N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 306 (2016), 61–71

COEFFICIENT CONDITIONS FOR THE UNIQUE SOLVABILITY OF LINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FREDHOLM INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH IMPULSE EFFECTS

D.S. Dzhumabaev, E.A. Bakirova

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: dzhumabaev@list.ru, bakirova1974@mail.ru

Key words: boundary value problem, solvability, integro-differential equation, impulse effect.

Abstract. A linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel subject to impulse effects at the fixed points of interval is investigated. The interval is divided on parts with the points including the points of impulse effects. The values of solution at the left points of subintervals are introduced as additional parameters, and the origin boundary value problem is reduced to the equivalent multipoint boundary value problem with parameters. At the fixed values of parameters, we have the special Cauchy problem for system of integro-differential equations. Applying ν times substitutions in an equivalent system of integral equations, it is obtained the representation for the solution of special Cauchy problem. Using the degenerate form of integral term's kernel in origin equation, it is composed the system of linear algebraic equations permitting us to solve the special Cauchy problem. If the matrix of composed system is invertible, then this partition is called ν regular partition of interval. It is offered an algorithm for finding the solution of the multipoint boundary value problem with parameters. Every step of the algorithm consists of two points. In the first point of the algorithm a system of linear algebraic equations with respect to introduced parameters is solved. In the second point of algorithm the solution of special Cauchy problem for systems of integro-differential equations with the parameters is found. The conditions of realization and convergence of the proposed algorithm, providing the unique solvability of the boundary value problem are obtained. In terms of the initial data necessary and sufficient conditions for the unique solvability of linear two-point boundary value problem for the system of Fredholm integro-differential equations with degenerate kernel subject to impulse effects are established. The algorithm and theorem on unique solvability of the considered problem do not require the construction of the fundamental matrix of the differential part.

Работа выполнена в рамках проекта №3362/ГФ4 по грантовому финансированию Министерства образования и науки Республики Казахстан

УДК 517.624.3

КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ПРИЗНАКИ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМАС ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

Д.С. Джумабаев, Э.А. Бакирова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: краевая задача, разрешимость, интегро-дифференциальное уравнение, импульсное воздействие.

Аннотация. Исследуется линейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифферен-циальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром, подверженная импульсным воздействиям в фиксированных точках отрезка. Отрезок, где рассматривается интегро-дифференциальные уравнения разбиваются на части точками, включающими точки импульсных воздействий, вводятся дополнительные параметры как значения решения в начальных точках подинтервалов и исходная задача сводится к эквивалентной многоточечной краевой задаче с параметрами. При фиксированных значениях параметров возникает специальная задача Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений. Применяя ν раз подстановки в эквивалентной системе интегральных уравнений получено представление решения специальной задачи Коши. Используя вырожденность ядра интегрального члена исходного уравнения построена система линейных алгебраических уравнений, позволяющая найти решения специальной задачи Коши. Если матрица построенной системы обратима, то разбиение называется ν регулярным разбиением интервала. Предлагается алгоритм нахождения решения многоточечной краевой задачи с параметрами. Каждый шаг алгоритма состоит из двух пунктов. В первом пункте алгоритма решается система линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров. Во втором пункте алгоритма решается специальная задача Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений при найденных значениях параметров. Получены условия осуществимости и сходимости предложенного алгоритмов, обеспечивающие однозначную разрешимость рассматриваемой краевой задачи. В терминах исходных данных установлены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожденным ядром, подверженного импульсным воздействиям. Алгоритм и теорема об однозначной разрешимости исследуемой задачи не требует построения фундаментальной матрицы дифференциальной части.

На отрезке $[0,T]$ рассматривается линейная двухточечная краевая задача для систем интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с вырожден-ным ядром, подверженного импульсным воздействиям

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{k=1}^{l}\int_0^T \varphi_k(t)\psi_k(s)x(s)ds + f(t), \quad x\in R^n, \quad t\in(0,T)\setminus\{\theta_j,\ j=\overline{1,m}\}, \tag{1}$$

$$(\theta_0 = 0 < \theta \ < \theta_2 < \ldots < \theta_m < T = \theta_{m+1}),$$

$$B_0x(0) + C_0x(T) = d_0, \quad d_0\in R^n, \tag{2}$$

$$B_j \lim_{t\to\theta_j-0} x(t) + C_j \lim_{t\to\theta_j+0} x(t) = d_j, \quad j=\overline{1,m}, \quad d_i\in R^n, \tag{3}$$

где $(n\times n)$-матрицы $A(t),\ \varphi_k(t),\ \psi_k(s),\ k=\overline{1,N}$ непрерывны на $[0,T]$, n-вектор-функция $f(t)$ кусочно непрерывна на $[0,T]$ с возможными разрывами в точках $t=\theta_j,\ j=\overline{1,m}$.

Дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с им-пульсными воздействиями находят широкое применение в задачах приложения. Вопросы разрешимости краевых задач для этих уравнений различными методами исследованы в работах [1-11]

Краевые задачи для уравнения (1), когда нет импульсных воздействий, исследовались в работах [12-18]. Условия импульсного воздействия (3) существенно влияют на качественные свойства краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма.

