

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN

PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 306 (2016), 10–20

ON THE METHOD OF SOLVING ONE-DIMENSIONAL QUASILINEAR PROBLEM OF CONSOLIDATION OF NON HOMOGENEOUS SOIL WITH THE INITIAL GRADIENT OF PRESSURE AND DETERMINATION OF ITS SEDIMENT

Sh. Altynbekov

South Kazakhstan State Pedagogical Institute, Shymkent,
e-mail: sh.altynbekov@mail.ru

Keywords: soil mechanics, the theory of filtration consolidation, elastic-instantaneous deformation, the initial pressure gradient, the sediment of subgrade, one-dimensional quasi-linear problem, methods of mathematical physics.

Abstract. The one-dimensional quasilinear problem of the theory of filtration consolidation non-homogeneous soil, heterogeneity is due to the change in the consolidation of its elastic-instantaneous deformation, depending on the spatial coordinates and time is solved. At the same time, to solve the problem method of O.Videburg, the Fourier method, the method of introduction of new variables, the method of conversion of non-homogeneous boundary conditions in homogeneous and the method of Eigen function expansion were applied and to calculate sediment of subgrade there was applied a method of V.A.Florin.

The problem is solved for period of time, when $r \leq h$, and when $r = h$, where h – thickness of soil layer. There is $r = r(t)$, t_h and $H(t_h, z)$ – defined in the process of solving the problem.

Sediment of soil base is defined for each time period separately and then picked its total final sediment. The graphical analysis is given. The accuracy of the obtained results by the mechanic-mathematical interpretation of analytical solutions and numerical results, including in particular, the results of other authors have been investigated. For comparison, the diagrams obtained without taking the initial pressure gradient, without heterogeneity and variability of soil filtration coefficient are given.

УДК 624.131+539.215

О МЕТОДИКЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ КОНСОЛИДАЦИИ НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО ГРАДИЕНТА НАПОРА И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЕГО ОСАДКА

Ш. Алтынбеков

Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент,

Ключевые слова: механика грунтов, теория фильтрационной консолидации, упруго-мгновенная деформация, начальный градиент напора, осадка грунтового основания, одномерная квазилинейная задача, методы математической физики.

Аннотация. Решена одномерная квазилинейная задача теории фильтрационной консолидации неоднородного грунта, неоднородность которого обусловлена изменением в процессе консолидации их упругомгновенной деформации в зависимости от пространственных координат и времени. При этом для

решения задачи применены метод О.Видебурга, метод Фурье, метод введения новых переменных, метод преобразования неоднородных граничных условий в однородные и метод разложения по собственным функциям, а для расчета осадка грунтового основания применен метод В.А.Флорина.

Задача решена для периодов времени, когда $r \leq h$, и когда $r = h$, где h – толщина слоя грунта. При этом $r = r(t)$, t_h и $H(t_h, z)$ определены в ходе решения задачи. Осадка грунтового основания определена для каждого периода времени отдельно, после чего определена его суммарная конечная осадка. Дан графический анализ. Исследована достоверность полученных результатов путем механико-математического толкования аналитического решения и численных результатов, из которых, в частности, вытекают результаты других авторов. Для сравнения приведены эпюры, полученные без учета начального градиента напора, без учета неоднородности грунта и переменности коэффициента фильтрации.

Введение

Как было показано в работах [1-3], фильтрационные явления в некоторых грунтах, например, в плотных глинах, возникают лишь тогда, когда градиент напора превысит некоторое критическое значение, называемое начальным градиентом напора. В тех случаях, когда начальные градиенты напора составляют не более 10-20% от фактических градиентов напора, влиянием их можно пренебречь. Если же они достигают значительных величин, то учет влияния начального градиента напора оказывает большое влияние на получаемые результаты.

К вопросу об учете начального градиента напора применительно к задачам теории уплотнения грунтов посвящены ряд работ [1-5]. В отличие от этих работ в данной работе решена одномерная квазилинейная задача фильтрационной теории консолидации неоднородных грунтов, неоднородность которых обусловлена переменностью их упруго-мгновенной деформации в зависимости от пространственных координат и от времени. Определены их конечные осадки с учетом начального градиента напора.

