and Agirseven D., Stability of Delay Parabolic Difference Equations, Filomat 28:5 (2014), 995-1006 DOI: 10.2298/FIL1405995A.
- \*20. Ashyralyev A. and Ozesenli Tetikoglu F.S., On well-posedness of nonclassical problems for elliptic equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 37, issue 4, 524-545, 2014. DOI: 10.1002/mma.3006
- \*21. Ashyralyev A. and Agirseven D., Note on the Stability of Delay Parabolic Equations with Unbounded Operators Acting on Delay Terms, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 160 (2014), pp. 1-15.
- \*22. Ashyralyev A. and Ashyralyev Ch., On the problem of determining the parameter of an elliptic equation in a Banach space, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, vol. 19(2014), no. 3, 350-366.
- \*23. Ashyralyev A., Gercek O., and Zusi E., Well-posedness of difference scheme for elliptic-parabolic equations in Hölder spaces without a weight, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 84-88 (2014).
- \*24. Ashyralyev A., and Shahmurov R., High-accurate difference schemes for the differential equation of 2n-th order, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 141-144 (2014).
- \*25. Ashyralyev A., and Sazaklioglu A.U., A note on the stability of a time-dependent source identification problem, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 186-189 (2014).
- \*26. Ashyralyev A., and Akturk S., Fractional spaces generated by the positive differential operator in the half-line  $R^+$  and their applications, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 211-215 (2014).
- \*27. Ashyralyev A., and Simsek Ş.N., Nonlocal boundary value problems for a third order partial differential equation, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 234-240 (2014).
- \*28. Ashyralyev A., Artykov M., and Çakir Z., A note on fractional parabolic differential and difference equations, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 251-254 (2014).
- \*29. Ashyralyev A., and Ozesenli Tetikoglu F.S., Well-posedness of a third order of accuracy difference scheme for Bitsadze-Samarskii type multi-point NBVPs, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 271-275 (2014).
- \*30. Ashyralyev A., and Modanli M., A numerical solution for a telegraph equation, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 300-304 (2014).

\*31. Ashyralyev A., and Tetikoglu F., The positivity of the second order difference operator with periodic conditions in Hölder spaces and its applications, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 336-343 (2014).

\*32. Ashyralyev A., Tekalan S.N., and Erdogan A.S., On a first order partial differential equation with the nonlocal boundary condition, AIP Conf. Proc. 1611, pp. 369-373 (2014).

33. Guezane-Lakoud A., and Ashyralyev A., Fixed point theorem applied to a fractional boundary value problem, Pure and Applied Mathematics Letters 2, pp. 1-6(2014).

34. Ashyralyev A., Shakhmurov R., High-accuracy difference schemes for the differential equation of  $2n$ -th order, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, vol.2, no.2, pp. 290-304 (2014).

\*35. Ashyralyev A., and Modanli M., An operator method for telegraph partial differential and difference equations, Boundary Value Problems 2015, 2015:41 DOI: 10.1186/s13661-015-0302-z

\*36. Ashyralyev A., and Sarsenbi, A. Well-posedness of a parabolic equation with nonlocal boundary condition, Boundary Value Problems 2015, 2015: 38 DOI: 10.1186/s13661-015-0297-5

\*37. Ashyralyev A., and Tetikoglu F., A note on fractional spaces generated by the positive operator with periodic conditions and applications, Boundary Value Problems 2015, 2015:31 DOI: 10.1186/s13661-015-0293-9

38. Ashyralyev A., and Ashyralyeva M.A., On source identification problem for a hyperbolic-parabolic equation, Contemporary Analysis and Applied Mathematics Vol.3, No.1, 88-103, 2015

\*39. Ashyralyev A., Well-Posedness in Hölder Spaces of Elliptic Differential and Difference Equations, Finite Difference Methods, Theory and Applications, 2015, 25-37

\*40. Ashyralyev A., and Agirseven D., Difference Schemes for Delay Parabolic Equations with Periodic Boundary Conditions, Finite Difference Methods, Theory and Applications, 2015, 145-152

\*41. Ashyralyev A., and Akturk S., Positivity of one-dimensional difference operator in the half-line and its applications, Journal of Applied and Computational Mathematics, vol. 14, no.2, 204-220, 2015.

42. Ashyralyev A., Pastor J., Piskarev S., and Yurtsever H.A., Second order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness, Abstract and Applied Analysis, vol. 2015, Article ID 948321, 63 pages, doi.org/10.1155/2015/948321

43. Assia Guezane-Lakoud, Allaberen Ashyralyev, Positive Solutions for a System of Fractional Differential Equations with Nonlocal Integral Boundary Conditions, Differential Equations and Dynamical Systems, 8 pages, DOI 10.1007/s12591-015-0255-9

\*44. Ashyralyev A., Taskin A., Structures of the fractional spaces generated by the difference neutron transport operator, AIP Conf. Proc. 1676, 020051 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930477>.