Необходимые и достаточные условия разрешимости и однозначной разрешимости линейной краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма с импульсными воздействиями установлены в [19]. Эти условия сформулированы в терминах фундаментальной матрицы дифференциальной части уравнения.

Как известно, для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами построить фундаментальную матрицу, как правило, не удается. Поэтому в данной работе критерии однозначной разрешимости получен в терминах исходных данных задачи (1)-(3) без использования фундаментальной матрицы дифференциальной части.

Через $PC([0,T],R^n,\{\theta_j\}_{j=1}^m)$ обозначим пространство кусочно-непрерывных функций $x:[0,T]\to R^n$, непрерывных на $[\theta_{p-1},\theta_p)$, $p=\overline{1,m+1}$, с нормой $\|x\|_1 = \sup_{t\in[0,T]}\|x(t)\|$.

Решением задачи (1)-(3) является кусочно-непрерывно дифференцируемая на $(0,T)$ функция $x(t) \in PC([0,T], R^n, \{\theta_j\}_{j=1}^m)$, удовлет-воряющая на $(0,T)\setminus\{\theta_j\}$ интегро-дифференциальному уравнению (1), а также условиям (2), (3).

Приведем схему метода параметризации [20] применительно к задаче (1)-(3). Разбиение интервала $[0,T]$ на N частей $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$, где множество точек разбиения t_p, $p = \overline{1, N-1}$ содержит точки импульсных воздействий θ_j, $j = \overline{1,m}$, обозначим через $\Delta_N(\theta)$.

Тогда для каждого разбиения $\Delta_N(\theta)$ существуют взаимно однозначные функции

$$r^+ : (1,2,\ldots,m) \to (1,2,\ldots,N-1),$$

$$r^- : \{(1,2,\ldots,N-1) \setminus (r^+(1), r^+(2),\ldots, r^+(m))\} \to (1,2,\ldots,N-1)$$

такие, что $t_{r^+(j)} = \theta_j$ и $t_{r^-(s)} \neq \theta_j$ при всех $j = \overline{1,m}$, $s = \overline{1, N-m-1}$.

Сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[t_{r-1}, t_r)$ обозначим через $x_r(t)$, т.е. $x_r(t) = x(t)$ при $t \in [t_{r-1}, t_r)$ $r = \overline{1,N}$.

Через $C([0,T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$ обозначим пространство систем функций $x[t] = (x_1(t), x_2(t) \ldots x_N(t))$, где функции x_r, $r = \overline{1,N}$ непрерывны на $[t_{r-1}, t_r)$ и имеют конечные левосторонние пределы $\lim\limits_{t \to t_r - 0} x_r(t)$ при всех $r = \overline{1,N}$, с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max\limits_{r=\overline{1,N}} \sup\limits_{t \in [t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|$.

Введем дополнительные параметры $\lambda_r = x(t_{r-1})$, $r = \overline{1,N}$ и на каждом r-ом интервале $[t_{r-1}, t_r)$ произведем замену функции $u_r(t) = x(t) - \lambda_r$. Тогда задача (1)-(3) сведется к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(u_r + \lambda_r) + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{l} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_k(t) \psi_k(s)(u_j(s) + \lambda_j) ds + f(t), \qquad t \in (t_{r-1}, t_r), \tag{4}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r = \overline{1,N}, \tag{5}$$

$$B_0 \lambda_1 + C_0 \lambda_N + C_0 \lim_{t \to T-0} u_N(t) = d_0, \quad d_0 \in R^n, \tag{6}$$

$$B_j \lambda_{r^+(j)} + B_j \lim_{t \to \theta_j - 0} u_{r^+(j)}(t) + C_j \lambda_{r^+(j)+1} = d_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{7}$$

$$\lambda_{r^-(s)} + \lim_{t \to t_{r^-(p)} - 0} u_{r^-(s)}(t) - \lambda_{r^-(s)+1} = 0, \quad s = \overline{1,\ldots, N-m-1}. \tag{8}$$

Здесь соотношения (8) являются условиями непрерывности решения во внутренних точках разбиения, где нет импульсных воздействий.

Если $\widetilde{x}(t)$ – решение задачи (1)–(3), то пара $(\widetilde{\lambda}, \widetilde{u}[t])$, с элементами $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \ldots, \widetilde{\lambda}_N) \in R^{nN}$, $\widetilde{u}[t] = (\widetilde{u}_1(t), \widetilde{u}_2(t) \ldots, \widetilde{u}_N(t)) \in C([0,T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$, где $\widetilde{\lambda}_r = \widetilde{x}(t_{r-1})$, $\widetilde{u}_r(t) = \widetilde{x}(t) - \widetilde{x}(t_{r-1})$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$ является решением задачи (4)–(8). И наоборот, если пара $(\lambda^*, u^*[t])$, где $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^* \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t) \ldots, u_N^*(t)) \in C([0,T], \Delta_N(\theta), R^{nN})$ – решение задачи (4)–(8), то функция $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^* \ldots, \lambda_N^*) \in R^{nN}$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in (t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim\limits_{t \to T-0} u_N^*(t)$ будет решением исходной задачи (1)–(3).