Постановка задачи. Задачу В.А. Флорина [3] исследуем для случая неоднородных грунтов. При увеличении в некоторый момент времени $t = 0$ напора на верхней стороне слоя начальная эпюра дополнительных напоров имеет вид прямоугольника, как показано на рис. 1.

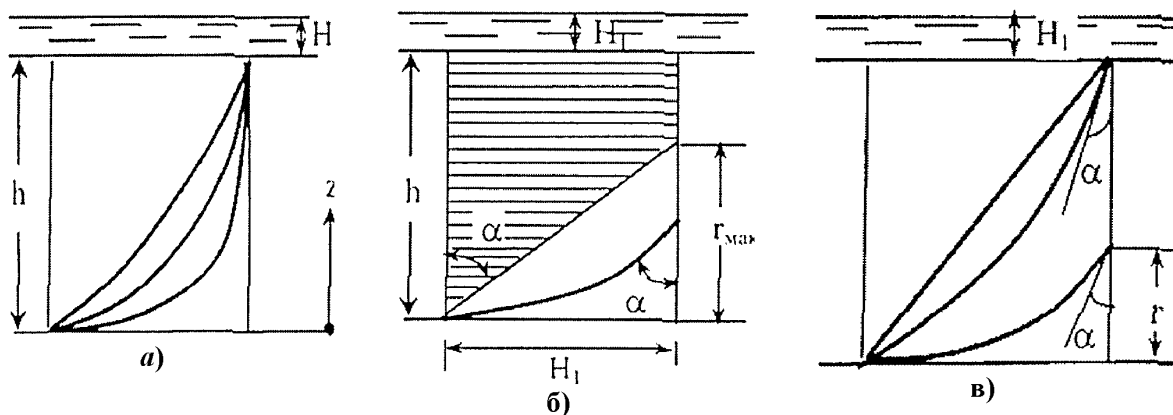


Рисунок 1 – Расчетные схемы фильтрации с учетом начального градиента напора

Если не учитывать влияния начального градиента напора, то явления фильтрации, хотя и с различными скоростями, все же начинаются сразу во всех точках слоя непосредственно после повышения граничного значения напора. В этом случае при любом $t > 0$ имеется то или иное поступление воды в слой – сначала медленное, вследствие малых значений градиентов напора в верхней части слоя (рисунок 1,а), но постепенно возрастающее по мере увеличения градиентов напора до конечного значения, равно $\frac{H_t}{h}$.

При учете влияния начального градиента напора движение жидкости начинается только тогда, когда градиент напора превосходит некоторое определенное значение i_0 . Поэтому в первое время после увеличения на верхней границе слоя давления в воде, пока плоскость раздела не достигнет этой поверхности, происходит уплотнение и выжимание воды только в нижней части слоя под

воздействием нагрузки, равной γH_1 . Этому состоянию соответствует кривая на рисунок 1,б, а также одна из кривых на рисунок 1,в. Если толщина слоя $h > r_{\max} = \frac{H_1}{i_0}$, то процесс уплотнения не может достигнуть верхней поверхности слоя, конечная эпюра напоров в верхней части остается прямоугольной и поступление воды в верхнюю часть слоя не происходит. Иначе говоря, при толщине $h > \frac{H_1}{i_0}$ слой может рассматриваться как совершенно водоупорный и загрузка его верхней поверхности водой вызывает только уплотнение нижней части слоя при отсутствии явлений транзитной фильтрации.