\*45. Ashyralyev A., Modanli M., Nonlocal boundary value problem for telegraph equations, AIP Conf. Proc. 1676, 020078 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930504>.

\*46. Ashyralyev A., Okur U., Numerical solution of the stochastic parabolic equation with the dependent operator coefficient, AIP Conf. Proc. 1676, 020004 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930430>.

\*47. Ashyralyev A., Akturk S., The structure of fractional spaces and its applications, AIP Conf. Proc. 1676, 020047 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930473>.

\*48. Ashyralyev A., Nalbant N., Positivity of a differential operator with nonlocal conditions, AIP Conf. Proc. 1676, 020066 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930492>.

\*49. Ashyralyev A., Tetikoglu F.S., Pointwise estimates of the Green's function of a second order differential operator with the variable coefficient, AIP Conf. Proc. 1676, 020100 (2015); <http://dx.doi.org/10.1063/1.4930526>.

50. Ashyralyev A., A survey of results in the theory of fractional spaces generated by positive operators, TWMS JPM, vol. 6, no.2, 129-157, 2015.

#### Books and Journals:

1. INTERNATIONAL CONFERENCE ON ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS (ICAAM 2014), Shymkent, Kazakhstan. ISBN: 978-0-7354-1247-7. Volume number: 1611, 2014, Editors: Allaberen Ashyralyev, Eberhard Malkowsky.

2. ADVANCEMENTS IN MATHEMATICAL SCIENCES: Proceedings of the International Conference on Advancements in Mathematical Sciences, Antalya, Turkey. ISBN: 978-0-7354-1323-8. Volume number: 1676, 2015, Editors: Allaberen Ashyralyev, Eberhard Malkowsky, Alexey Lukashov and Feyzi Başar.

3. Volume:3 Number:2 CAAM, 2015,  
Volume:3 Number:1 CAAM, 2015,

4. Volume:2 Number:2 CAAM, 2014,  
Volume:2 Number:1 CAAM, 2014

Editor-in-Chief of Journal "Contemporary Analysis and Applied Mathematics": A. Ashyralyev

***Conferences and Seminars Attended:***

- On source identification problem for delay parabolic differential and difference equations with the Dirichlet condition. ENUMATH 2015 14-18 September, METU, Ankara, Turkey.
- Telegraph Partial Differential and Difference Equations. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling ICAAMM 15, Istanbul-Turkey, June 8-12, 2015.
- Partial differential equations involving the fractional derivative. International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2015), Istanbul Commerce University, Istanbul, Turkey, June 03-06, 2015.
- On source identification problem for telegraph differential and difference equations. International Conference on Differential Difference Equations and Applications 2015, Military Academy Amadora, Portugal May 18 - 22, 2015.
- Some problems involving sums and their solutions (Toplam kavramı içeren çeşitli matematik problemleri ve çözümleri), Duzce University, Duzce, Turkey, May 08 2015.
- An operator approach in investigation of partial differential equations involving the fractional derivative. Republican Scientific Conference with Foreign Participants "Modern Methods of Mathematical Physics and Their Applications", Tashkent, Uzbekistan, April 15-17, 2015.
- Matematik nedir? (What is Mathematics?), Özel Mürüvvet Evyap Koleji (for Mathematical Club), Istanbul/Turkey, 20/03/2015.
- Hayat Matematik ile Güzel (Life is beautiful with mathematics), Zirve University, Gaziantep, 05-07/01/2015.
- Fractional Calculus and Its Applications, Zirve University, Gaziantep, 05-07/01/2015.
- Hayat Matematik ile Zevkli (Life is beautiful with mathematics), Firat University, Elazig, 04-05/12/2014.
- A survey of results in the investigation of the structure of fractional spaces generated by positive operators in Banach spaces. International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Antalya, Turkey, November 06-09, 2014.
- Well-Posedness of a Parabolic Equation with the Nonlocal Boundary Condition Equations (jointly with A. Sarsenbi). Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shimkent, Kazakhstan, 11-14/09/2014.
- A note on fractional parabolic differential and difference equations (jointly with Artykov M., and Çakir Z.). Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shimkent, Kazakhstan, 11-14/09/2014.
- Nonlocal boundary value problems for a third order partial differential equation (jointly with Simsek Ş.N.). Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shimkent, Kazakhstan, 11-14/09/2014.
- Fractional spaces generated by the positive differential operator in the half-line  $\mathbb{R}^+$  and their applications (jointly with Akturk S.). Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shimkent, Kazakhstan, 11-14/09/2014.
- High-accurate difference schemes for the differential equation of  $2n$ -th order (jointly with Shahmurov R.). Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shimkent, Kazakhstan, 11-14/09/2014.
- Well-posedness of difference scheme for elliptic-parabolic equations in Hölder spaces without a weight (jointly with Gerçek O., and Zusi E.). Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014), Shimkent, Kazakhstan, 11-14/09/2014.
- Well-Posedness in Hölder Spaces of Elliptic Differential and Difference Equations .
- Sixth Conference on Finite Difference Methods: Theory and Applications, Lozenetz, Bulgaria, 8-23/06/2014
- A Survey of Results in the Theory of Fractional Spaces Generated by Positive Operators, Karatekin Mathematics Days (KMD-2014), Çankırı, Turkey, 12-14/06, 2014.
- Matematiğin Önemi ve Matematik Olimpiyatı (Importance of Mathematics and Mathematical Olympiad), Bahçelievler Kaymakamlığı Kemal Hasoğlu İmam Hatip Lisesi, 06/03/2014.