При фиксированных значениях $\lambda \in R^{nN}$ система функции $u[t]$ определяется из (4),(5) - специальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений. Интегрируя обе части (4) и используя (5) получим систему интегральных уравнений

$$u_r(t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)u_r(\tau)d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau)\lambda_r(\tau)d\tau + \int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{k=1}^{l}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)u_j(s)dsd\tau +$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{k=1}^{l}\varphi_k(\tau)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)\lambda_j dsd\tau + \int_{t_{r-1}}^{t} f(\tau)d\tau, \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=\overline{1,N}. \tag{9}$$

Возьмем натуральное число ν и через $E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t)$ обозначим следующую сумму

$$E_{\nu,r}(A(\cdot),P(\cdot),t) = \int_{t_{r-1}}^{t} P(\tau_1)d\tau_1 + \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1} P(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \ldots +$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1})\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} P(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\ldots d\tau_1, \quad t\in[t_{r-1},t_r),$$

где $P(t)$ непрерывная на $[t_{r-1},t_r)$ квадратная матрица или вектор размерности n.

Подставив в первое слагаемое правой части (9) вместо $u_r(\tau)$, $r=\overline{1,N}$ соответствующую правую часть (9) и повторив этот процесс $\nu \in \mathrm{N}$ раз, получим представление $u_r(t)$ вида

$$u_r(t) = E_{\nu,r}\left(A(\cdot), A(\cdot)\lambda_r + \sum_{k=1}^{l}\varphi_k(\cdot)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)ds\lambda_j + \sum_{k=1}^{l}\varphi_k(\cdot)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)u_j ds + f(\cdot), t\right) +$$
$$+\int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_2 d\tau_1, \quad t\in[t_{r-1},t_r). \tag{10}$$

Введя обозначения

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{N}\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)u_j(s)ds,$$

$$D_{r,r}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), A(\cdot) + \sum_{k=1}^{l}\varphi_k(\cdot)\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_k(s)ds, t), \quad r=\overline{1,N},$$

$$D_{r,j}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), \sum_{k=1}^{l}\varphi_k(\cdot)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\psi_k(s)ds, t), \quad r\neq j, \quad j=\overline{1,N},$$

$$F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta),t) = E_{\nu,r}(A(\cdot), f(\cdot), t), \quad r=\overline{1,N},$$

$$g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_r,t) = \int_{t_{r-1}}^{t} A(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{\tau_1} A(\tau_2)\ldots\int_{t_{r-1}}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)u_r(\tau_\nu)d\tau_\nu\ldots d\tau_2 d\tau_1,$$

систему (10) запишем в виде

$$u_r(t) = \sum_{j=1}^{N} D_{r,j}^{\nu}(\Delta_N(\theta),t)\lambda_j + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t)\mu_k + F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta),t) +$$
$$+ g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_r,t), \quad t\in[t_{r-1},t_r). \tag{11}$$

В (11), полагая $t=\tau$, умножая обе части на $\psi_p(\tau)$, интегрируя по τ на $[t_{r-1},t_r]$ и суммируя левые и правые части по r, имеем

$$\mu_p = \sum_{k=1}^{l} G_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta))\mu_k + \sum_{r=1}^{N} V_{p,r}(\nu,\Delta_N(\theta))\lambda_r +$$

$$F_p(\nu,\Delta_N(\theta))+g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u),\ \ p=\overline{1,l}, \tag{12}$$

где

$$G_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta))=\sum_{r=1}^{N}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)E_{\nu,r}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),\tau)d\tau,$$

$$V_{p,r}(\nu,\Delta_N(\theta))=\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)\sum_{j=1}^{N}D_{r,j}^{\nu}(\Delta_N(\theta),\tau)d\tau,$$

$$F_p(\nu,\Delta_N(\theta))=\sum_{r=1}^{N}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta),\tau)d\tau,$$

$$g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)=\sum_{r=1}^{N}\int_{t_{r-1}}^{t_r}\psi_p(\tau)g_{\nu}^{A}(\Delta_N(\theta),u_r,\tau)d\tau.$$

По $(n\times n)$ матрицам $G_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta)),\ \ p,k=\overline{1,l},\ \ V_{p,r}(\nu,\Delta_N(\theta)),\ \ r=\overline{1,N}$ составим $(nl\times nl)$ матрицу $G(\nu,\Delta_N(\theta))=(G_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta)))$ и $(nl\times n(N-1))$ матрицу $V(\nu,\Delta_N(\theta))=(V_{p,r}(\nu,\Delta_N(\theta)))$. Систему (12) запишем в виде

$$[I-G(\nu,\Delta_N(\theta))]\mu=V(\nu,\Delta_N(\theta))\lambda+F(\nu,\Delta_N(\theta))+g(\nu,\Delta_N(\theta),u), \tag{13}$$

где I единичная матрица размерности nl, векторы

$$F(\nu,\Delta_N(\theta))=(F_1(\nu,\Delta_N(\theta)),F_2(\nu,\Delta_N(\theta)),\dots,F_{m+1}(\nu,\Delta_N(\theta))),$$

$$g(\nu,\Delta_N(\theta),u)=(g_1(\nu,\Delta_N(\theta),u),g_2(\nu,\Delta_N(\theta),u),\dots,g_N(\nu,\Delta_N(\theta),u))$$

принадлежат R^{nN}.