При толщинах слоя меньших r_{\max} транзитная фильтрация начинается, когда поверхность раздела $z = r$ (рисунок 1,в) достигает верхней поверхности слоя $z = h$. Тогда по мере увеличения величины $\lg \alpha$ на верхней граничной поверхности слоя от значения i_0 до $\frac{H_1}{h}$ транзитный расход увеличивается от нуля до своего наибольшего значения

$$u = -k \left(\frac{\partial H}{\partial z} - i_0 \right) = -k \left(\frac{H_1}{h} - i_0 \right).$$

Следует отметить, что при экспериментальном определении коэффициента фильтрации последний вычисляется обычно по формуле $u = -k \frac{\partial H}{\partial z} = -k \frac{H_1}{h}$; в этом случае влияние начального градиента входит в неявном виде в величину коэффициента фильтрации. Вследствие этого при достаточно больших значениях начального градиента обычный коэффициент фильтрации получается различным при различных градиентах напора [7]. Кроме того, необходимо указать, что во многих случаях при экспериментальном определении коэффициента фильтрации численные значения $\frac{H_1}{h}$ бывают существенно больше тех значений, которые соответствуют условиям в основаниях сооружений и земляных сооружений. Это приводит к преуменьшению влияния начального градиента напора, усугубляемому иногда некоторым нарушением структуры грунта при выполнении фильтрационных исследований.

А. Применительно к случаю быстрого поднятия напора на верхней поверхности слоя укажем, что для этого случая решение задачи сводится к отысканию решения уравнения

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v(t) e^{\alpha z} \frac{\partial}{\partial z} \left(K(1 + \beta H) \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad C_v(t) = \frac{K(1 + \varepsilon_{cp})}{\gamma \alpha_0} (1 - \beta_E e^{-\alpha E t}) \quad (1)$$

при следующих краевых условиях.

Для периода времени, когда $r \leq h$:

$$\text{при } t = 0 \quad H = H_0 = H_1 \text{ и } r = 0, \quad (2)$$

$$\text{при } t > 0 \text{ и } z = 0 \quad H = 0, \quad (3)$$

$$\text{при } t > 0 \text{ и } z = r \quad H = H_0 \text{ и } \frac{\partial H}{\partial z} = i_0, \quad (4)$$

$$\text{при } t > 0 \text{ и } z > r \quad H = H_0. \quad (5)$$

Б. В результате решения этой задачи будут определяться $H = H(t, z)$ и $r = r(t)$, и устанавливается момент времени t_h , когда $r = h$, для которого может быть найдено распределение напоров

$$H = H(t_h, z).$$

Для периода времени, когда $r = h$:

$$\text{при } t = t_h \quad H = H(t_h, z), \quad (6)$$

$$\text{при } t > t_h \text{ и } z = 0 \quad H = 0, \quad (7)$$

при $t > t_h$ и $z = h$ $H = H_1$. (8)

В случае, если $r_{\max} < h$ и транзитной фильтрации не возникает, то напоры определяются как для случая приложения нагрузки γH_1 .

С целью иллюстрации влияния собственного веса воды предположим, что со времени образования глинистого слоя он постоянно находился в затопленном и в насыщенном водой состоянии. Допустим далее, что в некоторый момент $t = 0$ подстилающее его песчаное основание было быстро осушено. В таком случае, если давление в воде на верхней поверхности слоя равно нулю, т.е. $H_1 = 0$, а начальный градиент напора $i_0 > 1$, то вода, заполняющая поры грунта, не может перемещаться под влиянием только своего собственного веса и при соответствующих условиях может оказаться висящей над подстилающим грунтом с более крупными незаполненными порами.

Метод и решение задачи. Задачи типов (1)-(5) и (1), (6)-(8) могут быть решены различными методами уравнений математической физики и численного анализа. Здесь предпочтение отдается методу О.Видебурга, методу Фурье, методу введения новых переменных, методу преобразования граничных условий в нулевые и методу разложения по собственным функциям. Согласно методу О. Видебурга, уравнение (1) запишем в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = C_v(t)e^{\alpha z} \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} + \Phi_1(z, t, H), \quad (9)$$

$$\Phi_1(z, t, H) = \beta C_v(t)e^{\alpha z} \left[K \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 + KH \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right]. \quad (10)$$