•Hayat Matematik ile Güzel(Life is beautiful with mathematics), Cevizlibag Doga Lisesi, 06/03/2014.

•Determination of a Control Parameter for the Hyperbolic Parabolic Equation, International Conference on Recent Trends in Algebra and Analysis with Applications, Aigarh, India, 12-14/02, 2014.

#### **List of PhD. Theses**

1. Sema Akturk, Fractional spaces generated by positive operators on the half-space, Fatih University, July 2014 (Jointly with Prof. Dr. Yaşar Sozen).

2. A.N. Urmatova, Mathematical modeling of the dynamic characteristics of gas-droplet distribution in a multi-channel mix mass-transfer apparatus, Ahmet Yasavi International Kazakh-Turkish University, September 2014 (Jointly with Prof. Dr. Bahtiyar Ismailov).

3. Mahmut Modanlı, Well-posedness of telegraph differential and difference equations, Fatih University, May 2015.

4. Betül Hicdurmaz, Initial Boundary Value Problems for Fractional Schrödinger Differential Equations, Gebze Institute of Technology, June 2015.

5. Mutlu Dedetürk. Well-posedness of inverse problem for the elliptic differential equation with the overdetermination, Fatih University, August 2015 (Jointly with Prof. Dr. Charyyar Ashyralyev).

6. Fatih Sabahattin Tetikoğlu. Fractional spaces generated by positive differential and difference operators with periodic conditions and their applications, Fatih University, August 2015.

#### *List of M.Sci. Theses*

1. Sueda Nur Tekalan, Numerical solution of problems for partial differential equations arising in lake pollution models, Fatih University, June 2014 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Abdullah Said Erdoğan).

2. Sinem Nur Şimşek, Nonlocal boundary value problems for of third order partial differential equations, Fatih University, June 2014 .

3. Fatma Çiçek, Source identification problem for a telegraph equation, Fatih University, June 2015.

#### *List of PhD Students*

1. Neşe Nalbant. The structure of fractional spaces generated by positive operators and its applications, Fatih University, June 2016 (Jointly with Prof. Dr. Yaşar Sozen).

2. Abdulgafur Taşkın. Numerical solutions of partial differential equations transport neutron, Fatih University, June 2016.

3. Belakroum Kheireddine. Well-posedness of a third order partial differential equation, Badj Mokhtar Annaba university, Annaba, June 2017 (Jointly with Prof. Guezane-Lakoud Assia).

4. Hülya Uygun. Determination of the right hand side in a fractional parabolic inverse problem, Fatih University, June 2017 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Abdullah Said Erdoğan).

5. Ali Ugur Sazaklioglu. Numerical solution of identification problems for parabolic equations arising in biomechanics, Fatih University, June 2017 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Abdullah Said Erdoğan).

6. Mesut Urun. Determination of the control parameter for the Schrodinger equation, Fatih University, June 2017.

7. Sümeyra Üstünsoy. Well-posedness of inverse problem for the elliptic-parabolic differential equation with the overdetermination, Fatih University, June 2017.

#### *List of Master Students*

1. Burcu Celan. Zaman Gecikmeli Lineer Olmayan Parabolik Denklemlerin Sınırlı Çözümleri, Trakya University, June 2016 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Deniz Agirseven).

#### **Projects**

1. Hiperbolik denklemler için lokal olmayan sınır değer problemlerinin incelenmesi, Üniversite Araştırma Proje Fonu, Apr 2012-Apr 2014, Araştırmacı Amount: 6000 (Jointly with Ass. Prof. Dr. Necmettin Aggez).

2. Bilinmeyen basınç farkı için sıvı akışının hesaplamalı analizi, Üniversite Araştırma Proje Fonu, Apr 2012-Apr 2014, Araştırmacı Amount: 6000 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Abdullah Said Erdoğan).