Определение. Разбиение $\Delta_N(\theta)$ называется ν - регулярным, если матрица $I-G(\nu,\Delta_N(\theta))$ имеет обратную.

Множество ν -регулярных разбиений $\Delta_N(\theta)$ обозначим через $\sigma_\nu([0,T],\theta)$. Аналогично лемме 2.1 из [18] устанавливается, что множество $\sigma_\nu([0,T],\theta)$ не пусто.

Предполагая, что $\Delta_N(\theta)\in\sigma_\nu([0,T],\theta)$, через $\{M_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta))\}$, $p,k=\overline{1,l}$ обозначим матрицу $[I-G(\nu,\Delta_N(\theta))]^{-1}$, где блочные элементы $M_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta))$ - квадратные матрицы размерности n. Тогда из (13) имеем

$$\mu_p=\sum_{k=1}^{l}M_{p,k}(\nu,\Delta_N(\theta))\left\{\sum_{j=1}^{N}V_{k,j}(\nu,\Delta_N(\theta))\lambda_j+F_k(\nu,\Delta_N(\theta))+g_k(\nu,\Delta_N(\theta),u)\right\}, \tag{14}$$

$p,k=\overline{1,l}$. В (12) вместо μ_k взяв правую часть (14) получим представление для $u_r(t)$ следующего вида

$$u_r(t)=\sum_{j=1}^{N}D_{r,j}^{\nu}(\Delta_N(\theta),t)\lambda_j+F_{\nu,r}(\Delta_N(\theta),t)+g_{\nu}^{A}(\Delta_N(\theta),u_r,t)+\sum_{k=1}^{l}E_{\nu,r}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{l}M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))\left[\sum_{r=1}^{N}V_{p,r}(\nu,\Delta_N(\theta))\lambda_r+F_p(\nu,\Delta_N(\theta))+g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)\right], \tag{15}$$

$t\in[t_{r-1},t_r)$. Откуда определив $\lim\limits_{t\to t_r-0}u_r(t),\ r=\overline{1,N}$ и подставив им соответствующие выражения в (6), (7), (8) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно введенных параметров λ_r, $r=\overline{1,N}$:

$$[B_0\lambda_1 + C_0 D_{N,1}(\Delta_N(\theta),T) + C_0\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,N}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),T)\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))V_{p,1}(\nu,\Delta_N(\theta))]\lambda_1 +$$

$$+C_0[I + D_{N,N}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),T) + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,N}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),T)\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))V_{p,N}(\nu,\Delta_N(\theta))]\lambda_N +$$

$$+C_0[\sum_{i=2}^{N-1} D_{N,i}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),T)\lambda + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,N}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),T)\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))\sum_{i=2}^{N-1} V_{p,i}(\nu,\Delta_N(\theta))]\lambda_i =$$

$$= d_j - C_0 F_{\nu,N}(\Delta_N(\theta),T) - C_0 g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_N,T) - C_0\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,N}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),T)\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))[F_p(\nu,\Delta_N(\theta)) + g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)], \qquad (16)$$

$$B_j[I + D_{r,r^+(j)}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),t_{r^+(j)}) + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(j)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(j)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))\times$$

$$\times V_{p,r^+(j)}(\nu,\Delta_N(\theta))]\lambda_{r^+(j)} + [B_j D_{r,r^+(j)+1}(\Delta_N(\theta),t_{r^+(j)+1}) + B_j\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(j)+1}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(j)+1})\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))V_{p,r^+(j)+1}(\nu,\Delta_N(\theta)) + C_j]\lambda_{r^+(j)+1} + B_j[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r^+(j)\\ i\neq r^+(j)+1}}^{N} D_{r,i}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),t_{r^+(j)}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(j)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(j)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r^+(j)\\ i\neq r^+(j)+1}}^{N} V_{p,i}(\nu,\Delta_N(\theta))]\lambda_i = d_j -$$

$$-B_j F_{\nu,r^+(j)}(\Delta_N(\theta),t_{r^+(j)}) - B_j g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_{r^+(j)},t_{r^+(j)}) - B_j\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(j)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(j)})\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))[F_p(\nu,\Delta_N(\theta)) + g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)], \qquad j=\overline{1,m}, \qquad (17)$$

$$[I + D_{r,r^-(s)}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),t_{r^-(s)}) + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(s)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(s)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))\times$$

$$\times V_{p,r^-(s)}(\nu,\Delta_N(\theta))]\lambda_{r^-(s)} + [D_{r,r^-(s)+1}(\Delta_N(\theta),t_{r^-(s)+1}) + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(s)+1}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(s)+1})\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))V_{p,r^-(s)+1}(\nu,\Delta_N(\theta)) - I]\lambda_{r^-(s)+1} + [\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r^-(s)\\ i\neq r^-(s)+1}}^{N} D_{r,i}^{(\nu)}(\Delta_N(\theta),t_{r^-(s)}) +$$