Первый шаг. Предполагая в (10) $\beta = 0$ и пользуясь выбранными методами, решение задачи (9), (2)-(5) можно представить в виде:

$$H(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{\alpha_E t} \right)}, \quad (11)$$

где: $C_{v0} = \frac{K(1+\varepsilon_{cp})}{\gamma\alpha_0}$, $D_i = \frac{\alpha H_0}{\lambda_i} \cdot \frac{\{\dots\}_1}{\{\dots\}_2} e^{C_{v0}\beta_E \frac{\lambda_i^2}{\alpha_E}}$, $\{\dots\}_1 = V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right)$,

$$\{\dots\}_2 = \lambda_i^2 V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - [\dots]_1 \cdot e^{-\alpha h},$$

$$[\dots]_1 = \lambda_i^2 \cdot e^{-\alpha h} V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right).$$

Здесь, как было изложено выше, последовательным введением новых переменных [6]

$$y = \frac{\alpha}{2h} + \frac{1}{2} \ln \frac{4h^2 \lambda^2}{\alpha^2} \quad \text{и} \quad x = e^y$$

дифференциальное уравнение

$$Z'' + \lambda^2 e^{-\alpha z} Z(z) = 0$$

приведено к уравнению Бесселя [7], общее решение которого известно

$$V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) = J_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) - \frac{J_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \right)}{Y_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \right)} Y_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) -$$

функция из комбинации Бесселя первого и второго рода, λ_i – положительные корни уравнения вида

$$\begin{aligned}
 & H_0 \left[V_1 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} V_1 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} V_2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} \right) - \frac{1}{\lambda} V_1 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} \right) \right]^2 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{4\lambda^2} \right) \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} \right) \right\} - \\
 & - \frac{e^{-\alpha r_{\max}}}{\alpha} \left[\frac{2}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} V_2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) - \frac{1}{\lambda} V_1 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right]^2 + \\
 & + \left(1 - \frac{\alpha^2 e^{\alpha r_{\max}}}{4\lambda^2} \right) \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \left. \right\} - \frac{i_0}{\lambda} \left\{ \frac{\lambda^2}{\alpha} V_1^2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} \right) - \frac{e^{-\alpha r_{\max}}}{\alpha} \times \right. \\
 & \times \left. \left[\lambda^2 e^{-\alpha r_{\max}} \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \right\} \cdot V_0 \left(\frac{2\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

а $r = r(t)$ определено в неявном виде

$$\begin{aligned}
 & \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \cdot V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) - \frac{D_i}{\alpha} e^{-\alpha r} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha r} \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r} \right) \right] \times \\
 & \times e^{-C_{v_0} \lambda_i^2 \cdot \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} = \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \cdot V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) - \frac{D_i}{\alpha} e^{-\alpha r_{\max}} \times \\
 & \times \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \cdot e^{-C_{v_0} \lambda_i^2 \cdot \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)},
 \end{aligned}$$

где можно определить t_h и $H(t_h, z)$:

$$\begin{aligned}
 & e^{C_{v_0} \lambda_i^2 \cdot \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} = \frac{D_i}{\alpha} \left\{ e^{-\alpha h} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha h} \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) \right] - \right. \\
 & - e^{-\alpha r_{\max}} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} \cdot V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right] \left. \right\} / \\
 & / \frac{H_0}{\lambda_i} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{2} h} \cdot V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} h} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \cdot V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2} r_{\max}} \right) \right\},
 \end{aligned}$$

$$H(t_h, z) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left(t_h + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E \cdot t_h} \right)}. \quad (12)$$

Рассмотрим теперь решение задачи (9), (6-8). Решение этой задачи ничем не отличается от обычного решения соответствующих задач теплопроводности.