3. Gecikmeli terimler üzerine etki eden sınırsız operatörler içeren gecikmeli parabolik denklemler için tanımlama (identification) problemleri, Araştırmacı. Araştırma Proje Fonu, 22.10-2013-30.10-2015. Trakya University. Amount: 16000 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Deniz Agirseven).

4. № 5414/ГФ4 «Дифференциальные уравнения в частных производных с инволюцией. Корректность задач с инволюцией», Araştırmacı. 01.01-2015-01.01-2017, 45.000 tenge. Almaty, Kazakhstan (Jointly with Prof. Dr. A. Sarsanbi).

5. Gürültü İçeren Parabolik Ters Problemlerinin Sayısal Çözümü İçin Regülerizasyon Teknikleri. Üniversite Araştırma Proje Fonu, **01/09/2015 - 01/09/2016**, Araştırmacı Amount: 6000 (Jointly with Assoc. Prof. Dr. Abdullah Said Erdogan).

### Affiliations

1. Member of Institute of Applied Mathematics Middle East Technical University. Member of Editorial Board of Global Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.

2. Member of Editorial Board of International Journal of Pure and Applied Mathematical Sciences.

3. Member of Editorial Board of Journal of Contemporary Mathematics (JCM).

4. Member of Editorial Advisory Board of Journal of Recent Patents on Computer Science.

5. Member of American Mathematical Society.

6. Member of Turkish-American Scientists and Scholars Association.

7. Reviewer of Mathematical Reviews and Journals Nonlinear Analysis .Theory, Methods, and Applications; Abstract and Applied Analysis; Turkish Journal of Mathematics, AMC

8. Member of Turkmenistan State Committee of Int. Muhammed AL HOREZMI Awards in the fields of Science and Tech.

9. Member of Editorial Board of Vestnik Odessa National University. Mathematics and Mechanics.

10. Member of Editorial Board of TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics.

11. Lead Guest Editor of Annual Special Issues "Well-Posed and Ill-Posed Boundary Value Problems for PDE" in Abstract and Applied Analysis.

12. Editor-in-Chief of Journal "Contemporary Analysis and Applied Mathematics".

13. Chair of First International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2012) October 18-21, 2012, Gumushane, Turkey.

14. Chair of Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2014) September 11-13, 2014, Shymkent, Kazakhstan.

15. Member of the International Council of Scientists of the Latvian Academy of Sciences, 2013.

16. Guest Editor of Special Issue "Recent Trends on Boundary Value Problems and Related Topics" in Boundary Value Problems, 2012.

17. Fellow of the Islamic World Academy of Sciences (IAS), 2012.

18. Member of the advisory board of ICPAM of Trakya University, Edirne, Turkey.

19. Lead Guest Editor of Special Issue "Thematic series on Recent Advances in Partial Differential Equations and Their Applications" in Boundary Value Problems, 2014.

20. Editorial Advisory Board Member "Journal of Applied Mathematics", 2014.

21. Lead Guest Editor of Special Issue "Recent Developments and Applications in Partial Differential Equations" in Journal of Applied Mathematics, 2014.

22. Member of the editorial advisory board of "Pure and Applied Mathematics Letters", 2014.

23. Member of the editorial advisory board of "Journal of Computer Science and Applied Mathematics" (J. Comp. Sci. Appl. Math.), 2014.

24. Member of the International Editorial Advisory Board of "Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan" (PIMM), 2015.