$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(s)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(s)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))\sum_{\substack{i=1\\ i\neq r^-(s)\\ i\neq r^-(s)+1}}^{N} V_{p,i}(\nu,\Delta_N(\theta)]\lambda_i =$$

$$-F_{\nu,r^-(s)}(\Delta_N(\theta),t_{r^-(s)}) - g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_{r^-(s)},t_{r^-(s)}) - \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(s)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(s)})\times$$

$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))[F_p(\nu,\Delta_N(\theta)) + g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)], \qquad s=\overline{1,N-m-1}. \qquad (18)$$

Соответствующую левой части системы (16), (17), (18) матрицу размерности $nN\times nN$ обозначим через $Q_\nu(\Delta_N(\theta))$ и запишем ее в виде

$$Q_\nu(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_\nu(\Delta_N(\theta)) - W_\nu(u,\Delta_N(\theta)), \quad \lambda \in R^{nN}, \tag{19}$$

где
$$F_\nu(\Delta_N(\theta)) = \Bigg(-d_0 + C_0 F_{\nu,N}(\Delta_N(\theta),T) + C_0\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,N}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),T)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))F_p(\nu,\Delta_N(\theta)), -d_1 + B_1[F_{\nu,r^+(1)}(\Delta_N(\theta),t_{r^+(1)}) + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(1)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(1)})\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))F_p(\nu,\Delta_N(\theta))],\ldots,-d_m + B_m[F_{\nu,r^+(m)}(\Delta_N(\theta),t_{r^+(m)}) +$$
$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(m)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(m)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))F_p(\nu,\Delta_N(\theta))], F_{\nu,r^-(1)}(\Delta_N(\theta),t_{r^-(1)}) +$$
$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(1)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(1)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))F_p(\nu,\Delta_N(\theta)),\ldots, F_{\nu,r^-(N-m-1)}(\Delta_N(\theta),t_{r^-(N-m-1)}) +$$
$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(N-m-1)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(N-m-1)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))F_p(\nu,\Delta_N(\theta))\Bigg),$$
$$W_\nu(u,\Delta_N(\theta)) = \Bigg(C_0 g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_N,T) + C_0\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,N}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),T)\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u), B_1[g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_{r^+(1)},t_{r^+(1)}) + \sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(1)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(1)})\times$$
$$\times\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)],\ldots, B_m[g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_{r^+(m)},t_{r^+(m)}) +$$
$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^+(m)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^+(m)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)], g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_{r^-(1)},t_{r^-(1)}) +$$
$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(1)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(1)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u),\ldots, g_\nu^A(\Delta_N(\theta),u_{r^-(N-m-1)},t_{r^-(N-m-1)}) +$$
$$+\sum_{k=1}^{l} E_{\nu,r^-(N-m-1)}(A(\cdot),\varphi_k(\cdot),t_{r^-(N-m-1)})\sum_{p=1}^{l} M_{k,p}(\nu,\Delta_N(\theta))g_p(\nu,\Delta_N(\theta),u)\Bigg).$$

Таким образом, если $\Delta_N(\theta)) \in \sigma_\nu([0,T])$, то для нахождения неизвестных параметров λ_r, $r=\overline{1,N}$ получим систему линейных алгебраических уравнений (19). Неизвестные функции $u_r(t), r=\overline{1,N}$ определяются из спе-циальной задачи Коши для систем интегро-дифференциальных уравнений (4) с начальными условиями (5).

Решение многоточечной краевой задачи с параметрами (4)-(8) найдем по следующему алгоритму:

Шаг 0: а) Предполагая, что при выбранных $\nu \in \mathrm{N}$, $\Delta_N(\theta)) \in \sigma_\nu([0,T])$ матрица $Q_\nu(\Delta_N(\theta))$: $R^{nN} \to R^{nN}$ обратима, начальное приближение по параметру $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)},\ldots,\lambda_N^{(0)}) \in R^{nN}$ найдем из систем линейных алгебраичес-ких уравнений $Q_\nu(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_\nu(\Delta_N(\theta))$, т.е. $\lambda^{(0)} = -[Q_\nu(\Delta_N(\theta))]^{-1}F_\nu(\Delta_N(\theta))$.

б) Используя компоненты вектора $\lambda^{(0)} \in R^{nN}$ и решая специальную задачу Коши (4), (5) при $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ находим функции $u_r^{(0)}(t)$, $r=\overline{1,N}$.

Шаг 1: а) Найденные $u_r^{(0)}(t)$, подставляя в правую часть (19), из уравне-ния $Q_\nu(\Delta_N(\theta))\lambda = -F_\nu(\Delta_N(\theta)) - G_\nu(u^{(0)}, \Delta_N(\theta))$ определим $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_N^{(1)})$.

б) Решая специальную задачу Коши (4), (5) при $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$, находим функции $u_r^{(1)}(t)$, $r = \overline{1, N}$.

Продолжая этот процесс на i - ом шаге алгоритма, получим пару $(\lambda^{(i)}, u^{(i)}[t])$, $i = 0,1,\ldots$. И т.д.

Введем следующие обозначения $\alpha = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t)\|$, $\beta = \max\limits_{t\in[0,T]}\max\limits_{s\in[0,T]}\left\|\sum\limits_{k=1}^{N}\varphi_k(t)\psi_k(s)\right\|$, $h_r = t_r - t_{r-1}$, $r = \overline{1,N}$, $L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) = \left(1 + \beta T h_r \sum\limits_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!}\right)\left\|[I - G(\nu, \Delta_N(\theta))]^{-1}\right\|$.