Для того чтобы преобразовать граничные условия (7), (8) в нулевые, мы остановились на следующей форме решения:

$$H(z, t) = \frac{H_1}{h} z + U(z, t). \quad (13)$$

Если подставить эти выражения для $H(z, t)$ в исходную задачу (9), (6)-(8), мы получим новую задачу для неизвестной функции $U(z, t)$:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = KC_v(t) e^{\alpha z} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \Phi_2(z, t, U), \quad (14)$$

$$\Phi_2(z, t, U) = \beta KC_v(t) e^{\alpha z} \left[\left(\frac{H_1}{h} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{H_1}{h} z + U(z, t) \right) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right],$$

$$U(t_h, z) = H(t_h, z) - \frac{H_1}{h} z \quad \text{при } t = t_h, \quad (15)$$

$$U = 0 \quad \text{при } t > t_h \text{ и } z = 0, \quad (16)$$

$$U = 0$$

$$\text{при } t > t_h \text{ и } z = h. \quad (17)$$

Теперь, пользуясь методом Фурье, решение задачи (14)-(17) можно представить в виде ($\beta = 0$):

$$U(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j V_0 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)}, \quad (18)$$

где:

$$B_j = \frac{\{\dots\}_3}{\{\dots\}_4} \cdot \alpha e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left(t_h + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t_h} \right)},$$

$$\{\dots\}_3 = \sum_{j=1}^{\infty} F(\mu_j, \alpha, h) + \frac{H_1}{h\mu_j} \left\{ h e^{-\frac{\alpha}{2}h} \cdot V_1 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} [\dots]_k \right\},$$

$$[\dots]_k = V_{2+2k} \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) - V_{2+2k} \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} \right), \quad \{\dots\}_4 = \mu_j^2 V_1^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\alpha h} [\dots]_2,$$

$$[\dots]_2 = \mu_j^2 e^{-\alpha h} \cdot V_1^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) - V_0^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right).$$

Здесь $F(\mu_j, \alpha, h) = 0$ при $\lambda_i \neq \mu_j$,

$$F(\mu_j, \alpha, h) = \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \mu_j^2 V_1^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\alpha h} \cdot \left[\mu_j^2 e^{-\alpha h} V_1^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \right\}$$

при $\lambda_i = \mu_j$, μ_j – положительные корни уравнения

$$Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \cdot J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) - J_0\left(\frac{2\mu}{\alpha}\right) \cdot Y_0\left(\frac{2\mu}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) = 0.$$

Имея в виду (13) и (18), решение задачи (14), (6)-(8) получить нетрудно. Здесь в (13) функция $U(z, t)$ определена рядом (18).

Определение осадок основания. Для определения величины осадки слоя во времени следует полученные решения подставить в уравнение

$$\varepsilon(t) = \frac{a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} e^{-\alpha z} \sigma(t), \quad (19)$$

и проинтегрировать его от 0 до h , т.е.

$$s(t) = \frac{a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \int_0^h e^{-\alpha z} \sigma(z, t) dz,$$

где:

$$\sigma(t) = \gamma(H_0 - H) - \text{для случая А,}$$

$$\sigma(t) = \gamma \left[H(t_h, z) - 2 \frac{H_1}{h} z - U \right] - \text{для случая Б.}$$

Интегрирование этого уравнения дает следующие результаты: для случая А –

$$s_A(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left(t_h + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t_h} \right)} \right\}; \quad (20)$$

для случая Б –

$$s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \cdot e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left(t_h + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t_h} \right)} - \right. \\ \left. - \frac{H_1}{\alpha h} \left[e^{-h} \left(h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \times \right. \\ \left. \times e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} \right\}, \quad (21)$$

Откуда

$$s(t) = s_A(t) + s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \frac{H_1}{\alpha h} \left[e^{-\alpha h} \left(h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha}\right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1\left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h}\right) \right] \cdot e^{-C_{v0} \lambda_i^2 \cdot \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} \cdot e^{-\alpha_E t} \right)} \right\}. \quad (22)$$

Из (21) заметим, что при $t \rightarrow \infty$ имеем:

$$s_\infty = \frac{\gamma\alpha_0}{1+\varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma\alpha} (1-e^{-\alpha h}) - \frac{H_1}{\alpha h} \left[e^{-\alpha h} \left(h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] \right\}. \quad (23)$$

Второй шаг. Теперь рассмотрим случай: $\beta \neq 0$.