25. Member of the Editorial Advisory Board of Journal "Fractional Differential Calculus", 2015.

26. Member of the Editorial Advisory Board of Journal "Enlightenment of Pure and Applied Mathematics", 2015.

27. Member of Editorial Board of TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, 2015.

28. Member of Editorial Board Member of Journal of Advances in Applied Mathematics, 2015

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE REPUBLIC  
OF KAZAKHSTAN

THE SOUTH KAZAKHSTAN STATE UNIVERSITY  
NAMED AFTER M. AUEZOV

A. ASHYRALYEV

**COMPUTATIONAL MATHEMATICS**

**TEXTBOOK**

For master students of specialty 6M060100- Mathematics

**Shymkent, 2013**

## МАЗМҰНЫ

## Теориялық және тәжірибелік зерттеулер

|                                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Буртебаев Н., Дүйсебаев А., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Юшков А.В., Жолдыбаев Т.К., Садыков Б., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Сакута С.Б.</i> 50 және 60 МэВ энергиялы $^3\text{He}$ иондарының $^{14}\text{N}$ ядроларынан серпімді шашырауын зерттеу.....                | 5   |
| <i>Алтынбеков Ш.</i> Өртеккі топырақ консолидациясының бірөлшемді квазисызықты есебін напордың бастапқы градиенті әсерінде шешу әдісі туралы және оның шөгуді анықтау.....                                                                                                            | 10  |
| <i>Асқарова А.С., Бөлегенова С.А., Бөлегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б., Габитова З.Х., Боранбаева А.Е.</i> 3-D Модельдеу әдістерімен жану процесіне көмірдің ылғалдылығының зиянын зерттеу.....                                                                            | 21  |
| <i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> ЖЭС жану камерасында көмірдің жануы кезінде $\text{NO}_x$ түзілуі мен жойылуын екі кинетикалық механизм бойынша сандық моделдеу.....                                                            | 29  |
| <i>Асқарова Ә.С., Бөлегенова С.Ә., Бөлегенова С.Ә., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т.</i> Жану камерасының қабырға температурасы үшін берілген шекаралық шартының жану процесінің температуралық сипаттамаларына әсерін зерттеу.....                                                      | 35  |
| <i>Асқарова Ә., Бөлегенова С., Гороховский М., Оспанова Ш., Нұғыманова А., Утелов С.</i> Өр түрлі сұйық отындардың бүрку, тұтану және жану процестерін зерттеу .....                                                                                                                  | 40  |
| <i>Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы шешілуі туралы.....                                                                                                                                               | 48  |
| <i>Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Демьянова А.С., Данилов А.Н., Джансейтов Д.М., Жолдыбаев Т.К., Алимов Д.К.</i> Оптикалық және фолдинг модельдер АЯСЫНДА 50 және 60 МЭВ энергияларда $^3\text{He}$ иондарының $^{13}\text{C}$ ядроларында серпімді шашырау процесстерін зерттеу..... | 55  |
| <i>Жұмбаев Д.С., Бакирова Э.А.</i> Импульс әсері бар фредгольм интегралдық- дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты шеттік есептің бірімәнді шешілімділігінің коэффициенттік белгілері .....                                                                                           | 61  |
| <i>Өтебаев Ұ.Б., Есентаев Қ.Ө., Дархан Н.Д.</i> WEB -формалар құрудың технологиялары.....                                                                                                                                                                                             | 72  |
| <i>Жунусова Л.Х., Жунусов К.Х.</i> Тор теңдеулерінің итерациялық әдіспен шығару.....                                                                                                                                                                                                  | 79  |
| <i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Сүйерқұлова Ж.Н.</i> Еркін механикалық тербелістерді зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....                                                                       | 84  |
| <i>Қабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Сүттібаева Д.И., Қозыбақова Г.Н.</i> Изобаралық процесті зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....                                                                                    | 92  |
| <i>Қабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Саидахметов П.А., Нұрұллаев М.А., Артыгалин Н.А.</i> Карно циклімен жұмыс атқаратын қозғалтқышты зерттеуге арналған компьютерлік зертханалық жұмысты ұйымдастырудың бланкі үлгісі.....                                                              | 98  |
| <i>Түгелбаева Г.Т., Канибекова А. Е.</i> Білім негіздерін физика сабақтарына енгізу әдісін жүйелік талдау.....                                                                                                                                                                        | 104 |
| <i>Қойишева Т.К., Қожамқұлова Ж.Ж., Базарбаева А.И., Бегимбетова Х.А.</i> Объектіге-бағытталған жүйе болашақ маманның ақпараттық-логикалық құзыреттілігін қалыптастыру факторы ретінде.....                                                                                           | 108 |
| <i>Қойишева Т.К., Байтерекова А.И., Салғараева М.И.</i> Болашақ мұғалімдерді кәсіби дайындауда қолданылатын объектілі-бағдарлы жобалаудың теориялық негіздері.....                                                                                                                    | 116 |
| <i>Литвиненко Н.</i> Бағдарламалық R ортаның C# ортасына біріктірілуі.....                                                                                                                                                                                                            | 123 |
| <i>Мақышов С.</i> Тұрақты м-туындаған сандар.....                                                                                                                                                                                                                                     | 128 |
| <i>Минглибаев М.Ж., Прокопья А.Н., Бекетауов Б.А.</i> Массалары айнымалы шектелген үш дене мәселесінің эволюциялық теңдеуінің нақты шешімдері.....                                                                                                                                    | 133 |
| <i>Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Байбутанов Б.К., Ешметов М.Б., Ауесжанов Д.С.</i> Жазықтық-импульстік модуляция негізінде көпдеңгейлі инвертор сатыларының қосылу әдістемелерін зерттеу .....                                                                                     | 139 |
| <i>Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С.</i> Толқын теңдеуінің шартарапты есебінің вөлтерлі болуының үзілді – кесілді шарты.....                                                                                                                              | 147 |
| <i>Сураган Д.</i> Шаттен р-нормасы үшін бір теңсіздік туралы .....                                                                                                                                                                                                                    | 153 |
| <i>Темирбеков Н.М., Тураров А.К.</i> Газлифт үрдісінің бір өлшемді моделінің сандық шешімі .....                                                                                                                                                                                      | 159 |
| <i>Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш., Шомабаева М.Т.,</i> Аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің шекаралық коши-нейман есебіне сәйкес оператордың спектрінің құрамы туралы.....                                                                                                             | 169 |
| <i>Шоманбаева М.Т., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т.</i> Аргументі ауытқыған жылу теңдеуінің жарտалай бекітілген шекаралық есебіне сәйкес оператордың үзіксіз спектрі туралы .....                                                                                                      | 180 |
| <i>Ұлағатты ұстаз туралы. Шерәлі Біләл.</i> .....                                                                                                                                                                                                                                     | 191 |