Достаточные условия сходимости предложенного алгоритма и существования единственного решения краевой задачи (1)-(3) устанавливает

Теорема 1. Пусть при некоторых $\nu \in \mathbb{N}$, $\Delta_N(\theta) \in \sigma_\nu([0,T], \theta)$, матрица $Q_\nu(\Delta_N(\theta)) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства:

$$\left\|[Q_\nu(\Delta_N(\theta))]^{-1}\right\| \le \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)), \tag{20}$$

$$\xi_\nu(\Delta_N(\theta)) = \max_{r=\overline{1,N}}\frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!}L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) < 1, \tag{21}$$

$$q_\nu(\Delta_N(\theta)) = \gamma_\nu(\Delta_N(\theta))\max(1, \max_{i=\overline{1,N-1}}\|B_i\|, \|C_0\|)\frac{\xi_\nu(\Delta_N(\theta))}{1 - \xi_\nu(\Delta_N(\theta))}\times$$

$$\times\max_{r=\overline{1,N}}\left\{(\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha h_r)^j}{\nu!} + T\beta h_r\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!})L_r(\nu, \Delta_N(\theta))\right\} < 1. \tag{22}$$

Тогда алгоритм сходится и краевая задача (1) - (3) имеет единственное решение.

Доказательство. При предположениях теоремы из нулевого шага алгоритма определим и оценим $\lambda^{(0)}$:

$$\left\|\lambda^{(0)}\right\| = \max_{r=\overline{1,N}}\left\|\lambda_r^{(0)}\right\| \le \left\|[Q_\nu(\Delta_N(\theta))]^{-1}\right\|\left\|F_\nu(\Delta_N(\theta))\right\| \le \gamma_\nu(\Delta_N(\theta))\left\|F_\nu(\Delta_N(\theta))\right\|.$$

Неравенство (21), согласно теореме 2.1 из [18] обеспечивает существование единственного решения специальной задачи (4), (5). При этом выполняется неравенство

$$\left\|u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 = \max_{r=\overline{1,N}}\sup_{t\in[t_{r-1},t_r)}\left\|u_r^{(0)}(t)\right\| \le \max_{r=\overline{1,N}}\left\{\left[\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!}\right]\times\right.$$

$$\left.\times L_r(\nu, \Delta_N(\theta))\left\|\lambda^{(0)}\right\| + \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!}\|f\|_1 h_r L_r(\nu, \Delta_N(\theta)) + \xi_\nu(\Delta_N(\theta))\left\|u^{(0)}[\cdot]\right\|_2\right\}.$$

Отсюда и из неравенства (21) следует, что

$$\left\|u^{(0)}[\cdot]\right\|_2 \le \frac{1}{1 - \xi_\nu(\Delta_N(\theta))}\max_{r=\overline{1,N}}\left\{\left[\sum_{j=1}^{\nu}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r\sum_{j=1}^{\nu-1}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!}\right]\times\right.$$

$$\left.\times L_r(\nu, \Delta_N(\theta))\left\|\lambda^{(0)}\right\| + \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h_r)^j}{j!}\|f\|_1 h_r L_r(\nu, \Delta_N(\theta))\right\}.$$

По алгоритму определим $\lambda^{(1)}$ и оценим $\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\|$:

$$\left\|\lambda^{(1)} - \lambda^{(0)}\right\| \le \gamma_\nu(\Delta_N(\theta))\left\|W_\nu(u, \Delta_N(\theta))\right\| \le \gamma_\nu(\Delta_N(\theta))\max(1, \max_{i=\overline{1,N-1}}\|B_i\|, \|C_0\|)\times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} \frac{L_r(\nu,\Delta_N(\theta))}{1-\xi_\nu(\Delta_N(\theta))} \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] \times \right.$$

$$\left. \times L_r(\nu,\Delta_N(\theta)) \left\| \lambda^{(0)} \right\| + \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \|f\|_1 h_r L_r(\nu,\Delta_N(\theta)) \right\}.$$

Продолжая итерационный процесс, на $i-$ом шаге находим последова-тельность пар $(\lambda^{(i)}, u^{(i)}[t])$, где $\lambda^{(i)} \in R^{nN}$, $u^{(i)}[t] \in C([0,T],\Delta_N(\theta),R^{nN})$

$$\left\| u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot] \right\|_2 \le \frac{1}{1-\xi_\nu(\Delta_N(\theta))} \times$$

$$\times \max_{r=\overline{1,N}} \left\{ \left[\sum_{j=1}^{\nu} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} + T\beta h_r \sum_{j=0}^{\nu-1} \frac{(\alpha h_r)^j}{j!} \right] L_r(\nu,\Delta_N(\theta)) \right\} \left\| \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)} \right\|. \tag{23}$$

Из уравнения (19) вытекает

$$\left\| \lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)} \right\| \le \gamma_\nu(\Delta_N(\theta)) \max(1, \max_{i=\overline{1,N-1}} \|B_i\|, \|C_0\|) \max_{r=\overline{1,N}} \frac{(\alpha h_r)^\nu}{\nu!} L_r(\nu,\Delta_N(\theta)) \left\| u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot] \right\|_2$$