А. Пользуясь методом разложения по собственным функциям, решение задачи (9), (2)-(5) нетрудно представить в виде:

$$H(z, t) = \sum_{i=0}^{\infty} T_{li}(t) V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right), \quad (24)$$

где:

$$T_{li}(t) = \left[D_i + \int e^{C_{v0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Phi_{li}(t) dt \right] \cdot e^{-C_{v0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)},$$

$$\Phi_{li}(t) = \frac{\int_0^h \Phi_1(z, t, H) V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) dz}{\int_0^h e^{-\alpha z} V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) dz}.$$

Здесь также как и в первом шаге, соответственно будут определены $r = r(t)$, t_h и $H(t_h, z)$:

$$\begin{aligned} & \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2}r} V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r} \right) - \frac{T_{li}(t)}{\alpha} e^{-\alpha r} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha r} V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r} \right) \right] = \\ & = \frac{H_0}{\lambda_i} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} \right) - \frac{T_{li}(t)}{\alpha} e^{-\alpha r_{\max}} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} \right) \right]; \\ & \quad e^{C_{v0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} = \\ & = \frac{D_i + \int e^{C_{v0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Phi_{li}(t) dt}{\alpha} \cdot \left\{ e^{-\alpha h} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha h} V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] - \right. \\ & \quad \left. - e^{-\alpha r_{\max}} \left[\lambda_i^2 e^{-\alpha r_{\max}} V_1^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} \right) + V_0^2 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} \right) \right] \right\} / \\ & \quad / \frac{H_0}{\lambda_i} \left\{ e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}r_{\max}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$H(t_h, z) = \sum_{i=1}^{\infty} V_0 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) \cdot \left(D_i + \int e^{C_{v_0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_i(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v_0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)}.$$

(25)

Б. Теперь рассмотрим решение задачи (1), (6)-(8). Пользуясь методом разложения по собственным функциям, решение этой задачи нетрудно представить в виде (13). Здесь $U(z, t)$ в (13):

$$U(z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_{2j}(t) V_0 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right), \quad (26)$$

где

$$T_{2j}(t) = \left(B_j + \int e^{C_{v_0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{2j}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v_0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)},$$

$$\Phi_{2j}(t) = \frac{\int_0^h \Phi_2(z, t, H) V_0 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) dz}{\int_0^h e^{-\alpha z} V_0^2 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}z} \right) dz}.$$

Определение осадок основания. Для определения величины осадки слоя во времени следует полученные решения (24) и (13) (вначале (26) подставить в (13), затем в (12)) подставить в (19) и проинтегрировать его от 0 до h .

Интегрирование приводит нас к следующим результатам:
для случая А –

$$s_A(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left(D_i + \int e^{C_{v_0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{1i}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v_0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Bigg|_{t=t_h}; \quad (27)$$

для случая Б –

$$s_B(t) = \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_i}{\lambda_i} \left[V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left(\frac{2\lambda_i}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left(D_i + \int e^{C_{v_0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Phi_{1i}(t) dt \right) \cdot e^{-C_{v_0}\lambda_i^2 \left(t + \frac{\beta_E}{\alpha_E} e^{-\alpha_E t} \right)} \Bigg|_{t=t_h} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{H_1}{\alpha h} \left[e^{-\alpha h} \left(h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[V_1 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \times \\
 & \times \left\{ B_j + \int e^{C_{v0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Phi_{2j}(t) dt \right\} \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Bigg\}, \tag{28}
 \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
 s(t) = s_A(t) + s_B(t) = & \frac{\gamma a_0}{1 + \varepsilon_{cp}} \left\{ \frac{q}{\gamma \alpha} (1 - e^{-\alpha h}) - \frac{H_1}{\alpha h} \left[e^{-\alpha h} \left(h + \frac{1}{\alpha} \right) - \frac{1}{\alpha} \right] - \right. \\
 & - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{\mu_j} \left[V_1 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} \right) - e^{-\frac{\alpha}{2}h} V_1 \left(\frac{2\mu_j}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}h} \right) \right] \times \\
 & \times \left. \left\{ B_j + \int e^{C_{v0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \Phi_{2j}(t) dt \right\} \cdot e^{-C_{v0}\mu_j^2 \left(t + \frac{\beta E}{\alpha E} e^{-\alpha E t} \right)} \right\}. \tag{29}
 \end{aligned}$$