## СОДЕРЖАНИЕ

## Теоретические и экспериментальные исследования

|                                                                                                                                                                                                                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Буртебаев Н., Дуйсебаев А., Керимкулов Ж.К., Алимов Д.К., Юшков А.В., Жолдыбаев Т.К., Садыков Б., Мухамеджанов Е.С., Джансейтов Д.М., Сакута С.Б. Исследование упругого рассеяния ионов $^3\text{He}$ на ядрах $^{14}\text{N}$ при энергиях 50 и 60 МэВ.....          | 5   |
| Алтынбеков Ш. О методике решения одномерной квазилинейной задачи консолидации неоднородного грунта с учетом начального градиента напора и определение его осадка.....                                                                                                 | 10  |
| Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Ергалиева А.Б., Габитова З.Х., Боранбаева А.Е. Исследование влияния влажности угля на процесс горения методами 3-d моделирования.....                                                                 | 21  |
| Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т. Численное моделирование образования и разложения $\text{NO}_x$ по двум кинетическим механизмам при горении угольного топлива в топочной камере ТЭЦ.....                                | 29  |
| Аскарова А.С., Болегенова С.А., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Бекетаева М.Т. Исследование влияния граничного условия для температуры на стенках топочной камеры на температурные характеристики процесса горения.....                                               | 35  |
| Аскарова А., Болегенова С., Гороховский М., Оспанова Ш., Нугыманова А., Утелов С. Исследование процессов распыла, воспламенения и горения различного вида жидкого топлива.....                                                                                        | 40  |
| Сапрыгина М.Б., Байсейтова У.С., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О. Толқын тендеуінің шартарапты есебінің тұрлаулы шешілуі туралы.....                                                                                                                                      | 48  |
| Буртебаев Н., Керимкулов Ж.К., Демьянова А.С., Данилов А.Н., Джансейтов Д.М., Жолдыбаев Т.К., Алимов Д.К. Исследование процессов упругого рассеяния ионов $^3\text{He}$ на ядрах $^{13}\text{C}$ при энергиях 50 и 60 МэВ в рамках оптического и фолдинг моделей..... | 55  |
| Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Коэффициентные признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений фредгольма с импульсными воздействиями.....                                                                             | 61  |
| Утебаев У.Б., Есентаев К.У., Дархан Н.Д. Технология создания web-форм.....                                                                                                                                                                                            | 72  |
| Жунусова Л.Х., Жунусов К.Х. Итерационные методы решения сеточных уравнений.....                                                                                                                                                                                       | 79  |
| Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Серикбаева Г.С., Суйеркулова Ж.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию свободных механических колебаний.....                                                                   | 84  |
| Кабылбеков К.А., Саидахметов П.А., Омашова Г.Ш., Суттибаева Д.И., Козыбакова Г.Н. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию изобарического процесса.....                                                                             | 92  |
| Кабылбеков К.А., Омашова Г.Ш., Саидахметов П.А., Нураллаев М.А., Артыгалин Н.А. Модель бланка организации компьютерной лабораторной работы по исследованию двигателя, совершающего цикл Карно.....                                                                    | 98  |
| Түгелбаева Г.Т., Канибекова А. Е. Системное обсуждение способов внедрения в уроки по физике основ знаний по экологии.....                                                                                                                                             | 104 |
| Койшиева Т.К., Кожамкулова Ж.Ж., Базарбаева А.И., Бегимбетова Х.А. Объектно-ориентированные системы как фактор формирования информационно-логической компетентности будущих специалистов.....                                                                         | 108 |
| Койшиева Т.К., Байтерекова А.И., Салгараева М.И. Теоретические основы объектно-ориентированного проектирования, применимые для профессиональной подготовки будущих учителей.....                                                                                      | 116 |
| Литвиненко Н. Интеграция программной среды R в среду C#.....                                                                                                                                                                                                          | 123 |
| Макышов С. Неподвижные m-порожденные числа.....                                                                                                                                                                                                                       | 128 |
| Минглибаев М.Ж., Прокопья А.Н., Бекетауов Б.А. Точные решения эволюционных уравнений в ограниченной задаче трех тел с переменными массами.....                                                                                                                        | 133 |
| Орынбаев С.А., Молдахметов С.С., Байбутанов Б.К., Ешметов М.Б., Ауесжанов Д.С. Исследование методик коммутации ступеней многоуровневого инвертора на основе широтно-импульсной модуляции.....                                                                         | 139 |
| Сапрыгина М.Б., Шалданбаев А.Ш., Оразов И.О., Байсейтова У.С. Критерии вольтерровости нелокальной краевой задачи волнового уравнения.....                                                                                                                             | 147 |
| Сураган Д. Об одном неравенстве p-нормы в классе Шаттена.....                                                                                                                                                                                                         | 153 |
| Темирбеков Н. М., Тураров А. К. Численное решение одномерной модели газлифтного процесса.....                                                                                                                                                                         | 159 |
| Ахметова С.Т., Шалданбаев А.Ш., Шомабаева М.Т. О структуре спектра краевой задачи Коши-Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.....                                                                                                         | 169 |
| Шомабаева М.Т., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О непрерывном спектре оператора полужакрепленной краевой задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом.....                                                                                         | 180 |
| Юбилей Ашуралиев Аллаберен.....                                                                                                                                                                                                                                       | 191 |