Подставляя вместо $\left\| u^{(i)}[\cdot] - u^{(i-1)}[\cdot] \right\|_2$ правую часть неравенства (23) получим

$$\left\| \lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)} \right\| \le q_\nu(\Delta_N(\theta)) \left\| \lambda^{(i)} - \lambda^{(i-1)} \right\|, \quad i = 1,2,\ldots. \tag{24}$$

В силу условия $q_\nu(\Delta_N(\theta)) < 1$ и неравенств (23), (24) последовательность $\lambda^{(i)}$ сходится к λ^*, последовательность систем функции $u^{(i)}[t]$ по норме пространства $C([0,T],\Delta_N(\theta),R^{nN})$ сходится к $u^*[t]$. Тогда функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = \overline{1,N}$, $x^*(T) = \lambda_N^* + \lim_{t \to T-0} u_N^*(t)$ будет решением задачи (1)-(3).

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема показывает, что условия теоремы 1 не только достаточны, но и необходимы для однозначной разрешимости задачи (1)-(3).

Теорема 2. Краевая задача (1)-(3) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда существуют $\nu \in \mathrm{N}$, $\Delta_N(\theta) \in \sigma_\nu([0,T],\theta)$, при которых матрица $Q_\nu(\Delta_N(\theta)) : R^{nN} \to R^{nN}$ обратима и выполняются неравенства (20), (21), (22) теоремы 1.

Доказательство с незначительными изменениями аналогично доказа-тельству теоремы 3.2 из [18].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equation. - Singapore: World Scientific, 1989.

[2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore: World Scientific, 1995.

[3] Luo Z., Nieto J.J., Shen J.H. Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations // J. Math. Anal. Appl. -2007. - 325. - P. 226-236.

[4] He Z., He X. Monotone iterative technique for impulsive integro-differential equations with periodic boundary conditions, // Comput. Math. Appl. - 2004. - 48. - P. 73-84.

[5] Liang J., Liu Y., Liu Z. A class of BVPS for first order impulsive integro-differential equations // Applied Mathematics and Computation. - 2011. - 218. - P. 3667-3672.

[6] Wang X., Zhang J. Impulsive anti-periodic boundary value problem for first order integro-differential equations //Journal of Computational and Apllied Mathematics. - 2010. - 234. - P. 3261-3267.

[7] Nieto J.J., Rodrigues-Lopez R. New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications // J. Math. Anal. Appl. - 2007. - 328, - P. 1343-1368.

[8] Luo Z. , Nieto J.J. New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations // Nonlinear Anal. -2009. - 70. - P. 2248-2260.

[9] Lihong Zhang, Boundary value problem for first order impulsive functional integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. -2011. - 235. -P. 2442-2450.

[10] Xiaohuan Wang, Jihui Zhang, Impulsive anti-periodic boundary value problem of first-order integro-differential equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. -2010. - 234. - P.3261-3267.

[11] Li J., Luo Z., Yang X. Maximum principles for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations // Nonlinear Anal. TMA. - 2010. - 72. - P. 3837-3841.

[12] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation // //Computational mathematics and mathematical physics, - 2010. - 50, - №7. - P. 1150-1161.

[13] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations //Differential equations, - 2010. - 46. - № 4. - P. 553-567.

[14] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations //Differential equations, - 2013. - 49. - № 9. - P. 1-16.

[15] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations //Ukranian Mathematical journal, - 2015. - 66. -№ 8. - P. 1200-1219.

[16] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation //Computational mathematics and mathematical physics, - 2013. - 53. - № 6. - P. 736-758.

[17] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations //Journal of computational and applied mathematics, -2016. -294. - P. 342-357.

[18] Джумабаев Д.С., Бакирова Э.А. Разрешимость линейной краевой задачи для интегро-дифференциальных уравнений с вырожденным ядром //Нелінійні коливання. - 2015. -18. № 4. - С. 489-506.

[19] Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs //Differential equations, - 2015. - 51. - № 9. - P. 1180-1196.

[20] Dzhumabaev D.S. Conditions for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations //Computational mathematics and mathematical physics, - 1989. - 29. - № 1. - P. 50-66.

REFERENCES

[1] Lakshmikantham V., Bainov D.D., Simeonov P.S. Theory of Impulsive Differential Equation. Singapore, World Scientific, **1989.**

[2] Samoilenko A.M., Perestyuk N.A. Impulsive Differential Equations. Singapore, World Scientific, **1995.**

[3] Luo Z., Nieto J.J., Shen J.H. Impulsive periodic boundary value problems of first-order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.,* **2007**, 325, 226-236.

[4] He Z., He X. Monotone iterative technique for impulsive integro-differential equations with periodic boundary conditions. *Comput. Math. Appl.,* **2004**, 48, 73-84.

[5] Liang J., Liu Y., Liu Z. A class of BVPS for first order impulsive integro-differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* **2011**, 218, 3667-3672.

[6] Wang X., Zhang J. Impulsive anti-periodic boundary value problem for first order integro-differential equations. *Journal of Computational and Apllied Mathematics,* **2010,** 234, 3261-3267.