Из (29) следует, что при $t \rightarrow \infty$ получим (23). Пользуясь формулами (11), (12), (13), (18), (19)-(29) для ПЭВМ составлена программа для определения осадки грунтовых оснований. На рисунке 2а жирными линиями показаны эпюры напоров для случая уплотнения слоя грунта равномерной нагрузкой $q = 1 \text{ кГ/см}^2$ в соответствии со схемой на рисунке 1, полагая $\varepsilon_{cp} = 0,5$; $a_0 = 0,004 \text{ см}^2/\text{кг}$; $K = 10^{-7} \text{ см/сек}$; $h = 10 \text{ м}$; $i = 5$; $\alpha = 0,002 \text{ см}^{-1}$; $\beta_E = 0,001$; $\alpha_E = 0,02 \text{ сек}^{-1}$; $H_1 = 50 \text{ см}$; $\gamma = 0,001 \text{ кг/см}^3$; $\beta = 0,03$.

Для сравнения приведены эпюры, полученные без учета начального градиента напора (тонкие линии). На рис. 2,б даются кривые осадок на основе выполненного расчета уплотнения грунта во времени. Как видно из приводимых на рисунке 2 кривых, влияние начального градиента при принятых численных данных и, в частности, при достаточно больших значениях начального градиента, весьма сильно отражается на получаемых результатах. Однако для правильной оценки этого влияния следует уточнить методы лабораторного определения устойчивых значений начального градиента напора, так как только тогда можно будет с достаточной уверенностью проводить практические расчеты уплотнения с учетом влияния этой характеристики грунта.

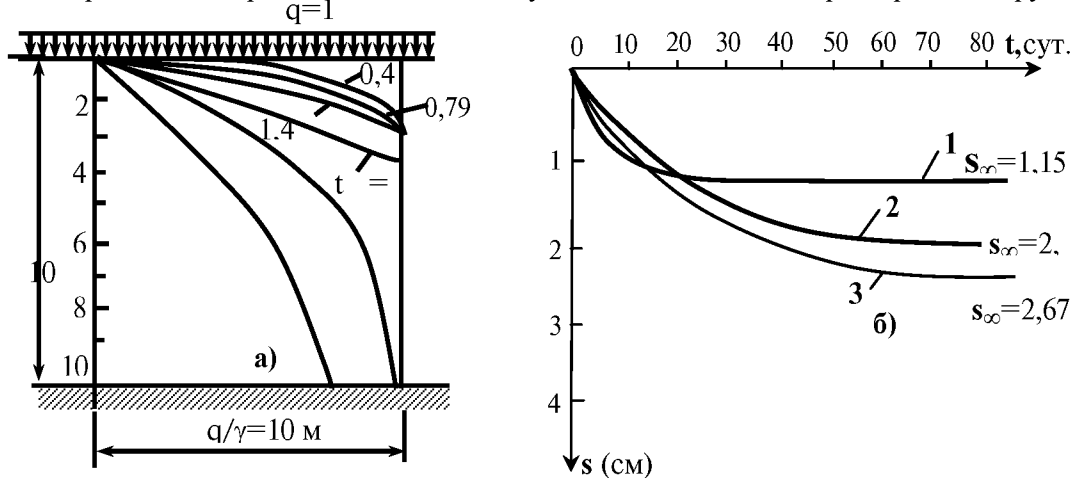


Рисунок 2 – Изменение осадка s_t по t равномерно распределенной нагрузки $q = 1 \text{ кГ/см}^2$: 1 – для неоднородной среды; 2 и 3 – для однородной среды