## CONTENTS

## Theoretical and experimental researches

|                                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Burtebayev N., Duisebayev A., Kerimkulov Zh.K., Alimov D.K., Yushkov A.V., Zholdybayev T.K., Sadikov B., Mukhamejanov Y.S., Janseitov D.M., Sakuta S.B.</i> Investigation of the elastic scattering of $^3\text{He}$ ions on $^{14}\text{N}$ at energies 50 and 60 MeV..... | 5   |
| <i>Altynbekov Sh.</i> On the method of solving one-dimensional quasilinear problem of consolidation of non homogeneous soil with the initial gradient of pressure and determination of its sediment.....                                                                       | 10  |
| <i>Askarova. A., Bolegenova S., Bolegenova S., Maximov V., Yergaliyeva A., Gabitova Z., Boranbaeva A.</i> Study of coal moisture on the combustion process by 3d modeling.....                                                                                                 | 21  |
| <i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.</i> Numerical modeling of formation and destruction of $\text{NO}_x$ by TWO kinetic mechanisms during combustion of fossil fuel in the furnace of CHP.....                                  | 29  |
| <i>Askarova A.S., Bolegenova S.A., Bolegenova S.A., Maximov V.Yu., Beketayeva M.T.</i> Study of the boundary conditions influence for the temperature on the walls of the combustion chamber in the temperature characteristics of the burning process.....                    | 35  |
| <i>Askarova A., Bolegenova S., Gorokhovski M., Ospanova Sh., Nugymanova A., Utelov S.</i> Investigation of atomization, ignition and combustion processes of different types of liquid fuel.....                                                                               | 40  |
| <i>Saprygina M.B., Bayseytova U.S., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O.</i> About regular resolvability of nonlocal boundary value problem of the wave equation.....                                                                                                               | 48  |
| <i>Burtebayev N., Kerimkulov Zh.K., Demyanova A.S., Danilov A.N., Janseitov D.M., Zholdybayev T.K., Alimov D.K.</i> Investigation of elastic scattering of $^3\text{He}$ ions from $^{13}\text{C}$ nuclei at 50 and 60 MeV in optical and folding model.....                   | 55  |
| <i>Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A.</i> Coefficient conditions for the unique solvability of linear boundary value problem for fredholm integro-differential equation with impulse effects.....                                                                                  | 61  |
| <i>Utebaev U.B., Yessentayev K.U., Darkhan N.D.</i> Technology of creation of web-form.....                                                                                                                                                                                    | 72  |
| <i>Zhunussova L., Zhunussov K.</i> Iterative methods for solving difference equations.....                                                                                                                                                                                     | 79  |
| <i>Kabyrbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH., Serikbaeva G.S., Suyerkulova ZH.N.</i> Model of the form of the organisation of computer laboratory operation of the free mechanical oscillations.....                                                                  | 84  |
| <i>Kabyrbekov K.A., Saidakhmetov P.A., Omashova G.SH., Suttibaeva D.I., Kozybakova G.N.</i> Model of the form of the organisation of computer laboratory operation of isobaric process.....                                                                                    | 92  |
| <i>Kabyrbekov K.A., Omashova G.SH., Saidakhmetov P.A., Nurullaev M.A., Artygalin N.A.</i> Model of the form of the organization of computer laboratory operation on examination of the drive making the carnot cycle.....                                                      | 98  |
| <i>Tygelbaeva G.T., Kanibekova A. E.</i> System discussion of methods of introduction in lessons on physics bases of knowledge on ecology.....                                                                                                                                 | 104 |
| <i>Koishieva T.K., Kozhamkulova Zh.Zh., Bazarbaeva A.I., Begimbetova A.</i> Object-oriented system as the factor of formation of information-logical competence of future professionals.....                                                                                   | 108 |
| <i>Koishieva T.K., Baiterekova A.I., Salgaraeva M.I.</i> Theoretical bases of object-oriented design, applicable for vocational training of future teachers.....                                                                                                               | 116 |
| <i>Litvinenko N.</i> Integration of R software environment in C# software environment.....                                                                                                                                                                                     | 123 |
| <i>Makyshov S.</i> Stationary m-digit addition numbers.....                                                                                                                                                                                                                    | 128 |
| <i>Minglibayev M.Dzh., Prokopenya A.N., Beketauov B.A.</i> Exact solutions of evolution equations in restricted three-body problem with variable mass.....                                                                                                                     | 133 |
| <i>Orynbayev S.A., Moldakhmetov S.S., Baibutanov B.K., Jeshmetov M.B., Aueszhanov D.S.</i> Methods of switching angles based on pulse width modulation for multilevel inverter.....                                                                                            | 139 |
| <i>Saprygina M.B., Shaldanbayev A.Sh., Orazov I.O., Bayseytova U.S.</i> Criteria Volterra of nonlocal boundary value problem of the wave equation.....                                                                                                                         | 147 |
| <i>Suragan D.</i> On an inequality for Schatten $p$ -norms.....                                                                                                                                                                                                                | 153 |
| <i>Temirbekov N. M., Turarov A. K.</i> Numerical solution of the one dimensional model of gas-lift process.....                                                                                                                                                                | 159 |
| <i>Achmetova S.T., Shaldanbayev A.Sh., Shomabayeva M. T.</i> About structure of the range of the regional task of Cauchy - Neumann for the heat conductivity equation with the deviating argument.....                                                                         | 169 |
| <i>Shomanbayeva M. T., Shaldanbayev A.Sh., Achmetova S.T.</i> About the continuous range of the operator of the semi-fixed regional task for the heat conductivity equation with the deviating argument.....                                                                   | 180 |
| Anniversary of Ashuraliev Allaberen.....                                                                                                                                                                                                                                       | 191 |