[7] Nieto J.J., Rodrigues-Lopez R. New comparison results for impulsive integro-differential equations and applications, *J. Math. Anal. Appl.* **2007**, 328, 1343-1368.

[8] Luo Z. , Nieto J.J. New results for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations. *Nonlinear Anal.,* **2009**, 70, 2248-2260.

[9] Lihong Zhang, Boundary value problem for first order impulsive functional integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **2011**, 235, 2442-2450.

[10] Xiaohuan Wang, Jihui Zhang, Impulsive anti-periodic boundary value problem of first-order integro-differential equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **2010**, 234, 3261-3267.

[11] Li J., Luo Z., Yang X. Maximum principles for the periodic boundary value problem for impulsive integro-differential equations. *Nonlinear Anal.,* **2010,** 72, 3837-3841.

[12] Dzhumabaev D.S. A method for solving the linear boundary value problem for an integro-differential equation. *Computational mathematics and mathematical physics,* **2010,** 7, 1150-1161 (in Eng).

[13] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the well-posedness of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations. *Differential equations,* **2010**, 4, 553-567.

[14] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Criteria for the unique solvability of a linear two-point boundary value problem for systems of integro-differential equations. *Differential equations,* **2013**, 9, 1-16.

[15] Dzhumabaev D.S. Necessary and sufficient conditions for the solvability of linear boundary value problems for the Fredholm integro-differential equations. *Ukranian Mathematical journal,* **2015**, 8, 1200-1219.

[16] Dzhumabaev D.S. An algorithm for solving a linear two-point boundary value problem for an integrodifferential equation. *Computational mathematics and mathematical physics,* **2013**, 6, 736-758.

[17] Dzhumabaev D.S. On one approach to solve the linear boundary value problems for Fredholm integro-differential equations. *Journal of computational and applied mathematics,* **2016**, 294, 342-357.

[18] Dzhumabaev D.S., Bakirova E.A. Razreshimost lineinoi kraevoi zadachi dlya integro-differentsialnyich uravnenii s vyirozhdenyim yadrom. *Nelineinyie kolebaniya,* **2015**, 4, 1209-1221 (in Russ).

[19] Dzhumabaev D.S. Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs. *Differential equations,* **2015.** 9, 1180-1196.

[20] Dzhumabaev D.S. Conditions for the unique solvability of a linear boundary value problem for an ordinary differential equations. *Computational mathematics and mathematical physics,* **1989**, 1, 50-66.

ИМПУЛЬС ӘСЕРІ БАР ФРЕДГОЛЬМ ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН СЫЗЫҚТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ БІРМӘНДІ ШЕШІЛІМДІЛІГІНІҢ КОЭФФИЦИЕНТТІК БЕЛГІЛЕРІ

Д.С. Жұмабаев, Э.А. Бакирова

БҒМ Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Түйін сөздер: шеттік есеп, шешілімділік, интегралдық-дифференциалдық теңдеулер, импульстік әсер.

Аннотация. Кесіндінің бекітілген нүктелерінде импульстік әсерге ұшырайтын азғындалған өзегі бар Фредгольм интегралдық- дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есеп зерттеледі. Интегралдық- дифференциалдық теңдеулер қарастырылатын кесінді импульс әсері бар нүктелерде бөліктерге бөлінеді, ішкі интервалдардың бастапқы нүктелеріндегі мәндері ретінде алынған қосымша параметрлер енгізіледі де бастапқы шеттік есеп параметрі бар пара-пар көпнүктелі шеттік есепке келтіріледі. Параметрлердің бекітілген мәндерінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі туындайды. Пара-пар интегралдық теңдеулер жүйесінде ν ішкі алмастыруларын пайдалана отырып арнайы Коши есебінің кейіптемесі алынады. Бастапқы теңдеудің интегралдық мүшесінің өзегінің азғындалғанын пайдаланып арнайы Коши есебінің шешімін табуға мүмкіндік беретін сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі құрылады. Егер құрылған жүйенің матрицасы қайтарымды болса, онда бөлктеу ν - регулярлі бөліктеу деп аталады. Параметрлері көпнүктелі шеттік есептің шешімін табудың алгоритмі ұсынылды. Алгоритмнің әрбір қадамы екі пункттен тұрады. Алгоритмнің бірінші пунктінде енгізілген параметрлерге қатысты сызықты алгебралық теңдеулер жүйесі шешіледі. Алгоритмнің екінші пунктінде параметрлердің табылған мәндерінде интегралдық- дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін арнайы Коши есебі шығарылады. Қарастырылып отырған шеттік есептің бірмәнді шешілімділігін қамтамасыз ететін ұсынылған алгоритмнің бар болуы мен жинақталуының шарттары алынады. Бастапқы берілімдер терминінде импульстік әсерге ұшырайтын азғындалған өзегі бар Фредгольм интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептің бірмәнді шешілімділігінің қажетті және жеткілікті шарттары тағайындалды. Алгоритм мен зерттеліп отырған есептің бірмәнді шешілімділігі туралы теорема дифференциалдық бөлігінің фундаменталдық матрицасын қолдануды талап етпейді.

Поступила 15.03.2016 г.