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Роза С.А. Расчет осадки сооружений гидроэлектростанций.- М.: Госэнергоиздат, 1959.- 330 с.
- [2] Флорин В.А. Основы механики грунтов.- М.: Госстройиздат, 1959.- Т.1.- 357 с.
- [3] Флорин В.А. Основы механики грунтов.- М.: Госстройиздат, 1961.- Т.2.- 540 с.
- [4] Зарецкий Ю.К. Теория консолидации грунтов.- М.: Наука, 1967.- 270 с.
- [5] Цытович Н.А., Зарецкий Ю.К., Мальшев М.В., Абелов М.Ю., Тер - Мартиросян З.Г. Прогноз скорости осадок оснований сооружений /Ред. Н.А.Цытович.- М.: Лит. по строительству, 1967.-235 с.
- [6] Коренов Б.Г. Некоторые задачи упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. – М.: Физматфиз. 1960. -458с
- [7] Кузнецов Д.С. Специальные функции. –М.: Высшая школа. 1965. – 423 с

REFERNCES

- [1] Rose S.A. Calculation rainfall of hydroelectric power stations constructions. M.: Gosenergoizdat. 1959.330 p.
- [2] Florin V.A. Basics of soil mechanics //State Building Publisher (Gosstroizdat).1959. V.1-357 p.
- [3] Florin V.A. Basics of soil mechanics //State Building Publisher (Gosstroizdat).1961. V.2-543 p.
- [4] Zaretsky Y.K. Soil consolidation theory. M.: Nauka, 1967.269 p.
- [5] Tsytoovich N.A., Zaretsky Y.K., Malyshev M.V., Ter-Martirosyan Z.G. Forecast speed pellet based structures. M.: Stroiiizdat, 1967. 238 p.
- [6] Korenev B. G. Some problems of elasticity and thermal conduction solved in Bessel functions. M.: Fizmatfiz. 1960. 458s
- [7] Kuznetsov D.S. Special functions. M.: Higher School. 1965. 423

ӘРТЕКТІ ТОПЫРАҚ КОНСОЛИДАЦИЯСЫНЫҢ БІРӨЛШЕМДІ КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ЕСЕБІН НАПОРДЫҢ БАСТАПҚЫ ГРАДИЕНТІ ӘСЕРІНДЕ ШЕШУ ӘДІСІ ТУРАЛЫ ЖӘНЕ ОНЫҢ ШӨГҮІН АНЫҚТАУ

Ш. Алтынбеков

Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік педагогикалық институты,
Шымкент, Қазақстан

Түйін сөздер: топырақтар механикасы, фильтрациялық консолидация теориясы, лездік-серпімді деформация, напордың бастапқы градиенті, іргетастың шөгуі, бірөлшемді квазисызықты есеп, математикалық физика әдістері.

Аннотация. Лездік-серпімді деформация модулі консолидация процесінде координаталарға және уақытқа тәуелді өзгеруші әртекті топырақтың фильтрациялық консолидация теориясының бірөлшемді квазисызықты есебі шешілген. Есепті шешу үшін О.Видебург, Фурье жаңа айнымалыларды енгізу, әртекті шекаралық шарттарды біртекті шарттарға түрлендіру, меншікті функциялар бойынша жіктеу әдістері қолданылған. Іргетастың шөгуі В.А. Флорин әдісінде есептелінген.

Есеп екі уақыт периодында ($r \leq h$ және $r = h$, h – топырақ қабатының қалыңдығы) шешілген. $r = r(t)$, t_h және $H(t_h, z)$ -тер есепті шешу барысында табылған. Іргетастың шөгуі әрбір уақыт периодында жеке-жеке анықталып, соңында осы шөгулердің қосындысы түрінде ұсынылған. Графикалық талдау берілген. Алынған нәтижелердің шындыққа жанасуы дербес жағдайларда өзге авторлардың нәтижелерін алумен дәлелденген. Салыстыру эпюрі келтірілген.

Поступила 15.03.2016 г.