**Publication Ethics and Publication Malpractice  
in the journals of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan**

For information on Ethics in publishing and Ethical guidelines for journal publication see <http://www.elsevier.com/publishingethics> and <http://www.elsevier.com/journal-authors/ethics>.

Submission of an article to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan implies that the described work has not been published previously (except in the form of an abstract or as part of a published lecture or academic thesis or as an electronic preprint, see <http://www.elsevier.com/postingpolicy>), that it is not under consideration for publication elsewhere, that its publication is approved by all authors and tacitly or explicitly by the responsible authorities where the work was carried out, and that, if accepted, it will not be published elsewhere in the same form, in English or in any other language, including electronically without the written consent of the copyright-holder. In particular, translations into English of papers already published in another language are not accepted.

No other forms of scientific misconduct are allowed, such as plagiarism, falsification, fraudulent data, incorrect interpretation of other works, incorrect citations, etc. The National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan follows the Code of Conduct of the Committee on Publication Ethics (COPE), and follows the COPE Flowcharts for Resolving Cases of Suspected Misconduct ([http://publicationethics.org/files/u2/New\\_Code.pdf](http://publicationethics.org/files/u2/New_Code.pdf)). To verify originality, your article may be checked by the Cross Check originality detection service <http://www.elsevier.com/editors/plagdetect>.

The authors are obliged to participate in peer review process and be ready to provide corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. All authors of a paper should have significantly contributed to the research.

The reviewers should provide objective judgments and should point out relevant published works which are not yet cited. Reviewed articles should be treated confidentially. The reviewers will be chosen in such a way that there is no conflict of interests with respect to the research, the authors and/or the research funders.

The editors have complete responsibility and authority to reject or accept a paper, and they will only accept a paper when reasonably certain. They will preserve anonymity of reviewers and promote publication of corrections, clarifications, retractions and apologies when needed. The acceptance of a paper automatically implies the copyright transfer to the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan.

The Editorial Board of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan will monitor and safeguard publishing ethics.

Правила оформления статьи для публикации в журнале смотреть на сайте:

[www.nauka-nanrk.kz](http://www.nauka-nanrk.kz)

<http://www.physics-mathematics.kz>

Редактор *М. С. Ахметова*  
Верстка на компьютере *А.М. Кульгинбаевой*

Подписано в печать 24.03.2016.  
Формат 60x881/8. Бумага офсетная. Печать – ризограф.  
11,3 п.л. Тираж 300. Заказ 2.